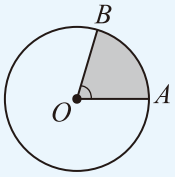
第2章 三角函數

觀念銜接

第1節

1. 弧：圓上一弦將圓周分為兩部分，每一部分都稱為弧。



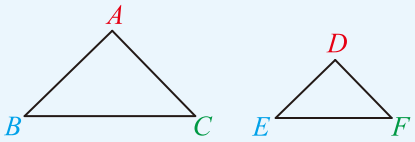
2. 扇形：兩半徑與弧所圍成的圖形。如圖灰底部分。

3. 圓心角：圓上兩半徑所形成的夾角。如圖，扇形 AOB 中，$\angle AOB$ 為圓心角。

4. 半徑為 r 的圓周長為 $2r\pi$，圓面積為 $r^2\pi$。

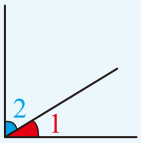
第2節

1. 相似三角形：若兩個三角形相似，則此兩三角形的對應邊成比例且對應角相等。如圖，若 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$，則 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$，且 $\angle A = \angle D$、$\angle B = \angle E$、$\angle C = \angle F$。



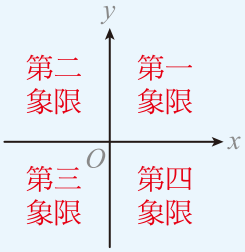
2. 餘角：如果兩個角的度數和為 90°，就稱這兩個角互為餘角。

如圖，若∠1 ＋ ∠2 ＝ 90°，則∠1 與∠2 互為餘角。



第3節

1. 直角坐標：



觀念澄清

(　　) 1. 直角三角形中會有兩個內角互為餘角。

(　　) 2. △ABC 中，若 D、E 分別在 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 上，使得 $\overline{DE}//\overline{BC}$，則 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$。

(　　) 3. 任意三角形皆可作出此三角形的外接圓。

2-1 有向角及其度量

在國中數學中，同學們所學到的角，是由有共同端點的兩個線段所形成的幾何圖形，其大小介於 0° 與 180° 之間。現在，我們討論三角函數，這樣範圍的角已不敷使用。因此，我們必須將角的大小加以推廣。

2-1.1 有向角

在平面上所謂的角，係由有共同端點的兩線段所決定，但如果考慮此兩線段之一是由另一線段繞共同端點旋轉而得，亦無不可。由這個觀念，因旋轉方向（順時針方向或逆時針方向）的不同，可定義出有向角。角的觀念即可推廣為由旋轉而得，那麼它的大小就可依旋轉量的多少來決定。

設 $\overline{OA}$ 為平面上的一線段，將 $\overline{OA}$ 依順時針或逆時針方向，繞定點 O 作單向旋轉至 $\overline{OB}$ 位置所成的角，記作 $\angle AOB$，稱為有向角，如圖 2-1。

$\overline{OA}$ 稱為角的始邊，$\overline{OB}$ 稱為角的終邊，又 O 稱為角的頂點。

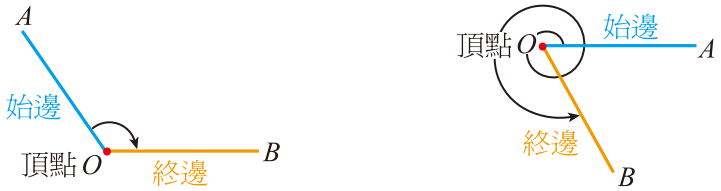


圖 2-1　有向角

通常，我們規定依逆時針方向旋轉所成的有向角為正角；依順時針方向旋轉所成的有向角為負角。如圖 2-2 中，由 $\overline{OA}$ 依逆時針方向旋轉 135°到 $\overline{OB}$ 所成的有向角為 + 135°。習慣上，正角前面的「 + 」號可省略。

又圖 2-3 中，由 $\overline{OA}$ 依順時針方向旋轉 45° 到 $\overline{OB}$ 所成的有向角為 − 45°。

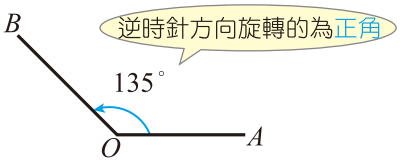


圖 2-2　正角

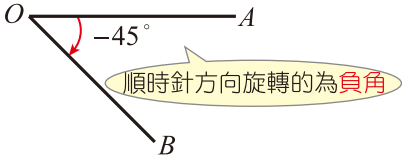


圖 2-3　負角

特別說明　上面的討論中，提到角度量 135° 及 45°，在國中時同學們已學過，我們將在 2-1.2 節中繼續討論角的度量，並介紹另一種以「弧度」來作為角的度量單位。

由上面的討論我們得知：

一個有向角是由始邊、旋轉方向及旋轉量所決定。如此，一個正角可因逆時針方向旋轉很多圈，而使得有向角變得很大。同樣的，一個負角可因順時針方向旋轉很多圈，而使得有向角變得很小。所以，有向角的大小沒有任何限制。

下面三個角，雖然都有相同的始邊 $\overline{OA}$ 及相同的終邊 $\overline{OB}$，如圖 2-4，但因旋轉方向及旋轉量各有不同，所以均表不同的有向角。

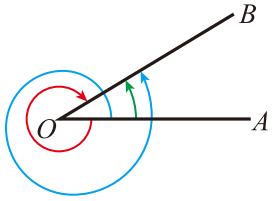


圖 2-4

最後，我們將一些常用的有向角，如圖 2-5，定義如下：

1. 周角：由始邊依逆時針方向旋轉一圈的有向角。此時，始邊與終邊重合。
2. 平角：由始邊依逆時針方向旋轉 $\frac{1}{2}$ 圈的有向角。此時，始邊與終邊在同一直線上，但方向相反。
3. 直角：由始邊依逆時針方向旋轉 $\frac{1}{4}$ 圈的有向角。此時，始邊與終邊互相垂直。
4. 零角：始邊與終邊重合且無旋轉量的有向角。

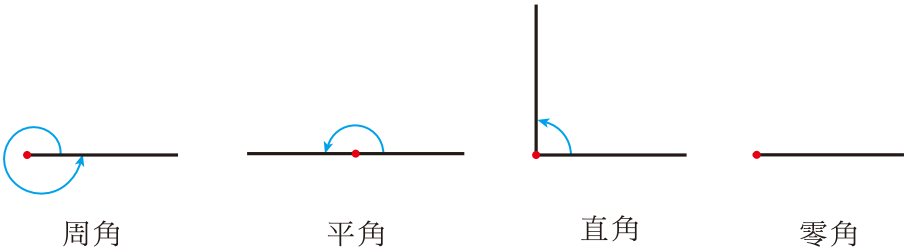


圖 2-5

2-1.2 角的度量

關於角的度量，通常沿襲古埃及人和巴比倫人的習慣，用「度」作為量角的單位。另外，數學上也常用「弧度」來作為角的度量單位。現在分別介紹如下：

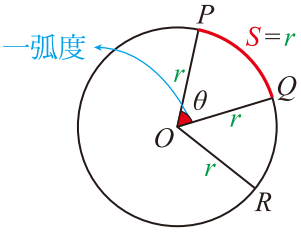
1. 六十分制

將一圓周分為 360 等分，每一等分所對的圓心角稱為一度，記作 $1°$；再將一度分為 60 等分，每一等分稱為一分，記作 $1'$；一分再分為 60 等分，每一等分稱為一秒，記作 $1''$。例如：45 度 28 分 37 秒，可記作 $45°28'37''$。

依六十分制，我們可知：$1°=60'$，$1'=60''$，1 周角$=360°$，1 直角$=90°$。

2. 弧度制

在圓周上，截取與半徑等長之弧，則此弧所對的圓心角稱為一弧度（或稱一弳）。如圖 2-6 所示：



$\overset{\frown}{PQ}$長$=\overset{\frown}{QR}$長$=r$

圖 2-6 一弧度

圓弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 及 $\overset{\frown}{QR}$ 的長均等於半徑 r，即圓弧 $\overset{\frown}{PR}$ 的長為 $2r$，則 $\angle POQ$ 為 1 弧度，而 $\angle POR$ 為 2 弧度。所以，在圓上弧長為 S 的圓弧所對的圓心角 θ 就是 $\dfrac{S}{r}$ 弧度，即

公　式

$$\theta=\frac{S}{r}\text{（弧度）}$$

又圓的周長為 $2\pi r$，所以圓周角等於 $\dfrac{2\pi r}{r}=2\pi$ 弧度。半圓的弧長為 πr，則平角等於 $\dfrac{\pi r}{r}=\pi$ 弧度，直角等於 $\dfrac{\pi}{2}$ 弧度。

特別說明

(1) 以弧度作為角的度量單位時，通常省略不寫。例如：$\theta=2$ 弧度，常寫成 $\theta=2$。

(2) π 為圓周率，並非角的單位，$\theta=\pi$ 表示 θ 約等於 3.1416 弧度。

小考箱

(　　) 1. 已知角 θ 的度量為 $\pi°$，則角 θ 為一平角。

3. 度與弧度的換算

因為 $360° = 2\pi$ 弧度，所以 $1° = \frac{2\pi}{360}$ 弧度 $= \frac{\pi}{180}$ 弧度 $\fallingdotseq 0.01745$ 弧度。

又 1 弧度 $= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \fallingdotseq 57.2958°$。

類　型	解　法
「度」換算為「弧度」	將其以度為單位的值，乘以 $\frac{\pi}{180}$
「弧度」換算為「度」	將其以弧度為單位的值，乘以 $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

現將一些常用特別角的度量與弧度量之對照，列表如下：

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

例題 1

將下列各角化成以弧度為單位：

(1) 1200°　(2) $-330°$　(3) 22°30'

解 (1) $1200° = 1200 \times \frac{\pi}{180} = \frac{20\pi}{3}$

(2) $-330° = -330 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{11\pi}{6}$

(3) $22°30' = 22.5° = 22.5 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{8}$

隨堂練習

將下列各角化成以弧度為單位：

(1) 105°　(2) 420°　(3) $-540°$

例題 2

將下列各角化成以度為單位：

(1) $\frac{7\pi}{4}$　(2) $-\frac{9\pi}{2}$　(3) 3

解 (1) $\frac{7\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=315^{\circ}$

(2) $-\frac{9\pi}{2}=-\frac{9\pi}{2}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=-810^{\circ}$

(3) $3=3\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=\left(\frac{540}{\pi}\right)^{\circ}$

隨堂練習

將下列各角化成以度為單位：

(1) $\frac{4\pi}{3}$　(2) $-\frac{4\pi}{5}$　(3) -2

2-1.3 扇形的弧長與面積

設有一圓 O，半徑為 r，扇形 POQ的圓心角 $\angle POQ$ 為 θ 弧度，弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的長為 S，如圖 2-7，由弧度的定義知：

$$\theta=\frac{S}{r}$$

因此，我們可得 $S=r\theta$。

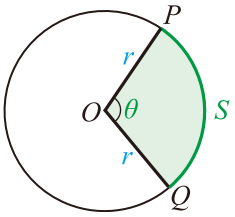


圖 2-7　扇形面積

設扇形 POQ 的面積為 A，由於扇形的面積與圓面積的比應為其所對應的圓心角之比，故得

$$\frac{A}{\pi r^2}=\frac{\theta}{2\pi}\text{（因為圓面積為 }\pi r^2\text{，一周角}=2\pi\text{）}$$

即 $A=\frac{\theta}{2\pi}\times\pi r^2=\frac{1}{2}r^2\theta$

再把 $S=r\theta$ 代入上式得

$$A=\frac{1}{2}r\times r\theta=\frac{1}{2}rS$$

由上面的討論，如果以弧度作為角的度量單位，則我們可得扇形的弧長與面積公式如下：

公　式

設一扇形的半徑為 r、弧長為 S、圓心角為 θ 弧度、面積為 A，則

(1) $S = r\theta$

(2) $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rS$

小考箱

(　　) 2. 設扇形的半徑為 r，圓心角為 θ 弧度，則扇形的周長 $P = 2r + r\theta$。

例題 3

設有一扇形的半徑為 6 公分，圓心角為 150°，試求此扇形的弧長與面積。

解 已知半徑 $r = 6$ 公分

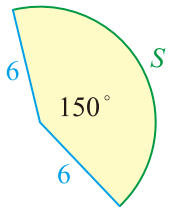
又 $\theta = 150° = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$

所以扇形的弧長

$S = r\theta = 6 \times \frac{5\pi}{6} = 5\pi$（公分）

扇形的面積

$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{5\pi}{6} = 15\pi$（平方公分）



隨堂練習

在半徑為 15 的圓上，試求圓心角 240°所對的弧長及所張的扇形面積。

例題 4

設一扇形的半徑為 12 公分，弧長為 15 公分，試求此扇形的圓心角及面積。

解 已知 $r=12$ 公分，$S=15$ 公分

則 $\theta=\dfrac{S}{r}=\dfrac{15}{12}=\dfrac{5}{4}$

又 $A=\dfrac{1}{2}rS=\dfrac{1}{2}\times12\times15=90$

所以扇形的圓心角為 $\dfrac{5}{4}$ 弧度，面積為 90 平方公分

隨堂練習

設有一扇形的圓心角為 $60°$，弧長為 10π 公分，試求此扇形的半徑及面積。

特別說明

利用公式 $S=r\theta$ 及 $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rS$ 求扇形的弧長與面積時，必須以弧度作為角的度量單位。

