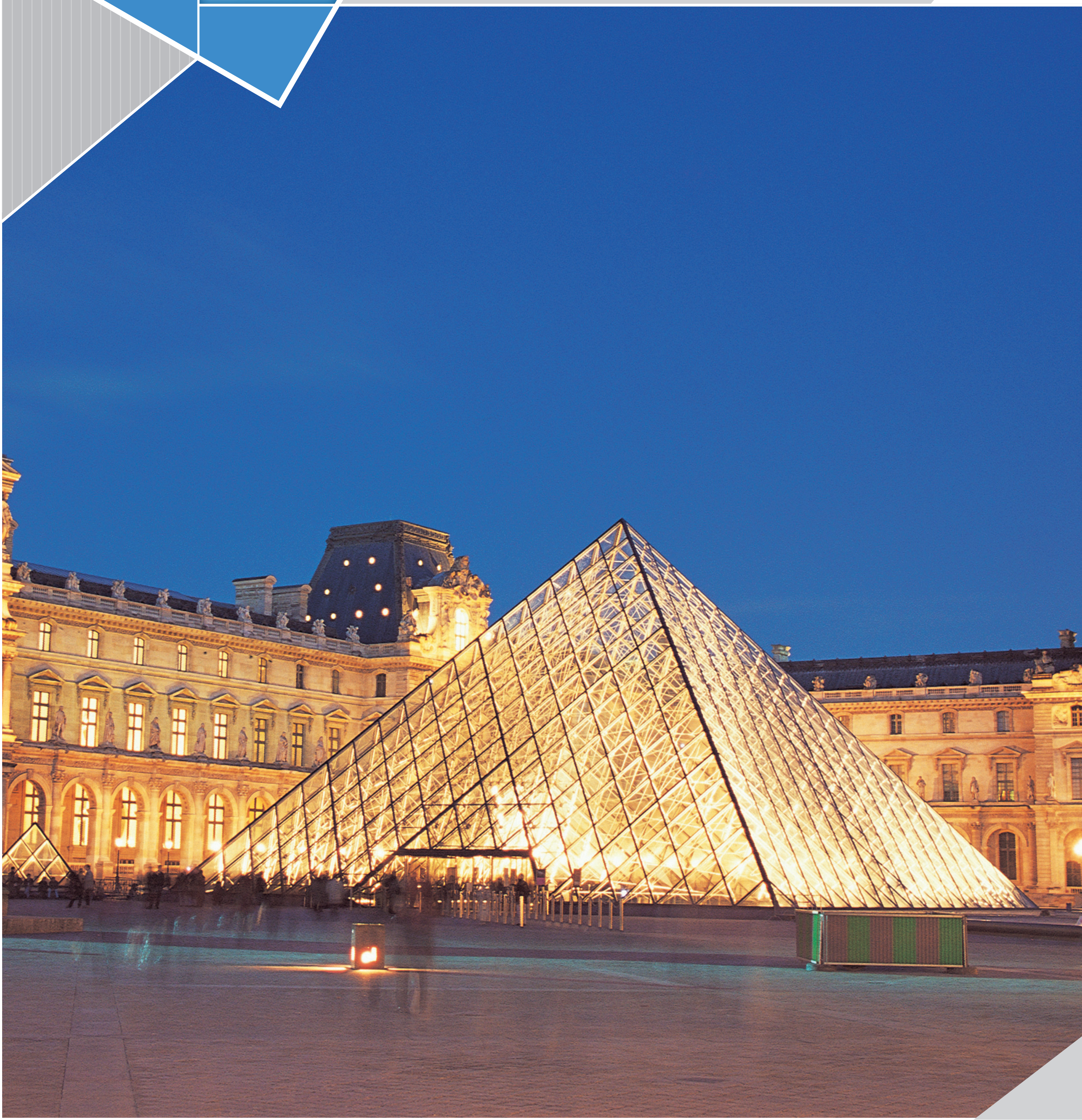
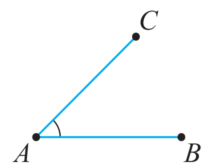
2 三角函數



觀念銜接

第 1 節

1. 角：由兩條有公共端點的射線組成的幾何圖形。例如：$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 相交於 A 點形成一個角，以 $\angle BAC$ 或 $\angle A$ 表示，如圖所示。



   (1) $0° <$ 銳角 $< 90°$　　(2) $90° <$ 鈍角 $< 180°$

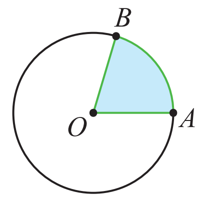
   (3) 直角 $= 90°$　　(4) 平角 $= 180°$

2. (1) 弧：圓上一弦將圓周分為兩部分，每一部分都稱為弧。

   (2) 扇形：兩半徑與弧所圍成的圖形，如圖鋪色部分。

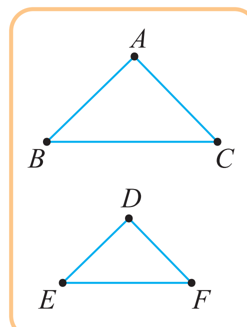
   (3) 圓心角：圓上兩半徑所形成的夾角，稱為圓心角。
   如圖，扇形 AOB 中，$\angle AOB$ 為圓心角。

   (4) 半徑為 r 的圓周長為 $2r\pi$，圓面積為 $r^2\pi$。

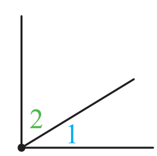


第 2 節

1. 相似三角形：
   若兩個三角形相似，則此兩三角形的對應邊成比例且對應角相等。如圖，若$\triangle ABC \sim \triangle DEF$，則 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$，且 $\angle A = \angle D$，$\angle B = \angle E$，$\angle C = \angle F$。



2. 餘角：如果兩個角的度數和為 $90°$，就稱這兩個角互為餘角。
   如圖，若 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$，則 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 互為餘角。

