



# 淺談數學特色課程

許志農 教授  
國立臺灣師範大學數學系

## 壹、前言

十二年國教的開展，數學特色課程成為每個學校必須規劃與實施的數學選修課程。如果必修的數學課本是屬於普及課程，每位學生都要學習的內容，那麼無疑地，選修的數學特色課程就屬於小眾課程，開給對數學有興趣的學生，而其實施方式與內容也可以依各校的條件有所差異。照理說，數學特色課程不應把重點放在「加強數學內容的縱深，或增加數學知識的廣度」；而是應著重於「如何活用數學與欣賞數學，特別是跨領域的橫向應用與欣賞。」這裡引用偉大的數學科普作家馬丁·加德納的兩段文字：

“我一向覺得引發青少年學生動機的最佳方法是給他們做趣味的問題——就是有強烈遊戲意味的問題。他們將樂於去做而且從其中學到有意義的數學。我想，趣味數學的價值愈來愈受到教師及教科書作者的重視。”

馬丁·加德納

“趣味數學和嚴肅數學之間的界限是很模糊的……40年來，我一直在竭盡全力說服教育工作者，趣味數學應該納入正規的教學課程。在教學中應該定期介紹趣味數學，這種方式能引發學生對數學的興趣。但到目前為止，這方面的改革還沒有什麼進展。”

馬丁·加德納

從這兩段箴言可以清楚的瞭解：數學特色課程應該以趣味數學為選材標準。然而，將數學簡單化、通俗化、趣味化與藝術化的數學特色課程也並不是只開給對數學有興趣的學生修的，更大的可能是吸引能夠領略到數學的形式或形態之美的學生修的：

“並不是非得成為畫家才能欣賞美術作品，也並不是非得成為音樂家才能欣賞美妙的音樂。我們想要證明的是，一個人不必成為數學家，也能夠領略到數學的形式與形態之美，甚至是一些抽象的概念。”

耶谷提耳·金斯伯格 (Jekuthiel Ginsburg)

數學特色課程的開展可謂對數學感興趣的學生搭起一座橋，開啟數學學習典範新的扉頁，達到高中數學課程目標。本文是要介紹筆者於從事數學教育計畫服務或指導研究生時所開發設計的數學特色課程。為了方便起見，把內容歸類為以下六大類：「艾雪鑲嵌」、「拼圖美學」、「數學遊戲」、「勾股殿堂」、「無字證明」、「數學趣題」等。



## 貳、範例

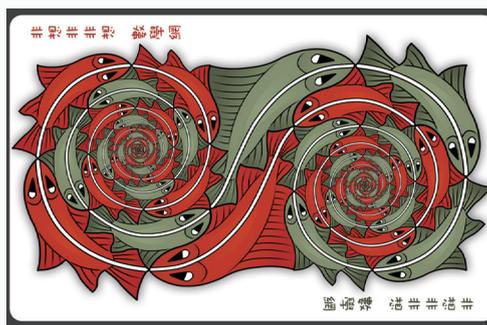
### 一、融合藝術與數學的「艾雪鑲嵌」：

《艾薛爾鑲嵌藝術》是筆者與我的研究生所開發設計的一套數位產品，基本上以Adobe的Flash軟體設計而成。主要是用動畫的影片來描述與說明荷蘭版畫家艾薛爾（M. C. Escher）一生所畫137幅平面鑲嵌作品的數學原理。沈玫好老師是設計與開發這些數位產品的第一位研究生，她設計了**教學版、拼圖、著色與工作單**，我的後面學生（瑞甫、雅婷、欣樺、勁緯、章瑋、國書與肇嘉等）就根據玫好開發的版式，將艾薛爾的137幅平面鑲嵌作品陸續做出數位產品。艾薛爾鑲嵌藝術是跨界的結合，它揉合了數學、美術、音樂與電腦科技，算是一種數學文化創意產業。民國103年2月27日至6月2日，故宮的《錯覺藝術大師-艾雪的魔幻世界畫展》中，我們幫忙設計四幅艾薛爾的鑲嵌版畫動畫，一起在這次展覽中呈現；而民國103年10月至104年1月，高雄美術館接續展《艾雪的魔幻世界畫展》，我們亦幫高美館的艾雪展製作六支一分鐘的艾雪鑲嵌影片及設計一個奇異蜥蜴鑲嵌杯墊，也廣受歡迎。

我們開發的這些數位產品與工作單可以從艾薛爾鑲嵌藝術光碟片取得或者到筆者的個人網站《非想非非想數學網》觀看，網址為<http://pisa.math.ntnu.edu.tw/now-exhibition/escher>



▲圖1

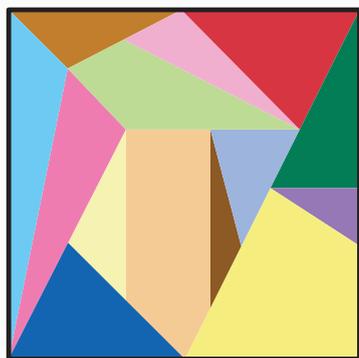


▲圖2

### 二、具文化特色的「拼圖美學」：

在加州史丹福大學同步輻射實驗室，古文物復原專家運用紫外光與數位圖像電腦處理技術，讓阿基米德發明的一道遊戲重現天日。在1998年10月30日，《紐約時報》頭版登了一則報導：紐約佳士得拍賣會上，有一本其貌不揚的古書，以美金200萬的高價成交。從外表看，這本書就像是中世紀某位修士的祈禱書，磨損不堪，布滿燒焦、水漬、發霉的痕跡。然而在祈禱文的下方，隱約可見幾乎被擦拭掉的、傳抄自古代科學家阿基米德的抄本。這祈禱書是教士約翰·麥隆納斯於西元1229年4月14日抄寫，想在耶穌復活周年日，當作禮物獻給教會。羊皮紙從古代中世紀開始使用，由於價值極為貴重，通常經過皮面刮削後，重新書寫，被稱為再生羊皮紙，麥隆納斯將祈

禱文書寫在再生羊皮紙上。透過高科技的掃描，祈禱書最後一頁原本是阿基米德稱為《胃痛拼圖》的一篇文章。該文章並非談身體的疼痛，而是在論述一道組合學的問題，而且附了一個正方形的插圖：