2-1.4 同界角

兩個有向角，若具有相同的始邊與終邊，則我們稱這兩個角為同界角。如圖 2-8 所示，$60°$ 角與 $420°$ 角為同界角，而 $-45°$ 角與 $675°$ 角亦為同界角。

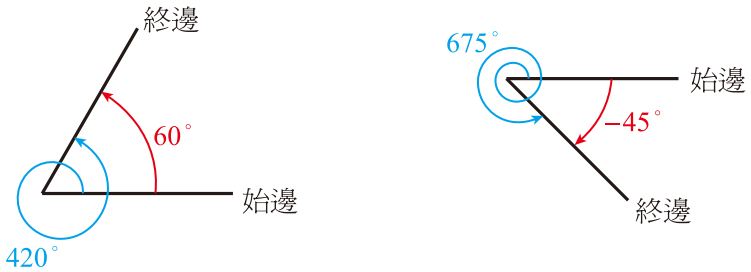


圖 2-8 同界角

由於同界角大小相差都是周角（即 $360°$ 或 2π）的整數倍數。因此，我們得知：

公 式

設 θ 與 ϕ 為同界角，n 為整數，則 $\theta-\phi=n\times360°$ 或 $\theta-\phi=2n\pi$。

同時，我們也注意到一個角有無限多個同界角。

例如：420° 的同界角可寫成 $n\times360°+420°$。（其中 n 為整數）

令 $n=\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,\cdots$，則可得到 $\cdots,-660°,-300°,60°,420°,780°,1140°,\cdots$ 等一連串的同界角。

其中 60°為最小的正同界角，而 $-300°$為最大的負同界角，又 60°與 $-300°$ 相差 360°。因此，將最小正同界角 60° 減去 360°，即得最大負同界角 $-300°$。

特別說明

(1) 0° 的角及其同界角，就無所謂最小正同界角與最大負同界角。

(2) 除了 0° 的角及其同界角外，任一角的最小正同界角恆小於 360°。

(3) （最大負同界角）＝（最小正同界角）－ 360°。

小考箱

（　）3. 已知角 $\theta\neq n\times360°$（其中 n 為整數），則角 θ 有唯一的一個最小正同界角。

例題 5

試判別下列何者為 120°的同界角？

(1) $-960°$　(2) $1320°$　(3) $2280°$

解 (1) $120°-(-960°)=1080°=3\times360°$

所以 $-960°$ 為 120° 的同界角

(2) $120°-1320°=-1200°$ 不為 360° 的倍數

所以 1320° 不為 120° 的同界角

(3) $120°-2280°=-2160°=(-6)\times360°$

所以 2280° 為 120° 的同界角

隨堂練習

指出下列哪一個角為 $\frac{7\pi}{4}$ 的同界角？

(1) $\frac{21\pi}{4}$　(2) $-\frac{35\pi}{4}$　(3) $\frac{23\pi}{4}$

例題 6

求下列各角的最小正同界角及最大負同界角：

(1) $-840°$　(2) $\dfrac{20\pi}{3}$

解 (1) $-840°=(-3)\times 360°+240°$

又 $240°-360°=-120°$

所以 $-840°$ 的最小正同界角為 $240°$，最大負同界角為 $-120°$

(2) $\dfrac{20\pi}{3}=2\pi\times 3+\dfrac{2\pi}{3}$

又 $\dfrac{2\pi}{3}-2\pi=-\dfrac{4\pi}{3}$

所以 $\dfrac{20\pi}{3}$ 的最小正同界角為 $\dfrac{2\pi}{3}$，最大負同界角為 $-\dfrac{4\pi}{3}$

隨堂練習

求下列各角的最小正同界角及最大負同界角：

(1) $1200°$　(2) $-\dfrac{15\pi}{4}$

2-1.5 標準位置角

在坐標平面上，設 θ 為有向角，頂點在原點，角的始邊與 x 軸的正向重合，則我們稱 θ 為標準位置角。當標準位置角 θ 的終邊落在第一（二、三、四）象限內者，稱為第一（二、三、四）象限角，如圖 2-9 所示。

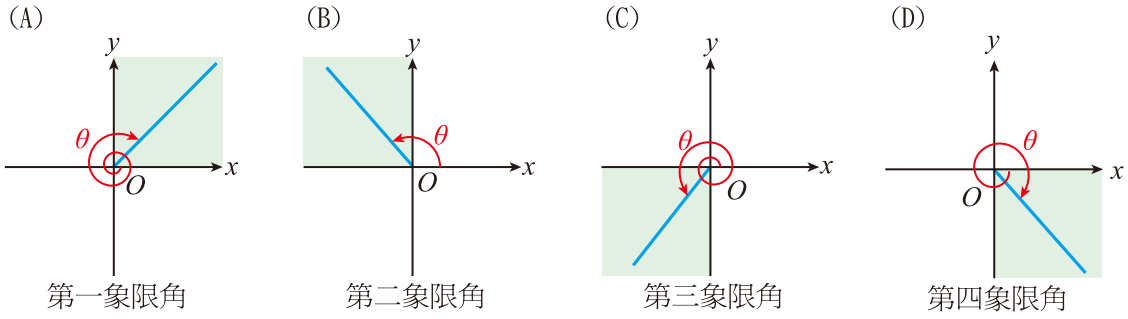


圖 2-9　標準位置角

特別說明

設 n 為整數，$\theta = n\times 360° + \phi$（其中 $0° < \phi < 360°$）

(1) 若 $0° < \phi < 90°$，則 θ 為第一象限角。

(2) 若 $90° < \phi < 180°$，則 θ 為第二象限角。

(3) 若 $180° < \phi < 270°$，則 θ 為第三象限角。

(4) 若 $270° < \phi < 360°$，則 θ 為第四象限角。

當標準位置角 θ 的終邊剛好落在坐標軸上時，稱為象限角。

例如：0°，180°，－270°，360°，－90°，…等均為象限角。

例題 7

試指出下列各角分別為哪一象限角？

(1) 675°　(2) －225°　(3) 540°　(4) $\frac{17\pi}{4}$

解 (1) $675° = 1\times 360° + 315°$

因為 $270° < 315° < 360°$

所以 675° 為第四象限角

(2) $-225° = (-1)\times 360° + 135°$

因為 $90° < 135° < 180°$

所以 －225° 為第二象限角

(3) $540° = 1\times 360° + 180°$

所以 540° 為象限角

(4) $\frac{17\pi}{4} = 2\times 2\pi + \frac{\pi}{4}$

因為 $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

所以 $\frac{17\pi}{4}$ 為第一象限角

隨堂練習

試指出下列各角分別為哪一象限角？

(1) －745°　(2) 1230°　(3) $-\frac{9\pi}{2}$　(4) $\frac{42\pi}{5}$

習題 2-1

1. 將下列各角化成以弧度為單位：

(1) $300°$　(2) $-270°$　(3) $67°30'$

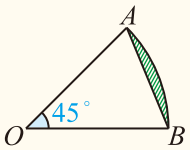
2. 將下列各角化成以度為單位：

(1) $\frac{3\pi}{4}$　(2) $\frac{1}{2}$　(3) $-\frac{8\pi}{3}$

3. 若一扇形的圓心角為 $135°$，半徑為 16 公分，試求此扇形的弧長及面積。

4. 若一扇形的弧長為 25π 公分，圓心角為 $150°$，試求此扇形的半徑及面積。

5. 如右圖所示：已知 $\angle AOB = 45°$，半徑 $\overline{OA} = 4\sqrt{2}$，試求斜線部分面積。



6. 試判別下列何者為 $145°$ 的同界角？

(1) $745°$　(2) $1225°$　(3) $-575°$

7. 求下列各角的最小正同界角及最大負同界角：

(1) $-700°$　(2) $\frac{32\pi}{5}$

8. 指出下列各角分別為哪一象限角？

(1) $-435°$　(2) $810°$　(3) 2　(4) $\frac{13\pi}{4}$

2-2 銳角三角函數的定義及基本性質

很多數學在實際的應用中，解直角三角形一直被廣泛的使用著，我們現在就利用國中所學過相似三角形的性質，在直角三角形上定義出六個銳角的三角函數，作為探討三角函數的基礎。

2-2.1 銳角三角函數的定義

兩個直角三角形若有一銳角相等，則此兩三角形必相似。而且，相似三角形的對應邊長成比例，考慮下面的圖形，如圖 2-10 所示。

設 $\overline{B_1C_1} \perp \overline{AC_1}$，$\overline{B_2C_2} \perp \overline{AC_2}$，

則 $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2$

因此 $\dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \dfrac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}}$，$\dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \dfrac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}}$

$\dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \dfrac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}}$，$\dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{B_1C_1}} = \dfrac{\overline{AC_2}}{\overline{B_2C_2}}$

$\dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \dfrac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}}$，$\dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C_1}} = \dfrac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2C_2}}$

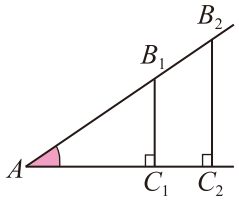


圖 2-10

由上圖可知，在一個直角三角形中，若銳角 $\angle A$ 大小不變，其各邊長短雖變，但其任兩邊的比值不變。若銳角 $\angle A$ 大小改變，則其任兩邊的比值隨著改變，所以其任兩邊的比值是銳角 $\angle A$ 的函數，因為直角三角形任兩邊的比值共有六種，因此，我們可以定義六個銳角 $\angle A$ 的三角函數。

在直角 $\triangle ABC$ 中，設 $\angle C$ 為直角，則 $\overline{AB}$ 稱為斜邊，兩股 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 分別稱為 $\angle A$ 的鄰邊與對邊，如圖 2-11 所示。

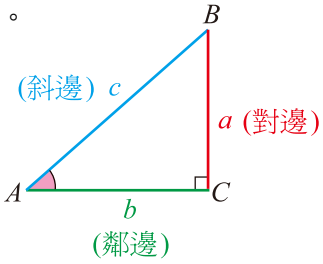


圖 2-11

設 $\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，則我們可定義 $\angle A$的六個三角函數如下：

$\angle A$ 的正弦函數：$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$

$\angle A$ 的餘弦函數：$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$

$\angle A$ 的正切函數：$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$

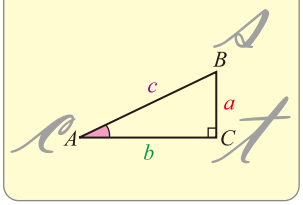
$\angle A$ 的餘切函數：$\cot A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{b}{a}$

$\angle A$ 的正割函數：$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$

$\angle A$ 的餘割函數：$\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{c}{a}$

（互為倒數）

小幫手



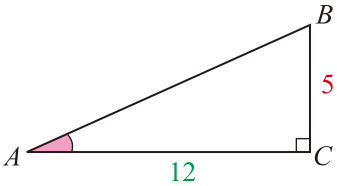
例題 1

已知直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\overline{AC}=12$，$\overline{BC}=5$，試求 $\angle A$ 的各三角函數值。

解　已知 $\angle C=90°$，$\overline{AC}=12$，$\overline{BC}=5$

由商高定理知：

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$



故得 $\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{5}{13}$，$\cos A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{12}{13}$

$\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{5}{12}$，$\cot A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{12}{5}$

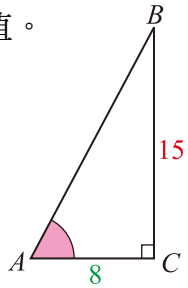
$\sec A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{13}{12}$，$\csc A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{13}{5}$

隨堂練習

已知直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\overline{AB}=\sqrt{10}$，$\overline{BC}=1$，試求 $\angle B$ 的各三角函數值。

例題 2

設 $\angle A$ 為銳角且 $\tan A=\frac{15}{8}$，試求 $\angle A$ 的其餘各三角函數值。



解 作直角 $\triangle ABC$，使 $\angle A$ 的鄰邊 $\overline{AC}=8$，$\angle A$ 的對邊 $\overline{BC}=15$，如右圖所示，則

$$\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{15}{8}$$

由商高定理知：

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{8^2+15^2}=17$$

故得 $\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{15}{17}$，$\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{8}{17}$

$\cot A=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{8}{15}$，$\sec A=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{17}{8}$

$\csc A=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{17}{15}$

隨堂練習

在直角 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=90°$，$\cot A=\frac{4}{3}$，試求 $\angle A$ 的其餘各三角函數值。

2-2.2 三角函數的恆等關係

由銳角三角函數的定義可知：$\sin A$、$\cos A$、$\tan A$ 分別與 $\csc A$、$\sec A$、$\cot A$ 互為倒數。

倒數關係式

$\sin A\times\csc A=1$，即 $\csc A=\frac{1}{\sin A}$

$\cos A\times\sec A=1$，即 $\sec A=\frac{1}{\cos A}$

$\tan A\times\cot A=1$，即 $\cot A=\frac{1}{\tan A}$

又 $\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\dfrac{\sin A}{\cos A}$，$\cot A=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\dfrac{\cos A}{\sin A}$

因此，我們又可得商數關係式如下：

商數關係式

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}\qquad\qquad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$$

例題 3

已知 $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$，試求 $\dfrac{3\sin\theta+4\cos\theta}{5\cos\theta-6\sin\theta}$ 的值。