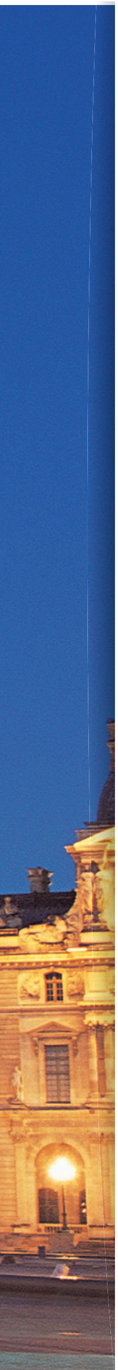


觀念澄清

(　　) 1. 直角三角形中會有兩個內角互為餘角。

(　　) 2. $\triangle ABC$ 中，若 D、E 分別在 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 上，使得 $\overline{DE} \,/\!/\, \overline{BC}$，則 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$。

(　　) 3. 圓心角的度數等於此角所對弧的度數。



2-1 有向角及其度量

一美參加畢業旅行，到劍湖山遊樂場中搭乘摩天輪，轉了 2 圈，想知道幾度或幾弧度嗎？相信學過這單元，就不難回答囉！

▲ 圖 2-1

2-1.1 有向角、標準位置角

1. 有向角：正向角和負向角統稱為有向角。

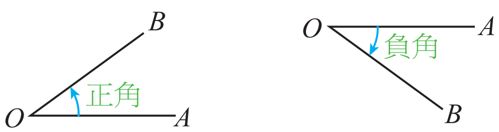
(1) $\overline{OA}$：始邊

(2) $\overline{OB}$：終邊

(3) O：頂點

(4) $\overline{OA}$ 轉到 $\overline{OB}$：

$\begin{cases} \text{依逆時針方向旋轉：正向角，簡稱正角。} \\ \text{依順時針方向旋轉：負向角，簡稱負角。} \end{cases}$



▲ 圖 2-2

2. 標準位置角：如圖 2-3，將有向角 θ 的頂點與直角坐標的原點 O 重合，始邊與 x 軸的正向重合，則此有向角就稱為標準位置角。

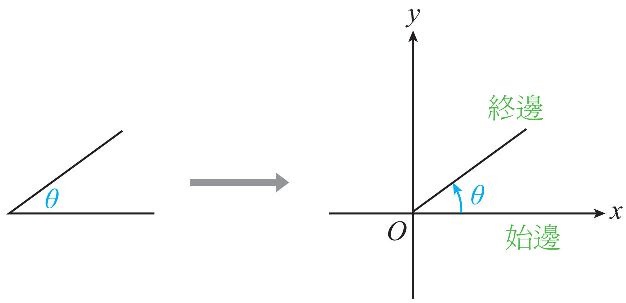


圖 2-3

依角 θ 的終邊所在位置，分為第一、第二、第三、第四象限角及象限角。分述如下：

(1) 角 θ 的終邊在第一象限內，稱角 θ 為第一象限角。

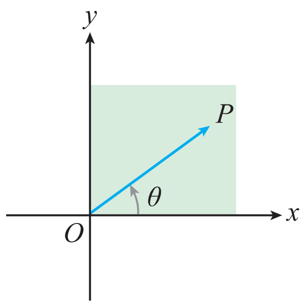


圖 2-4

(2) 角 θ 的終邊在第二象限內，稱角 θ 為第二象限角。

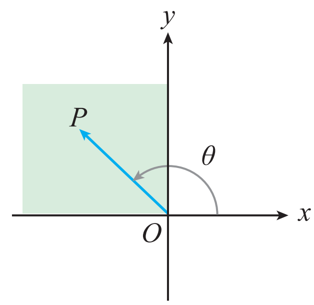


圖 2-5

(3) 角 θ 的終邊在第三象限內，稱角 θ 為第三象限角。

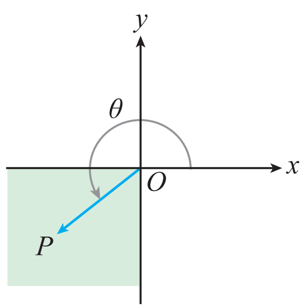


圖 2-6

(4) 角 θ 的終邊在第四象限內，稱角 θ 為第四象限角。

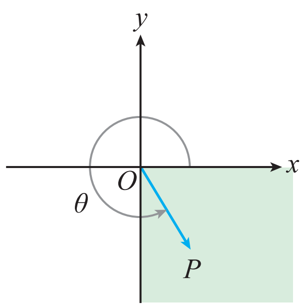


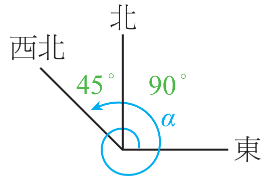
圖 2-7

(5) 角 θ 的終邊在 x 軸或 y 軸上，稱角 θ 為象限角。

3. 廣義角：角度旋轉時可繞 1 圈，2 圈……等，打破了 180° 限制的有向角稱為廣義角。

例題 1

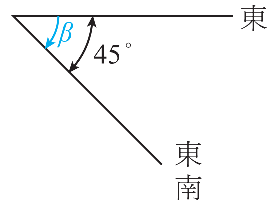
請寫出 α 之角度：



解　依逆時針方向旋轉：$\alpha = 360° + 90° + 45° = 495°$

隨堂練習

1. 請寫出 β 之角度：



2-1.2 角的度量

常用角的度量有兩種：一種為度度量，另一種為弧度量。

(1) 六十分制（度度量）：半徑為 r 的圓將其圓周 360 等分，則每一等分所對的圓心角稱為 1 度角，記為 1°；又 1 度分成 60 分，記為 $1° = 60'$；1 分分成 60 秒，記為 $1' = 60''$。

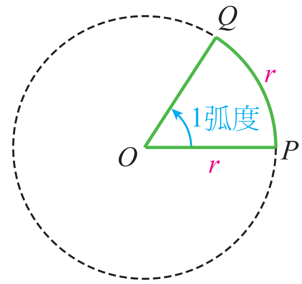
【註】表示法：若角的度量為 23 度 38 分 12 秒，記為 $23°38'12''$。

