數學公式卡 >>第一冊

直線方程式

1. 距離公式與分點坐標

(1) 直角坐標系中，有相異兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$

① $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

② $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

(2) 直角坐標系中，$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$

① $P(x,y)$ 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，

則內分點 $P(x,y)$ 之坐標為 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

若 $m=n$，則 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:1$，$P$ 點為 $\overline{AB}$ 的中點

② $P(x,y)$ 在 $\overline{AB}$ 的延長線上，

若 $A-B-P$ 且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$（$m>n$），

則外分點 $P(x,y)$ 之坐標為 $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$

2. 線型函數與二次函數

(1) 線型函數 $\begin{cases}\text{常數函數 } f(x)=k\text{，}k\text{ 為常數}\\ \text{一次函數 } f(x)=ax+b\text{（}a\neq 0\text{）}\end{cases}$，圖形皆為直線。

(2) 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）

① $a>0$，圖形為開口向上的拋物線，有最低點與最小值。

② $a<0$，圖形為開口向下的拋物線，有最高點與最大值。

3. 斜率

(1) 利用相異兩點 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) 且 $x_1\neq x_2$

則 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(2) 利用二元一次方程式 $ax+by+c=0$（$b\neq 0$）

則 $m=-\dfrac{a}{b}$

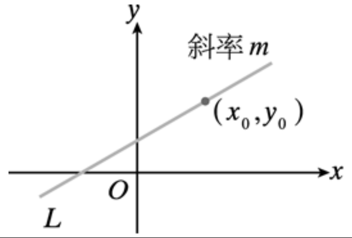
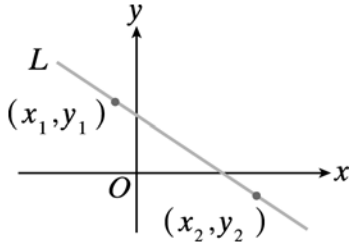
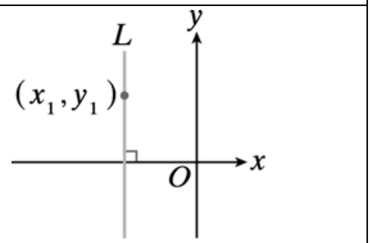
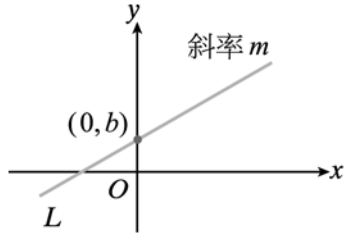
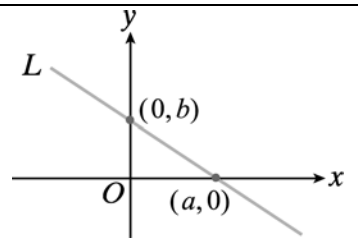
(3) 兩直線 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，

① $L_1 // L_2 \quad\Leftrightarrow\quad m_1=m_2$

② $L_1\perp L_2 \quad\Leftrightarrow\quad m_1\times m_2=-1$（$m_1$、$m_2\neq 0$）

註：符號「$\Leftrightarrow$」表示由前面的敘述可以推衍得後面的敘述，且由後面的敘述也可推衍得前面的敘述。

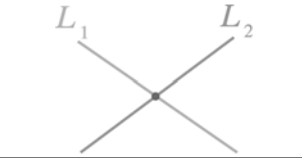
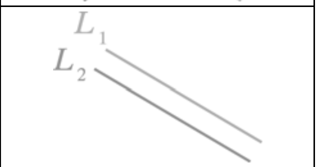
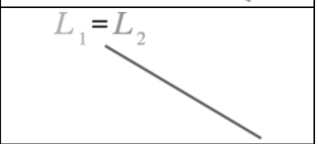
4.　直線方程式的求法

方法	公式	圖示	使用時機
點斜式	$y-y_0=m(x-x_0)$		已知點 (x_0,y_0)，斜率為 m 的直線方程式
兩點式	① 若 $x_1\neq x_2$ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$		已知 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，由此相異兩點所決定的直線方程式
	② 若 $x_1=x_2$ $x=x_1$		
斜截式	$y=mx+b$		已知斜率 m，y 截距為 b 的直線方程式
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$		已知 x 截距為 a，y 截距為 b，且 $ab\neq 0$ 的直線方程式

截距：直線 L 交 x 軸於 $(a,0)$，交 y 軸於 $(0,b)$，則稱 L 的 x 截距為 a，L 的 y 截距為 b。

5.　二線垂直、平行、重合條件

方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$，$a_2$、$b_2$、$c_2$ 都不為 0

相容方程組	$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$	恰有一組解	
矛盾方程組	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$	無解	
相依方程組	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$	無限多組解	

三角函數

1. 角的度量單位

(1) 六十分制（度度量）

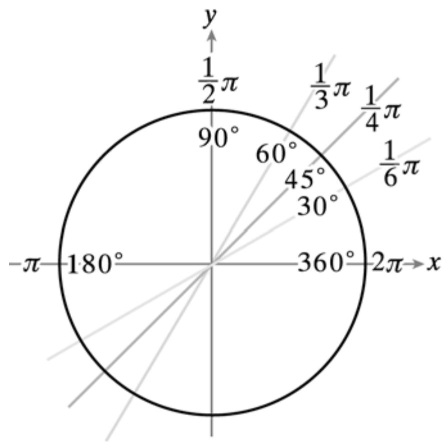
(2) 弧度制（弳度量）

較常用角的換算如右圖：

$2\pi = 360°$　　$\pi = 180°$

$\frac{1}{2}\pi = 90°$　　$\frac{1}{3}\pi = 60°$

$\frac{1}{4}\pi = 45°$　　$\frac{1}{6}\pi = 30°$



2. 同界角

(1) 有相同始邊與終邊的有向角。

(2) 若θ與θ'為同界角，則$\theta - \theta' = 2n\pi$ ，n為整數。

3. 扇形之弧長及面積

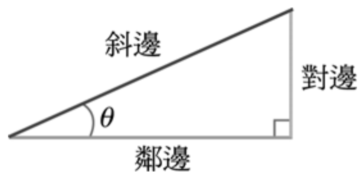
扇形之弧長：$L = r\theta$ （θ為弧度制）

扇形之面積：$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rL$ （θ為弧度制）

4. 銳角三角函數的基本定義

$\sin\theta = \frac{對邊}{斜邊}$　　$\tan\theta = \frac{對邊}{鄰邊}$　　$\sec\theta = \frac{斜邊}{鄰邊}$