▲圖3

在這再生羊皮書上，阿基米德所給的答案是17152種！這答案經過電腦科學家比爾·卡特勒驗證無誤，卡特勒也指出：將旋轉或者鏡射視為同一種的話，仍然有536種不同的拼法。事實上，幾位鼎鼎有名的數學家，如隆·格拉罕及金芙蓉夫婦檔，都只靠紙與筆就算出這個數字。

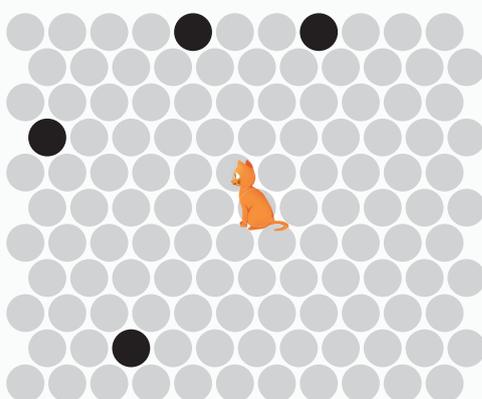
### 三、老少咸宜的「數學遊戲」：

在1986年，臺灣舉辦「電腦冠軍挑戰人腦」的國際大賽，應昌期圍棋教育基金會提供百萬美元獎金，徵求打敗人腦的電腦圍棋程式，一直到2000年，都歡迎對人工智慧有興趣的朋友，加入電腦圍棋的行列。後來由於人工智慧的發展無重大突破，這項競賽就停辦了。然而，在1997年5月，專門用以分析西洋棋的超級電腦深藍（Deep Blue，IBM 開發）擊敗西洋棋世界冠軍卡斯巴羅夫（Garry Kasparov）。在2016年3月9日Google人工智慧AlphaGo和南韓圍棋大師李世乭的人機對決引發了全球關注，首戰AlphaGo獲勝。

上述故事告訴我們：人工智慧的重要性，或許人類的未來會被人工智慧所包圍，因此，學會寫些或瞭解人工智慧是一項重要的課程。圍貓遊戲是心理學家所設計出來的一道屬於人工智慧的數學遊戲，遊戲背景是平面上放置許多排列整齊的圓圈，一隻貓位於正中央的圓圈上，而有少許的圓圈是黑色。這是一場圍貓者與貓的鬥智遊戲，圍貓者每次可以點選一個圓圈讓它變成黑色，而貓每次必須移動到鄰近還尚未變成黑色的圓圈上。當貓被黑色圓圈圍住時，貓就被捉擒了，但若貓跑出所有的圓圈外，則圍貓失敗。這遊戲是心理學家發明的，心理學家把貓視為需要接受



輔導的對象（如叛逆的學生），而圍貓的人是輔導人員（如學校的導師），而黑色圓圈是貓的朋友，輔導人員或學校導師必須透過這些朋友的幫忙，將貓咪圍起來才算輔導成功。

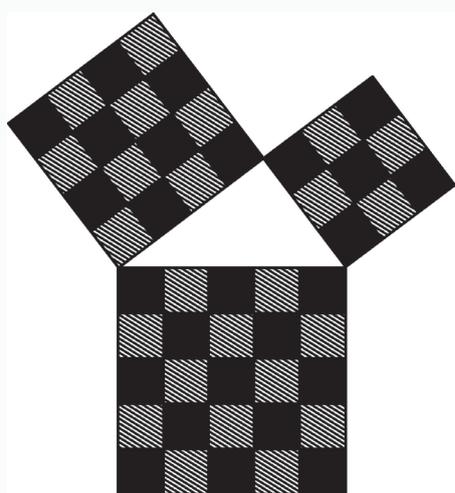


▲圖4

#### 四、廣為人知的「勾股殿堂」：

在《勾股藝術殿堂》裡，我們將所蒐集到有關勾股定理的證明，經過中文化與一致化後呈現在這專欄內。一百年前，美國數學教師魯米斯蒐集到371個來自世界各地，縱貫古今的勾股定理證明，並寫成《勾股定理》一書，而網頁興起之後，Alexander Bogomolny 在自己的網頁上蒐集了111個勾股定理的證明。這些是我及我的學生開始工作的起點。

下圖中，左圖是希臘為紀念《幾何原本》上的勾股定理證明所發行的郵票圖形，右圖是我的美工安蓉所畫的措姑娘勾股圖。



▲圖5



▲圖6

三國時代魏國數學家劉徽在《九章算術注》裡，利用「割補術」作了「青朱出入圖」來證明勾股定理，如下圖所示：

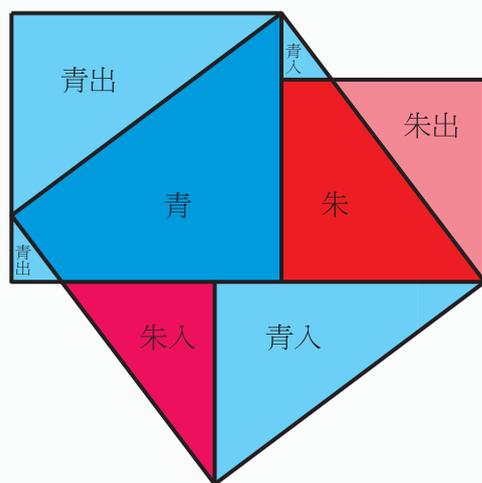


圖7 劉徽的「青朱出入圖」

劉徽的割補術被中國數學家吳文俊稱之為「出入相補原理」，它指的是「一個平面圖形由一處移至他處（可以透過平移，旋轉及翻面來移動），面積不變。又若把圖形分割成若干塊，那麼各部分面積和等於原來圖形的面積，因而圖形移置前後諸面積間的和、差有簡單的相等關係。立體的圖形也是這樣。」這種的推理方式，從劉徽之後一直是中國古代數學推導圖形面積（或體積）公式的方法。

特別地，當勾股定理的證明中，只用到「以盈補虛、損廣補狹、出入相補」時，這個證明往往會產生有趣的拼圖問題，我們把這種證明叫「勾股拼圖式證明」。例如，劉徽「青朱出入圖」的勾股證明會形成下圖這道有趣的拼圖：