解 $\dfrac{3\sin\theta+4\cos\theta}{5\cos\theta-6\sin\theta}=\dfrac{\frac{3\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{4\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{5\cos\theta}{\cos\theta}-\frac{6\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{3\tan\theta+4}{5-6\tan\theta}=\dfrac{3\times\frac{2}{3}+4}{5-6\times\frac{2}{3}}=\dfrac{2+4}{5-4}=6$

隨堂練習

已知 $\cot\theta=2$，試求 $\dfrac{2\cos\theta+3\sin\theta}{3\sin\theta-5\cos\theta}$ 的值。

從倒數關係式與商數關係式中，我們看出只要用正弦函數與餘弦函數，就可以表示出其他的三角函數。因此，這兩個函數是比較基本且重要的三角函數。

在直角 $\triangle ABC$ 中，設 $\angle C=90°$，因為三角形的內角和為 $180°$，所以 $\angle A+\angle B=90°$ 或 $\angle B=90°-\angle A$，即 $\angle A$ 與 $\angle B$ 互為餘角，如圖 2-12。

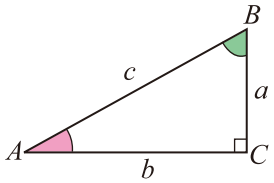


圖 2-12

我們發現 $\angle A$ 的對邊 a 恰為 $\angle B$ 的鄰邊，由正弦和餘弦函數的定義可得

$$\sin A=\frac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{a}{c}=\frac{\angle B\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\cos B=\cos(90°-A)$$

同理可得

$$\cos A=\sin B=\sin(90°-A)$$

$\tan A = \cot B = \cot(90° - A)$　　$\cot A = \tan B = \tan(90° - A)$

$\sec A = \csc B = \csc(90° - A)$　　$\csc A = \sec B = \sec(90° - A)$

將 $\angle A$ 以 θ 代替，則可得餘角關係式如下：

餘角關係式

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$　　$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$　　$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

$\sec(90° - \theta) = \csc\theta$　　$\csc(90° - \theta) = \sec\theta$

在上面的餘角關係式中，就是把正弦函數改為餘弦函數，並且把餘弦函數改為正弦函數。因此，我們稱正弦函數與餘弦函數互為餘函數。同樣的，正切函數與餘切函數互為餘函數，正割函數與餘割函數互為餘函數。

小考箱

(　　) 4. 直角 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90°$，則 $\sin A = \cos B$，$\tan A = \cot B$，$\sec A = \csc B$。

例題 4

將下列各三角函數化為其餘函數：

(1) $\cos 40°$　(2) $\csc 25°$　(3) $\tan\frac{3\pi}{10}$

解 (1) $\cos 40° = \sin(90° - 40°) = \sin 50°$

(2) $\csc 25° = \sec(90° - 25°) = \sec 65°$

(3) $\tan\frac{3\pi}{10} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cot\frac{\pi}{5}$

隨堂練習

化下列各三角函數為其餘函數：

(1) $\tan 40°$　(2) $\cos 50°$　(3) $\csc\frac{\pi}{3}$

習慣上，我們把 $(\sin A)^n$ 記作 $\sin^n A$（其中 n 為正整數），讀作 $\sin A$ 的 n 次方，其餘各三角函數亦同。例如：$(\sin\theta)^2=\sin^2\theta$，$(\cos\theta)^3=\cos^3\theta$。

根據圖 2-12，再利用商高定理我們可得

$$\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$$

將上式兩邊同除以 $\cos^2 A$，則可得

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+1=\frac{1}{\cos^2 A}$$

即 $\tan^2 A+1=\sec^2 A$

若將 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 兩邊同除以 $\sin^2 A$，則可得

$$1+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\frac{1}{\sin^2 A}$$

即 $1+\cot^2 A=\csc^2 A$

因此，我們得到銳角三角函數的平方關係式如下：

平方關係式

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

小考箱

(　　) 5. 設 θ 為銳角，則 $\sec^2\theta-\tan^2\theta=\csc^2\theta-\cot^2\theta$。

特別說明

上述三角函數的關係式，可借助如圖 2-13 的 Johnson 正六邊形來幫助記憶。

(1) 倒數關係式：正六邊形中任意兩個對角的函數之乘積恆為中心值 1，例如：

$\sin\theta\times\csc\theta=1$

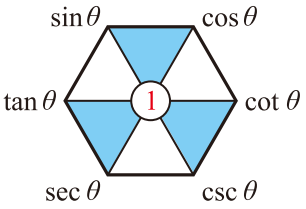


圖 2-13

(2) 商數關係式：正六邊形中任一角的函數等於其相鄰兩個角的函數之乘積，例如：

$$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta，即\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

(3) 平方關係式：正六邊形中每一個倒立的三角形▼，上方兩個角函數的平方和等於下方一個角函數的平方。例如：

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1^2$$

例題 5

試求 $\sin^2 20° + \tan^2 40° - \sec^2 40° + \cos^2 20°$ 的值。

解 原式 $= (\sin^2 20° + \cos^2 20°) + \tan^2 40° - \sec^2 40°$

$= 1 + \tan^2 40° - \sec^2 40°$

$= \sec^2 40° - \sec^2 40°$

$= 0$

隨堂練習

試求 $\sin^2 25° - \cot^2 65° + \csc^2 65° + \cos^2 25°$ 的值。

以下這一節中，所出現的 θ 角均為銳角。

例題 6

試求 $(\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin\theta + \cos\theta)^2$ 的值。

解 $(\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin\theta + \cos\theta)^2$

$= (\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) + (\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= 2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= 2$（因為 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$）

隨堂練習

試求 $(\sin\theta - 3\cos\theta)^2 + (3\sin\theta + \cos\theta)^2$ 的值。

例題 7

已知 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，試求下列各值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\tan\theta+\cot\theta$　(3) $\sec\theta+\csc\theta$

解 (1) 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

兩邊平方得 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

$\Rightarrow\ 1+2\sin\theta\cos\theta=2\ \Rightarrow\ 2\sin\theta\cos\theta=1$

故得 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

(2) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

(3) $\sec\theta+\csc\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

隨堂練習

已知 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，試求下列各值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\tan\theta+\cot\theta$　(3) $\sec\theta-\csc\theta$

2-2.3 30°、45°、60°等特別角的三角函數值

1. 45°角的三角函數值

作一等腰直角 $\triangle ABC$，使 $\angle C = 90°$，$\angle A = \angle B = 45°$，取 $\overline{AC} = \overline{BC} = 1$，如圖 2-14 所示，由商高定理知：

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

由銳角三角函數的定義得

$\sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　$\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45° = \dfrac{1}{1} = 1$　　$\cot 45° = \dfrac{1}{1} = 1$

$\sec 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$　　$\csc 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

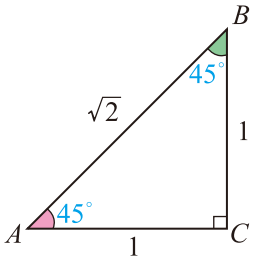


圖 2-14
45°的三角函數值

2. 30° 角與 60° 角的三角函數值

作一正 $\triangle ABD$，再由 B 作 $\overline{BC} \perp \overline{AD}$，垂足為 C，則 $\angle A = 60°$，$\angle ABC = 30°$，如圖 2-15 所示，取 $\overline{AB} = 2$，則由幾何性質知：$\overline{AC} = 1$，又由商高定理知：

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

在直角 $\triangle ABC$ 中，由銳角三角函數的定義得

(1) $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$\cos 60° = \dfrac{1}{2}$

$\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$　　$\cot 60° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec 60° = \dfrac{2}{1} = 2$　　$\csc 60° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$　　$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　$\cot 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\sec 30° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　$\csc 30° = \dfrac{2}{1} = 2$

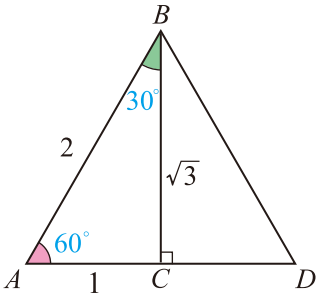


圖 2-15
30°與 60°的三角函數值

為了方便記憶，我們將特別角三角函數值列表如下：

函數 / 角度 θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$30°\ (\frac{\pi}{6})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$45°\ (\frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°\ (\frac{\pi}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

例題 8

求 $\sin^2 45° + 2\sec^2 60° - \tan^2 60° + \csc^2 30°$ 的值。

解 原式 $=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\times 2^2 - (\sqrt{3})^2 + 2^2$

$=\frac{1}{2} + 8 - 3 + 4$

$=\frac{19}{2}$

隨堂練習

試求 $\sin\frac{\pi}{3}\times\tan^2\frac{\pi}{4}\times\sec\frac{\pi}{6}\times\cot^2\frac{\pi}{6}$ 的值。

習題 2-2

1. 直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\overline{AB} = 25$，$\overline{AC} = 24$，試求 $\angle A$ 的各三角函數值。

2. 直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，又 $\tan A = \frac{1}{3}$，$\overline{BC} = 3$，試求 $\overline{AC}$ 及 $\angle B$ 的各三角函數值。

3. 試求 $\sin 5° \times \cos 10° \times \tan 15° \times \cot 15° \times \sec 10° \times \csc 5°$ 的值。

4. 已知 $\tan\theta = \frac{3}{4}$，試求 $\frac{2\sin\theta + 3\cos\theta}{4\sin\theta - 5\cos\theta}$ 的值。

5. 已知 $\tan\theta = 3$，試求下列各值：
   (1) $\sec^2\theta$
   (2) $\cos^2\theta$
   (3) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta}$

6. 已知 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{3}$，試求下列各值：
   (1) $(\sin\theta - \cos\theta)^2$
   (2) $\tan\theta + \cot\theta$

7. 試求 $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{1}{1+\sec\theta} + \frac{1}{1+\csc\theta}$ 的值。
   《提示》利用 $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$，$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$。

8. 試求下列各值：
   (1) $\sin^2 30° + 4\cot 45° - \sec^2 60° + \tan^2 45°$
   (2) $\left(1 + \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\right) \times \left(1 - \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\right)$

2-3 任意角的三角函數

在前面所討論的三角函數，均限制角 θ 為銳角。若將角 θ 推廣為有向角，則角的大小就沒有任何限制，現在我們將定義這種任意角的三角函數。

2-3.1 任意角三角函數的定義

設角 θ 為標準位置角，則角 θ 的終邊可能落在第一象限、第二象限、第三象限或第四象限，如圖 2-16，也可能落在 x 軸或 y 軸上。

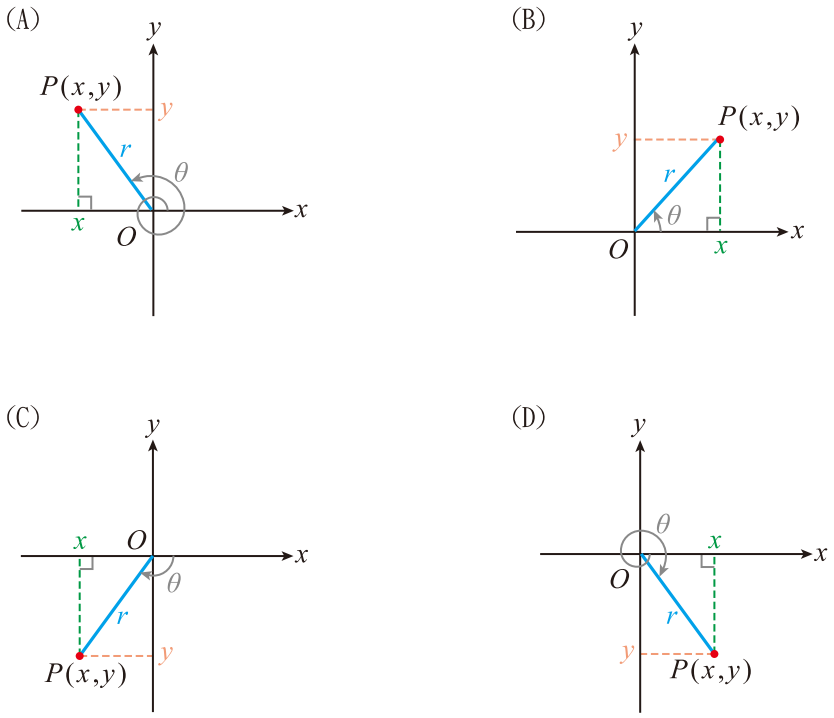


圖 2-16 任意角的三角函數

在角 θ 的終邊上任取異於原點的一點 $P(x, y)$，則 x、y 的值可正、可負或 0，令 $r = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$，則 r 的值恆為正。由於相似三角形對應邊的長度成比例，因此六個三角函數值的定義只跟角 θ 的大小有關，而跟角 θ 終邊上 P 點的選擇無關。現在我們就以 x、y、r 三個數來定義任意角的三角函數如下：

任意角的三角函數

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$　　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$（$x\neq0$）　　$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$（$y\neq0$）

$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$（$x\neq0$）　　$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$（$y\neq0$）

特別說明　當角 θ 為銳角時，點 $P(x,y)$ 之 x、y 值均為正，如圖 2-17 所示，我們可將 r 視為直角 $\triangle OPQ$ 的斜邊，x、y 分別視為角 θ 的鄰邊與對邊，則上面的定義與前面所定義的銳角三角函數完全相同。