$\cos\theta = \frac{鄰邊}{斜邊}$　　$\cot\theta = \frac{鄰邊}{對邊}$　　$\csc\theta = \frac{斜邊}{對邊}$



5. 三角函數恆等關係

(1) 倒數關係

$\sin\theta\csc\theta = 1$ ，$\cos\theta\sec\theta = 1$ ，$\tan\theta\cot\theta = 1$

(2) 商數關係

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ，$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(3) 平方關係

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ，$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ ，$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

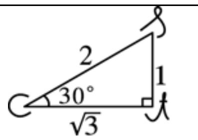
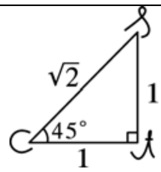
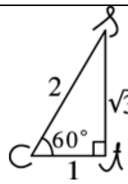
(4) 餘角關係

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$　　$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$　　$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

$\sec(90° - \theta) = \csc\theta$　　$\csc(90° - \theta) = \sec\theta$

6. 特別角的三角函數值

角度＼函數	sin	cos	tan	cot	sec	csc	圖示
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	

7. 任意角三角函數的定義

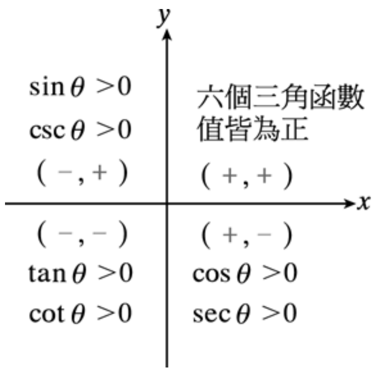
θ為標準位置角，$P(x,y)$在θ的終邊上，$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}$ $\tan\theta=\frac{y}{x}$ $\sec\theta=\frac{r}{x}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}$ $\cot\theta=\frac{x}{y}$ $\csc\theta=\frac{r}{y}$

8. 三角函數值的正負

表中僅表示正的三角函數值所在象限。



9. 象限角的三角函數值

角度＼函數	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	1	0	無意義	1	無意義
90°	1	0	無意義	0	無意義	1
180°	0	–1	0	無意義	–1	無意義
270°	–1	0	無意義	0	無意義	–1

10. 化任意角為銳角的三角函數公式

$\sin(n\pi\pm\theta)=\pm\sin\theta$（三角函數不變），$n$為整數。

$\sin\left(k\times\frac{1}{2}\pi\pm\theta\right)=\pm\cos\theta$（三角函數改變），$k$為奇數。

答案的正負符號，由題目的三角函數決定。其他三角函數的性質，同理可得。

11. 三角函數的週期

(1) $\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\sec x$ 、 $\csc x$ 之週期為 2π 。 $\tan x$ 、 $\cot x$ 之週期為 π 。

(2) 週期函數 $f(x)$ 之週期為 p ，則

① $f(kx)$ 之週期為 $\dfrac{p}{k}$ ② $f(kx+m)$ 之週期為 $\dfrac{p}{k}$ （ $k>0$ ， m 為常數）

三角函數的應用

1. 和差角公式

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(5) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(6) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

2. 二倍角公式

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

(2) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

(3) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

3. 兩直線的交角 θ

(1) 斜率為 m_1 、 m_2 的兩直線均不為鉛垂線，且互相不垂直，則 $\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

另一交角為 $\pi-\theta$

(2) 兩直線中有一條為鉛垂線

設 L_2 不為鉛垂線，且斜角為 θ_2 ，斜率為 m_2

① 若 $m_2>0$ ，則交角 $\theta=90°-\theta_2$

② 若 $m_2<0$ ，則交角 $\theta=\theta_2-90°$

另一交角為 $\pi-\theta$

(3) 兩直線中有一條為水平線

設 L_1 為水平線，所以 $\theta_2=\theta$ ，則 L_2 的斜角即為 L_1 與 L_2 的一交角 θ ，另一交角為 $\pi-\theta$

4. 正弦定理

(1) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (2) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

5. 利用正弦定理的時機

(1) 已知三角形一邊的邊長與其對角

(2) 已知兩角及一邊

6. 餘弦定理

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

(2) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

7. 利用餘弦定理的時機

(1) 已知三邊長

(2) 已知兩邊及其夾角

8. 三角形面積公式

$$\begin{aligned}\triangle ABC\text{的面積}&=\frac{1}{2}\times\text{底}\times\text{高}\\&=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B\\&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\frac{abc}{4R}=rs\end{aligned}$$

9. 三角測量問題解法步驟

(1) 根據題意作圖

(2) 利用正弦定理、餘弦定理或商高定理解題

向量

1. 向量的長度

設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，則 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，且 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

2. 向量加法的三角形法

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$。

3. 向量的加減與實數積

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，$r$ 為實數，則

(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$

(2) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$

(3) $r\overrightarrow{a}=(ra_1,ra_2)$

4. 向量內積的定義

(1) 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積為 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$。

(2) 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為 θ，則 $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}$。

(3) 設 $\overrightarrow{a}=\left(a_1,a_2\right)$、$\overrightarrow{b}=\left(b_1,b_2\right)$，則

① $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，即 $a_1b_1+a_2b_2=0$。

② $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}$（$r$ 為實數），即 $a_1b_2=a_2b_1$。

5. 內積之基本性質

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=\left|\overrightarrow{a}\right|^2\geq 0$

(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$

(3) $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$

(4) $\left(r\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\left(r\overrightarrow{b}\right)=r\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)$

6. 向量的正射影

$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\overrightarrow{b}=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}}\overrightarrow{b}$。

7. 利用向量求三角形面積

設 $\overrightarrow{a}=\left(a_1,a_2\right)$、$\overrightarrow{b}=\left(b_1,b_2\right)$，則以 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為兩鄰邊之三角形面積

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|$

8. 點與直線的距離

直線 $L: ax+by+c=0$ 外一點 $P\left(x_0,y_0\right)$ 到 L 的距離

$d\left(P,L\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

9. 兩平行線的距離

兩平行線 $L_1: ax+by+c_1=0$、$L_2: ax+by+c_2=0$（$c_1\neq c_2$）間的距離

$d\left(L_1,L_2\right)=\dfrac{\left|c_2-c_1\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

10. 兩直線的夾角平分線

若 $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ 與 $L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 相交於一點，則 L_1 與 L_2 的交角平分線方程式為

