數學公式卡 >>第一冊

直角坐標系

1. 距離公式

設平面上兩點 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，則 P、Q 兩點的距離為 $\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

2. 分點公式

設 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P(x,y)$ 為同一直線上相異三點，m、n 為正數，且 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=m:n$，

若 P 在線段 $\overline{P_1P_2}$ 上，則稱 P 為 $\overline{P_1P_2}$ 之內分點，且 $x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}$，$y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$。

3. 中點坐標公式

設坐標平面上相異兩點 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，且 $\overline{P_1P_2}$ 的中點坐標為 $P(x,y)$，則 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，

$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$。

4. 重心坐標

已知△ABC 的三頂點坐標為 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，則△ABC 的重心坐標為

$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

5. 斜率

設平面上有一直線 L，且 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 為直線 L 上的兩個相異點。

(1) 當 $x_1\neq x_2$ 時，直線 L 的斜率為 $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$。

(2) 當 $x_1=x_2$ 時，直線 L 的斜率 m 不存在，表示直線 L 垂直於 x 軸。

6. 平行與垂直

設兩相異直線 L_1 與 L_2 的斜率分別是 m_1 與 m_2

(1) 若 $L_1 // L_2$，則 $m_1=m_2$；反之亦然。

(2) 若 $L_1\perp L_2$，則 $m_1\times m_2=-1$；反之亦然。

7. 直線之方程式

(1) 點斜式

① 經過點 $P(x_0,y_0)$ 且斜率為 m 的直線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$。

② 經過點 $P(x_0,y_0)$ 且斜率不存在的直線方程式為 $x=x_0$。

(2) 兩點式

經過相異兩點 $P(x_1,y_1)$ 與 $Q(x_2,y_2)$ 的直線方程式為

① 當 $x_1\neq x_2$ 時，直線方程式為 $y-y_1=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$。

② 當 $x_1=x_2$ 時，直線方程式為 $x=x_1$。

(3) 斜截式

① 斜率為 m 且 y 截距為 b 的直線方程式為 $y=mx+b$。

② 斜率為 m 且 x 截距為 a 的直線方程式為 $y=m(x-a)$。

③ 斜率不存在且 x 截距為 a 的直線方程式為 $x=a$。

(4) 截距式

x 截距為 a、y 截距為 b（$a\neq 0$，$b\neq 0$）的直線方程式為 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。

8. 直線方程式與斜率

設直線方程式 $ax+by+c=0$，則

(1) 若 $b=0$，直線方程式的斜率不存在。

(2) 若 $b\neq 0$，直線方程式的斜率為 $-\dfrac{a}{b}$。

(3) 和 L 平行的直線必可化簡為 $ax+by+k=0$（$k\neq c$）。

(4) 和 L 垂直的直線必可化簡為 $bx-ay+h=0$。

9. 點到直線的距離

點 $P(x_1,y_1)$ 到直線 L：$ax+by+c=0$ 的距離為 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

10. 兩平行線的距離

兩平行線 L_1：$ax+by+c_1=0$ 與 L_2：$ax+by+c_2=0$ 的距離為 $d=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

11. 函數圖形與性質

(1) 函數 $f(x)=ax+b$ 稱為線性函數，其圖形為一直線。

(2) 若 $a>0$，則 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 時 $f(x)$ 有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，圖形頂點即最低點為 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。

(3) 若 $a<0$，則 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 時 $f(x)$ 有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，圖形頂點即最高點為 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。

三角函數及其應用

1. 扇形的弧長與面積

已知一扇形之半徑為 r，弧長為 S，圓心角為 θ 弧度，面積為 A，則 $S=r\theta$，$A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rS$。

2. 同界角

當兩個角有共同的始邊和終邊的時候，這兩個角稱為同界角。

3. 銳角三角函數

$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$，稱作 $\angle A$ 的正弦函數。

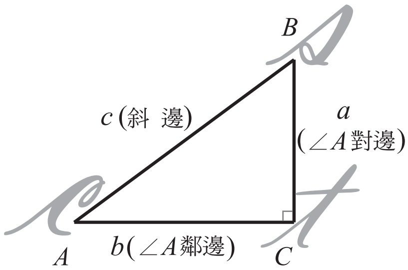
$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$，稱作 $\angle A$ 的餘弦函數。