(2) 弧度制（弧度量）：半徑為 r 的圓將其圓周取一段弧長 S 使其等於半徑 r，則其所對的圓心角稱為 1 弧度，又稱為 1 弳，記為 1（弧度單位通常省略不寫）。因為圓的周長為 $2\pi r$，所以整個圓周所對的角為 2π；又因為半圓弧長為 πr，所以平角為 π，亦可得直角為 $\frac{\pi}{2}$。

(3) 度度量與弧度量的互換：

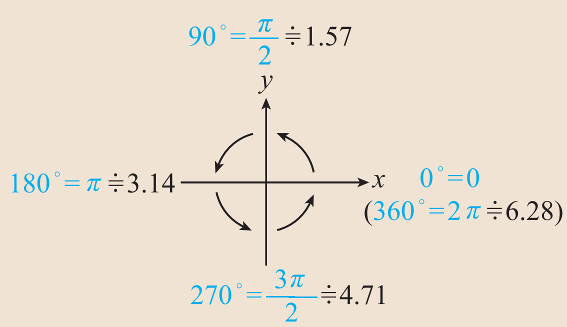
由(1)(2)得 $360° = 2\pi$，則 $\pi = 180°$。

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \text{ 弧度} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ} \fallingdotseq 57.2957° \fallingdotseq 57°17'45'' \\ 1° = \dfrac{\pi}{180} \text{ 弧度} \fallingdotseq 0.1745 \text{ 弧度} \end{cases}$$



▲ 圖 2-8

圖　示



▲ 圖 2-9

小考箱

（　）1. 角度比一比：「1°」大於「1 弧度」？

例 題 2

將下列各角以度度量表示：

(1) $\dfrac{2\pi}{3}$　　(2) $-\dfrac{\pi}{2}$

解　利用 $\pi = 180°$

(1) $\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2}{3} \times 180° = 120°$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} = \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times 180° = -90°$

隨堂練習

2. 將下列各角以度度量表示：

(1) $\frac{5\pi}{4}$　　(2) $-\frac{\pi}{6}$

例題 3

將下列各角以弧度量表示：

(1) $75°$　　(2) $-240°$

解 利用 $\pi = 180° \Rightarrow 1° = \frac{\pi}{180}$ 可得

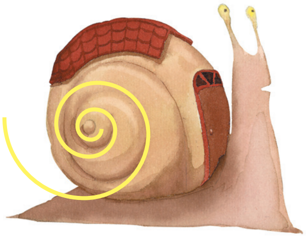
(1) $75° = 75 \times 1° = 75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$

(2) $-240° = (-240) \times 1° = (-240) \times \frac{\pi}{180} = -\frac{4\pi}{3}$

隨堂練習

3. 將下列各角以弧度量表示：

(1) $150°$　　(2) $-135°$



2-1.3 同界角

定　義

如果兩個廣義角 α、β 有共同的始邊與終邊，這樣的 α 與 β 稱為同界角。

兩個同界角相差值為 $360°$ 的整數倍或 2π 的倍數，即

$$\alpha - \beta = 360° \times k = 2k\pi$$

其中 k 為整數。

例如：70° 與 $-290°$互為同界角。由同界角的關係，可知 790°、430°、70°、$-290°$、$-650°$、$-1010°$ 均為同界角。其中角度為正的，稱為正同界角；角度為負的，稱為負同界角。

以 70°為例，作圖示說明：

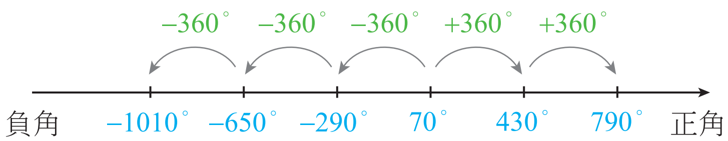


圖 2-10

在正同界角中，最小的一個角稱為最小正同界角；在負同界角中，最大的一個角稱為最大負同界角。 其最小正同界角和最大負同界角相差 360°。

例題 4

下列何者與 53° 互為同界角？

(A) $-307°$　(B) 503°　(C) $-1053°$　(D) 773°

解　利用 $\alpha-\beta=360°\times k$（$k$ 為整數）可得

(A) $-307°-53°=-360°=360°\times(-1)$

(B) $503°-53°=450°$

(C) $-1053°-53°=-1106°$

(D) $773°-53°=720°=360°\times 2$

因為 (A)(D) 為 360° 的整數倍

所以 (A)(D) 與 53° 互為同界角

隨堂練習

4. 試問 135° 與 $-585°$ 是否互為同界角？

例題 5

試求以下角度的最小正同界角與最大負同界角：

(1) $570°$　　(2) $-570°$　　(3) $\dfrac{23\pi}{4}$

解　先求最小正同界角，減去 $360°$ 即得最大負同界角

(1) $570° = 360° + 210°$

故最小正同界角為 $210°$

最大負同界角為 $210° - 360° = -150°$

(2) $-570° = 360° \times (-2) + 150°$

故最小正同界角為 $150°$

最大負同界角為 $150° - 360° = -210°$

(3) $\dfrac{23\pi}{4} = 2\pi \times 2 + \dfrac{7\pi}{4}$

故最小正同界角為 $\dfrac{7\pi}{4}$

最大負同界角為 $\dfrac{7\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{\pi}{4}$

隨堂練習

5. 試求以下角度的最小正同界角與最大負同界角：

(1) $928°$　　(2) $-\dfrac{11\pi}{6}$

2-1.4 扇形的弧長與面積

公　式

設半徑為 r 的圓，圓心角為 θ（單位為弧度），θ 所對的弧長為 S，扇形面積為 A，扇形周長為 L，則：

(1) 扇形的弧長：$S = r\theta$

(2) 扇形的周長：$L = S + 2r = r\theta + 2r$

(3) 扇形的面積：$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rS$

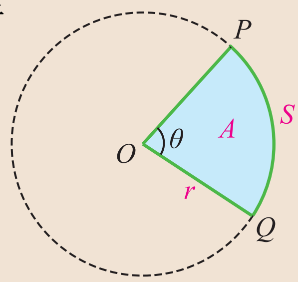


圖 2-11

說明：利用扇形弧長與面積和圓心角成正比可得

$$\frac{S}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \text{ 和 } \frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow S = r\theta \text{ 和 } A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