$\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}}$

數學公式卡 >>第二冊

式的運算

1. 乘法公式

(1) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(4) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

2. 餘式定理與因式定理

(1) 餘式定理：$x-a$ 除多項式 $f(x)$ 的餘式為 $f(a)$

(2) 因式定理：$x-a$ 為多項式 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow$ $f(a)=0$

(3) 整係數一次因式檢驗法

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$（$a_n\neq 0$）為整係數多項式，若 $ax-b$ 為 $f(x)$ 的因式，且 a、b 互質之非零整數，則 a 為首項係數 a_n 的因數，b 為常數項 a_0 的因數。

3. 一元二次方程式

(1) 一元一次方程式 $ax+b=0$

① 若 $a\neq 0$，則 $x=-\dfrac{b}{a}$

② 若 $a=0$，$\begin{cases}\text{當 } b\neq 0\text{，原式無解}\\ \text{當 } b=0\text{，解為任意數}\end{cases}$

(2) 一元二次方程式的解法

① 因式分解法

② 配方法

③ 代公式法

(3) a、b、c 為實數，$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$，且 $b^2-4ac\geq 0$）的公式解為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(4) 一元二次方程式根的判別式為 b^2-4ac

① $b^2-4ac>0$ $\Leftrightarrow$ 則方程式有二相異實根

② $b^2-4ac=0$ $\Leftrightarrow$ 則方程式有二相等實根

③ $b^2-4ac<0$ $\Leftrightarrow$ 則方程式無實數解

(5) 根與係數關係

若 α、β 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根

則 $\begin{cases}\text{兩根和：}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \text{兩根積：}\alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

4. 根式的運算

(1) 平方根的運算性質

① 若 $a \ge 0$ 、 $b \ge 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

② 若 $a \ge 0$ 、 $b > 0$ ，則 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

③ $\sqrt{a^2} = |a|$ ； $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ （ $a \ge 0$ ）

(2) 立方根的運算性質

① $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$

② $\sqrt[3]{a} \div \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ （ $b \ne 0$ ）

③ $\sqrt[3]{a^3} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$

(3) 二重根式的化簡

$\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ ，其中 $\begin{cases} A = x + y \\ B = xy \end{cases}$ （ $x \ge y \ge 0$ ）

聯立方程式

1. 二階及三階行列式展開

(1) 二階行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

(2) 三階行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3c_2b_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1c_2b_3$

三階行列式的展開，圖示說明如下：

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

（↘取＋，↗取－）

2. 行列式的性質

(1) 三階行列式可依某一列（行）降階展開成二階行列式。三階行列式降階展開後，每一元素的負、正符號，可依下述規則決定：

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(2) 行列式的行、列互換，其值不變

(3) 行列式的任意兩列（行）對調，其值變號

(4) 行列式的任一列（行）提出公因數，其值不變

(5) 行列式的兩列（行）成比例，其值為 0

(6) 將行列式的一列（行）的 k 倍加到另一列（行），其值不變

(7) 兩個二階行列式，若有一行（列）同一位置元素皆相同，則可相加成一個行列式

(8) 兩個三階行列式，若有兩行（列）同一位置元素皆相同，則可相加成一個三階行列式

3. 克拉瑪公式

(1) 二元一次方程組$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$（常數項在等號右邊）

$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$

二元一次方程組的解為：$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$、$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

(2) 三元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$（常數項在等號右邊）

若$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$

令$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$（以常數項取代$x$的係數）

$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$（以常數項取代$y$的係數）

$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$（以常數項取代$z$的係數）

三元一次方程組的解為：$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$、$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$、$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

複數

1. 複數相等

設a、b、c、d為實數，則

$a+bi=c+di \quad \Leftrightarrow \quad a=c$、$b=d$

2. 複數的四則運算規則

(1) $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$

(2) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(3) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$（$c+di\neq 0$）

3. 共軛複數的性質

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ （ $z_2 \neq 0$ ）

(4) $\overline{\overline{z}} = z$

4. 二次方程式的虛數根

設 a、b、c、α、β 為實數，$a \neq 0$，若 $\alpha + \beta i$ 為方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一根，則另一根為 $\alpha - \beta i$

5. 複數絕對值的性質

複數 $z = x + yi$ ，則 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

(1) $|z| = |\overline{z}|$

(2) $z \times \overline{z} = |z|^2$

(3) $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

(4) $|z^n| = |z|^n$ ，n 為自然數

(5) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ （ $z_2 \neq 0$ ）

6. 複數的極式

將複數 z 用其絕對值和輻角表示為 $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的形式，稱為複數 z 的極式，且

$$z = x + yi = |z|\left(\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}i\right) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)\ ,$$

其中 $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$ ，$\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$ （ $z \neq 0$ ）

7. 以極式表複數的積和商

(1) 相乘時，將其絕對值相乘，輻角相加

(2) 相除時，將其絕對值相除，輻角相減

8. 棣美弗定理

設 $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ，n 為整數，則

$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ （ $z \neq 0$ ）

9. 複數的 n 次方根

複數 z 的極式為 $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ，則 z 的 n 次方根為

$$x_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$k = 0$ 、1、 2 、⋯、 $n-1$

不等式及其應用

1. 二元一次不等式的圖形

(1) 根據三一律，一直線分平面成三個部分：一條直線（ $ax + by + c = 0$ ）與兩個半平面（ $ax + by + c > 0$ 或 $ax + by + c < 0$ ）

(2) 決定二元一次不等式代表哪一個半平面，找直線外的任一點測試即可得，通常以$(0,0)$、$(1,0)$或$(0,1)$代入不等式中測試

(3) ① 不等式中的不等號，若為「≥」或「≤」，圖解時直線部分以「實線」繪出

② 不等式中的不等號，若為「>」或「<」，圖解時直線部分以「虛線」繪出

(4) 二元一次聯立不等式的圖解區域為各個不等式圖解的重疊區域；若無重疊區域，則此聯立不等式無解

2. 線性規劃

(1) 在某些限制條件下，列出二元一次聯立不等式，在此聯立不等式的解之中，找一個能使某一次函數達到最大值或最小值的解，此類問題稱為線性規劃

(2) 線性規劃中，一次函數稱為目標函數；聯立不等式的圖解區域稱為可行解區域；在可行解區域中能使目標函數達成目標的解，稱為最佳解

(3) 線性規劃的解題步驟

① 畫出可行解區域，並求各個頂點坐標

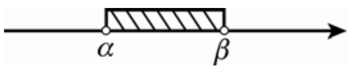
② 將可行解區域的各頂點坐標代入目標函數，即可求得目標值

3. 一元二次不等式

(1) 設一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$（$a>0$）的兩實數根為α、β，且$\alpha<\beta$