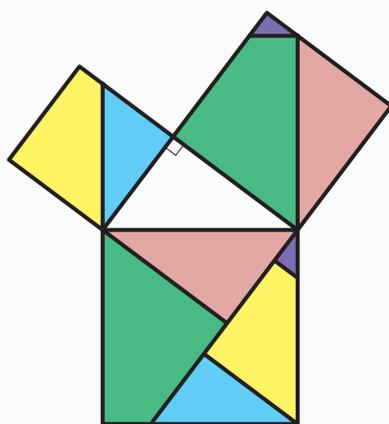


圖8



勾股拼圖式證明的證明方式就是把兩股所圍的正方形，透過適當的切割，然後再將切割所得的拼塊貼滿斜邊所圍出的正方形。這類形的證明可以發展成拼圖的益智遊戲，在已知的五六百個勾股定理的證明中，板橋高中蘇章瑋老師把所有拼圖式證明都用Flash軟體，設計成28個拼圖遊戲，希望這些拼圖遊戲是老少咸宜的益智遊戲，而且有些勾股拼圖遊戲的封面還設計了一分鐘的勾股表演，表演內容是取自勾股定理的一些故事。

### 五、按圖索驥，不證自明的「無字證明」：

L. A. Steen 在MAA上寫道：「作為一名教師，我經常督促學生記住這些蘊涵有關鍵數學關係或定理本質的幾何圖。對多數人而言，在證明過程中，視覺的記憶通常比直線性的記憶更為有效果。此外，一個內蘊有豐富關係的有品質圖表，它內含有真正的數學等著被我們認知與語言表達。因此，把此作為一個策略來幫助學生學習數學，無字證明往往比用文字證明更準確。」

數學的證明是一種說服的過程，而近年來，在西方的數學教育文獻裡，不時可見所謂「無字證明」(Proof without Words)的範例，例如：

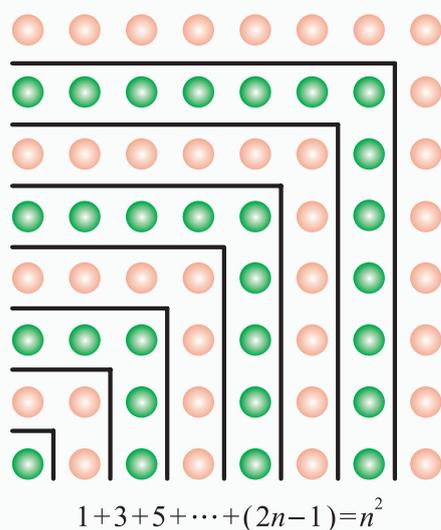


圖9

在高中，這等式通常是用數學歸納法來證明，過程只是符號的操演，但「無字證明」至少可以當作一種輔助的工具，賦予式子較具體的解釋，進而說服學生接受它們的正確性。

所謂「無字證明」或叫做「圖說一體、不證自明」是指將數學公式或不等式用簡單、有創意且易於了解的幾何圖形來呈現的意思。「無字證明」並不是不需要文字說明就可以完全理解，而是僅需極少的解釋就能說服的意思。愈是好的「無字證明」，所需的輔助文字愈少。「無字證明」並不是新產物或新的名詞，回想國中時，畢氏定理的幾何證明就有點像無字證明的模式。

至於「無字證明」為何經常用幾何圖形來呈現呢？這可用華羅庚的數學詩「數缺形時少直觀，形少數時難入微，數形結合百般好，隔離分家萬事休。」來說明，這數學詩道盡數學領域裡的「代數」與「幾何」相結合的重要性。

下圖是周伯欣在2014年11月6日晚上，躺在床上準備就寢時想到有關「算幾不等式」的「無字證明」，他將此無字證明投稿在《數學傳播》上：

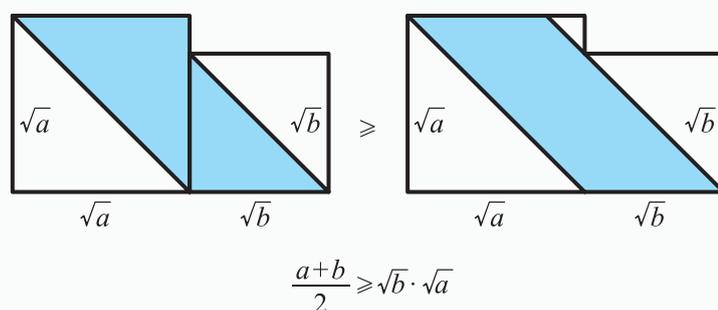


圖10

《十牛圖》是宋朝廓庵禪師所寫有關「禪宗修行、求法」的書，一共有十章，後來他又寫了十首小詩來闡釋這十章的精神，最後索性只畫十張圖讓讀者體會整本書所要傳遞的佛境。這十張圖就是有名的十牛圖，廓庵認為視覺的圖能勝過嘴裡吟唱的詩，而詩也會勝過文字所堆砌出來的文章。



圖11 第六圖：騎牛歸家

我經常把「無字證明」比喻為數學裡的「十牛圖」。

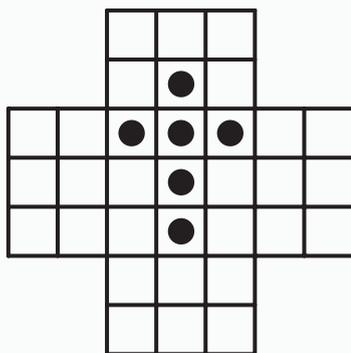


## 六、寓數學於娛樂的「數學趣題」：

誠如馬丁·加德納說的：“我一向覺得引發青少年學生動機的最佳方法是給他們做趣味的問題——就是有強烈遊戲意味的問題。他們將樂於去做而且從其中學到有意義的數學。我想，趣味數學的價值愈來愈受到教師及教科書作者的重視。”數學趣題是引起學生學習數學的觸媒或催化劑。蒐集數學趣味，把它改寫成可以再課堂上使用的教案，無疑是另一種特色課程。我們就以孔明棋或單人跳棋為例，提出底下的簡短教案。

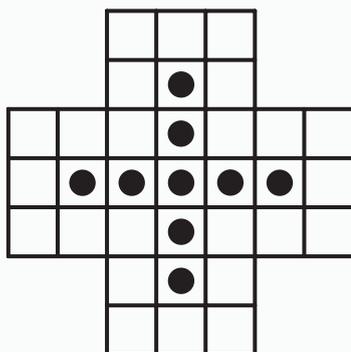
首先，在棋盤上擺放若干顆棋子。然後，讓棋子跳到它相鄰棋子旁邊的空位上，而這顆被跳過的棋子就拿掉，但只能上下跳或左右跳，不能斜著跳。遊戲中的每一步棋都要用跳的。如果跳到後來，沒有一顆棋子可以跳，遊戲就結束。一般都會要求結束時，棋盤上只剩一顆棋子，而且這顆棋子最後能跳至棋盤的中央最完滿。