其中 $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r \times (r\theta) = \frac{1}{2}rS$

又扇形 OPQ 的周長 $L = S + 2r = r\theta + 2r$

例題 6

一美姐姐的訂婚喜餅是中式大餅，一美下課後肚子餓想切大餅來吃，她切的大餅半徑為 12 公分，圓心角為 150°，試求所切扇形大餅的弧長、周長及面積。　　提示：圓心角的度數必用弧度

解　$150° = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$

所以扇形弧長 $S = r\theta = 12 \times \frac{5\pi}{6} = 10\pi$（公分）

扇形周長 $L = r\theta + 2r = 10\pi + 2 \times 12 = 10\pi + 24$（公分）

扇形面積 $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{5\pi}{6} = 60\pi$（平方公分）

隨堂練習

6. 設一扇形的半徑為 6，其所對圓心角為 $\frac{2\pi}{3}$，試求此扇形的弧長與面積。

習題 2-1

1. 將下列各弧度化為度數：(1) $\frac{5\pi}{6}$　　(2) $-\frac{2\pi}{3}$

2. 將下列各度數化為弧度：(1) $-315°$　　(2) $5°$

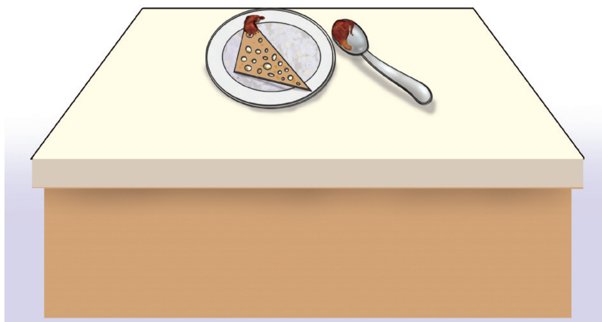
3. 試求以下角度的最小正同界角與最大負同界角：

   (1) $-1326°$　　(2) $\frac{11\pi}{5}$

4. 若一圓半徑為 8，圓心角為 135°，試求此扇形的弧長、周長及面積。

2-2 三角函數的定義

一美下午做完功課想吃點心，拿了一塊直角三角形的餅乾，餅乾的一角塗上了巧克力醬放在桌上，她想著三角形有三個角三個邊，若固定一個不是 90 度的角，則三個邊可排出幾種比值？這些比值就是我們即將要學的三角函數值。

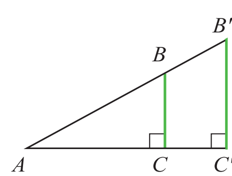


▲ 圖 2-12

2-2.1 銳角的三角函數值定義

給兩相似直角三角形，利用相似三角形的性質：對應邊成比例，可得對應邊長的比與角度大小有關，與三角形的大小無關。如圖 2-13：

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}$$



▲ 圖 2-13

在直角△ ABC 中（$\angle C=90°$），可得邊長比值分別為$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$、$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$、$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$、$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$、$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$、$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$。以下定義銳角 $\angle A$ 的六個三角函數：

設 a、b、c 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對應邊長，即 $\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$。

互為倒數

正弦函數值　(*sine*)　　：$\sin A=\dfrac{\text{對邊 } a}{\text{斜邊 } c}$

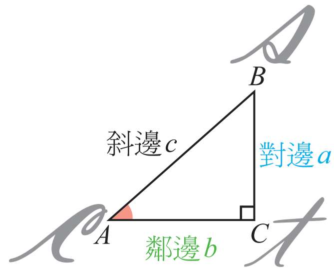
餘弦函數值　(*cosine*)　：$\cos A=\dfrac{\text{鄰邊 } b}{\text{斜邊 } c}$

正切函數值　(*tangent*)　：$\tan A=\dfrac{\text{對邊 } a}{\text{鄰邊 } b}$

餘切函數值　(*cotangent*)：$\cot A=\dfrac{\text{鄰邊 } b}{\text{對邊 } a}$

正割函數值　(*secant*)　：$\sec A=\dfrac{\text{斜邊 } c}{\text{鄰邊 } b}$

餘割函數值　(*cosecant*)：$\csc A=\dfrac{\text{斜邊 } c}{\text{對邊 } a}$



▲ 圖 2-14

例題 1

在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90°$，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=2$，試求 $\angle A$ 的各三角函數值。

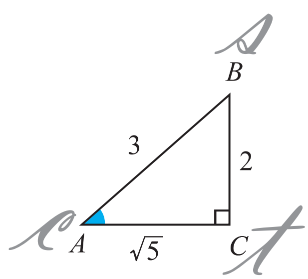
解　由商高定理：$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

所以 $\sin A=\dfrac{2}{3}\xrightarrow{\text{倒數}}\csc A=\dfrac{3}{2}$

$\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\xrightarrow{\text{倒數}}\sec A=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$\tan A=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\xrightarrow{\text{倒數}}\cot A=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$



隨堂練習

1. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90°$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=2$，試求 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$。

小考箱

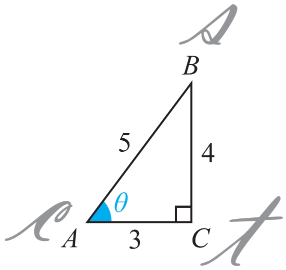
(　　) 2. 在例題 1 中，$\sin A$ 與 $\cos B$ 相等？

例題 2

設 θ 為銳角，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，試求 θ 的其他三角函數值。

解 作直角 $\triangle ABC$，使 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=\theta$

如圖所示，利用商高定理：



$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$$

所以 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$　　$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$　　$\cot\theta=\dfrac{3}{4}$

$\sec\theta=\dfrac{5}{3}$　　$\csc\theta=\dfrac{5}{4}$

隨堂練習

2. 設 θ 為銳角，若 θ 的正切函數值為 $\dfrac{1}{2}$，試求 θ 的餘弦函數值。

2-2.2 三角函數的恆等關係

公式

(1) 倒數關係

$\sin\theta\csc\theta=1$

$\cos\theta\sec\theta=1$

$\tan\theta\cot\theta=1$

(2) 商數關係

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(3) 平方關係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