① 不等式$ax^2+bx+c>0$之解為$x<\alpha$或$x>\beta$

② 不等式$ax^2+bx+c<0$之解為$\alpha<x<\beta$



(2) 設一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$（$a>0$）有兩相等實根，即$b^2-4ac=0$，則

① 不等式$ax^2+bx+c\geq 0$之解為所有實數

② 不等式$ax^2+bx+c<0$無解

(3) 設一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$（$a>0$）無實根，即$b^2-4ac<0$

① 不等式$ax^2+bx+c>0$之解為所有實數

② 不等式$ax^2+bx+c\leq 0$無解

4. 絕對不等式

(1) 算幾不等式

a_1、a_2、…、a_n表示n個正實數，則

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\times a_2\times\cdots\times a_n}$$

「等號」成立時，$a_1=a_2=\cdots=a_n$

(2) 柯西不等式

設a_1、a_2、…、a_n，b_1、b_2、…、b_n是$2n$個實數，則

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2$$

若a_1、a_2、…、a_n不全為0，「等號」成立時，必有一實數t存在使得

$a_1t=b_1$、$a_2t=b_2$、…、$a_nt=b_n$

數學公式卡 >>第三冊

數列與級數

1. 等差數列

任意後項減前項的差都相同的數列稱為等差數列

公差 $d=$ 後項 $-$ 前項

第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$

2. 等差中項

若 a,b,c 三數成等差數列，則 b 稱為 a 與 c 的等差中項（或算術平均數），且 $b=\dfrac{a+c}{2}$

3. 等差級數求和公式

等差級數前 n 項的和 $S_n=\dfrac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$

4. 等比數列

一數列的各項皆為非零實數，且後項與相鄰前項的比值都相同的數列稱為等比數列

公比 $r=\dfrac{\text{後項}}{\text{前項}}$

第 n 項 $a_n=a_1r^{n-1}$

5. 等比中項

若 a,b,c 三數成等比數列，則 b 稱為 a 與 c 的等比中項，且 $b=\pm\sqrt{ac}$

6. 等比級數求和公式

等比級數前 n 項的和 S_n

(1) 當 $r=1$ 時，$S_n=na_1$

(2) 當 $r\neq 1$ 時，$S_n=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

7. Σ 的運算規則

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}ca_k=\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$

8. Σ 的計算公式

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}c=nc$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

指數與對數及其運算

1. 指數運算性質

(1) $a^r a^s = a^{r+s}$（r、s 為任意實數）

(2) $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$（$r$、$s$ 為任意實數）

(3) $\left(ab\right)^s = a^s b^s$（$s$ 為任意實數）

(4) $a^0 = 1$，但 0^0 無意義（a 可為負）

(5) $a^{-s} = \dfrac{1}{a^s}$（s 為任意實數）

(6) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$（$r$、$s$ 為任意實數）

(7) $a^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a}$（$s$ 為正整數）

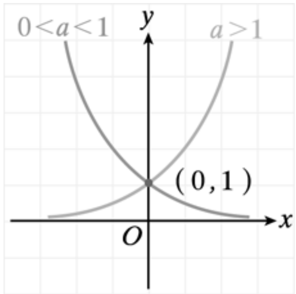
(8) $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$（$s$ 為正整數，r 為任意數）

2. 指數函數的性質

(1) 若 $a>1$，$f\left(x\right)=a^x$ 為遞增函數。

(2) 若 $0<a<1$，$f\left(x\right)=a^x$ 為遞減函數。

(3) $f\left(x\right)=a^x$ 的圖形必通過 $\left(0,1\right)$，且以 x 軸為漸近線，圖形在 x 軸上方。



$y=a^x$ 的圖形

3. 對數的定義

對數 $\log_a b$ 中，底數 $a>0$，$a\neq 1$，真數 $b>0$。

4. 對數的重要性質

a、b、x、y 均為正實數，且 $a\neq 1$、$b\neq 1$

(1) $\log_a a = 1$；$\log_a 1 = 0$

(2) $\log_a\left(x\times y\right) = \log_a x + \log_a y$

(3) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(4) $\log_a x^n = n\log_a x$，n 為實數

(5) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$，$b>0$，$b\neq 1$（換底公式）

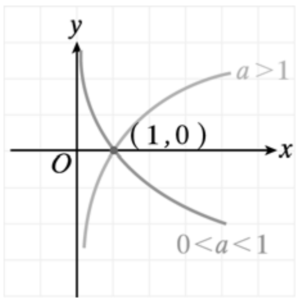
(6) $a^{\log_a x} = x$

5. 對數函數的性質

(1) 若 $a>1$，$y=\log_a x$ 為遞增函數。

(2) 若 $0<a<1$，$y=\log_a x$ 為遞減函數。

(3) $y=\log_a x$ 的圖形必通過 $\left(1,0\right)$，且以 y 軸為漸近線，圖形在 y 軸右方。



$y=\log_a x$ 的圖形

6. 常用對數

(1) $\log x = n + \alpha$ ，n 稱為首數，α 稱為尾數。真數 x 為正實數，首數 n 為整數，$0 \le \alpha < 1$。

(2) $\log x = n + \alpha$

① 若 $x \ge 1$ ，且 x 的整數部分為 m 位數，則 $n = m - 1$。

② 若 $0 < x < 1$ ，且 x 自小數點後第 m 位始出現非零數字，則 $n = -m$ 。

排列組合

1. 加法原理

如果完成一件事僅有 n 類辦法，每一類辦法與其他類皆無關聯性，且每一類皆可獨立完成此一件事，則完成這件事的方法數為各類辦法的總和。

2. 乘法原理

如果完成一件事必須要 n 個步驟，每一步驟與其他步驟皆有關聯性，則完成這件事的方法數為完成各步驟方法數的乘積。

3. $\boldsymbol{n}$ 的階乘

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$

$0! = 1$

4. 相異物的直線排列

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$$

5. 完全相異物的直線排列

由 n 個不同的事物中取出 r 個排成一列，其方法數為 P_r^n（ $0 \le r \le n$ ）

6. 不盡相異物的直線排列

若 n 個事物，可分成 r 類，每一類中的事物皆相同，其個數分別以 m_1 、 m_2 、 $\cdots$ 、 m_r 表示，即 $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ 個事物排成一列，則其不同的排法有 $\dfrac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_r!}$