當擺放的棋子呈現下圖分布時，有一個專門名字，叫拉丁十字。這拉丁十字是可以跳到只剩一顆的，關鍵在於從那顆棋開始跳，試試看吧！



▲圖12

另一個有趣的排列叫希臘十字，它也可以跳到剩一顆喔！



▲圖13

1716年，德國數學家萊布尼茲在一封給朋友的信裡寫到：「最近我常玩一種單人跳棋，覺得很有意思。不過我的玩法和一般人剛好相反。他們是把一顆棋子跳過另一顆，到隔壁的空位，被跳過的棋子就拿掉。因此，棋盤上的棋子越來越少，最後只剩一顆。但我認為建設比破壞更好玩。開始的時候，棋盤上只放一顆棋子，當它跳過一個空位，就在空位上擺一顆棋子。這樣，我們就可以問自己，能不能跳出這樣或那樣的圖形。如果能破壞某個圖形，當然應該也能重建它。你或許會問，這樣做有什麼意義。我只能解釋，是為了增加自我的創造力。我們若想掌握創造事物的方法，就必須經過合理的學習。」

## 參、結語

在前節範例說明的六大類裡，各列舉了一道精心設計的數學特色課程範例，希望這範例能達到拋磚引玉的功效，讓從事數學教育的工作者或中學數學老師能開發出更多具有特色的數學活課程。



# 數學團隊解謎課程～GRO

董涵冬 老師  
臺北市立大直高級中學

## 壹、前言

多元選修課程提供學生能夠依興趣、性向、能力與需求開設課程，就教師端而言，許多在部定課程當中沒有時數、沒有空間而沒有機會操作的課程，在多元選修課程都有進行的機會。例如：就數學課程而言，配合課本的三角函數課程，即可安排實地的測量課程；結合部定的機率期望值課程，即可規劃機率遊戲競賽課程；而平面與空間系列，亦可加入許多動手操作的元素…等等。大直高中數學科近十年來，皆持續舉辦結合遊戲性質的數學週系列活動，例如：闖關活動、戲說數學家、密室脫逃…等等。遊戲本身的本質，就是數學的邏輯，故希望藉由遊戲的進行，培養學生數學邏輯的思維與團隊合作的精神。

另外，在數學的教學過程中，筆者發現學生對數學的理解與表達並沒有同步開發的。常常學生的表現已經了解某項觀念，但是實際上無法完整的表達出來，這跟現今教育環境的評量有很大的關係。數學科一直以來都很偏重紙筆測驗，然而，若學生能夠運用數學語言，完整表達數學概念，在理解的層面又更上一個層次。

所以這個GRO課程希望透過數學與解謎遊戲的設計與結合，除了藉由遊戲提高學生學習數學之動機，使學生了解數學與生活中的應用與連結並增廣數學概念，補足高中課程中沒有提及之數學知識外，更希望透過在解謎的過程中，團隊的溝通、概念精準的表達，以加強數學語言應用。

## 貳、規劃課程動機與過程

近年來，各校皆辦理各式數學課程活動，這些課程大多由各校數學科教學團隊各自設計，而考量到設計的時間、人力和教材等成本，這些限制往往無法讓許多課程有太多發揮的空間，而各校發展出很多很棒的課程只用在自己學校的學生身上也有點可惜。因此，我們聚集了10個學校的數學老師，花費近半年時間討論製作及修正，在各校老師想法及專長的發揮下，設計了這項數學解謎課程活動：GRO。

此活動以現在班級人數約30到40人左右均可全體參與；老師若熟習活動流程後，只需1至2名老師便可全程帶領；活動進行期間，需要學生進行討論及交流，教師在開場說明後，從旁協助並檢核學生討論結果即可。

此課程所運用的數學知識包含國高中課內的數學概念，亦有課外的趣味數學，內容多元且廣泛，若遇到學生有先備知識的問題，可透過會場海報及學習單等方式進行協助。

## 參、課程教案分享

【解謎課程活動的進行流程一覽表】

主題	進行說明	時間	教學資源
一、進場	學生進入活動會場，領取識別證後就座	5分鐘	識別證
二、開場	教師播放開場影片	1:19	影片
三、規則說明	教師播放活動開場簡報，說明遊戲進行目標	5分鐘	Prezi活動開場簡報
四、活動進行	學生進行解謎 教師檢核學生解謎之成果	約45分鐘	海報 各主題教具
五、結尾	解謎時間結束，教師進行結尾、課程說明，發放學習單	5分鐘	學習單

### 一、進場：

學生在一開始進入活動會場時，就會拿到一張識別證，這張識別證是活動進行期間學生的「身分證」，正面有他的代號和身分，如下圖，這位學生在活動期間的角色為奈及利亞居民。



圖14



識別證的背面有著該角色所知道的知識或是擁有的道具，像這位奈及利亞的居民身上就有熱能供應器的某四塊模組（這四塊模組會裝在袋子、直接夾在名牌上）。

全班每一位同學拿到的名牌內容皆不相同，但是透過彼此的分享與溝通，他們慢慢可以找到需要他們知識的那個人，或是需要解任務的學生可以找到身上有道具的同學幫忙。每個人的識別證上的知識、任務、道具皆來自於不同洲的問題。例如：這位密碼學家名牌上的知識分別用途說明如下表：

<b>104 學年度臺北市高級中學 跨校聯合數學週活動識別證</b>  	
	<b>行動代號：C05</b>
	<b>密碼學家</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>☛ 5 個正方形的農田可以連結為一區農地</li> <li>☛ 任務 Af1：找出施法效果最好的地方與所在國家</li> <li>☛ 解開儀表板密碼的關鍵之一：跟船製造的年份、月份有關</li> </ul>

▲圖15

名牌後文字	說明
解開儀表板密碼的關鍵	此資訊呼應他的角色。 儀表板是用來解決大洋洲淹水的問題。
5塊農田可連結成一區農地	農田知識是用來解決亞洲的傳染病問題。
就是找出施法效果好的地方	施法效果是用來解決非洲的傳染病問題。