(4) 餘角關係

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$　　$\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$

$\sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta$　　$\csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta$

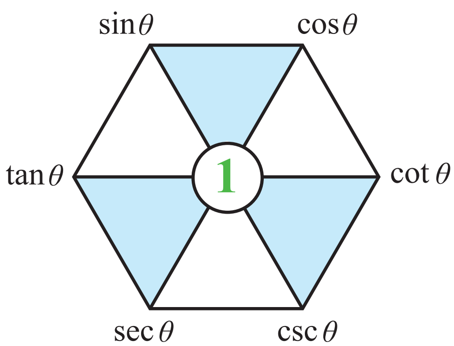
【註】$\sin^2\theta=(\sin\theta)^2$，$\cos^2\theta=(\cos\theta)^2$，

$\tan^2\theta=(\tan\theta)^2$，$\cot^2\theta=(\cot\theta)^2$，

$\sec^2\theta=(\sec\theta)^2$，$\csc^2\theta=(\csc\theta)^2$

說明：利用銳角三角函數的定義可推得。

為了讓同學方便記憶，把六個三角函數的關係以正六邊形表示：



▲ 圖 2-15

(1) 倒數關係：對角線兩函數值乘積為 1。

(2) 商數關係：任一頂點函數值為相鄰兩函數值的乘積。

(3) 平方關係：鋪色區域的三角形上方兩函數值的平方和為下方函數值的平方。

(4) 餘角關係：水平兩函數互為餘角關係。

小考箱

(　　) 3. 三角函數的平方關係中：$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$，$\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$ ？

例題 3

設 θ 為銳角，試求下列各式之值：

(1) $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\csc\theta}$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

解 (1) 原式 $=\dfrac{(1+\csc\theta)+(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1+\csc\theta)}$（通分）

$=\dfrac{2+\csc\theta+\sin\theta}{1+\sin\theta+\csc\theta+\sin\theta\csc\theta}$（由倒數 $\sin\theta\csc\theta=1$）

$=\dfrac{2+\csc\theta+\sin\theta}{1+\sin\theta+\csc\theta+1}$

$=\dfrac{2+\csc\theta+\sin\theta}{2+\csc\theta+\sin\theta}=1$

(2) 原式 $=(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(1+2\sin\theta\cos\theta)+(1-2\sin\theta\cos\theta)$（由平方關係）

$=2$

隨堂練習

3. 設 θ 為銳角，試求下列各式之值：

(1) $\dfrac{1}{1+\tan\theta}+\dfrac{1}{1+\cot\theta}$

(2) $\sec^2\theta-\tan^2\theta+\csc^2\theta-\cot^2\theta$

例題 4

試求 $\sin 20° \csc 20° + \tan 25° \tan 65°$ 之值。

解 原式 $= \sin 20° \csc 20° + \tan 25° \cot 25°$（由餘角關係 $\tan 65° = \cot 25°$）

$= 1 + 1$（由倒數關係）

$= 2$

隨堂練習

4. 試求 $\sin^2 25° + \sin^2 65°$ 之值。

例題 5

設 θ 為銳角，若 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$，試求下列各值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\tan\theta + \cot\theta$

解 (1) 由等號兩端平方：

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sqrt{2}^2$

乘開得 $\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 2$

由 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 得 $1 + 2\sin\theta\cos\theta = 2$

移項得 $2\sin\theta\cos\theta = 1$

故 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$

(2) 原式 $= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

隨堂練習

5. 設 θ 為銳角，若 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{3}$，試求下列各值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\tan\theta + \cot\theta$

例題 6

設 θ 為銳角，若 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，試求 $\dfrac{2\sin\theta+\cos\theta}{3\cos\theta-\sin\theta}$ 之值。

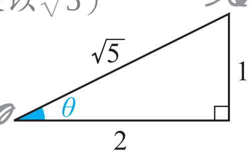
解 由商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$

令 $\sin\theta=r$，$\cos\theta=2r$ 代入　原式 $=\dfrac{2\times r+2r}{3\times 2r-r}=\dfrac{4r}{5r}=\dfrac{4}{5}$

【另解】由銳角的三角函數值定義得 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 代入

原式 $=\dfrac{2\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}}{3\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$（分子、分母同乘以 $\sqrt{5}$）

$=\dfrac{2\times1+2}{3\times2-1}=\dfrac{4}{5}$



隨堂練習

6. 設 θ 為銳角，若 $\cot\theta=\dfrac{3}{2}$，試求 $\dfrac{7\cos\theta+2\sin\theta}{\cos\theta-4\sin\theta}$ 之值。

2-2.3 30°，45° 與 60° 的三角函數值

作特別角 30°、45°、60° 的直角三角形，設 $\angle C=90°$

取 $\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=1$ 由畢氏定理得 $\overline{AC}=\sqrt{3}$	取 $\overline{AC}=\overline{BC}=1$ 由畢氏定理得 $\overline{AB}=\sqrt{2}$	取 $\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=1$ 由畢氏定理得 $\overline{BC}=\sqrt{3}$

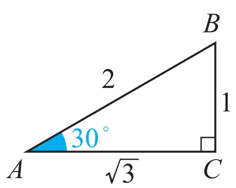


圖 2-16

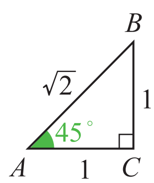


圖 2-17

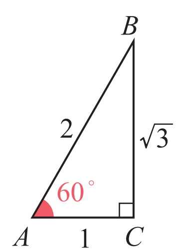


圖 2-18

利用銳角的三角函數定義列出 sin、cos、tan，其餘利用倒數可得：

角度 θ ＼ 函數	$\sin\theta=\dfrac{對邊}{斜邊}$	$\cos\theta=\dfrac{鄰邊}{斜邊}$	$\tan\theta=\dfrac{對邊}{鄰邊}$
$30°\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$45°\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	1
$60°\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$， $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$， $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

【註】(1) $\sin 30°=\dfrac{1}{2}$，$\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（分子順序為：$\sqrt{1}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$）