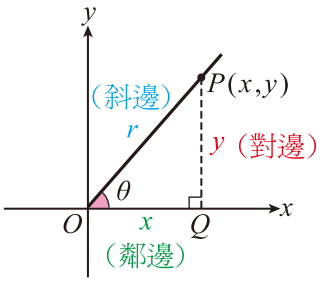


圖 2-17

由上面任意角三角函數的定義中，x、y 可為任意實數，且 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 恆為正數，因此我們得知 $|y|\leq r$，$|x|\leq r$，亦即 $\left|\dfrac{y}{r}\right|\leq1$，$\left|\dfrac{x}{r}\right|\leq1$

又當 $x\neq0$ 時：$\dfrac{y}{x}$ 可為任意實數，$\left|\dfrac{r}{x}\right|\geq1$

當 $y\neq0$ 時：$\dfrac{x}{y}$ 可為任意實數，$\left|\dfrac{r}{y}\right|\geq1$

所以，我們可得三角函數值的範圍如下：

三角函數值的範圍

(1) $|\sin\theta|\leq1$，$|\cos\theta|\leq1$

(2) $\tan\theta$、$\cot\theta$ 的值可為任意實數

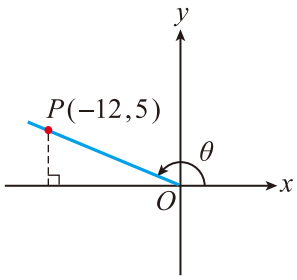
(3) $|\sec\theta|\geq1$，$|\csc\theta|\geq1$

小考箱

(　　) 6. 設 θ 不為象限角，則 $|\sin\theta| < 1$，$|\cos\theta| < 1$，$|\sec\theta| > 1$，$|\csc\theta| > 1$ 恆成立。

例題 1

設點 $P(-12, 5)$ 為標準位置角 θ 終邊上的一點，試求角 θ 的各三角函數值。



解　已知 $P(-12, 5)$，即 $x = -12$，$y = 5$

又 $r = \overline{OP} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{169} = 13$

所以 $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{5}{13}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r} = -\dfrac{12}{13}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = -\dfrac{5}{12}$

$\cot\theta = \dfrac{x}{y} = -\dfrac{12}{5}$，$\sec\theta = \dfrac{r}{x} = -\dfrac{13}{12}$，$\csc\theta = \dfrac{r}{y} = \dfrac{13}{5}$

隨堂練習

設點 $P(15, -8)$ 為標準位置角 θ 終邊上的一個點，試求角 θ 的各三角函數值。

由任意角三角函數的定義，我們得知：凡是同界角均有相同的三角函數值。設 n 為整數，則

同界角的三角函數

$\sin(n\times360^\circ+\theta) = \sin\theta$　　$\cos(n\times360^\circ+\theta) = \cos\theta$

$\tan(n\times360^\circ+\theta) = \tan\theta$　　$\cot(n\times360^\circ+\theta) = \cot\theta$

$\sec(n\times360^\circ+\theta) = \sec\theta$　　$\csc(n\times360^\circ+\theta) = \csc\theta$

利用上面的公式，我們可將任意角的三角函數化成 0°～360° 的三角函數。

例如：$\cos 855° = \cos(2\times 360° + 135°) = \cos 135°$

$\tan(-1400°) = \tan[(-4)\times 360° + 40°] = \tan 40°$

另外，我們可由角 θ 終邊所在的象限，來確定三角函數值的正負。

(1) 當 θ 為第一象限角時：其終邊上的點 $P(x, y)$ 必是 $x > 0$，$y > 0$，而 $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$，由定義知：六個三角函數值均為正數。

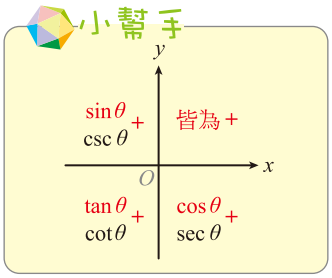
(2) 當 θ 為第二象限角時：其終邊上的點 $P(x, y)$ 必是 $x < 0$，$y > 0$，而 $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$，由定義知：只有 $\sin\theta$、$\csc\theta$ 為正數，其餘均為負數。

(3) 當 θ 為第三象限角時：其終邊上的點 $P(x, y)$ 必是 $x < 0$，$y < 0$，而 $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$，由定義知：只有 $\tan\theta$、$\cot\theta$ 為正數，其餘均為負數。

(4) 當 θ 為第四象限角時：其終邊上的點 $P(x, y)$ 必是 $x > 0$，$y < 0$，而 $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$，由定義知：只有 $\cos\theta$、$\sec\theta$ 為正數，其餘均為負數。

上述之性質，我們可列表如下：

θ 所在象限 / 三角函數	I	II	III	IV
$\sin\theta$、$\csc\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$、$\sec\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$、$\cot\theta$	+	−	+	−



例題 2

試判別下列各三角函數值的正負：

(1) $\tan 480°$　(2) $\cos(-800°)$　(3) $\csc\dfrac{20\pi}{3}$

解 (1) $480° = 1\times 360° + 120°$ 為第二象限角

所以 $\tan 480°$ 的值為負

(2) $-800° = (-3)\times 360° + 280°$ 為第四象限角

所以 $\cos(-800°)$ 的值為正

(3) $\frac{20\pi}{3}=3\times 2\pi+\frac{2\pi}{3}$ 為第二象限角

所以 $\csc\frac{20\pi}{3}$ 的值為正

隨堂練習

試判別下列各三角函數值的正負：

(1) $\sin(-680°)$　(2) $\sec 1330°$　(3) $\tan\frac{41\pi}{6}$

例題 3

已知 $\tan\theta>0$ 且 $\sin\theta<0$，試求角 θ 所在象限。

解 已知 $\tan\theta>0 \Rightarrow \theta$ 為第一或第三象限角

$\sin\theta<0 \Rightarrow \theta$ 為第三或第四象限角

所以 θ 為第三象限角

隨堂練習

已知 $\sec\theta>0$，$\cot\theta<0$，試求角 θ 所在象限。

例題 4

已知 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$，又 $\cos\theta>0$，試求 $\sin\theta+\cos\theta$ 的值。

解 已知 $\tan\theta=-\frac{4}{3}<0$，又 $\cos\theta>0$

所以 θ 為第四象限角，即 $x>0$，$y<0$

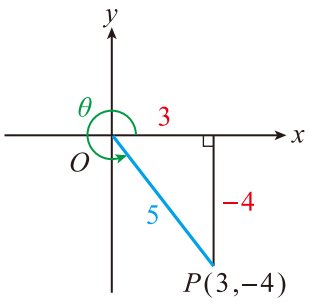
由 $\tan\theta=\frac{y}{x}=-\frac{4}{3}=\frac{-4}{3}$

因為三角函數值只跟角 θ 的大小有關

而跟角 θ 終邊上 P 點的選擇無關

為了方便計算

取 $x=3$，$y=-4$，則 $r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$



即 $\sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{4}{5}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$

故得 $\sin\theta+\cos\theta=\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}$

隨堂練習

已知 $\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$，又 $\cot\theta>0$，試求 $\tan\theta+\cot\theta$ 的值。

在 2-2 節中，我們討論過銳角三角函數的一些基本關係式：倒數關係、商數關係及平方關係。由任意角三角函數的定義，可以看出這些基本關係式對於任意角而言，在函數值有意義的情形下仍然是成立的。利用這些恆等式，只要知道角 θ 的某一個三角函數值及角 θ 所在的象限，就可以求出其他的三角函數值。

小考箱

(　　) 7. 設 θ 不為象限角，則 $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\csc\theta$。

例題 5

已知 θ 為第三象限角且 $\sin\theta=a$，試以 a 表示 θ 的其他各三角函數值。

解 利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 可得 $\cos\theta=\pm\sqrt{1-a^2}$

但已知 θ 為第三象限角，故得 $\cos\theta<0$

所以 $\cos\theta=-\sqrt{1-a^2}$

由商數關係知 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

再由倒數關係得

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$，$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$，$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{a}$

隨堂練習

已知 θ 為第二象限角且 $\cos\theta = k$，試以 k 表示 θ 的其他各三角函數值。

2-3.2 象限角的三角函數值

在坐標平面上，以原點為圓心，作一單位圓（即半徑為 1 的圓），設圓與坐標軸分別交於 $A(1,0)$、$B(0,1)$、$C(-1,0)$、$D(0,-1)$，如圖 2-18 所示，則

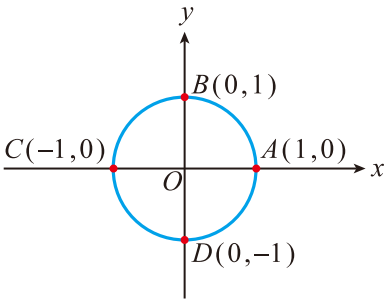


圖 2-18 單位圓

(1) $A(1,0)$ 為 $0°$ 角終邊上的點，由定義知：

$\sin 0° = \frac{0}{1} = 0$　　$\cos 0° = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 0° = \frac{0}{1} = 0$　　$\cot 0° = \frac{1}{0}$（無意義）

$\sec 0° = \frac{1}{1} = 1$　　$\csc 0° = \frac{1}{0}$（無意義）

(2) $B(0,1)$ 為 $90°$ 角終邊上的點，由定義知：

$\sin 90° = \frac{1}{1} = 1$　　$\cos 90° = \frac{0}{1} = 0$

$\tan 90° = \frac{1}{0}$（無意義）　　$\cot 90° = \frac{0}{1} = 0$

$\sec 90° = \frac{1}{0}$（無意義）　　$\csc 90° = \frac{1}{1} = 1$

(3) $C(-1,0)$ 為 $180°$ 角終邊上的點，由定義知：

$\sin 180° = \frac{0}{1} = 0$　　$\cos 180° = \frac{-1}{1} = -1$

$\tan 180° = \frac{0}{-1} = 0$　　$\cot 180° = \frac{-1}{0}$（無意義）

$\sec 180° = \frac{1}{-1} = -1$　　$\csc 180° = \frac{1}{0}$（無意義）

(4) $D(0, -1)$ 為 $270°$ 角終邊上的點，由定義知：

$\sin 270° = \frac{-1}{1} = -1$　　$\cos 270° = \frac{0}{1} = 0$

$\tan 270° = \frac{-1}{0}$（無意義）　　$\cot 270° = \frac{0}{-1} = 0$

$\sec 270° = \frac{1}{0}$（無意義）　　$\csc 270° = \frac{1}{-1} = -1$

為方便計算，將象限角的三角函數值列表如下：

函數 / 角度 θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$0°$（0）	0	1	0	無意義	1	無意義
$90°$（$\frac{\pi}{2}$）	1	0	無意義	0	無意義	1
$180°$（π）	0	-1	0	無意義	-1	無意義
$270°$（$\frac{3\pi}{2}$）	-1	0	無意義	0	無意義	-1

例題 6

試求 $\cos 0° - 2\sin 90° + 3\tan 180° - 4\csc 270°$ 的值。

解　原式 $= 1 - 2\times 1 + 3\times 0 - 4\times(-1)$

$= 1 - 2 + 0 + 4 = 3$

隨堂練習

試求 $\sin\frac{3\pi}{2} + \sec\pi \times \tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{2} \times \cos\frac{\pi}{6}$ 的值。

2-3.3 化任意角的三角函數為銳角的三角函數

在前面 2-3.1 節中，我們曾利用同界角均有相同的三角函數值之性質，將任意角的三角函數值化成 $0°\sim 360°$ 之間的三角函數值。現在，我們更進一步把介於 $0°\sim 360°$ 之間的三角函數值化成銳角的三角函數值。下面所討論各種三角函數值變換中的角 θ，可為任意角度，本書僅就角 θ 為銳角的情形加以說明。

1. $(-\theta)$ 的三角函數值變換

設 θ 與 $(-\theta)$ 兩個角的終邊，分別與單位圓交於 $P(x, y)$ 及 $P'(x', y')$ 兩點，如圖 2-19 所示。

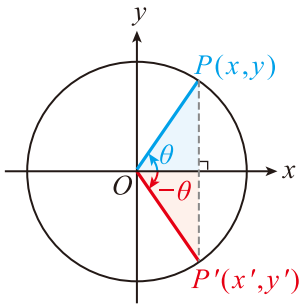


圖 2-19　θ 角與 $(-\theta)$ 角之相對位置

此時，點 P 與 P' 對稱於 x 軸，故得 $x'=x$，$y'=-y$

又 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x')^2+(y')^2}=1$，則

$$\sin(-\theta)=\frac{y'}{r}=\frac{-y}{r}=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\frac{x'}{r}=\frac{x}{r}=\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\tan\theta$$

$$\cot(-\theta)=\frac{1}{\tan(-\theta)}=\frac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta$$

$$\sec(-\theta)=\frac{1}{\cos(-\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

$$\csc(-\theta)=\frac{1}{\sin(-\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

整理得 $(-\theta)$ 的三角函數值變換如下：

公　式

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　　$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$　　$\cot(-\theta)=-\cot\theta$

$\sec(-\theta)=\sec\theta$　　$\csc(-\theta)=-\csc\theta$

例題 7

試求下列各三角函數值：

(1) $\sin(-30°)$　(2) $\cot(-45°)$　(3) $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

解 (1) $\sin(-30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$

(2) $\cot(-45°)=-\cot 45°=-1$

(3) $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sec\frac{\pi}{3}=2$

隨堂練習

試求下列各三角函數值：

(1) $\cos(-45°)$　(2) $\tan(-30°)$　(3) $\csc\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