從這個表格可以清楚的看見，這個學生被賦予的任務或是擁有的道具，不一定來自同一洲，他必須透過跟其他同學的互動與交流，才能知道這些資訊正確對應到哪一洲。也有其他學生拿到的識別證不一定有任務，但是可能會有一些解任務用的教具。

## 二、開場：

當學生領完名牌就座後，任課老師即可搭配影片進行活動故事的說明，故事如下：

歐洲著名生化科技公司（Bust' Chd NYM）為了推銷自己公司的各式產品，他們設計了一系列針對全球性的天災人禍，企圖獲得大家的肯定與重視……

Bust' Chd NYM在地球上空排放了許多放射線物質導致環境氣候劇烈的變遷，歐洲從此進入了冰河時期；大洋洲也因為氣候的劇烈變化，赤道區域的海平面漸漸上升，海水很快地就會漫過大洋洲；另外空氣中的放射物質隨著雨水的傾瀉，亞洲與非洲等地的居民也開始爆發了傳染病的

大流行。

由我們這些老師組成的全球救難組織（Global rescue organization，簡稱GRO），委託各方專家，也就是各位同學，分別解決歐洲、大洋洲、非洲、亞洲處理各地要面臨的棘手問題。

### 三、規則說明：

接著任課老師搭配投影片進行遊戲說明，包括遊戲規則、大家的身分、還有時間限制等等。當遊戲規則說明完畢後，就可以按下倒數計時鍵，讓學生開始進行解謎。

### 四、活動進行：

活動一開始，學生很容易群龍無首，不知道要做什麼，不過，慢慢的班上會有一些領導人物出來統整大家手邊的資訊、再適時的把工作分配下去（通常默契良好的班級可在約10分鐘後理出頭緒，即使狀況較慢的班級，也能在約20分時進入狀況）。

接著，當各位同學將對的資訊湊在一起、解決完他們的任務時，必須到教室前方找老師確認他們解出的方法是否能夠拯救該洲的問題，這時，學生必須使用適當的數學語言敘述他們如何解決該洲的問題，這個部分，很多學生因為敘述不夠完整，以至於被老師打回票。以歐洲其中一條任務「找出啟動熱能供應器的熱能來源」這項任務為例，這項任務擁有的資訊如下：

知識：啟動熱能供應器的物品是個表裡不一的東西	
知識：寶石藏在石頭內，石頭外表的顏色跟石頭裡面的寶石顏色不一樣	
道具：石頭出土時的照片	道具：五顆寶石的鑑定書（內含有資訊）
	
▲圖16	▲圖17
任務：找出啟動熱能供應器的熱能來源	



圖18

當這些同學把以上資訊湊在一起後，依據石頭出土照片排列順序，就可以推理出「熱能供應來源是紫石頭裡面的紅寶石」。但是，老師檢核時，就會詢問「為什麼」，這時候就會看到學生在使用數學語言方面的不足，有時候表達得沒有邏輯性，有時候表達的順序跳來跳去，不過也有發生學生無法完整表達時，其他的學生幫忙補強，然後你一言我一句像是接力的方式完整的敘述完畢。

## 肆、課程辦理場次與回饋

一開始我們只在共同設計的學校辦理，但是漸漸發現，有其他學校數學科教師對這樣解謎活動也有興趣，再加上這個課程複製性高、教師易上手、學生活動成效顯著，因此我們陸續將此活動推廣到各校，甚至臺北市以外的學校，像是宜蘭羅東高中、高師大附中、新北三重商工…等。截至105年底為止，這個課程已經在全臺各地辦理了一百多場。

在設計階段時，我們有針對學生的先備知識和互動模式上進行活動的設計及調整，但是雖然做了很多次的模擬，卻很難去預測學生在跑活動時的感覺和反應會是如何。而後在跑了數十場次的活動後，學生所呈現的狀態彰顯了許多對這活動的價值，有些地方帶給老師們很多意想不到的驚喜。

這套GRO課程，從一開始單純只想要辦理跨校數學週的解謎課程，發展到最後，意外的辦理了上百場，社群教師討論覺得可能原因有以下幾項：

1. 選用的數學內容生活化，學生能夠實際運用所學的知識。
2. 謎題設計實例化，學生很容易了解謎題（雖然不一定解得出來）。
3. 學生透過團隊合作解謎，比起單打獨鬥，提升學生參與的興趣。
4. 學生不只要解出謎題，還要能將解決的問題敘述給老師聽才能過關，比起傳統的紙筆評量，更能訓練學生的表達與理解能力。

各校老師對於這套課程也表示相當的肯定：

陽明高中王老師表示：「這次數學週所開發的課程十分有趣且實用，學生可結合課堂上所學的數學知識應用在數學週的解謎中，從解謎的過程培養策略推理、團隊合作及默契的考驗，也創造了數學課堂的無限可能。」

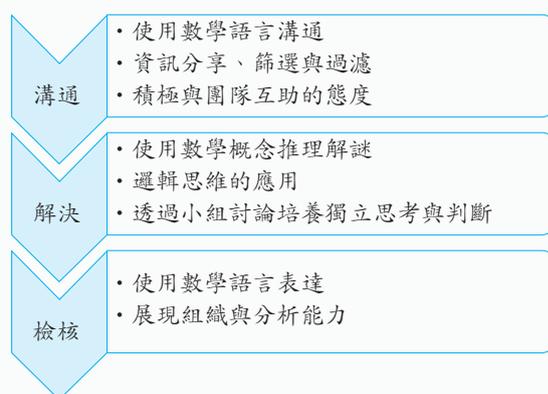
永春高中柯老師表示：「透過數學遊戲競賽，讓大家團結合作，發揮自己的所長，不同的邏輯思考，在解出題目那一刻有很大的成就感，讓學生對數學又產生了興趣，也不再覺得數學很枯燥。」

華江高中吳老師表示：「這個活動將數學包裝在遊戲中，不僅培養學生的邏輯推理能力，更能增進學生對班級的向心力與榮譽感！期待在華江高中辦理時也能激盪出不同的火花。」

宜蘭羅東高中前來觀摩的陳老師表示：「在這一節課中，平時坐在講臺底下安靜的學生，全部搖身一變，化身為拯救世界的各行各業的菁英，為了化解四大洲的危機而齊聚一堂，考驗著學生們在有限時間內，解決問題的能力。每個人都想盡辦法去完成與解決自己任務，也透過集思廣益一同去破解一道道危機，雖然無法如英雄電影情節般每個班都成功拯救地球，但每個人在結束的當下仍然不放棄去破解最後一道難題，連要拍合照學生還沉迷在最後一道問題中，可想而知這活動帶給他們有多大的樂趣與興致。」