(2) $\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 60°=\dfrac{1}{2}$

（分子順序為：$\sqrt{3}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{1}$）

例題 7

試求 $\sin^2 60°-\cos^2 45°+\tan^2 30°$ 之值。

解 因為 $\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

原式 $=\sin^2 60°-\cos^2 45°+\tan^2 30°$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$

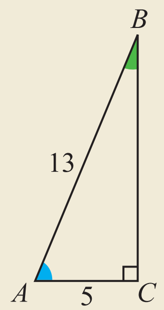
$$=\frac{7}{12}$$

隨堂練習

7. 試求 $\sec 60°+\tan 45°-\tan 30°\sin 60°$ 之值。

習題 2-2

1. 如下圖，在直角 $\triangle ABC$ 中，試求 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的各三角函數值。



2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C = 90°$，$\sin A = \dfrac{8}{17}$，試求 $\tan A + \csc B$。

3. 試求 $\sin^2 55° + \sin^2 35° - \sec 50° \sin 40°$ 之值。

4. 設 θ 為銳角，若 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{6}{5}$，試求：

   (1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\tan\theta + \cot\theta$

5. 設 θ 為銳角，若 $\tan\theta = 2$，試求 $\dfrac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{\cos\theta + 2\sin\theta}$ 之值。

6. 試求$(\sin 30° - \cos 45°)(\cos 60° + \sin 45°)$之值。

2-3　任意角的三角函數值

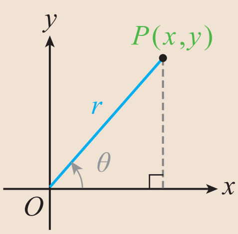
前一節介紹銳角的三角函數值定義，若將銳角改為鈍角或大於 180° 時，又該如何定義？以下將為你介紹，並找出角度互換時三角函數間的關係。

2-3.1　任意角的三角函數值定義

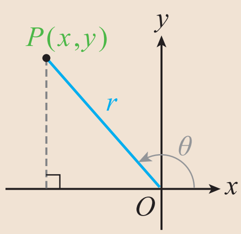
定　義

設 θ 為標準位置角，不為象限角，在終邊上任取一點 $P(x,y)$，其中 P 不為原點，如圖 2-19 ①～圖 2-19 ④，令 $\overline{OP}=r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，定義 θ 角的三角函數值：

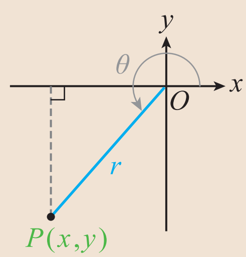
$$\sin\theta=\frac{y}{r}，\cos\theta=\frac{x}{r}，\tan\theta=\frac{y}{x}，\cot\theta=\frac{x}{y}，\sec\theta=\frac{r}{x}，\csc\theta=\frac{r}{y}$$



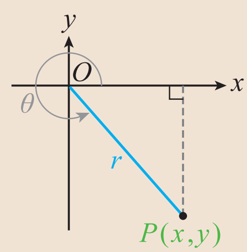
▲ 圖 2-19 ①



▲ 圖 2-19 ②



▲ 圖 2-19 ③



▲ 圖 2-19 ④

例 題　1

角 θ 終邊上一點 $P(-3,4)$，試求 θ 的六個三角函數值。

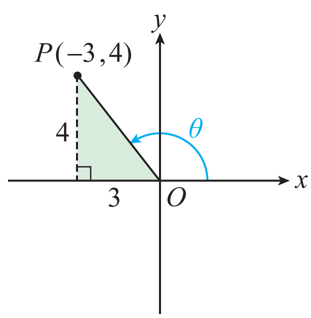
解 $x=-3$，$y=4$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

由定義：

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{4}{5}$　　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-3}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{-3}$　　$\cot\theta=\dfrac{x}{y}=\dfrac{-3}{4}$

$\sec\theta=\dfrac{r}{x}=\dfrac{5}{-3}$　　$\csc\theta=\dfrac{r}{y}=\dfrac{5}{4}$



隨堂練習

1. 角 θ 終邊上一點 $P(1, -2)$，試求 $\sin\theta$、$\tan\theta$、$\sec\theta$ 之值。

2-3.2 任意角的三角函數值

由任意角的三角函數定義，可決定第一、第二、第三、第四象限角的三角函數值之正負。

(1) 列表整理（其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$）

象限 函數	Ⅰ(x, y) ＋ ＋	Ⅱ(x, y) － ＋	Ⅲ(x, y) － －	Ⅳ(x, y) ＋ －
$\sin\theta=\frac{y}{r}$ $\csc\theta=\frac{r}{y}$	＋	＋	－	－
$\cos\theta=\frac{x}{r}$ $\sec\theta=\frac{r}{x}$	＋	－	－	＋
$\tan\theta=\frac{y}{x}$ $\cot\theta=\frac{x}{y}$	＋	－	＋	－