2. $(180°-\theta)$ 的三角函數值變換

設 θ 與 $(180°-\theta)$ 兩個角的終邊，分別與單位圓交於 $P(x, y)$ 與 $P'(x', y')$ 兩點，如圖 2-20 所示。

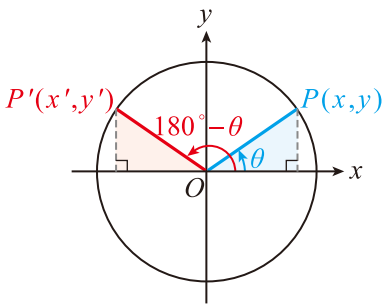


圖 2-20　θ 角與 $(180°-\theta)$ 角之相對位置

此時，點 P 與 P' 對稱於 y 軸，故得

$x'=-x$，$y'=y$

又 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x')^2+(y')^2}=1$，則

$$\sin(180°-\theta)=\frac{y'}{r}=\frac{y}{r}=\sin\theta$$

$$\cos(180°-\theta)=\frac{x'}{r}=\frac{-x}{r}=-\cos\theta$$

$$\tan(180°-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{y}{-x}=-\tan\theta$$

$$\cot(180°-\theta)=\frac{1}{\tan(180°-\theta)}=\frac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta$$

$$\sec(180°-\theta)=\frac{1}{\cos(180°-\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180°-\theta)=\frac{1}{\sin(180°-\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

整理得 $(180°-\theta)$ 的三角函數值變換如下：

公　式

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$　　$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$　　$\cot(180°-\theta)=-\cot\theta$

$\sec(180°-\theta)=-\sec\theta$　　$\csc(180°-\theta)=\csc\theta$

例題 8

試求下列各三角函數值：

(1) $\sin 150°$　(2) $\cos(-120°)$　(3) $\tan\dfrac{2\pi}{3}$

解 (1) $\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 30°=\dfrac{1}{2}$

(2) $\cos(-120°)=\cos 120°=\cos(180°-60°)=-\cos 60°=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\tan\dfrac{2\pi}{3}=\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

隨堂練習

求下列各三角函數值：

(1) $\sec 135°$　(2) $\tan(-150°)$　(3) $\sin\dfrac{3\pi}{4}$

3. $(180°+\theta)$ 的三角函數值變換

利用 $(-\theta)$ 及 $(180°-\theta)$ 的三角函數值變換，我們可以導出 $(180°+\theta)$ 的三角函數值變換。

$\sin(180°+\theta)=\sin[180°-(-\theta)]=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(180°+\theta)=\cos[180°-(-\theta)]=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(180°+\theta)=\tan[180°-(-\theta)]=-\tan(-\theta)=\tan\theta$

$\cot(180°+\theta)=\cot[180°-(-\theta)]=-\cot(-\theta)=\cot\theta$

$\sec(180°+\theta)=\sec[180°-(-\theta)]=-\sec(-\theta)=-\sec\theta$

$\csc(180°+\theta)=\csc[180°-(-\theta)]=\csc(-\theta)=-\csc\theta$

整理得 $(180°+\theta)$ 的三角函數值變換如下：

公　式

$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$　　$\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$

$\tan(180°+\theta)=\tan\theta$　　$\cot(180°+\theta)=\cot\theta$

$\sec(180°+\theta)=-\sec\theta$　　$\csc(180°+\theta)=-\csc\theta$

例題 9

試求下列各三角函數值：

(1) $\tan 240°$　(2) $\cos\dfrac{7\pi}{6}$　(3) $\csc(-225°)$

解 (1) $\tan 240°=\tan(180°+60°)=\tan 60°=\sqrt{3}$

(2) $\cos\dfrac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\csc(-225°)=-\csc 225°=-\csc(180°+45°)$

$=-(-\csc 45°)=\csc 45°=\sqrt{2}$

隨堂練習

試求下列各三角函數值：

(1) $\sin 210°$　(2) $\sec(-240°)$　(3) $\cot\dfrac{5\pi}{4}$

4. $(360°-\theta)$ 的三角函數值變換

利用 $(360°-\theta)$ 與 $(-\theta)$ 為同界角，具有相同的三角函數值，我們可以導出$(360°-\theta)$ 的三角函數值變換如下：

公　式

$\sin(360°-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$　　$\cos(360°-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(360°-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$　　$\cot(360°-\theta)=\cot(-\theta)=-\cot\theta$

$\sec(360°-\theta)=\sec(-\theta)=\sec\theta$　　$\csc(360°-\theta)=\csc(-\theta)=-\csc\theta$

例題 10

試求下列各三角函數值：

(1) $\cos\frac{5\pi}{3}$　(2) $\sin 330°$　(3) $\tan(-315°)$

解 (1) $\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(2) $\sin 330°=\sin(360°-30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$

(3) $\tan(-315°)=-\tan 315°=-\tan(360°-45°)$

$=-(-\tan 45°)=\tan 45°=1$

隨堂練習

試求下列各三角函數值：

(1) $\cot 300°$　(2) $\sec(-330°)$　(3) $\csc\frac{7\pi}{4}$

5. $(90°-\theta)$ 的三角函數值變換

在前面 2-2.2 節中提到，當 θ 為銳角時，$(90°-\theta)$ 與 θ 的三角函數有餘角關係式存在，但當 θ 為任意角時，其餘角關係式是否還存在呢？我們討論如下：

設 θ 與 $(90°-\theta)$ 兩個角的終邊分別與單位圓交於 $P(x, y)$ 與 $P'(x', y')$ 兩點，如圖 2-21 所示。

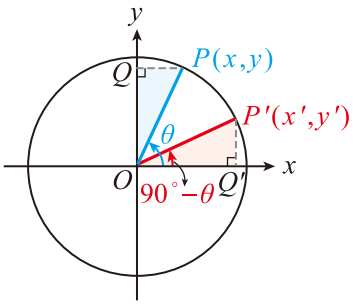


圖 2-21　θ 角與 $(90°-\theta)$ 角之相對位置

自點 P 作 y 軸的垂線，交 y 軸於 Q，又自點 P' 作 x 軸的垂線，交 x 軸於 Q'，則 $\triangle OP'Q'\cong\triangle OPQ$，故得 $\overline{OQ'}=\overline{OQ}$，$\overline{P'Q'}=\overline{PQ}$，亦即 $x'=y$ 且 $y'=x$，

又 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x')^2+(y')^2}=1$，則

$$\sin(90°-\theta)=\frac{y'}{r}=\frac{x}{r}=\cos\theta$$

$$\cos(90°-\theta)=\frac{x'}{r}=\frac{y}{r}=\sin\theta$$

$$\tan(90°-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

$$\cot(90°-\theta)=\frac{1}{\tan(90°-\theta)}=\frac{1}{\cot\theta}=\tan\theta$$

$$\sec(90°-\theta)=\frac{1}{\cos(90°-\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

$$\csc(90°-\theta)=\frac{1}{\sin(90°-\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

整理得 $(90°-\theta)$ 的三角函數值變換如下：

公　式

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90°-\theta)=\cot\theta$　　$\cot(90°-\theta)=\tan\theta$

$\sec(90°-\theta)=\csc\theta$　　$\csc(90°-\theta)=\sec\theta$

6. $(90°+\theta)$ 的三角函數值變換

利用 $(90°-\theta)$ 及 $(180°-\theta)$ 的三角函數值變換，我們可以導出 $(90°+\theta)$ 的三角函數值變換。

$$\sin(90°+\theta)=\sin[180°-(90°-\theta)]=\sin(90°-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(90°+\theta)=\cos[180°-(90°-\theta)]=-\cos(90°-\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(90°+\theta)=\tan[180°-(90°-\theta)]=-\tan(90°-\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(90°+\theta)=\frac{1}{\tan(90°+\theta)}=\frac{1}{-\cot\theta}=-\tan\theta$$

$$\sec(90°+\theta)=\frac{1}{\cos(90°+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(90°+\theta)=\frac{1}{\sin(90°+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

整理得 $(90°+\theta)$ 的三角函數值變換如下：

公　式

$\sin(90°+\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$

$\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$　　$\cot(90°+\theta)=-\tan\theta$

$\sec(90°+\theta)=-\csc\theta$　　$\csc(90°+\theta)=\sec\theta$

小考箱

(　　) 8. 設 θ 為任意角，則 $\sin(180°-\theta)=\cos(90°+\theta)$。

同樣地，利用 $(90°-\theta)$、$(180°+\theta)$ 及 $(360°-\theta)$ 的三角函數值變換，我們亦可導出 $(270°-\theta)$ 及 $(270°+\theta)$ 的三角函數值變換。

7. $(270°-\theta)$ 的三角函數值變換

公　式

$\sin(270°-\theta)=-\cos\theta$　　$\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$

$\tan(270°-\theta)=\cot\theta$　　$\cot(270°-\theta)=\tan\theta$

$\sec(270°-\theta)=-\csc\theta$　　$\csc(270°-\theta)=-\sec\theta$

8. $(270°+\theta)$ 的三角函數值變換

公　式

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$　　$\cos(270°+\theta)=\sin\theta$

$\tan(270°+\theta)=-\cot\theta$　　$\cot(270°+\theta)=-\tan\theta$

$\sec(270°+\theta)=\csc\theta$　　$\csc(270°+\theta)=-\sec\theta$

例題 11

化簡 $\dfrac{\csc(270°-\theta)}{\sec(180°+\theta)}+\dfrac{\sin(270°+\theta)}{\cos(-\theta)}-\dfrac{\tan(180°-\theta)}{\cot(270°-\theta)}$。

解

$$\text{原式}=\frac{-\sec\theta}{-\sec\theta}+\frac{-\cos\theta}{\cos\theta}-\frac{-\tan\theta}{\tan\theta}$$
$$=1+(-1)-(-1)$$
$$=1$$

隨堂練習

化簡 $\dfrac{\tan(90°+\theta)}{\cot(360°-\theta)}+\dfrac{\cos(270°-\theta)}{\sin(-\theta)}+\dfrac{\sec(270°+\theta)}{\csc(180°-\theta)}$。

特別說明

上述各類三角函數值的變換公式，可歸納整理如下，設 F 代表任一三角函數，co$F$ 為 F 的餘函數，則

(1) 當 n 為奇數時：

$$F(n\times 90^\circ \pm \theta)=\pm\,\mathrm{co}F(\theta)$$

（互為餘函數）

（正、負由原函數角度所在象限決定）

(2) 當 n 為偶數時：

$$F(n\times 90^\circ \pm \theta)=\pm\,F(\theta)$$

（函數不變）

（正、負由原函數角度所在象限決定）

《口訣》奇變（函數改變）偶不變（函數不變），正負看象限。

現在，我們可以利用上述所討論的各項性質，將任意角的三角函數化為銳角的三角函數，若為特別角甚至可求出其值，若不為特別角，也可以利用三角函數值表找到它的值。

例題 12

求下列各三角函數值：

(1) $\sec(-2010^\circ)$　　(2) $\sin(-1020^\circ)$

解 (1) $\sec(-2010^\circ)=\sec 2010^\circ=\sec(5\times 360^\circ+210^\circ)=\sec 210^\circ$

$=\sec(180^\circ+30^\circ)=-\sec 30^\circ=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sin(-1020^\circ)=-\sin 1020^\circ=-\sin(2\times 360^\circ+300^\circ)=-\sin 300^\circ$

$=-\sin(360^\circ-60^\circ)=-(-\sin 60^\circ)$

$=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

隨堂練習

求下列各三角函數的值：

(1) $\cos(-1950^\circ)$　　(2) $\tan 1320^\circ$

習題 2-3

1. 設點 $P(-3,-4)$ 為角 θ 終邊上的一點，試求角 θ 的各三角函數值。

2. 試判別下列各三角函數值的正負：

   (1) $\sec 830°$　(2) $\sin(-1200°)$　(3) $\cot\dfrac{31\pi}{6}$

3. 已知 $\cos\theta=-\dfrac{12}{13}$，$\cot\theta>0$，試求角 θ 的其餘各三角函數值。

4. 設 θ 為第三象限角，且 $\cot\theta=\dfrac{4}{3}$，試求 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1+\tan\theta}$ 的值。

5. 試求下列各值：

   (1) $\sin 180°-\tan 0°+\cot 270°-\sec 180°+\csc 90°$

   (2) $\tan 2\pi+4\csc\dfrac{\pi}{2}-3\cot\dfrac{3\pi}{2}+2\sin\pi$

6. 試求下列各三角函數值：

   (1) $\sin(-840°)$　(2) $\sec\left(-\dfrac{50\pi}{3}\right)$　(3) $\tan 2460°$

7. 化簡 $\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{\sin(2\pi-\theta)}-\dfrac{\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}+\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}$。

8. 試求 $\sin(-384°)+\cos(-786°)+\tan 1485°$ 的值。

2-4 三角函數的圖形

由任意角三角函數的定義，我們知道三角函數是把一個角度對應到一個實數的函數。例如：正弦函數是把角度 x 對應到 $\sin x$ 的函數。因為角度為 x 弧度時，可以把單位「弧度」省略不寫，因此，對於任一個實數 x，必有一個 x 弧度的角與它對應，所以我們也可以把三角函數看成由實數對應到實數的函數。換句話說，對於任意實數 x，先取 x 弧度的角，再考慮此角的三角函數值。在第一章函數圖形的討論中，我們利用直角坐標平面上的點 $(x, f(x))$ 來描繪函數 $y = f(x)$ 的圖形。同樣地，我們也可以利用點 $(x, \sin x)$ 及 $(x, \cos x)$ 分別來繪製 $y = \sin x$ 與 $y = \cos x$ 的圖形。