## 伍、結語

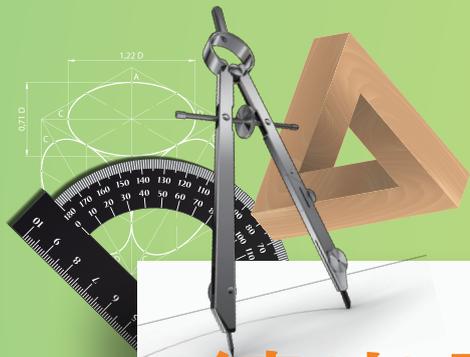
整個動態解謎課程活動的流程與希望能培養學生相關的能力概念圖如下圖，其中各個項目環環相扣，整個課程進行中，除了反映出各班的互動現象與團隊合作默契之外，亦可看出各班的領導分配執行狀況。



這個數學團隊解謎課程我們亦持續辦理與推廣，各校任何老師若有興趣，歡迎直接與大直高中數學科老師接洽。

（相關場次可上本課程官方網站，官網QRcode如右圖）。





# 鑲嵌原理與拼貼藝術

王聖淵

臺北市立陽明高級中學

## 壹、前言

隨著臺灣社會之變遷，普通高級中學從過去的菁英教育轉變成現在的普及教育，並且扮演著銜接國民義務教育與高等教育的角色，也因此隨著九九課綱、一〇二課綱到一〇七課綱，課程結構與課程內容不斷的修正，學者林永豐（2010）提及現今普通高中教育的功能主要有陶冶、試探、分化及準備，並兼顧共同性、基礎性、選擇性與專業性等四個原則，而其中的「選擇性」指的是因應學生的個別差異、興趣與性向發展，學校的課程須讓學生有選擇性，可以選擇適合自己程度或有興趣或能配合其未來生涯發展所需要的課程，因此「多元選修」課程孕育而生。

十二年國教的課綱中規劃提高選修課程比重，希望仿大學修課模式，打破原班級的框架，讓學生興趣選修、跑班上課；而在一〇七課綱上路後，未來每個學生除了學校共同必修課外，還會有各自的興趣選修，因此課程未必相同，未來也預期將進入「一生一課表」的時代；因應這樣的政策，各校教師不是每個都具有新課程開發能力，因此各學校接下來面臨的問題是「校內由誰來開課」以及「開什麼樣的選修課」，加上多元／彈性選修課在開設初期，沒有教材、沒有範本，課程教材該如何編撰，課程中該談哪些內容，因此筆者就近幾年的開設特色選修課程的經驗，挑選部分課程和大家分享。

## 貳、課程的設計理念

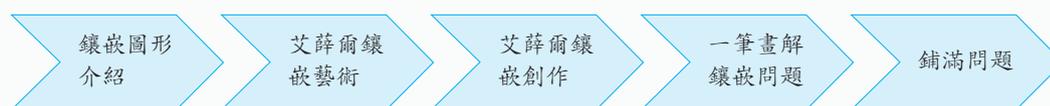
筆者所任教的學校，其學生長年來在升學制度導向以及傳統的填鴨式教學下，逐漸失去對數學學習的動機外，更欠缺操作能力及創意思考的能力，因此在十二年國教與課綱的架構下與多元之特色課程目標下，幾位授課教師在教師的專業社群研討中，共同思考如何藉由特色課程之設計，提升學生合作互動之向度，提供更多元的實作課程，以期培養學生的自主能力，並建立學生之自我價值。

棋類遊戲自古以來，一直都是很好的益智活動，它與數學有類似的方面，都需要思考、推理和判斷，有利於發展人的思維能力，而棋盤本身也提供了許多數學方面的問題，這些問題不但有

趣，且蘊含深刻的數學理論。而近年來，傳統的棋類遊戲蘊含的策略加上角色扮演、競標等機制後，以「桌上遊戲」一詞，風靡世界各國，不同的類型蘊含多種思維方式，吸引玩家積極投入參與，在這樣的想法下，加上日前故宮特展－「艾雪鑲嵌藝術」內含豐富的數學元素吸引數學學者及中學數學教師注意，筆者從艾雪（M. C. Escher 1898-1972）生平談起，結合數學鋪滿問題，規劃一系列的課程，並且於104學年度於跑班選修實施，透過課堂中帶領學生觀察、實作與驗證，讓學生從中領悟數學的奧妙。

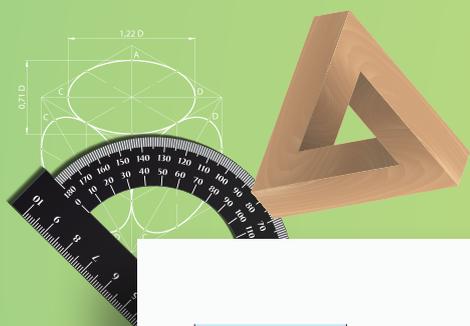
## 參、課程教案分享

- 一、教案名稱：數學鑲嵌
- 二、建議時數：每週2節課，可針對難度進行六～八週
- 三、適用對象：高一學生
- 四、教學流程



### 五、教案示例（筆者以主題一為例）

教案名稱	數學鑲嵌	時數	每週2小時，共12小時
教學重點	<p><b>【主題一】鑲嵌圖形介紹</b></p> <p>1. 正則鑲嵌圖形介紹與探討。</p> <p>2. 半正則鑲嵌圖形介紹與探討。</p> <p><b>【主題二】艾薛爾鑲嵌藝術介紹</b></p> <p>3. 荷蘭版畫家艾薛爾（M.C. Escher, 1898-1972）生平介紹。</p> <p>4. 艾薛爾的平面鑲嵌版畫介紹。</p> <p><b>【主題三】艾薛爾鑲嵌創作（參考資料來源：非想非非想）</b></p> <p>5. 探討艾薛爾鑲嵌作品1－蜥蜴之數學原理，並進行剪紙實作。</p> <p>6. 探討艾薛爾鑲嵌作品2－小丑之數學原理，並進行剪紙實作。</p> <p><b>【主題四】用一筆畫問題解鑲嵌問題（參考資料來源：棋盤上的數學）</b></p> <p>7. <math>8 \times 8</math> 方格之一筆畫問題。</p> <p>8. 有缺格的方格問題。</p> <p>9. 特定形狀平鋪問題。</p>		