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$，稱作 $\angle A$ 的正切函數。

$\cot A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{b}{a}$，稱作 $\angle A$ 的餘切函數。

$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$，稱作 $\angle A$ 的正割函數。

$\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{c}{a}$，稱作 $\angle A$ 的餘割函數。



4. 特別角三角函數值

函數 / 函數值 / 角度	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$30^\circ\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	2
$45^\circ\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60^\circ\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

5. 任意角三角函數

在標準位置角 θ 的終邊上任取一點 $P(x,y)$，假設 $\overline{OP}=r=\sqrt{x^2+y^2}>0$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，

$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$，$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$，$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$。

6. 三角函數值的正負

象限 / 正負 / 函數	第一象限角	第二象限角	第三象限角	第四象限角
$\sin\theta$、$\csc\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$、$\sec\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$、$\cot\theta$	+	−	+	−

7. 象限角三角函數值

函數 / 函數值 / 角度	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$0°$	0	1	0	無意義	1	無意義
$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	無意義	0	無意義	1
$180°$（π）	0	-1	0	無意義	-1	無意義
$270°\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	-1	0	無意義	0	無意義	-1

8. 三角函數常用關係

(1) 倒數關係

$\sin\theta\csc\theta=1$，$\cos\theta\sec\theta=1$，$\tan\theta\cot\theta=1$。

(2) 商數關係

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$。

(3) 平方關係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$，$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$。

9. 三角函數的週期與範圍

(1) $y=\sin x$ 的圖形可知

① $y=\sin x$ 的圖形的週期為 2π。

② $-1\le\sin x\le1$。

(2) $y=\cos x$ 的圖形可知

① $y=\cos x$ 的圖形的週期為 2π。

② $-1\le\cos x\le1$。

(3) $y=\tan x$ 的圖形可知

① $y=\tan x$ 的圖形的週期為 π。

② $\tan x$ 的值可為任意實數。

(4) $y=\cot x$ 的圖形可知

① $y=\cot x$ 的圖形的週期為 π。

② $\cot x$ 的值可為任意實數。

(5) $y=\sec x$ 的圖形可知

① $y=\sec x$ 的圖形的週期為 2π。

② $\sec x\le-1$ 或 $\sec x\ge1$。

(6) $y=\csc x$ 的圖形可知

① $y=\csc x$ 的圖形的週期為 2π。

② $\csc x\le-1$ 或 $\csc x\ge1$。

10. 三角形面積的計算

在$\triangle ABC$中，若a、b、c分別表$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對邊長，以Δ表三角形面積，

$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$。

11. 正、餘弦定理

(1) 正弦定理

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$。

(2) 餘弦定理

① $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$。

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$。

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$。

② $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$。

$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$。

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$。

數學公式卡 >>第二冊

向量

1. 向量的坐標表示法

設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$為坐標平面上兩點，則 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，且

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

2. 相等向量

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，當 $a_1=b_1$ 且 $a_2=b_2$ 時，兩向量相等，記作 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$。反之，當 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$ 時，$a_1=b_1$ 且 $a_2=b_2$。

3. 方向角

對於非零向量 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，以 x 軸正向為始邊，$\overrightarrow{OA}$ 所在射線為終邊所夾的角度 θ（$0^\circ\le\theta<360^\circ$），稱為 $\overrightarrow{a}$ 的方向角即 $\overrightarrow{a}=\left(\left|\overrightarrow{a}\right|\cos\theta,\left|\overrightarrow{a}\right|\sin\theta\right)$。

4. 向量加減與實數積的坐標表示法

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，$r$ 為實數，則

(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$。

(2) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$。

(3) $r\overrightarrow{a}=(ra_1,ra_2)$。

5. 向量的平行

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，則 $\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}\Leftrightarrow a_1b_2=a_2b_1$；當 $b_1b_2\neq0$ 時，$\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$。

6. 向量內積的定義

設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為兩非零向量，θ 為兩向量的夾角，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$。當 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 有一向量為零向量時，規定 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$。

7. 向量內積的坐標表示法

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ 與 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$。當 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 有一向量為零向量時，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 亦能成立。

8. 向量的垂直

$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為非零向量，若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$。

9. 向量內積的性質

設 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 為坐標平面上三向量，r 為實數，則

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$ 。

(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=\left|\overrightarrow{a}\right|^2$ 。

(3) $\left(r\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{b}=r\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)$ 。