雖然描繪函數圖形，可以利用計算器或電腦軟體求得更多的對應點，描繪出更精確的圖形，但為了方便，在此我們僅以某些特殊的點來描繪三角函數圖形。

2-4.1 正、餘弦函數的圖形

1. 正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形

先將某些特殊的 x 值，求出其對應的函數值 y，並列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\cdots$
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\cdots$

從上表中我們可以看出：

當 x 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，函數值 y 由 0 逐漸增加到 1。

當 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，函數值 y 由 1 逐漸減少到 0。

當 x 由 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，函數值 y 由 0 逐漸減少到 -1。

當 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 時，函數值 y 由 -1 逐漸增加到 0。

在 2-3.1 節中已說明，$\sin x$ 滿足 $-1 \leq \sin x \leq 1$。又因為 $\sin(2\pi + x) = \sin x$，所以在 $2\pi \leq x \leq 4\pi$ 的圖形與 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的圖形完全相同。因此，只要將 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上所畫的圖形向右移動 2π 單位，就可以得到 $2\pi \leq x \leq 4\pi$ 上的圖形。逐次的把 $0 \leq x \leq 2\pi$ 這段圖形向左或向右移動 2π 單位，我們就可以得到 $y = \sin x$ 的全部圖形。現在描繪部分圖形如下：

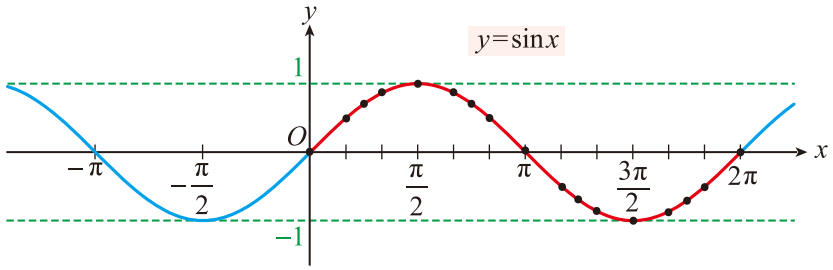


圖 2-22　正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形

2. 餘弦函數 $y = \cos x$ 的圖形

先將某些特殊的 x 值，求出其對應的函數值 y，並列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\cdots$
y	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cdots$

從上表中我們可以看出：

當 x 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，函數值 y 由 1 逐漸減少到 0。

當 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，函數值 y 由 0 逐漸減少到 -1。

當 x 由 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，函數值 y 由 -1 逐漸增加到 0。

當 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 時，函數值 y 由 0 逐漸增加到 1。

在 2-3.1 節中已說明，$\cos x$ 滿足 $-1 \leq \cos x \leq 1$。又因為 $\cos(2\pi + x) = \cos x$，所以只要把 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上的圖形逐次向左或向右移動 2π 單位，我們就可以得到 $y = \cos x$ 的全部圖形。其部分圖形如下：

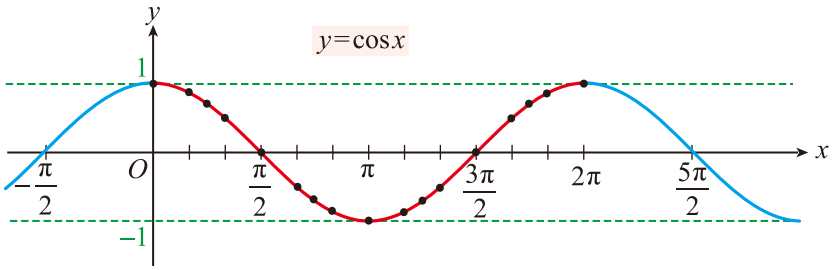


圖 2-23　餘弦函數 $y = \cos x$ 的圖形

小考箱

(　　) 9. 設 $\pi < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi$，則 $\cos\theta_1 < \cos\theta_2 < \cos\theta_3$。

由圖 2-22、圖 2-23 可以看出正弦函數的圖形與餘弦函數的圖形很相似。事實上，只要將餘弦函數的圖形向右移 $\frac{\pi}{2}$ 單位，就變成正弦函數的圖形，這主要是因為 $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ 的緣故。

特別說明　我們通常把正弦函數的圖形稱為正弦曲線，餘弦函數的圖形稱為餘弦曲線。

依據上面的討論，正弦函數與餘弦函數的圖形，每隔 2π 單位後就會重複出現，像這樣具有週期性的函數我們稱它為週期函數，且定 $\sin x$、$\cos x$ 的週期均為 2π。

特別說明

設函數 f 的定義域為 A，若有一正數 p，對於 A 中的任一個數 x，$x+p$ 亦在 A 中，且 $f(x+p)=f(x)$ 恆成立，則函數 f 稱為「週期函數」，合於條件的最小 p 值稱為「週期」。因為 2π 是使 $\sin(x+p)=\sin x$，$\cos(x+p)=\cos x$ 恆成立的最小正數 p，所以 $\sin x$、$\cos x$ 的週期都是 2π。

例題 1

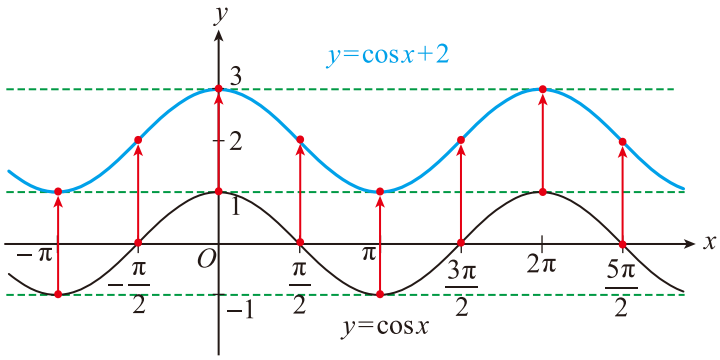
試作函數 $y=\cos x+2$ 的圖形。

解　因為對於任意實數 x，

其所對應的函數 $y=\cos x+2$ 的值恆比 $\cos x$ 的值多 2。

因此 $y=\cos x+2$ 的圖形，只要將 $y=\cos x$ 的圖形，

如圖 2-23，向上移 2 個單位即得，其圖形如下：



隨堂練習

試作函數 $y=\sin x-1$ 的圖形。

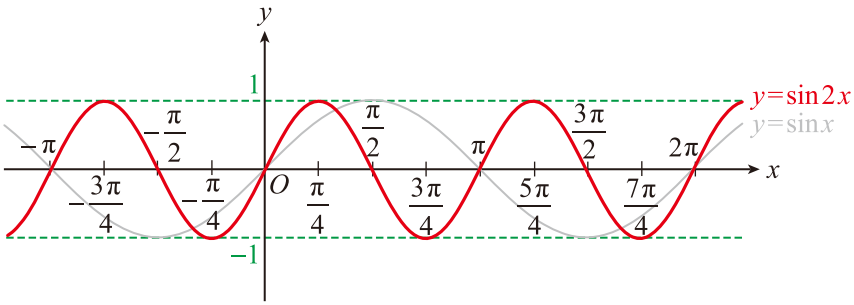
例題 2

試作函數 $y=\sin 2x$ 的圖形。

解 先將某些特殊 x 值所對應的函數值 y，列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\cdots$
$2x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$\cdots$
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\cdots$

由描點得 $y=\sin 2x$ 的圖形如下：



特別說明 由上圖可以看出 $y=\sin 2x$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形，以 y 軸為基準線水平方向左右壓縮為 $\frac{1}{2}$ 倍而得。

隨堂練習

試作函數 $y=\cos 3x$ 的圖形。

例題 3

若 $3\sin^2\theta+13\sin\theta-10=0$，試求 $\sin\theta$ 的值。

解 $3\sin^2\theta+13\sin\theta-10=0$

可以分解得 $(3\sin\theta-2)(\sin\theta+5)=0$

所以 $\sin\theta=\frac{2}{3}$ 或 $\sin\theta=-5$

但 $|\sin\theta|\leq 1$，故得 $\sin\theta=\frac{2}{3}$

隨堂練習

設 $3\cos^2\theta+5\cos\theta-2=0$，試求 $\cos\theta$ 的值。

例題 4

設 x 為任意實數，試求函數 $y=\cos^2x+\cos x+2$ 的最大值與最小值。

解 $y=\cos^2x+\cos x+2$

$$=\left[\cos^2x+2\times\cos x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

但是 $-1\leq\cos x\leq1$

所以當 $\cos x=1$ 時，y 有最大值 $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=4$

當 $\cos x=-\frac{1}{2}$ 時，y 有最小值 $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=\frac{7}{4}$

隨堂練習

設 x 為任意實數，試求函數 $y=\sin^2x-4\sin x+5$ 的最大值與最小值。

2-4.2 正、餘切函數的圖形

1. 正切函數 $y=\tan x$ 的圖形

比照正弦函數與餘弦函數的作圖法，由於 $\tan(\pi+x)=\tan x$，因此我們只要將 0 到 π 之間某些特殊的 x 值，求出其對應的函數值 y，列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots\frac{\pi}{2}\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\cdots$
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\cdots+\infty\,\vdots\,-\infty\cdots$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\cdots$

特別說明

(1) 因為 $\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 時沒有定義，當 $x<\frac{\pi}{2}$ 且逐漸增大而接近 $\frac{\pi}{2}$ 時，$\tan x$ 的函數值逐漸增加而趨向 $+\infty$；當 $x>\frac{\pi}{2}$ 且逐漸減小而接近 $\frac{\pi}{2}$ 時，$\tan x$ 的函數值逐漸減少而趨向 $-\infty$。

(2) 符號「∞」唸作「無限大」，表示比任何已知的實數都大的一個概念，僅為一數學符號，並無此數。同樣地，「$-\infty$」唸作「負無限大」，表示比任何已知的實數都小的一個概念。

由上表我們可以看出：

當 x 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，函數值 y 由 0 逐漸增加到 ∞。

當 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，函數值 y 由 $-\infty$ 逐漸增加到 0。

將上表 x、y 的對應值描點，先作出 $0\le x\le\pi$ 的圖形，利用 $\tan(x+\pi)=\tan x$，將這段圖形逐次向左或向右移動 π 單位，我們就可以得到 $y=\tan x$ 的全部圖形。現在描繪部分圖形如下：

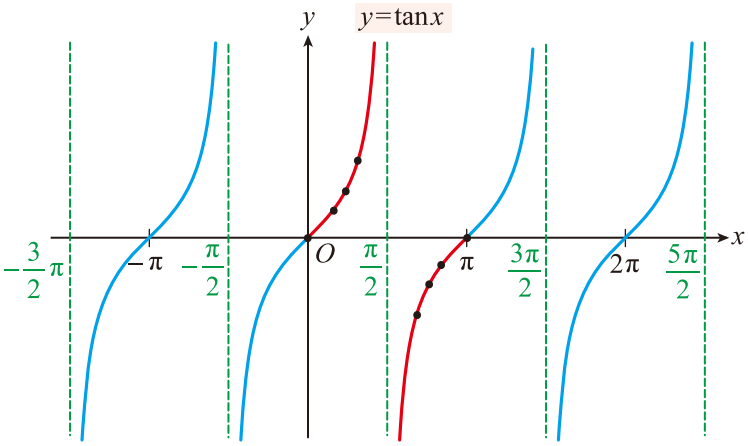


圖 2-24　正切函數 $y=\tan x$ 的圖形

由正切函數的圖形，很明顯可以看出函數值的範圍為 $-\infty<\tan x<\infty$。

2. 餘切函數 $y=\cot x$ 的圖形

因為 $\cot(\pi+x)=\cot x$，與正切函數相同，只要先描點作出 $0<x<\pi$（因為 $\cot x$ 在 $x=0$ 及 π 時無意義）之間的圖形即可。

x	$\cdots 0\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots\pi\cdots$
y	$\cdots\vdots+\infty\cdots$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\cdots-\infty\vdots\cdots$

由上表我們可以看出：

當 x 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，函數值 y 由 ∞ 逐漸減少到 0。

當 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，函數值 y 由 0 逐漸減少到 $-\infty$。

將上表描點所作出 $0<x<\pi$ 的圖形，逐次向左或向右移動 π 單位，我們就可以得到 $y=\cot x$ 的全部圖形。其部分圖形描繪如下：

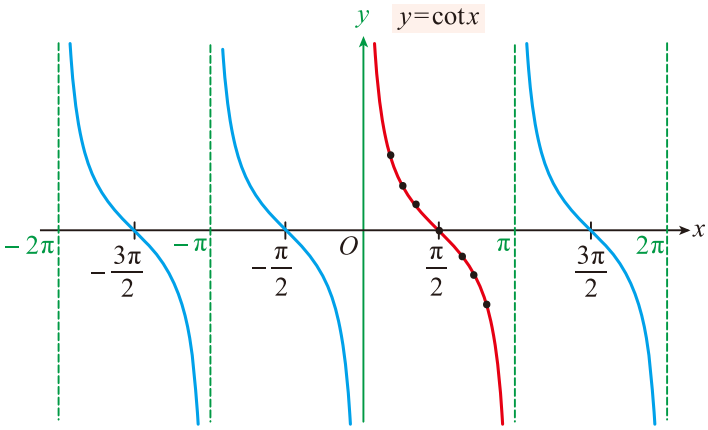


圖 2-25 餘切函數 $y=\cot x$ 的圖形

小考箱

(　　) 10. 設 $0<\theta_1<\theta_2<\pi$，則 $\cot\theta_1>\cot\theta_2$。

由餘切函數的圖形，很容易看出函數值的範圍為 $-\infty<\cot x<\infty$。

在函數 $y=\tan x$ 的圖形中，我們發現圖形會逐漸接近直線 $x=-\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{3\pi}{2}$，$x=\frac{5\pi}{2}$，…等，但並不相交，這種直線稱為圖形的漸近線。