7. 相異物的組合數

自 n 個不同的事物中，每次不重複地取 r 個為一組，則其組合數為 $C_r^n = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$C_r^n = C_{n-r}^n$ ； $C_n^n = C_0^n = 1$

8. 重複組合

自 n 類相異事物中，任取 r 個為一組，且每一類事物可以重複選取，則稱此種組合為 n 中取 r 的重複組合，其組合數為 $H_r^n = C_r^{n+r-1}$

9. 二項式定理

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 + \cdots + C_r^n x^{n-r} y^r + \cdots + C_n^n y^n$$

其中第 $r+1$ 項為 $C_r^n x^{n-r} y^r$

機率與統計

1. 集合的運算

$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。

$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

$A-B=\{x|x\in A$ 但 $x\notin B\}$。

2. 取捨原理

設 A、B、C 都是有限集合

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。

(2) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$。

3. 古典機率的定義

事件 A 為樣本空間 S 的部分集合，且 S 中每一基本事件發生的機會均等，則

$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$。

4. 機率性質

(1) $P(\varnothing)=0$，$P(S)=1$。

(2) $A\subset S$，則 $0\le P(A)\le 1$。

(3) 若 A' 為 A 的餘事件，則 $P(A')=1-P(A)$。

(4) 若 A、$B\subset S$，則 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

5. 條件機率

設 A、B 為樣本空間 S 中的二事件，且 $P(A)>0$，則在事件 A 發生的情況下，事件 B 發生的條件機率為

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$

6. 獨立事件

設 A、B 為樣本空間 S 中的二事件，若 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$，則稱 A、B 為獨立事件，否則稱為相關（或相依）事件。

（設 A、B 為獨立事件，則下列各組事件亦為獨立事件：(1) A' 與 B；(2) A 與 B'；(3) A' 與 B'）

7. 數學期望值

一隨機試驗的 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，S 中每一基本事件發生的機率為 p_1、p_2、$\cdots$、p_n，且每一基本事件發生可得到的報酬為 m_1、m_2、$\cdots$、m_n，則 $p_1m_1+p_2m_2+\cdots+p_nm_n$ 稱為該試驗的期望值。

8. 資料整理的四個步驟

(1)分類　(2)歸類　(3)列表　(4)製圖

9. 統計資料的次數分配表編製步驟

(1) 求全距：資料中，最大數據與最小數據的差，叫做全距。

(2) 定組數：組數的多寡，視資料的範圍與特性而定，並無客觀的標準，一般分為5～15組較恰當。

(3) 定組距：將資料分組，每一組的大小範圍，稱為組距，若採用相等的組距分組，則組距$=\dfrac{全距}{組數}$。

(4) 定組限：每一組上下兩端的界限，稱為該組的組限，較小的一端稱為下限，較大的一端稱為上限。本書採用含下限不含上限的組限寫法，即x為某一組中的數據，其分組方式表為組下限$\le x <$組上限。

(5) 歸類劃記：將每一個原始資料在對應的組內劃記，五劃為一小束，記成 ~~////~~ 或一正字。

(6) 計算次數：歸類劃記後，計算各組次數，並將結果登記於表中的次數欄內。

10. 累積次數分配表

分為以下累積次數分配表與以上累積次數分配表，並進而編製累積相對次數分配表。

11. 圖表編製

(1) 利用次數分配表，可編製直方圖與次數分配折線圖。

(2) 利用相對次數分配表，可編製相對次數分配折線圖。

(3) 利用累積相對次數分配表，可編製累積相對次數分配曲線圖。

12. 算術平均數

(1) 未分組資料

設一群n筆數值資料x_1、x_2、$\cdots$、x_n，其算術平均數為

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

(2) 已分組資料

一群有n個數值的資料依序分成k組，各組的次數為f_1、f_2、$\cdots$、f_k，每組的組中點為x_1、x_2、$\cdots$、x_k，其算術平均數為

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\left(f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_kx_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}f_ix_i \text{ ，} n=f_1+f_2+\cdots+f_k$$

13. 加權算術平均數

設w_1、w_2、$\cdots$、w_n分別為一群數值x_1、x_2、$\cdots$、x_n的權數，則加權算術平均數為

$$\overline{X_w}=\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}w_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i}$$

14. 中位數

將一群數值由小到大順序排列：

$x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_n$

15. 百分等級

假設某一個資料數值，在全部資料中有$k\%$的資料數值小於它（即它會勝過全部資料的$k\%$個），而且有$(100-k)\%$的資料數值大於或等於它，我們稱這一個數值的百分等級為k，記作$PR=k$。

16. 四分位距

用 3 個分割點將一群排序後的資料分成四等份，

第1個分割點稱為第1四分位數，以 Q_1 表示

第 2 個分割點稱為第 2 四分位數，即中位數 Me

第 3 個分割點稱為第 3 四分位數，以 Q_3 表示

四分位距 $IQR = Q_3 - Q_1$

17. 母群體標準差

(1) 母群體的變異數

設母群體有 N 個資料數值 x_1 、 x_2 、⋯、 x_N ，則母群體的變異數為

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu\right)^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2\right) - \mu^2$$

其中 $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

(2) 母群體標準差 $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

18. 樣本標準差

(1) 樣本的變異數

設有一組 n 個樣本資料 x_1 、 x_2 、⋯、 x_n ，則樣本的變異數為

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\overline{X}^2\right)$$

其中 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

(2) 樣本標準差 $S = \sqrt{S^2}$

19. 線性變換

設有 n 個數值 x_1 、 x_2 、⋯、 x_n 的平均數為 $\overline{X}$ ，樣本標準差為 S_x ，將每個數值乘以 a ，再加上 b 成另一組數值 y_1 、 y_2 、⋯、 y_n ，即

$y_i = ax_i + b$ ， $i = 1$ ， 2 ，⋯， n ， a 、 $b \in \mathbb{R}$ ， $a \neq 0$

令新數值的算術平均數為 $\overline{Y}$ ，標準差為 S_y ，則有

(1) $\overline{Y} = a\overline{X} + b$ (2) $S_y = |a| S_x$

（公式(2)中，母群體的標準差也有類似性質，即 $\sigma_y = |a|\sigma_x$ ）

20. 常用的抽樣方法

(1)簡單隨機抽樣 (2)系統抽樣 (3)分層隨機抽樣 (4)部落抽樣

21. 常態分配

當資料的直方圖呈現如鐘形一樣，由中間往左、右兩邊對稱下降的情形，就說這組資料的分布是常態分配。曲線最高點的橫坐標就是母群體的算術平均數 μ 。

22. 68 − 95 − 99.7 規則

對於常態分配的資料，平均數為 μ ，標準差為 σ ，則

大約有 68% 的資料落在區間 $\left[\mu - \sigma, \mu + \sigma\right]$ 內；

大約有 95% 的資料落在區間 $\left[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma\right]$ 內；