(4) $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ 。

10. 正射影長

設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為兩非零向量，θ 為兩向量的夾角，則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 的正射影長為 $\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\cos\theta\right|$ 。

11. 點到直線距離

在坐標平面上，已知點 $P\left(x_1,y_1\right)$ 與直線 L：$ax+by+c=0$ ，則 P 點到直線 L 的距離為

$\dfrac{\left|ax_1+by_1+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

式的運算

1. 多項式相等

$f\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ （ $a_n\neq0$ ）與 $g\left(x\right)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$ （ $b_m\neq0$ ），當 $n=m$ 且 $a_n=b_n$ ， $a_{n-1}=b_{n-1}$ ，$\cdots$， $a_1=b_1$ ， $a_0=b_0$ 時，稱 $f\left(x\right)$ 與 $g\left(x\right)$ 相等。

2. 多項式的定義

設 n 為正整數或零且 a_n 、a_{n-1} 、a_{n-2} 、$\cdots$、 a_1 、a_0 都是實數，$f\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ，則稱 $f\left(x\right)$ 為 x 的多項式。

(1) 若 $a_n\neq0$ 時， n 稱為 $f\left(x\right)$ 的次數，我們以 $\deg f\left(x\right)=n$ 表示，或稱 $f\left(x\right)$ 為 n 次多項式。

(2) a_k 稱為 $f\left(x\right)$ 的 x^k 項係數。

(3) 若 $a_n\neq0$ 時，a_n 稱為 $f\left(x\right)$ 的領導係數。

(4) a_0 為 $f\left(x\right)$ 的常數項。

3. 常數多項式

若 $f\left(x\right)=a_0$ 時， $f\left(x\right)$ 稱為常數多項式，又

(1) 當 $a_0\neq0$ 時， $f\left(x\right)$ 稱為零次多項式，例如 $f\left(x\right)=3$ 。

(2) 當 $a_0=0$ 時，也就是 $f\left(x\right)=0$ ， $f\left(x\right)$ 稱為零多項式。

4. 除法定理

設 $f\left(x\right)$ 與 $g\left(x\right)$ 為二多項式，且 $g\left(x\right)\neq0$ ，則恰存在二多項式 $q\left(x\right)$ 與 $r\left(x\right)$ 滿足

$f\left(x\right)=g\left(x\right)q\left(x\right)+r\left(x\right)$ ，其中 $r\left(x\right)=0$ 或 $\deg r\left(x\right)<\deg g\left(x\right)$ ，即被除式＝除式×商式＋餘式，其中餘式為 0 或餘式次數＜除式次數。

5. 餘式定理

設$a \neq 0$，多項式$f(x)$除以$ax-b$的餘式為$f\left(\frac{b}{a}\right)$。

6. 因式定理

設$a \neq 0$，若$ax-b$為多項式$f(x)$的因式，則$f\left(\frac{b}{a}\right)=0$，反之亦然。

7. 乘法公式

(1) 和平方公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，差平方公式$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。

(2) 平方差公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

(3) 立方和公式$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$，立方差公式$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$。

8. 一次因式檢驗法

設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$且$a_n$、$a_{n-1}$、$a_{n-2}$、⋯、$a_1$、$a_0$都是整數，若一次式$ax-b$為$f(x)$的因式，其中$a$、$b$互質，則$a$為$a_n$的因數且$b$為$a_0$的因數。

9. 一次方程式

設a、b都是實數，則$ax+b=0$稱為一次方程式：

(1) 若$a \neq 0$，則$x=-\frac{b}{a}$（恰有一解）。

(2) 若$a=0$，$b \neq 0$，則$ax+b=0$無解。

(3) 若$a=0$，$b=0$，則$ax+b=0$的解為任意實數，也就是此方程式有無限多解。

10. 二次方程式解的判別

設二次方程式$ax^2+bx+c=0$：

(1) 當$b^2-4ac>0$時：$ax^2+bx+c=0$有二相異實數解，且$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

(2) 當$b^2-4ac=0$時：$ax^2+bx+c=0$有二相等實數解，且$x=-\frac{b}{2a}$。

(3) 當$b^2-4ac<0$時：$ax^2+bx+c=0$無實數解。

11. 根與係數關係

(1) 設α、β為二次方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根，則$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha \times \beta=\frac{c}{a}$。