同樣地，在函數 $y=\cot x$ 的圖形中，直線 $x=-\pi$，$x=0$，$x=\pi$，$x=2\pi$，⋯等，為圖形的漸近線。整理說明如下：

公　式

設 n 為整數，則

(1)　直線 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 為 $y=\tan x$ 圖形的漸近線。

(2)　直線 $x=n\pi$ 為 $y=\cot x$ 圖形的漸近線。

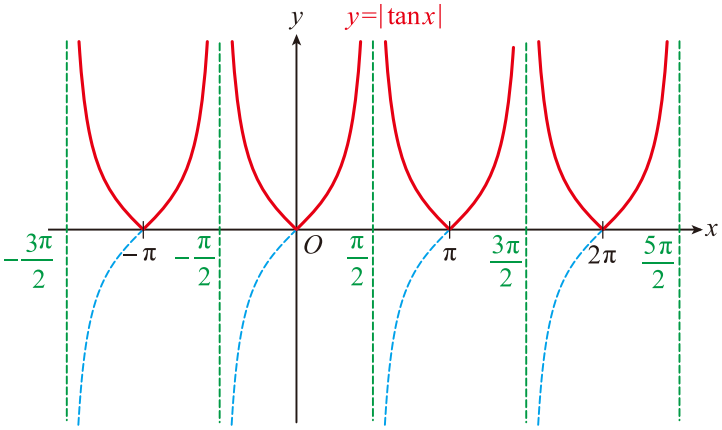
再者，$y=\tan x$ 與 $y=\cot x$ 的圖形，每隔 π 單位後就會重複出現，所以 $\tan x$和$\cot x$，也都是週期函數，且週期均為 π〔因為 π 是使 $\tan(x+p)=\tan x$，$\cot(x+p)=\cot x$ 恆成立的最小正數 p〕。

例題 5

試作函數 $y=|\tan x|$ 的圖形。

解　因為 $y=|\tan x|=\begin{cases}\tan x\ (\text{當 } \tan x\geq 0)\\ -\tan x\ (\text{當 } \tan x<0)\end{cases}$

故只要將 $y=\tan x$ 的圖形，如圖 2-24 所示，在 x 軸下方的部分反轉至 x 軸上方即得。所以，$y=|\tan x|$ 的圖形如下：



隨堂練習

試作函數 $y=-\cot x$ 的圖形。

2-4.3 正、餘割函數的圖形

1. 正割函數 $y=\sec x$ 的圖形

因為 $\sec(2\pi+x)=\sec x$，故只要先描出 $0\le x\le 2\pi$ 之間的圖形即可。

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots\frac{\pi}{2}\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\cdots+\infty\vdots-\infty\cdots$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\cdots\frac{3\pi}{2}\cdots$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\cdots$
y	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\cdots-\infty\vdots+\infty\cdots$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\cdots$

由上表我們可以看出：

當 x 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，函數值 y 由 1 逐漸增加到 ∞。

當 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，函數值 y 由 $-\infty$ 逐漸增加到 -1。

當 x 由 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，函數值 y 由 -1 逐漸減少到 $-\infty$。

當 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 時，函數值 y 由 ∞ 逐漸減少到 1。

將上表描點作出 $0\le x\le 2\pi$ 的圖形，並逐次向左或向右移動 2π 單位，我們可得到 $y=\sec x$ 的全部圖形。其部分圖形描繪如下：

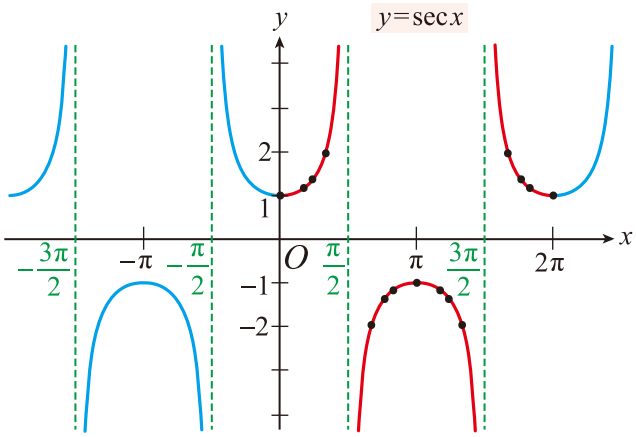


圖 2-26　正割函數 $y=\sec x$ 的圖形

2. 餘割函數 $y = \csc x$ 的圖形

因為 $\csc(2\pi + x) = \csc x$，故只要先描出 $0 < x < 2\pi$（因為 $\csc x$ 在 $x = 0$，π 及 2π 時無意義）之間的圖形即可。

x	$\cdots 0 \cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots \pi \cdots$
y	$\cdots \vdots +\infty \cdots$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\cdots +\infty \vdots -\infty \cdots$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\cdots 2\pi \cdots$
y	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\cdots -\infty \vdots +\infty \cdots$

由上表我們可以看出：

當 x 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，函數值 y 由 ∞ 逐漸減少到 1。

當 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，函數值 y 由 1 逐漸增加到 ∞。

當 x 由 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，函數值 y 由 $-\infty$ 逐漸增加到 -1。

當 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 時，函數值 y 由 -1 逐漸減少到 $-\infty$。

將上表描點作出 $0 < x < 2\pi$ 的圖形，並逐次向左或向右移動 2π 單位，我們可以得到 $y = \csc x$ 的全部圖形。其部分圖形描繪如下：

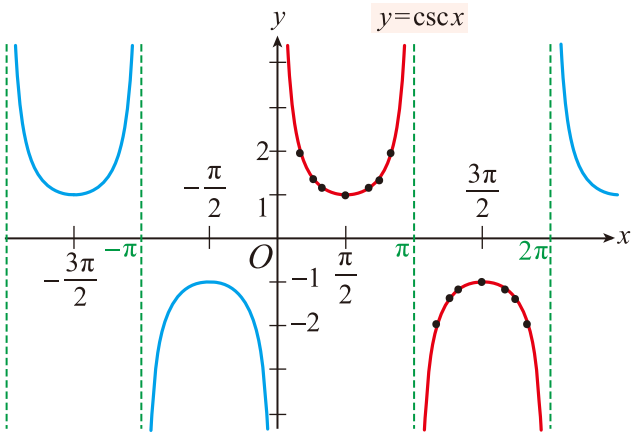


圖 2-27　餘割函數 $y = \csc x$ 的圖形

公　式

設 n 為整數，則

(1) 直線 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 為 $y = \sec x$ 圖形的漸近線。

(2) 直線 $x = n\pi$ 為 $y = \csc x$ 圖形的漸近線。

此外，$y = \sec x$ 與 $y = \csc x$ 的圖形，每隔 2π 單位也都會重複出現，所以 $\sec x$、$\csc x$也都是週期函數，且週期均為 2π〔因為 2π 是使 $\sec(x + p) = \sec x$，$\csc(x + p) = \csc x$ 恆成立的最小正數 p〕。

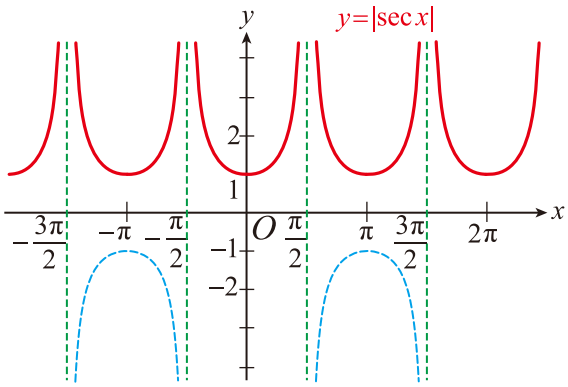
又由圖 2-26 與圖 2-27，我們還可以看出正割函數與餘割函數的圖形很相似，只要把正割函數的圖形向右移 $\frac{\pi}{2}$ 單位，就變成餘割函數的圖形，這主要是因為$\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$的緣故。

例題 6

試作函數 $y = |\sec x|$ 的圖形。

解 因為 $y = |\sec x| = \begin{cases} \sec x\ (\text{當 } \sec x \geq 0) \\ -\sec x\ (\text{當 } \sec x < 0) \end{cases}$

故只要將 $y = \sec x$ 的圖形，如圖 2-26 所示，在 x 軸下方的部分反轉至 x 軸上方即得。所以，$y = |\sec x|$ 的圖形如下：



隨堂練習

試作函數 $y = -\csc x$ 的圖形。

習題 2-4

1. 試作函數 $y = -\cos x$ 的圖形。

2. 試作函數 $y = \sec x - 1$ 的圖形。

3. 試作函數 $y = \tan 2x$ 的圖形。

4. 試作函數 $y = 2\sin x$ 的圖形。

5. 試作函數 $y = |\sin x|$ 的圖形。

6. 設 $3\cos^2 x + 11\cos x - 4 = 0$，試求 $\cos x$ 的值。

7. 試求函數 $y = \sin^2 x - 6\sin x + 10$ 的最大、最小值。

8. 試求函數 $y = \cos^2 x + 2\sin x - 3$ 的最大、最小值。

本章彙總

2-1 重點

1. **有向角**：逆時針方向旋轉的有向角為**正角**；順時針方向旋轉的有向角為**負角**。有向角的角度大小沒有任何限制。

2. **角的度量**：

   (1) 六十分制：1 周角＝ 360°，1°＝ 60'，1'＝ 60"

   (2) 弧度制：1 周角＝ 2π（弧度）

   (3) 角度的換算：利用 $\boldsymbol{\pi}$（弧度）＝ **180°**

   $1°=\dfrac{\pi}{180}$（弧度）

   1（弧度）$=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

3. **扇形的弧長與面積**：設一扇形的半徑為 r，弧長為 S，圓心角為 θ 弧度，面積為 A，則

   (1) $\boldsymbol{S=r\theta}$

   (2) $\boldsymbol{A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rS}$

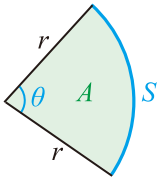


圖 2-28

4. **同界角**：具有相同始邊與終邊的有向角。

   設 θ 與 ϕ 為同界角，n 為整數，則 $\boldsymbol{\theta-\phi=n\times 360°}$　或　$\boldsymbol{\theta-\phi=2n\pi}$

5. **標準位置角**：在坐標平面上，頂點在坐標原點，角的始邊與 x 軸正向重合的有向角。

   (1) 標準位置角的終邊落在第一（二、三、四）象限內者，稱為**第一（二、三、四）象限角**。

   (2) 標準位置角的終邊落在坐標軸上者，稱為**象限角**。

2-2 重點

1. 銳角三角函數：直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$

$\sin A = \dfrac{a}{c}$，$\cos A = \dfrac{b}{c}$

$\tan A = \dfrac{a}{b}$，$\cot A = \dfrac{b}{a}$

$\sec A = \dfrac{c}{b}$，$\csc A = \dfrac{c}{a}$

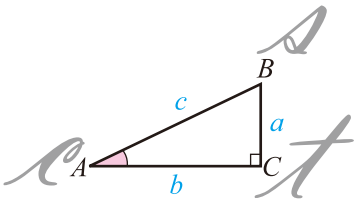


圖 2-29

2. 三角恆等關係式：

(1) 倒數關係式：

$\sin\theta \times \csc\theta = 1$，即 $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

$\cos\theta \times \sec\theta = 1$，即 $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta \times \cot\theta = 1$，即 $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

(2) 商數關係式：

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(3) 平方關係式：

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

3. 餘角關係式：

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$　　$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$　　$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

$\sec(90° - \theta) = \csc\theta$　　$\csc(90° - \theta) = \sec\theta$

本章彙總

4. 特別角的三角函數值：

角度 θ \ 函數	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$30°\ (\frac{\pi}{6})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$45°\ (\frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°\ (\frac{\pi}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2-3 重點

1. 任意角的三角函數：$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$

$\sin\theta=\frac{y}{r}$　　$\cos\theta=\frac{x}{r}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$　　$\cot\theta=\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$