大約有 99.7% 的資料落在區間 $\left[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma\right]$ 內。

23. 信賴區間

是用來評估調查的不確定性的指標，它是由抽樣的樣本所計算出來，用以推估有多少的信心說明母群體的平均數或百分比在此區間內，通常是用 95% 的信賴區間來表示。

24. 95% 的信心水準

不斷地重複抽取隨機樣本，隨著樣本不同，信賴區間也會隨樣本而改變，在眾多的區間當中，約有 95% 的區間會涵蓋真正的母群體平均數或百分比。

圓

1. 圓的方程式

(1) 圓的標準式：

已知圓心為(h,k)，半徑為r的圓方程式為$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

(2) 圓的一般式：

凡是圓的方程式，都可化成$x^2+y^2+dx+ey+f=0$的形式，稱為圓的一般式

2. 圓的判別式

二元二次方程式$x^2+y^2+dx+ey+f=0$由配方可得

$$\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(d^2+e^2-4f\right)$$

(1) 當$d^2+e^2-4f>0$，$x^2+y^2+dx+ey+f=0$表一圓，圓心為$\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$，

半徑$r=\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$

(2) 當$d^2+e^2-4f=0$，$x^2+y^2+dx+ey+f=0$表一點，此點為$\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$

(3) 當$d^2+e^2-4f<0$，$x^2+y^2+dx+ey+f=0$沒有圖形

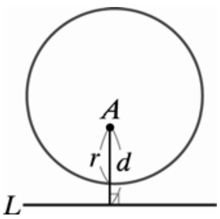
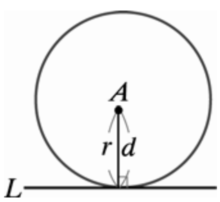
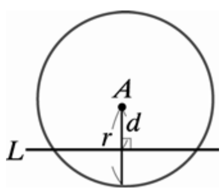
3. 圓的參數式

(1) 圓$x^2+y^2=r^2$的參數式為$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $0\le\theta<2\pi$，θ為參數

(2) 圓$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$的參數式為$\begin{cases}x=h+r\cos\theta\\ y=k+r\sin\theta\end{cases}$ $0\le\theta<2\pi$，θ為參數

4. 圓與直線的關係

設直線L：$ax+by+c=0$，圓C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，圓心A，半徑r，則在平面上，圓與直線的關係有三種：

C與L的關係	相　離	L為切線	L為割線
d與r的關係	$d(A,L)>r$	$d(A,L)=r$	$d(A,L)<r$
交點數	0	1	2
圖示			

5. **圓的切線**

(1) 經過圓內一點，沒有切線

(2) 經過圓上一點，只有一條切線

(3) 經過圓外一點，一定有兩條切線

6. **圓的切線方程式**

(1) 過圓C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$上一點$P(x_0,y_0)$的切線方程式為

$(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$

(2) 過圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$上一點$P(x_0,y_0)$的切線方程式為

$x_0x+y_0y+d\left(\dfrac{x+x_0}{2}\right)+e\left(\dfrac{y+y_0}{2}\right)+f=0$

7. **圓的切線段長**

圓外一點$P(x_0,y_0)$到圓的切線段長：

(1) 若圓為標準式$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，切線段長$=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2-r^2}$

(2) 若圓為一般式$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，切線段長$=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+dx_0+ey_0+f}$

二次曲線

1. **拋物線的標準式及性質**

(1) 拋物線標準式：$y^2=4cx$

① 若$c>0$，則拋物線開口向右；
若$c<0$，則拋物線開口向左

② 頂點：$(0,0)$

③ 焦點：$F(c,0)$

④ 準線：$x=-c$

⑤ 軸：$y=0$

⑥ 正焦弦長：$4|c|$

(2) 拋物線標準式：$x^2=4cy$

① 若$c>0$，則拋物線開口向上；
若$c<0$，則拋物線開口向下

② 頂點：$(0,0)$

③ 焦點：$F(0,c)$

④ 準線：$y=-c$

⑤ 軸：$x=0$

⑥ 正焦弦長：$4|c|$

(3) 拋物線方程式：$(y-k)^2=4c(x-h)$

① 若$c>0$，則拋物線開口向右；
若$c<0$，則拋物線開口向左

② 頂點：(h,k)

③ 焦點：$(c+h,k)$

④ 準線：$x=-c+h$

⑤ 軸：$y=k$

⑥ 正焦弦長：$4|c|$

(4) 拋物線方程式：$(x-h)^2=4c(y-k)$

① 若 $c>0$，則拋物線開口向上；
若 $c<0$，則拋物線開口向下

② 頂點：(h,k)

③ 焦點：$(h,c+k)$

④ 準線：$y=-c+k$

⑤ 軸：$x=h$

⑥ 正焦弦長：$4|c|$

2. 橢圓的標準式及性質

(1) 橢圓標準式：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

① 中心：$(0,0)$

② $a^2=b^2+c^2$

③ 長軸長：$2a$，長軸頂點：$(\pm a,0)$

④ 短軸長：$2b$，短軸頂點：$(0,\pm b)$

⑤ 焦點：$(\pm c,0)$

⑥ 正焦弦長：$\dfrac{2b^2}{a}$

(2) 橢圓標準式：$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$

① 中心：$(0,0)$

② $a^2=b^2+c^2$

③ 長軸長：$2a$，長軸頂點：$(0,\pm a)$

④ 短軸長：$2b$，短軸頂點：$(\pm b,0)$

⑤ 焦點：$(0,\pm c)$

⑥ 正焦弦長：$\dfrac{2b^2}{a}$

(3) 橢圓方程式：$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

① 中心：(h,k)

② $a^2=b^2+c^2$

③ 長軸長：$2a$，長軸頂點：$(\pm a+h,k)$

④ 短軸長：$2b$，短軸頂點：$(h,\pm b+k)$

⑤ 焦點：$(\pm c+h,k)$

⑥ 正焦弦長：$\dfrac{2b^2}{a}$

(4) 橢圓方程式：$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

① 中心：(h,k)