(2) 分解圖

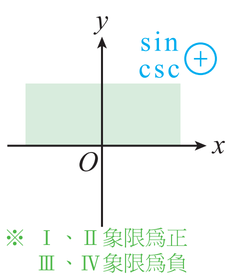


圖 2-20

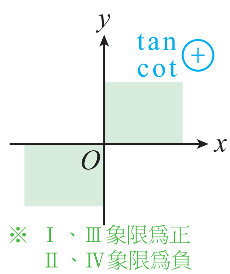


圖 2-21

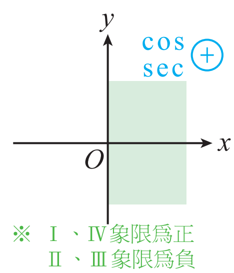


圖 2-22

例題 2

若$(\tan\theta, \cos\theta)$在第三象限內，則θ為第幾象限角？

解 因為$(\tan\theta, \cos\theta)$在第三象限，所以$\tan\theta < 0$且$\cos\theta < 0$

$\tan\theta < 0$表θ可能為第二、四象限角

$\cos\theta < 0$表θ可能為第二、三象限角

故θ為第二象限角

隨堂練習

2. 若$\cos\theta > 0$且$\tan\theta < 0$，則θ為第幾象限角？

例題 3

設$\sin\theta = -\dfrac{12}{13}$且$\tan\theta > 0$，試求$\cot\theta$，$\csc\theta$之值。

解 $\sin\theta < 0$表θ可能為第三、四象限角

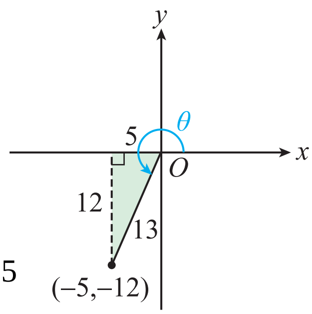
$\tan\theta > 0$表θ可能為第一、三象限角

故θ為第三象限角，θ終邊上一點

(x, y)在第三象限

由$r = 13$，$y = -12 \Rightarrow x = -\sqrt{13^2 - 12^2} = -5$

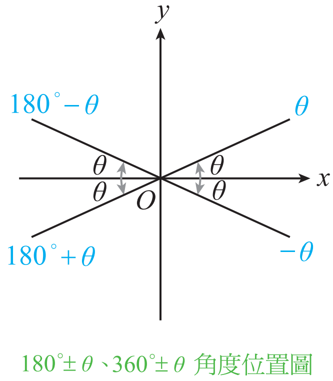
所以$\cot\theta = \dfrac{-5}{-12} = \dfrac{5}{12}$，$\csc\theta = -\dfrac{13}{12}$



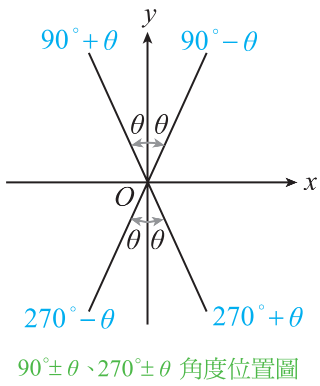
隨堂練習

3. 設$\cot\theta = -\dfrac{3}{4}$且$\sin\theta < 0$，試求$\sin\theta$，$\cos\theta$之值。

利用任意角的三角函數定義，將任意角的三角函數化為銳角的三角函數以便求其值。設 θ 為銳角，下列兩圖表為任意角度換算位置圖。



▲ 圖 2-23 ①



▲ 圖 2-23 ②

我們分段說明其三角函數值之換算，先介紹同界角的互換關係，再依 $180° \pm \theta$、$360° \pm \theta$、$90° \pm \theta$、$270° \pm \theta$ 以及象限角分別討論。

1. 同界角的互換：

$\sin(360° \times k + \theta) = \sin\theta$；$\cos(360° \times k + \theta) = \cos\theta$

$\tan(360° \times k + \theta) = \tan\theta$；$\cot(360° \times k + \theta) = \cot\theta$

$\sec(360° \times k + \theta) = \sec\theta$；$\csc(360° \times k + \theta) = \csc\theta$

（以上各式中之 k 為整數）

例題 4

試求下列各函數值：(1) $\sin 1485°$　　(2) $\cos(-660°)$

解　(1) $\sin 1485° = \sin(360° \times 4 + 45°)$

$= \sin 45°$（同界角的換算）$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos(-660°) = \cos[360° \times (-2) + 60°]$

$= \cos 60°$（同界角的換算）$= \dfrac{1}{2}$

隨堂練習

4. 試求下列各函數值：(1) $\tan 420°$ (2) $\sec(-330°)$

2. $180° \pm \theta$ 與 $360° \pm \theta$ 三角函數值的換算：

(1) $180° - \theta$ 三角函數值的換算（補角關係）

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$　　$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$　　$\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$

$\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$　　$\csc(180° - \theta) = \csc\theta$

說明：作一半徑為 r 的圓，設 θ 和 $180° - \theta$ 兩角的終邊與圓的交點分別為 P 和 P'，由圖可得 $P'(-x, y)$

設 $P(x, y)$，利用三角形的全等可得 $P'(-x, y)$

由任意角的三角函數值定義

$$\sin(180° - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\cos(180° - \theta) = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$$

$$\tan(180° - \theta) = \frac{y}{-x} = -\tan\theta$$

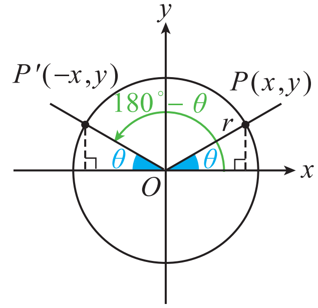


圖 2-24

(2) $180° + \theta$ 三角函數值的換算

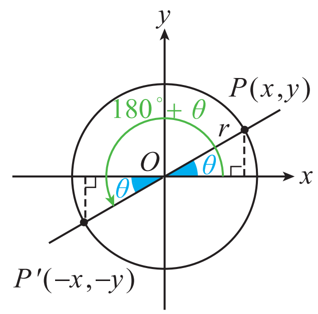
$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$　　$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$　　$\cot(180° + \theta) = \cot\theta$

$\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$　　$\csc(180° + \theta) = -\csc\theta$

說明：同 2(1)的方法得 $P'(-x, -y)$

證明同 2(1)，請同學自行練習



▲ 圖 2-25

(3) $360° - \theta$（即負角 $-\theta$）三角函數值的換算

$\sin(360° - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$　　$\cos(360° - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(360° - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$　　$\cot(360° - \theta) = \cot(-\theta) = -\cot\theta$

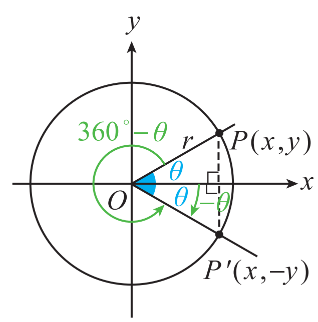
$\sec(360° - \theta) = \sec(-\theta) = \sec\theta$　　$\csc(360° - \theta) = \csc(-\theta) = -\csc\theta$