(2) 設α、β為二次方程式的兩根且此方程式的x^2項係數為1，則此方程式為
$x^2-(\alpha+\beta)x+(\alpha \times \beta)=0$。

12. 高次方程式

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$沒有固定的解法，可先嘗試利用公式或一次因式檢驗法將方程式因式分解，再求方程式的解。

指數與對數及其運算

1. **指數定義**

若 a 為實數且 n 為正整數，則 $\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{n\text{個}a\text{連乘}}=a^n$，其中 a 稱為底數，n 為指數。

2. **零指數與負整數指數**

若 a 為實數（但 $a\neq 0$）且 m、n 為正整數，規定：

(1) $a^0=1$。

(2) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$。

(3) $a^{m-n}=\dfrac{a^m}{a^n}$。

3. **分數指數**

若 $a>0$ 且 m 為整數、n 為正整數，規定：

(1) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$。

(2) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$。

4. **實數指數律**

若 r、s 為實數且 $a>0$、$b>0$，則

(1) $a^r\times a^s=a^{r+s}$。

(2) $\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$。

(3) $\left(a^r\right)^s=a^{rs}$。

(4) $\left(ab\right)^r=a^r\times b^r$。

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$。

5. **指數函數定義**

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，對於任意實數 x，$y=a^x$ 稱為以 a 為底數的指數函數。

6. **指數函數 $y=a^x$ 的圖形**

(1) 圖形必在 x 軸上方，即指數函數值一定為正數。

(2) 圖形一定過點 $(0,1)$。

(3) 當 $a>1$ 時，y 隨 x 增加而增加。
當 $0<a<1$ 時，y 隨 x 增加而減少。

7. **指數相等**

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$\alpha>0$，$\beta>0$ 則 $a^\alpha=a^\beta \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\beta$。

8. **對數定義**

若 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則 $a^x=b \quad\Leftrightarrow\quad x=\log_a b$。

9. 對數性質

若 a 、 M 、 N 均為正實數且 $a\neq 1$，則

(1) $\log_a 1=0$ ， $\log_a a=1$ 。

(2) $a^{\log_a M}=M$ 。

(3) $\log_a\left(M\times N\right)=\log_a M+\log_a N$ 。

(4) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ 。

(5) $\log_a M^s=s\log_a M$ 。

(6) $\log_{a^r} M=\dfrac{1}{r}\log_a M$ （ $r\neq 0$ ）。

(7) $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ （換底公式， $b>0$ 且 $b\neq 1$ ）。

10. 對數函數定義

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$ ， $x>0$ ， $y=\log_a x$ 稱為以 a 為底數的對數函數。

11. 對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形

(1) 圖形一定在 y 軸右方。

(2) 圖形一定過點 $(1,0)$ 。

(3) 當 $a>1$ 時， y 隨 x 增加而增加。

當 $0<a<1$ 時， y 隨 x 增加而減少。

12. 指數函數圖形與對數函數圖形的比較

(1) $y=a^x$ 與 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸。

(2) $y=\log_a x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 x 軸。

(3) $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$ 。

13. 對數相等

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$ ， $\alpha>0$ ， $\beta>0$ ，則 $\log_a\alpha=\log_a\beta \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\beta$ 。

14. 常用對數

(1) $\log x=n+\log b$ ， n 稱為首數， n 必為整數； $\log b$ 稱為尾數， $0\leq\log b<1$ 。

(2) 首數與尾數：

① 對數 $=$ 首數 $+$ 尾數（ $0\leq$ 尾數 <1 ）。

② 真數 $x>1$ ，且整數的部分是 n 位數時，對數 $\log x$ 的首數是 $n-1$ 。

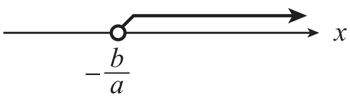
③ 真數 $0<x<1$ ，而其小數部分在小數點後第 n 位以前均為 0 ，且第 n 位不是 0 ，則對數 $\log x$ 的首數為 $-n$ 。