② $a^2=b^2+c^2$

③ 長軸長：$2a$，長軸頂點：$(h,\pm a+k)$

④ 短軸長：$2b$，短軸頂點：$(\pm b+h,k)$

⑤ 焦點：$(h,\pm c+k)$

⑥ 正焦弦長：$\dfrac{2b^2}{a}$

3. 雙曲線的標準式及性質

(1) 雙曲線標準式：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

① 中心：$(0,0)$

② $c^2=a^2+b^2$

③ 貫軸長：$2a$，貫軸頂點：$(\pm a,0)$

④ 共軛軸長：$2b$，共軛軸頂點：$(0,\pm b)$

⑤ 焦點：$(\pm c,0)$

⑥ 正焦弦長：$\dfrac{2b^2}{a}$

(2) 雙曲線標準式：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

① 中心：$(0,0)$
② $c^2=a^2+b^2$
③ 貫軸長：$2a$，貫軸頂點：$(0,\pm a)$
④ 共軛軸長：$2b$，共軛軸頂點：$(\pm b,0)$
⑤ 焦點：$(0,\pm c)$
⑥ 正焦弦長：$\frac{2b^2}{a}$

(3) 雙曲線方程式：$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

① 中心：(h,k)
② $c^2=a^2+b^2$
③ 貫軸長：$2a$，貫軸頂點：$(\pm a+h,k)$
④ 共軛軸長：$2b$，共軛軸頂點：$(h,\pm b+k)$
⑤ 焦點：$(\pm c+h,k)$
⑥ 正焦弦長：$\frac{2b^2}{a}$

(4) 雙曲線方程式：$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

① 中心：(h,k)
② $c^2=a^2+b^2$
③ 貫軸長：$2a$，貫軸頂點：$(h,\pm a+k)$
④ 共軛軸長：$2b$，共軛軸頂點：$(\pm b+h,k)$
⑤ 焦點：$(h,\pm c+k)$
⑥ 正焦弦長：$\frac{2b^2}{a}$

4. 雙曲線的漸近線

(1) 令雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$的常數項為0，雙曲線的漸近線為$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$

(2) 令雙曲線$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=\pm 1$的常數項為0，雙曲線的漸近線為$\frac{x-h}{a}\pm\frac{y-k}{b}=0$

微分

1. 函數的極限

如果$x\to a$（但$x\neq a$）時，會有$f(x)\to L$；則稱x趨近a時$f(x)$的極限為L，以$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$表示之

2. 函數極限的性質

設$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$，則

(1) $\lim\limits_{x\to a}c=c$（c為定數）

(2) $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x)=cL$（$c$為定數）

(3) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=L\pm M$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}g(x)=LM$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{L}{M}$（$M\neq 0$）

3. 函數的左、右極限

(1) 右極限：當 $x>a$ 且 $x\to a$，會使得 $f(x)\to L$，則我們稱 L 為 $f(x)$ 於 a 的右極限，記作 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$

(2) 左極限：當 $x<a$ 且 $x\to a$，會使得 $f(x)\to M$，則我們稱 M 為 $f(x)$ 於 a 的左極限，記作 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=M$

4. 函數的連續性

函數 $f(x)$ 若滿足下列三個條件，則稱函數 $f(x)$ 於點 $x=a$ 為連續：

(1) $f(a)$ 存在　　(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在　　(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

5. 導數的意義

(1) 導數：a 為函數 $f(x)$ 定義域內一點，$f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數以 $f'(a)$ 表示之，且

① $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

② $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

(2) 導數的幾何意義：$f'(a)$ 為曲線 $y=f(x)$ 在點 $(a,f(a))$ 的切線斜率。過曲線上一點 $(a,f(a))$ 的切線方程式為 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

(3) 導數的物理意義：設運動物體的位移函數為 $f(t)$，速度函數為 $v(t)$，加速度函數為 $a(t)$，則 $f'(t)=v(t)$，$v'(t)=a(t)$

(4) 可微分與連續的關係：

① 可微分的函數一定是連續函數

② 連續函數不一定可微分

6. 微分公式

設下列公式中的函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 都是可微分函數：

(1) 若 $f(x)=x^n$，則 $f'(x)=nx^{n-1}$（n 為有理數）

(2) 若 $f(x)=k$，則 $f'(x)=0$（k 為常數）

(3) 若 $F(x)=kf(x)$，則 $F'(x)=kf'(x)$（k 為常數）

(4) 若 $F(x)=f(x)\pm g(x)$，則 $F'(x)=f'(x)\pm g'(x)$

(5) 若 $F(x)=f(x)g(x)$，則 $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(6) 若 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$（其中 $g(x)\neq 0$），則 $F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

(7) 連鎖規則：設 $F(x)=g(f(x))$ 且 $f'(x)$、$g'(f(x))$ 均存在，則 $F'(x)=g'(f(x))f'(x)$

(8) 設 n 為有理數，$f(x)$ 為可微分函數，若 $F(x)=(f(x))^n$，則 $F'(x)=n(f(x))^{n-1}f'(x)$

7. 高階導函數

(1) 第一階導函數：$f'(x)$、$\frac{d}{dx}f(x)$、y'、$\frac{dy}{dx}$

(2) 第二階導函數：$f''(x)$、$\frac{d^2}{dx^2}f(x)$、y''、$\frac{d^2y}{dx^2}$

(3) 第三階導函數：$f'''(x)$、$\frac{d^3}{dx^3}f(x)$、y'''、$\frac{d^3y}{dx^3}$

(4) 第n階導函數：$f^{(n)}(x)$、$\frac{d^n}{dx^n}f(x)$、$y^{(n)}$、$\frac{d^ny}{dx^n}$

8. 函數的遞增與遞減

(1) 遞增函數

① 函數$f(x)$具有下列性質，我們稱之為遞增函數：$x_1<x_2$則$f(x_1)\le f(x_2)$

② 函數的圖形由左方往右方上升

③ 若$f(x)$於開區間(a,b)內每一點都可微分，且$f'(x)>0$，則$f(x)$在區間(a,b)內為遞增函數

(2) 遞減函數

① 函數$f(x)$具有下列性質，我們稱之為遞減函數：$x_1<x_2$則$f(x_1)\ge f(x_2)$

② 函數的圖形由左方往右方下降

③ 若$f(x)$於開區間(a,b)內每一點都可微分，且$f'(x)<0$，則$f(x)$在區間(a,b)內為遞減函數

9. 函數的極值

(1) 最大值（絕對極大值）：若函數$f(x)$定義域中的每個x，$f(x)\le f(x_0)$都成立，則稱$f(x_0)$是函數$f(x)$的最大值

(2) 最小值（絕對極小值）：若函數$f(x)$定義域中的每個x，$f(x)\ge f(x_0)$都成立，則稱$f(x_0)$是函數$f(x)$的最小值

(3) 極大值（相對極大值）：在函數$f(x)$的定義域中，存在一開區間包含x_0，使得此開區間內的任意x，滿足$f(x)\le f(x_0)$，則稱$f(x_0)$為$f(x)$的一個極大值