教學重點

【主題五】四連方塊鋪滿磁磚之系列問題（參考資料來源：數學悠哉遊）

- 10. 四連方塊鋪滿問題。
- 11. 棋盤上的漫遊問題。
- 12. 任意鋪滿問題。

教學目標

【主題一】

- 1. 能了解正則鑲嵌及半正則鑲嵌圖形的意義。
- 2. 能驗證正則鑲嵌圖形鋪設成平面的鑲嵌圖案種類。
- 3. 能驗證如何用多種正多邊形鋪設成平面鑲嵌圖案的方法。
- 4. 能說明哪些多種正多邊形可以鋪設成平面的鑲嵌圖案。

【主題二】

- 5. 能了解荷蘭版畫家艾薛爾（M.C. Escher）的生平。
- 6. 能欣賞艾薛爾的平面鑲嵌版畫的原理與構想。

【主題三】

- 7. 能了解艾薛爾於1937年所繪製的鑲嵌作品—蜥蜴中所運用的數學原理，並進行剪紙實作。
- 8. 能了解艾薛爾於1938年所繪製的鑲嵌作品—小丑中所利用的數學原理，並進行剪紙實作。

【主題四】

- 9. 能了解如何由 $8 \times 8$ 方格的左上角畫到右下角，而且所有64個方格的每一個方格都經過正好一次。
- 10. 能理解如果將 $7 \times 7$ 方格位於與某個角落相鄰的位置切除（如下圖），剩下的地板是否可以用大小為 $1 \times 2$ 的方塊加以鋪滿的原理。

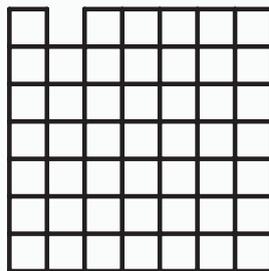
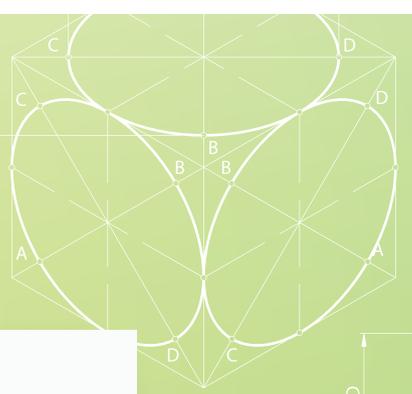


圖19  $7 \times 7$ 缺格方格

- 11. 能理解大小為 $8 \times 8$ 的方格是否可以用21塊 $1 \times 3$ 方塊及一塊 $1 \times 1$ 的方塊加以鋪滿的問題。

*Sketch 13/2001  
Algebraic null  
in 145° op. out*

*Machinical  
1526*



*Sketch  
Algebraic  
in 145°*

*Ma*



*Drawing*

*et effusum  
ultra clat. ref*

教學目標

【主題五】

12. 能了解是否可由五種四連方塊各一堆（總共有20個小格）鋪滿一塊 $4 \times 5$ 的方格問題。
13. 能驗證由任意一個格子出發後又走回到同一個格子時，所走的步數必是3的倍數。
14. 能計算一塊 $25 \times 25$ 的方格是否可以用 $2 \times 2$ 、 $3 \times 3$ 等兩種類型的方塊混合加以鋪滿問題。
15. 能驗證當 $m$ 與 $n$ 都不是 $k$ 的倍數時，一塊 $m \times n$ 的方塊不可能可以用 $1 \times k$ 的瓷磚加以鋪滿。

教學資源

1. 維基百科：<https://zh.wikipedia.org/wiki/半正鑲嵌圖>。
2. 單樽（2004）。棋盤上的數學。臺北：九章出版社。
3. 許介彥（2005）。數學悠哉遊。臺北：三民書局。
4. 非想非非想網站（<http://pisa.math.ntnu.edu.tw/>）。

教案活動

一、課程說明

- (一) 說明本課程流程、時間分配及評量標準。
- (二) 專科教室使用規範說明。
- (三) 評量標準包括：
  1. 上課學習態度與參與程度（30%）
  2. 課堂實作作業（30%）
  3. 上臺報告（40%）

二、教學活動

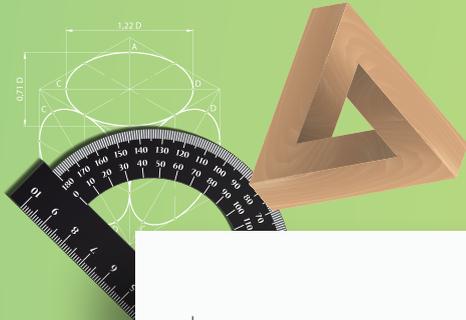
主題一

(一) 鑲嵌圖形介紹：

【引起動機】

同學們有沒有發現日常生活中常見的裝飾圖案如牆頂、天花板、教堂鑲嵌玻璃、壁飾等，常常是用一些相同的圖案來填滿一個相當大的平面，一個圖案緊接著一個，不留任何空隙，這種藝術稱為鑲嵌圖案。

人們常用邊長相等的正多邊形地磚來鋪地板或平面，這樣的圖案稱為正多邊形的鑲嵌圖案。最簡單的鑲嵌方法就是都用正方形，因為用四個邊長相同的



正方形相連接，就可以完成簡單的鑲嵌圖案（如下圖），而我們叫它(4,4,4,4)之鑲嵌圖形。至於用其他正多邊形，鑲嵌方法會有多少種呢？

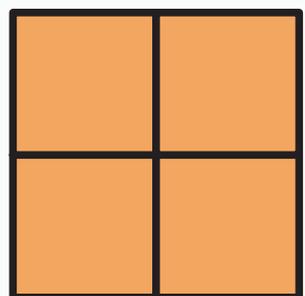


圖20 正方形鑲嵌圖形

(二) 正則鑲嵌圖形問題探索：

【提問】

1. 是不是任一正多邊形都可以鋪設成平面的鑲嵌圖案？
2. 有哪些正多邊形可以鋪設成平面的鑲嵌圖案，提出你的看法？

【引導學生思考】

1. 將正多邊形平鋪成地板時會有什麼特性？
2. 如何能保證平鋪後能將地板密合？

【小組討論】

發學習單（如下表），讓學生進行小組合作討論完成下表

湊360度的角度計算	鑲嵌圖形
舉例： $60 \times 6 = 360^\circ$	(3,3,3,3,3,3)