數學公式卡 >>第三冊

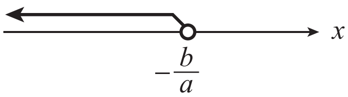
不等式及其應用

1. 一元一次不等式的解

(1) 當 $a>0$ 時，一次不等式 $ax+b>0$ 的解為 $x>-\frac{b}{a}$，如圖所示。

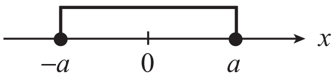


(2) 當 $a<0$ 時，一次不等式 $ax+b>0$ 的解為 $x<-\frac{b}{a}$，如圖所示。

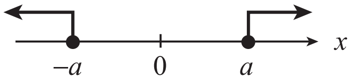


2. 絕對值的一元一次不等式的解

對於任一正數 a，(1) $|x|\le a$ 的解為 $-a\le x\le a$，如圖所示。



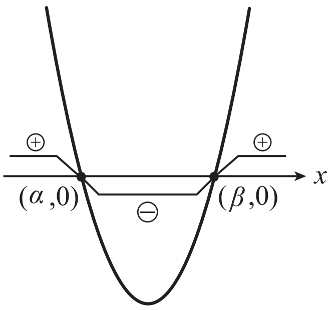
(2) $|x|\ge a$ 的解為 $x\le -a$ 或 $x\ge a$，如圖所示。



3. 一元二次不等式的解法

二次函數 $y=ax^2+bx+c$，

(1) 設 $a>0$，則當 $b^2-4ac>0$ 時，$y=ax^2+bx+c$ 的圖形為開口向上的拋物線，且與 x 軸有兩個交點 $(\alpha,0)$ 與 $(\beta,0)$，其中 $\alpha=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$、$\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\alpha<\beta$，如圖所示。



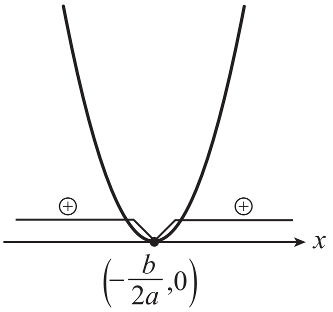
① 不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解為 $\alpha<x<\beta$。

② 不等式 $ax^2+bx+c\le 0$ 的解為 $\alpha\le x\le\beta$。

③ 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解為 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$。

④ 不等式 $ax^2+bx+c\ge 0$ 的解為 $x\le\alpha$ 或 $x\ge\beta$。

(2) 設 $a>0$，則當 $b^2-4ac=0$ 時，$y=ax^2+bx+c$ 的圖形為開口向上的拋物線，且與 x 軸有一個交點 $\left(-\dfrac{b}{2a},0\right)$，如圖所示。



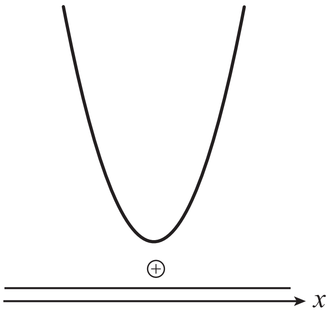
① 不等式 $ax^2+bx+c<0$ 無解。

② 不等式 $ax^2+bx+c\le 0$ 的解為 $x=-\dfrac{b}{2a}$。

③ 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解為 x 不等於 $-\dfrac{b}{2a}$ 的任意實數。

④ 不等式 $ax^2+bx+c\ge 0$ 的解為任意實數。

(3) 設 $a>0$，則當 $b^2-4ac<0$ 時，$y=ax^2+bx+c$ 的圖形為開口向上的拋物線，且與 x 軸沒有交點，如圖所示。



① 不等式 $ax^2+bx+c<0$ 無解。

② 不等式 $ax^2+bx+c\le 0$ 無解。

③ 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解為任意實數。

④ 不等式 $ax^2+bx+c\ge 0$ 的解為任意實數。

4. 二元一次不等式的圖形

設直線 L：$ax+by+c=0$，其中 $a>0$，則

(1) $ax+by+c>0$ 的圖形為直線 L 的右側半平面。

(2) $ax+by+c\ge 0$ 的圖形為直線 L 及直線 L 的右側半平面。

(3) $ax+by+c<0$ 的圖形為直線 L 的左側半平面。

(4) $ax+by+c\le 0$ 的圖形為直線 L 及直線 L 的左側半平面。

5. 二元一次聯立不等式的圖解

二個或二個以上的二元一次不等式聯立時，是指同時滿足二個或二個以上的二元一次不等式，其圖形為各不等式圖形的共同部分。

6. **線性規劃的解題步驟**

(1) 依題意列出聯立不等式（限制條件）、目標函數。

(2) 畫出可行解區域並求出頂點坐標。

(3) 將頂點坐標代入目標函數，依題意找出所求。

圓與直線

1. **圓的標準式**

以 $O(h,k)$ 為圓心，且半徑為 r （ $r>0$ ）的圓方程式是 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 。