(4) 極小值（相對極小值）：在函數$f(x)$的定義域中，存在一開區間包含x_0，使得此開區間內的任意x，滿足$f(x)\ge f(x_0)$，則稱$f(x_0)$為$f(x)$的一個極小值

10. 利用導函數判別極大、極小值

(1) 函數$f(x)$在$x=a$時，且$f'(a)=0$：

① 若$x<a$，且$f'(x)>0$，即在a的左方，$f(x)$為遞增函數；
若$x>a$，且$f'(x)<0$，即在a的右方，$f(x)$為遞減函數，
且$f(a)$為函數$f(x)$的一個極大值

② 若$x<a$，且$f'(x)<0$，即在a的左方，$f(x)$為遞減函數；
若$x>a$，且$f'(x)>0$，即在a的右方，$f(x)$為遞增函數，
且$f(a)$為函數$f(x)$的一個極小值

(2) 設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 時，$f'(a)=0$ 且 $f''(a)$ 存在，

① 若 $f''(a)<0$，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 有極大值 $f(a)$

② 若 $f''(a)>0$，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 有極小值 $f(a)$

11. 函數圖形的凹向與函數圖形的描繪

(1) 函數圖形的凹向：設函數 $f(x)$ 在開區間 (a,b) 內可微分，c 為開區間 (a,b) 內任一點，過點 $(c,f(c))$ 作 $f(x)$ 的切線 L：

① 若 $f(x)$ 於開區間 (a,b) 內的圖形均在切線 L 上方，則稱凹口向上

② 若 $f(x)$ 於開區間 (a,b) 內的圖形均在切線 L 下方，則稱凹口向下

(2) 導函數與函數圖形凹向的關係：設函數 $f(x)$ 於開區間 (a,b) 內可微分，且 c 為 (a,b) 內任一點：

① 若 $f''(c)>0$，則 $f(x)$ 的圖形於點 $(c,f(c))$ 為凹口向上

② 若 $f''(c)<0$，則 $f(x)$ 的圖形於點 $(c,f(c))$ 為凹口向下

(3) 反曲點：函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 的附近都可微分，且 $f(x)$ 的圖形在 $x=c$ 的左、右兩方凹性改變，則稱點 $(c,f(c))$ 為 $f(x)$ 的反曲點或拐點

(4) 導函數與反曲點的關係：
若點 $(c,f(c))$ 為 $f(x)$ 的反曲點，則 $f''(c)=0$

(5) 描繪函數圖形：在描繪函數圖形前，先將下列資料列表討論

① 遞增、遞減函數的範圍

② 極大值與極小值，即圖形的最高點與最低點位置

③ 圖形的凹向

積分

1. 無窮數列的極限

(1) 無窮數列 $\langle a_n\rangle$ 收斂於 α，當 $n\to\infty$ 時，$a_n\to\alpha$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$

(2) 無窮數列 $\langle a_n\rangle$ 不收斂，就是發散，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在

2. 數列極限的性質

設 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$，$\alpha$、$\beta$ 為兩定數，則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=k\alpha$，$k$ 為定數

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha-\beta$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\times b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$

(5) 若 $\beta\neq0$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

(6) 若對任何 n 且 $a_n\geq b_n$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geq\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

3. **分式型數列的極限**

設 $a_s \neq 0$ ， $b_t \neq 0$ ， s 、 t 為自然數或0，若 $\langle a_n \rangle$ 的一般項 $a_n = \dfrac{a_s n^s + a_{s-1} n^{s-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$ ，

則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \begin{cases} = 0 & \text{，若 } s < t \\ = \dfrac{a_s}{b_t} & \text{，若 } s = t \\ \text{不存在，若 } s > t \end{cases}$

4. **等比數列的發散與收斂**

無窮等比數列 $\langle r^n \rangle$

(1) 當 $-1 < r \leq 1$ 時，$\langle r^n \rangle$ 為收斂數列

(2) 當 $r \leq -1$ 或 $r > 1$ 時，$\langle r^n \rangle$ 為發散數列

5. **夾擠定理**

數列 $\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$、$\langle c_n \rangle$，若滿足 $a_n \leq b_n \leq c_n$（ $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ ），且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ，則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

6. **無窮等比級數**

無窮等比級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$

(1) 當 $|r| < 1$ 時， $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \dfrac{a}{1-r}$ ，且為收斂級數

(2) 當 $|r| \geq 1$ 時， $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ 無法求和，且為發散級數

7. **定積分**

函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上的定積分，以 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示之，a 稱為下限，b 稱為上限，$f(x)$ 稱為被積分式，且定義 $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

8. **定積分的性質**

(1) $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$ ， k 為定數

(2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(3) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ ， k 為定數

(4) $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ （ $a < c < b$ ）

9. **不定積分**

(1) 反導函數（不定積分）：設 $F'(x) = f(x)$，則 $F(x)$ 稱為 $f(x)$ 的反導函數或不定積分，通常記為 $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ ， c 為常數

(2) 單項不定積分公式：若 $n \neq -1$ ， $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ， $c \in \mathbb{R}$

(3) 代換積分法：

$\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$，其中 $n \neq -1$，u 為 x 的函數，$c \in \mathbb{R}$

10. 微積分基本定理

設多項函數 $f(x)$ 於閉區間 $[a,b]$ 中，且 $F'(x) = f(x)$，則 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

11. 曲線所夾面積

(1) 多項函數 $f(x)$ 與 x 軸間之面積：函數 $y = f(x)$ 的圖形、$x = a$、$x = b$ 與 x 軸所圍成區域的面積為 $\int_a^b |f(x)|dx$

(2) 兩多項函數 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 圖形之間的面積：兩曲線 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 在區間 $[a,b]$ 所圍成區域的面積為 $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$