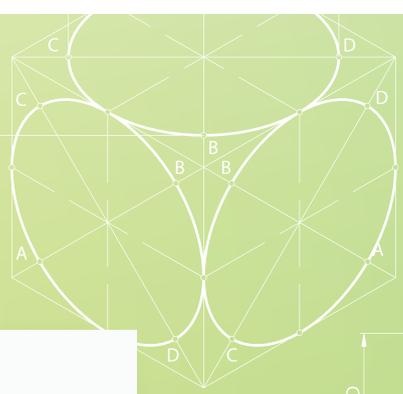
圖21 學生小組活動

(三) 半正則鑲嵌圖形介紹：

【引起動機】

*Sketch 13/2011  
algebraische  
mit 145°-Winkel*

*Machinical  
1526*



*Sketch  
algebraische  
mit 145°*

*Ma*

*Tracing*

*et effusum  
ultra clat sup*



老師：剛剛的課程是以相同的正多邊形鋪滿平面，同學們可以想想，是不是可以用兩種以上的正多邊形鋪滿整個地板呢？

【引入半正則鑲嵌圖形】

半正則鑲嵌圖形是一種平面密鋪，重複排列組合2種或2種以上的正多邊形，並讓圖形完全占滿整個平面，而且沒有空隙或重疊，其中每一個頂點處所圍繞的正多邊形都是同一規律的圖形，稱之為半正則鑲嵌圖形（維基百科）。

舉例如下：下圖是用正八邊形和正方形緊密排列而成的，可以無限延伸鋪滿整個平面。我們可以發現其中每一個頂點處所圍繞的正多邊形其排列都是正方形、正八邊形、正八邊形，因此我們叫它(4,8,8)之鑲嵌圖形。

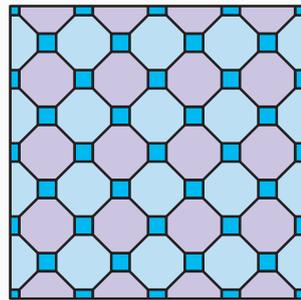


圖22 半正則鑲嵌圖形  
(資料來源：維基百科)

(四) 正則鑲嵌圖形問題探索：

【提問】

1. 是不是可以用多種正多邊形鋪設成平面的鑲嵌圖案？
2. 有哪些多種正多邊形可以鋪設成平面的鑲嵌圖案，提出你的看法？

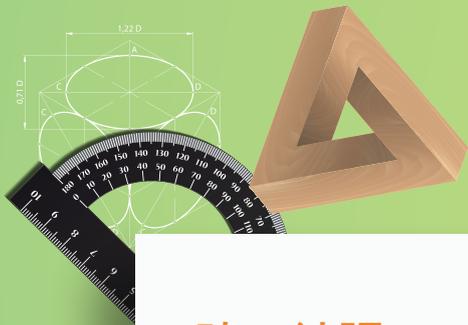
【引導學生思考】

1. 如何將兩種以上的正多邊形平鋪成地板？
2. 同學們該如何進行思考這個問題？
3. 同學們可以試出幾種不同的方式？
4. 如何進行一般化？

【小組討論】

發學習單（如下表），學生進行合作討論完成下表

湊360度的角度計算	鑲嵌圖形
舉例： $60 \times 4 + 120 \times 1 = 360^\circ$	(3,3,3,3,6)



## 肆、結語

根據一〇七的課綱精神，期望課程架構能以學生為中心，除欲整合12年國教從國小到高中課程外，另外也調整高中各學科的必修時數，讓選修學分占了三分之一，讓選修的學分可以用來發展各高中的特色，更將學生的學習定位從只應付升學考試到以學習者為中心。在親子天下雜誌第78期的專訪中提到：「在教育現場，許多高中的校長以及老師們把一〇七課綱定位為一〇七教改，新課綱中規劃大量的選修和跨領域課程，在在的考驗老師的課程教學與規劃課程的能力，數十年如一日的考試，將從注重『結果』的分數，改而注重『過程』」。

基於上述，筆者認為面對一〇七課綱的改變，老師心態與教法上的改變與調整是關鍵，以往的老師各自單打獨鬥，轉而有夥伴、社群的支持，透過社群的課程共備、教學討論，進行課程開發，以及邀請有經驗的教師分享等，都能讓選修課程更有品質，也能讓教師群更有信心的面對這個席捲而來的教育改變浪潮。

## 伍、參考資料

1. 單墀（2004）。棋盤上的數學。臺北：九章出版社。
2. 許介彥（2005）。數學悠哉遊。臺北：三民書局。
3. 非想非非想網站（<http://pisa.math.ntnu.edu.tw/>）。
4. 天下雜誌第78期（<http://www.cw.com.tw/magazine/magazine.action?id=840>）。

## 106年高中數學科多元選修跨校社群共備資訊

聯絡人	社群名稱	社群介紹	主題內容
陽明高中 王聖淵 02-2831-6675#190	數學多元 選修課程 開發跨校 社群	本社群為跨校合作社群，社群聚會目的在創新之教學實驗課程設計、分享彼此經驗，進而提升研究與發展創新教材及教法。期望透過跨校合作，建立校際教師教學團隊，發展教學創新實驗，同時建立系統性的科學探索實作課程。	行動研究課程分享 邏輯推理課程分享 遊戲融入課程分享 競標機制融入數學課程分享 實作教具開發 策略解謎課程分享
大直高中 董涵冬 02-2533-4017#126	高中數學 科多元選 修課程聯 盟	針對各校多元選修課程，進行互相交流與分享進而進行教材研發。並依數學科多元選修課程特性與需求，採用「各校聯盟、實務交流」的方式，對於多元選修課程進行教學與學習策略分享，希望對各校教師發展多元選修課程有所啟發。	數學建模課程分享 藝術與數學課程分享 新聞議題探索課程分享 棒球與統計課程分享 課堂外的數學課程分享 數學營隊課程設計 生活中的微積分課程分享 長尾夾多面體課程分享

共備時間：星期三下午，大約一個月一次。

迎向107課綱多元選修課程，歡迎全台灣高中數學科共襄盛舉。

各次活動之詳細的日期、地點，請直接洽以上兩位老師。