2. **圓的一般式**

(1) 圓方程式必為形式如 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的二元二次方程式，其中

① x^2 項與 y^2 項的係數相等。

② 方程式中不含 xy 項。

(2) 圖形探討

d^2+e^2-4f 為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 圖形的判別式。

① 若 $d^2+e^2-4f>0$ ，則方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 表示一個圓，其圓心坐標為 $\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$ ，半徑為 $\frac{\sqrt{d^2+e^2-4f}}{2}$ 。

② 若 $d^2+e^2-4f=0$ ，則方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 表示一個點，此點坐標為 $\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$ 。

③ 若 $d^2+e^2-4f<0$ ，則方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 在坐標平面上沒有圖形。

3. **圓與點的關係**

若點 P 之坐標為 (x_1,y_1) ，圓 C 之方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 或 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 。

(1) 若點 P 在圓 C 的內部，則 $(x_1-h)^2+(y_1-k)^2<r^2$ 或 ${x_1}^2+{y_1}^2+dx_1+ey_1+f<0$ ，反之亦然。

(2) 若點 P 在圓 C 上，則 $(x_1-h)^2+(y_1-k)^2=r^2$ 或 ${x_1}^2+{y_1}^2+dx_1+ey_1+f=0$ ，反之亦然。

(3) 若點 P 在圓 C 的外部，則 $(x_1-h)^2+(y_1-k)^2>r^2$ 或 ${x_1}^2+{y_1}^2+dx_1+ey_1+f>0$ ，反之亦然。

4. **圓與直線的關係**

已知直線 L：$ax+by+c=0$ 與圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ，設圓心 O 與直線 L 的距離為 d ，則 $d=\frac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

(1) 若 $d<r$ ，則直線 L 與圓 C 相割，反之亦然。

(2) 若 $d=r$ ，則直線 L 與圓 C 相切，反之亦然。

(3) 若 $d>r$ ，則直線 L 與圓 C 相離，反之亦然。

5. 切線方程式的求法

(1) 過圓上一點，求切線方程式：

① 過圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 上一點 $P(x_1,y_1)$ 的切線方程式為

$(x_1-h)(x-h)+(y_1-k)(y-k)=r^2$。

② 過圓 C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 上一點 $P(x_1,y_1)$ 的切線方程式為

$x_1x+y_1y+d\times\dfrac{x+x_1}{2}+e\times\dfrac{y+y_1}{2}+f=0$。

(2) 過圓外一點，求切線方程式：

予圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 與圓外一點 $P(x_1,y_1)$。

則可依下列步驟求出過點 P 且與圓 C 相切的直線方程式：

① 找出圓心 (h,k) 與半徑 r。

② 假設切線斜率為 m，利用點斜式可得切線方程式為 $y-y_1=m(x-x_1)$，整理得

$mx-y-mx_1+y_1=0$。

③ 利用圓心 (h,k) 到切線 $mx-y-mx_1+y_1=0$ 的距離等於圓 C 的半徑，得

$d=\dfrac{|mh-k-mx_1+y_1|}{\sqrt{m^2+1}}=r$，即可求出 m 值。

④ 將 m 值代入 $mx-y-mx_1+y_1=0$，即得過 P 點且與圓 C 相切的直線方程式。

6. 圓的切線段長

(1) 自點 $P(x_1,y_1)$ 到圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 的切線段長為 $\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2}$。

(2) 自點 $P(x_1,y_1)$ 到圓 C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的切線段長為 $\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+dx_1+ey_1+f}$。

數列與級數

1. 數列

(1) 數列項數有限，稱為有限數列。

(2) 數列項數無限，稱為無窮數列。

2. 級數的運算性質

已知 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$，$c$ 為常數，則

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}c=nc$。

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}ca_k=c\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$。

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$。

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{m}a_k+\sum\limits_{k=m+1}^{n}a_k$，其中 $1\le m<n$ 且 m 為整數。