$\sec\theta=\frac{r}{x}\ (x\neq 0)$　　$\csc\theta=\frac{r}{y}\ (y\neq 0)$

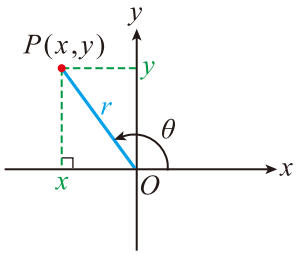


圖 2-30

2. 三角函數值的範圍：

(1) $|\sin\theta|\leq 1$，$|\cos\theta|\leq 1$

(2) $\tan\theta$、$\cot\theta$ 的值可為任意實數

(3) $|\sec\theta|\geq 1$，$|\csc\theta|\geq 1$

3. 同界角的三角函數：

設 $F(\theta)$ 為三角函數，n 為整數，則 $F(n\times 360°+\theta)=F(\theta)$

4. 三角函數值的正負：

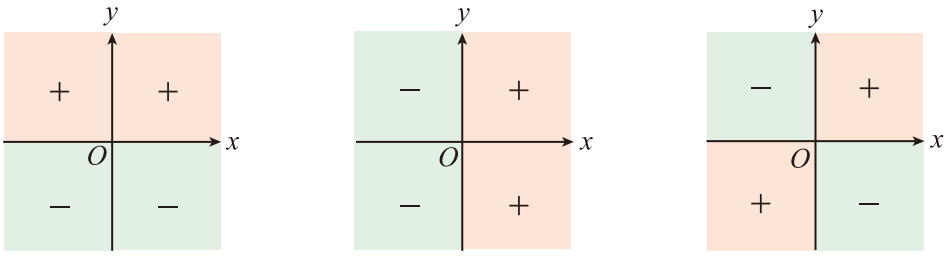


圖 2-31

5. 象限角的三角函數值：

函數 / 角度 θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$0°$（0）	0	1	0	無意義	1	無意義
$90°$（$\frac{\pi}{2}$）	1	0	無意義	0	無意義	1
$180°$（π）	0	-1	0	無意義	-1	無意義
$270°$（$\frac{3\pi}{2}$）	-1	0	無意義	0	無意義	-1

6. 化任意角的三角函數值為銳角的三角函數值：

(1) **$(-\theta)$** 的三角函數值變換：

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　　$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$　　$\cot(-\theta)=-\cot\theta$

$\sec(-\theta)=\sec\theta$　　$\csc(-\theta)=-\csc\theta$

本章彙總

(2) **$(180°-\theta)$** 的三角函數值變換：

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$　　$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$　　$\cot(180°-\theta)=-\cot\theta$

$\sec(180°-\theta)=-\sec\theta$　　$\csc(180°-\theta)=\csc\theta$

(3) **$(180°+\theta)$** 的三角函數值變換：

$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$　　$\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$

$\tan(180°+\theta)=\tan\theta$　　$\cot(180°+\theta)=\cot\theta$

$\sec(180°+\theta)=-\sec\theta$　　$\csc(180°+\theta)=-\csc\theta$

(4) **$(360°-\theta)$** 的三角函數值變換：

$\sin(360°-\theta)=-\sin\theta$　　$\cos(360°-\theta)=\cos\theta$

$\tan(360°-\theta)=-\tan\theta$　　$\cot(360°-\theta)=-\cot\theta$

$\sec(360°-\theta)=\sec\theta$　　$\csc(360°-\theta)=-\csc\theta$

(5) **$(90°-\theta)$** 的三角函數值變換：

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90°-\theta)=\cot\theta$　　$\cot(90°-\theta)=\tan\theta$

$\sec(90°-\theta)=\csc\theta$　　$\csc(90°-\theta)=\sec\theta$

(6) **$(90°+\theta)$** 的三角函數值變換：

$\sin(90°+\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$

$\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$　　$\cot(90°+\theta)=-\tan\theta$

$\sec(90°+\theta)=-\csc\theta$　　$\csc(90°+\theta)=\sec\theta$

(7) **$(270°-\theta)$ 的三角函數值變換：**

$\sin(270°-\theta)=-\cos\theta$　　$\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$

$\tan(270°-\theta)=\cot\theta$　　$\cot(270°-\theta)=\tan\theta$

$\sec(270°-\theta)=-\csc\theta$　　$\csc(270°-\theta)=-\sec\theta$

(8) **$(270°+\theta)$ 的三角函數值變換：**

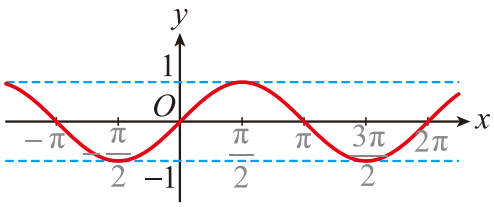
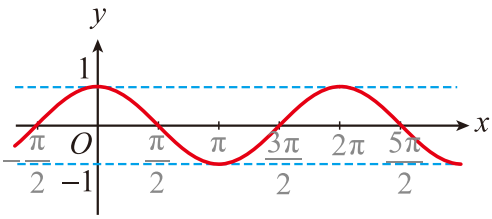
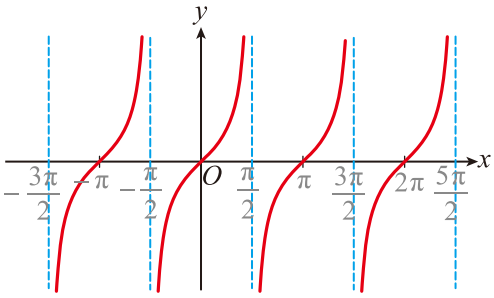
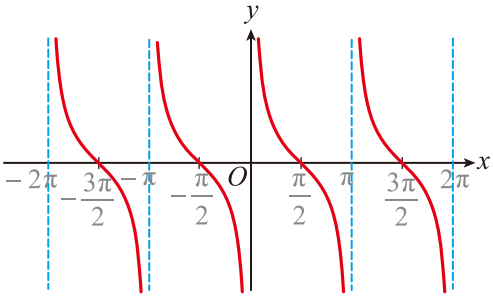
$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$　　$\cos(270°+\theta)=\sin\theta$

$\tan(270°+\theta)=-\cot\theta$　　$\cot(270°+\theta)=-\tan\theta$

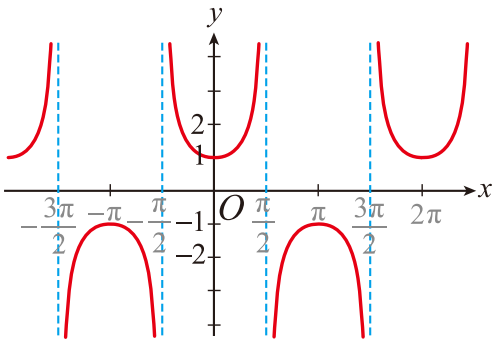
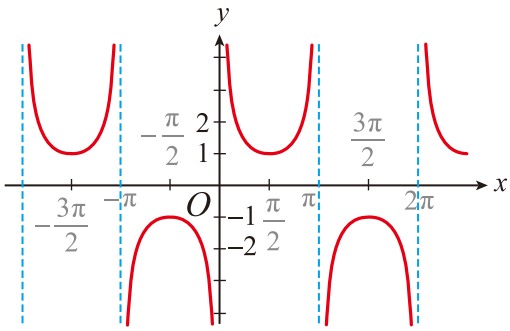
$\sec(270°+\theta)=\csc\theta$　　$\csc(270°+\theta)=-\sec\theta$

2-4 重點

1. 三角函數的圖形：

正弦函數 $y=\sin x$	餘弦函數 $y=\cos x$
	
正切函數 $y=\tan x$	**餘切函數 $y=\cot x$**
	

本章彙總

正割函數 $y = \sec x$	餘割函數 $y = \csc x$
	

2. 三角函數的週期：

函數	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
週期	2π	2π	π	π	2π	2π

3. 三角函數圖形的漸近線：（設 n 為整數）

函數	漸近線
$y = \tan x$，$y = \sec x$	$x = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$
$y = \cot x$，$y = \csc x$	$x = n\pi$

自我評量

( ) 1. $\frac{40\pi}{3}$ 的最小正同界角為 (A)$\frac{\pi}{3}$ (B)$\frac{2\pi}{3}$ (C)$\frac{4\pi}{3}$ (D)$\frac{\pi}{6}$。 【2-1】

( ) 2. 一扇形的面積為 $\frac{2\pi}{3}$，半徑為 2，則其圓心角為 (A)$\frac{5\pi}{12}$ (B)$\frac{\pi}{3}$ (C)$\frac{\pi}{4}$ (D)$\frac{\pi}{6}$。 【2-1】

( ) 3. 標準位置角 $\theta=100$ 弳為第幾象限角？ (A)一 (B)二 (C)三 (D)四。 【2-1】

( ) 4. 化簡 $\left(1+2\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\sin\frac{\pi}{4}+2\cos\frac{\pi}{3}\right)=$ (A)$\frac{5}{2}$ (B)$\frac{7}{2}$ (C)$2\sqrt{2}$ (D)$\frac{11}{4}$。 【2-2】

( ) 5. 設 θ 為銳角，若 $\tan\theta=\sqrt{2}$，則 $\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta=$ (A)$\sqrt{2}$ (B)$\sqrt{3}$ (C)$2\sqrt{2}$ (D)$2\sqrt{3}$。 【2-2】

( ) 6. 試問在坐標上原點至點 $(\sin 15°, \sin 75°)$ 的距離為何？ (A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1。 【2-2】

( ) 7. 若 $\tan\theta=\frac{2}{3}$，則 $\frac{4\cos\theta-3\sin\theta}{2\sin\theta+\cos\theta}$ 的值為 (A)2 (B)$\frac{10}{3}$ (C)$\frac{6}{7}$ (D)$\frac{8}{5}$。 【2-2】

( ) 8. 若 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{3}{4}$，則 $\tan\theta+\cot\theta$ 的值為 (A)$\frac{17}{5}$ (B)$\frac{21}{5}$ (C)$\frac{32}{7}$ (D)$\frac{40}{7}$。 【2-2】

( ) 9. 若 $\frac{x}{\csc^2 x}+\frac{x}{\sec^2 x}=\frac{\pi}{12}$，則 $x=$ (A)$\frac{\pi}{3}$ (B)$\frac{\pi}{4}$ (C)$\frac{\pi}{6}$ (D)$\frac{\pi}{12}$。【2-2】

( ) 10. 設 $x=2\sin\theta+\cos\theta-1$，$y=\sin\theta-2\cos\theta+1$，則 $(x+1)^2+(y-1)^2$的值為 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6。 【2-2】

自我評量

( ) 11. 化簡 $(\tan x+\cot x)^2-(\sec^2 x+\csc^2 x)=$ (A)0 (B)1 (C)2 (D)-1。【2-2】

( ) 12. 設 $P(x,-2\sqrt{7})$ 為標準位置角 θ 終邊上的一點，若 $\cos\theta=\frac{3}{4}$，則 $x=$ (A)8 (B)6 (C)$4\sqrt{7}$ (D)$3\sqrt{7}$。【2-3】

( ) 13. 已知 $\tan\theta=\frac{5}{12}$ 且 $\sin\theta<0$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$ (A)$-\frac{17}{13}$ (B)$-\frac{12}{13}$ (C)$\frac{10}{13}$ (D)$\frac{7}{13}$。【2-3】

( ) 14. $\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi-\tan 0+\cot\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}$ 的值為 (A)2 (B)1 (C)0 (D)-1。【2-3】

( ) 15. 點 $P(\cot 320^\circ,\sin 170^\circ)$ 在 (A)第一 (B)第二 (C)第三 (D)第四象限。【2-3】

( ) 16. 化簡 $\tan\frac{\pi}{8}+\tan\frac{3\pi}{8}+\tan\frac{5\pi}{8}+\tan\frac{7\pi}{8}=$ (A)0 (B)1 (C)-1 (D)$\sqrt{2}$。【2-3】

( ) 17. $\sin 1260^\circ+\tan 780^\circ$ 的值為 (A)$-1+\sqrt{3}$ (B)$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (C)$\frac{1}{2}+\sqrt{3}$ (D)$\sqrt{3}$。【2-3】

( ) 18. 下列各式何者不可能成立？ (A)$\tan x=-3$ (B)$\sec x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C)$\sin x=\frac{2}{3}$ (D)$\cos x=-\frac{3}{4}$。【2-3】

( ) 19. $\frac{\sin 330^\circ+\tan(-135^\circ)}{\cos 120^\circ+\cot 135^\circ}$ 的值為 (A)$\frac{1}{3}$ (B)3 (C)-3 (D)$-\frac{1}{3}$。【2-3】

( ) 20. 化簡 $\cos\theta\cot(90^\circ-\theta)\csc(270^\circ-\theta)-\cot(270^\circ+\theta)=$ (A)0 (B)1 (C)$\sin\theta$ (D)$2\tan\theta$。【2-3】

( ) 21. 化簡 $\dfrac{\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\cot(-\theta)}-\dfrac{\sin\theta}{\sin(\pi+\theta)}+\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos(-\theta)}$ 得 (A) 3 (B) -3 (C) 1 (D) -1。【2-3】

( ) 22. 下列哪一個函數的圖形通過原點 (0 , 0)？ (A) $y=\sin x$ (B) $y=\cos x$ (C) $y=\sec x$ (D) $y=\cot x$。【2-4】

( ) 23. 函數 $f(\theta)=2-\cos\theta-\sin^2\theta$ 的最小值為 (A) $\dfrac{5}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{1}{4}$。

《提示》利用 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$。【2-4】

( ) 24. 設 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，若 $25\cos^2\theta+5\sin\theta-13=0$，則 $\sin\theta+\cos\theta=$ (A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $-\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{7}{5}$ (D) $-\dfrac{7}{5}$。【2-4】

( ) 25. 設 $-\pi\leq x\leq 2\pi$，則 $y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 的圖形共有 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 個交點。【2-4】