3. 等差數列

(1) 定義：

若一數列中，除首項外，其任意一項與前一項的差都相等，稱此數列為等差數列（或算術數列）；其固定的差稱為公差。

(2) 一般項：

設一等差數列的首項為 a_1，公差為 d，項數為 n，一般項為 a_n，則 $a_n = a_1 + (n-1)d$。

4. 等差級數的和

設一等差數列的首項為 a_1，公差為 d，項數為 n，一般項為 a_n，前 n 項和為 S_n，則

$S_n = \dfrac{n\left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2} = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$。

5. 等差中項

設 a、b、c 三個數成等差數列，則等差中項 $b = \dfrac{a+c}{2}$。

6. 等比數列

(1) 定義：

若一數列中，每一項皆不為 0。除首項外，其任意一項與前一項的比值都相等，稱此數列為等比數列（或幾何數列）；其固定的比值稱為公比。

(2) 一般項：

設一等比數列的首項為 a_1，公比為 r，項數為 n，一般項為 a_n，則 $a_n = a_1 \times r^{n-1}$。

7. 等比級數的和

設一等比數列的首項為 a_1，公比為 r，項數為 n，前 n 項和為 S_n，則

(1) 當 $r = 1$ 時，前 n 項的和 $S_n = na_1$。

(2) 當 $r \neq 1$ 時，前 n 項的和 $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$。

8. 等比中項

設 a、b、c 三個數成等比數列，則等比中項 $b = \pm\sqrt{ac}$。

數學公式卡 >>第四冊

排列組合

1. 加法原理

如果完成某件事，有 k 個不同的方式，採用方式一有 m_1 種方法，採用方式二有 m_2 種方法，⋯⋯，採用方式 k 有 m_k 種方法，則完成這件事的方法共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 種。

2. 乘法原理

如果完成某件事須經過 k 個步驟，而完成第一個步驟有 m_1 種方法，完成第二個步驟有 m_2 種方法，⋯⋯，完成第 k 個步驟有 m_k 種方法，每個步驟間所選用的方法互不影響，則完成這件事的方法共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ 種。

3. 相異物的直線排列

(1) 由 n 個不同的事物中，全取排成一列的排列方法數為

$$P^n_n=n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1\text{ 。}$$

(2) 從 n 個不同的事物中，任選 m 個排成一列的排列方法數為

$$P^n_m=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}\text{ 。}$$

4. 不盡相異物的直線排列

(1) 設 n 個事物中有 m 個相同，其餘都不同。則 n 件全取的排列方法數為 $\dfrac{n!}{m!}$ 。

(2) 設 n 個事物中，可分成 k 組。其中第一組有 m_1 個相同物，第二組有 m_2 個相同物，⋯⋯，第 k 組有 m_k 個相同物（此時 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$ ），則此 n 個事物全取排成一列，其排列方法數為 $\dfrac{n!}{m_1!\times m_2!\times\cdots\times m_k!}$ 。

5. 環狀排列

(1) 將 n 個不同的事物作環狀排列，其排列方法數為 $\dfrac{P^n_n}{n}=\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$ 。

(2) 從 n 個不同的事物中，任選 m 個作環狀排列，其排列方法數為 $\dfrac{P^n_m}{m}=\dfrac{1}{m}\times\dfrac{n!}{(n-m)!}$ 。

6. 組合

從 n 件不同的事物中，每次不重複的取 m 個為一組，其組合數為

$$C^n_m=\frac{P^n_m}{m!}=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-m+1)}{m\times(m-1)\times\cdots\times2\times1}\text{ 。}$$

(1) $C^n_m=C^n_{n-m}$ （ $0\le m\le n$ ）。

(2) $C^n_n=C^n_0=1$ 。

機率與統計

1. 聯集

集合A所有的元素與集合B所有的元素所組成的集合，稱為A與B的聯集，記為$A\cup B$，即$A\cup B=\{x|x\in A\text{ 或 }x\in B\}$。

2. 交集

集合A與集合B的共同元素所組成的集合，稱為A與B的交集，記為$A\cap B$，即$A\cap B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\}$。

3. 差集

由屬於集合A，但不屬於集合B的元素所組成的集合，稱為A與B的差集，記為$A-B$，即$A-B=\{x|x\in A\text{ 但 }x\notin B\}$。

4. 宇集與補集

當所探討的集合都是某個集合U的子集時，稱U為宇集。當A是宇集U的子集時，稱U中不屬於A的元素組成的集合為A在U中的補集。

5. 事件

設A、B為樣本空間S中的兩個事件，

(1) 和事件：$A\cup B$表示事件A與事件B所有的樣本所構成的事件，稱為和事件。

(2) 積事件：$A\cap B$表示事件A與事件B共有的樣本所構成的事件，稱為積事件。

(3) 餘事件：A'表示不在A中的樣本所構成的事件，稱為餘事件。

(4) 互斥事件：如果$A\cap B=\varnothing$，則稱A、B兩個事件互斥，也就是事件A與事件B不可能同時發生。

6. 機率的性質

(1) $P(\varnothing)=0$。

(2) $P(S)=1$。

(3) 若$A\subset S$為一事件，則$0\le P(A)\le 1$。

(4) 餘事件的機率：若$A\subset S$為一事件，則$P(A')=1-P(A)$。

(5) 若A和B為S中的兩事件且$A\subset B$，則$P(A)\le P(B)$。

(6) 機率的排容原理：若A和B為S中的兩事件，則$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

7. 期望值

設一試驗的樣本空間S可分割成k個互斥事件，而每個事件發生機率分別為P_1、P_2、……、P_k，且事件發生時分別可得數值M_1、M_2、……、M_k的報酬，則$M_1\times P_1+M_2\times P_2+\cdots+M_k\times P_k$稱為此試驗的數學期望值，簡稱為期望值。

8. 製作次數分配表的步驟

排序、求全距、定組數或組距、定組限、歸類並計算次數。

9. 算術平均數

設一群數值為x_1、x_2、……、x_n，則其算術平均數$\overline{X}$定義為$\overline{X}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$。

10. 中位數

設 n 個數值由小至大排列為 $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$ ，

(1) 若 n 為奇數時，中位數 $Me = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ 。

(2) 若 n 為偶數時，中位數 $Me = \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$ ，即正中間兩個數的平均。

11. 眾數

一群數值中出現次數最多的數稱為眾數，記作 Mo 。又眾數可能不只一個。

12. 百分等級

當某個資料數值，在整體資料中有 $k\%$ 的資料數值小於它，而且有 $(100-k)\%$ 的資料數值大於或等於它，我們稱這個資料數值的百分等級為 k ，記作 $PR = k$ 。

13. 全距

全距是指一群數值資料中，最大值和最小值的差距，通常以 R 表示。

14. 四分位距

設 n 個數值由小至大排列為 $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$ ，將已排列的數值等分成四段，可得三個分界點，最小的分界點稱為第 1 四分位數，以 Q_1 表示；其次即為中位數；最後的分界點稱為第 3 四分位數，以 Q_3 表示。第 3 四分位數 Q_3 與第 1 四分位數 Q_1 的差稱為四分位距，以 IQR 表示，即 $IQR = Q_3 - Q_1$ 。

15. 標準差

設 n 個數值 x_1 、 x_2 、……、 x_n ；以 μ 表示其算術平均數，我們稱 $x_i - \mu$ 為 x_i 的離均差。離均差平方的算術平均數，稱為變異數，而變異數的正平方根稱為標準差。設 n 個資料為 x_1 、 x_2 、……、 x_n ，其算術平均數為 μ ，則標準差為

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\left[(x_1-\mu)^2 + (x_2-\mu)^2 + \cdots + (x_n-\mu)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \text{ 。}$$

16. 簡單隨機抽樣

從母群體中，每一個體被選中的機會都相等的條件下，隨機抽取樣本，稱為簡單隨機抽樣。

17. 系統抽樣

系統抽樣為做一次簡單隨機抽樣後，依據固定間隔數抽出下一個樣本。

18. 分層隨機抽樣

將母群體依某種標準區分成不重複的若干組，每組稱為「層」，且層與層之間有很大的變異性，同一層內的變異性較小。再從每一層中利用簡單隨機抽樣抽出所需比例的樣本數，將所得各層樣本合起來即為樣本。

19. 部落抽樣

其方法為將母群體分成若干部落，而部落間的變異小，部落內的變異大。再從這些部落中抽出數個部落進行抽樣調查或普查。

20. 信賴區間

媒體報導中的滿意度是抽樣受訪民眾的滿意度，將它加上正負抽樣誤差，就得一個信賴區間，而我們有 95% 的信心說，真正滿意的比例會落在信賴區間內。