說明：由同界角的換算

可知 $360° - \theta$ 與 $-\theta$ 函數值相同

同 2(1)的方法得 $P'(x, -y)$

證明同 2(1)，請同學自行練習



▲ 圖 2-26

例題 5

試利用 $180° \pm \theta$ 或 $360° \pm \theta$ 的換算，求下列各式的值：

(1) $\sin 150°$　　(2) $\cos 225°$　　(3) $\tan 300°$

解 (1) $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

(2) $\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan 300° = \tan(360° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

隨堂練習

5. 試利用 $180° \pm \theta$ 或 $360° \pm \theta$ 的換算，求下列各式的值：

(1) $\sec 135°$　　(2) $\cot 210°$　　(3) $\csc 330°$

例題 6

試利用 $-\theta$ 的換算，求下列各函數值：

(1) $\sin(-45°)$　　(2) $\cos(-30°)$

解 (1) $\sin(-45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

隨堂練習

6. 試利用 $-\theta$ 的換算，求下列各函數值：

(1) $\tan(-30°)$　　(2) $\sec(-60°)$

3. $90° \pm \theta$ 與 $270° \pm \theta$ 三角函數值的換算：

(1) $90° - \theta$ 三角函數值的換算（餘角關係）

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$	$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$
$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$	$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$
$\sec(90° - \theta) = \csc\theta$	$\csc(90° - \theta) = \sec\theta$

說明：作一半徑為 r 的圓

設 θ 和 $90° - \theta$ 兩角的終邊與圓的交點分別為 P 和 P'

設 $P(x, y)$，利用三角形的全等可得 $P'(y, x)$

由任意角的三角函數值定義：

$$\sin(90° - \theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\cos(90° - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\tan(90° - \theta) = \frac{x}{y} = \cot\theta$$

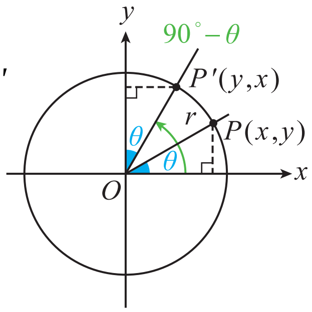


圖 2-27

(2) $90° + \theta$ 三角函數值的換算

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$	$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$
$\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$	$\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$
$\sec(90° + \theta) = -\csc\theta$	$\csc(90° + \theta) = \sec\theta$

說明：作一半徑為 r 的圓，設 θ 和 $90° + \theta$ 兩角的終邊與圓的交點分別為 P 和 P'，

由圖可得 $P'(-y, x)$

設 $P(x, y)$，利用三角形的全等可得 $P'(-y, x)$

由任意角的三角函數值定義

$$\sin(90° + \theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\cos(90° + \theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$$

$$\tan(90° + \theta) = \frac{x}{-y} = -\cot\theta$$

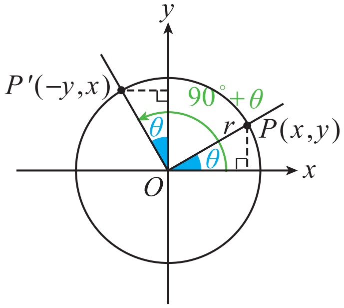


圖 2-28

(3) $270° - \theta$ 三角函數值的換算

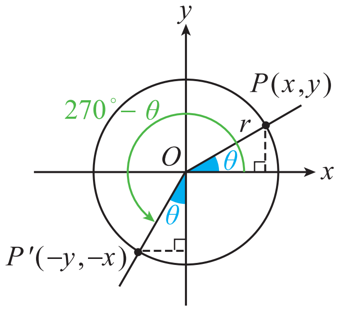
$$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta \qquad \cos(270° - \theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(270° - \theta) = \cot\theta \qquad \cot(270° - \theta) = \tan\theta$$

$$\sec(270° - \theta) = -\csc\theta \qquad \csc(270° - \theta) = -\sec\theta$$

說明：同 3(2)的方法得 $P'(-y, -x)$

證明同 3(2)，請同學自行練習



▲ 圖 2-29

(4) $270° + \theta$ 三角函數值的換算

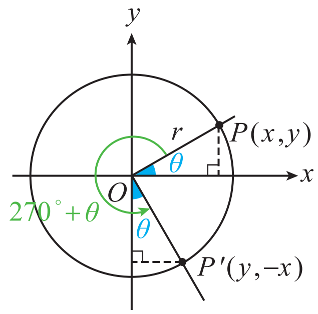
$$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta \qquad \cos(270° + \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(270° + \theta) = -\cot\theta \qquad \cot(270° + \theta) = -\tan\theta$$

$$\sec(270° + \theta) = \csc\theta \qquad \csc(270° + \theta) = -\sec\theta$$

說明：同 3(2)的方法得 $P'(y, -x)$

證明同 3(2)，請同學自行練習



▲ 圖 2-30

例題 7

試利用 $90° \pm \theta$ 或 $270° \pm \theta$ 的換算，求下列各式的值：

(1) $\sin 135°$ (2) $\sec 240°$ (3) $\cot 330°$

解

(1) $\sin 135° = \sin(90° + 45°) = \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\sec 240° = \sec(270° - 30°) = -\csc 30° = -2$

(3) $\cot 330° = \cot(270° + 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

隨堂練習

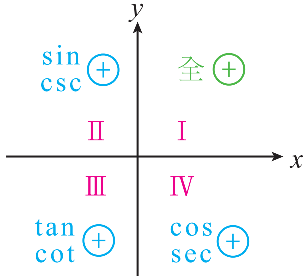
7. 試利用 $90° \pm \theta$ 或 $270° \pm \theta$ 的換算，求下列各式的值：

(1) $\cos 120°$ (2) $\tan 210°$ (3) $\csc 315°$

$90° \pm \theta$、$270° \pm \theta$ 的換算易錯，常忘了正餘互換，因此，建議同學儘量採用 $180° \pm \theta$、$360° \pm \theta$ 的換算，於特定情況再用 $90° \pm \theta$、$270° \pm \theta$ 的換算。

【註】①以上 1～3 的關係式，設 θ 為銳角只是為了簡單化易於了解。若 θ 為任意角，所有關係式亦成立。

②第一、第二、第三、第四象限角的三角函數值之正負整理如右：

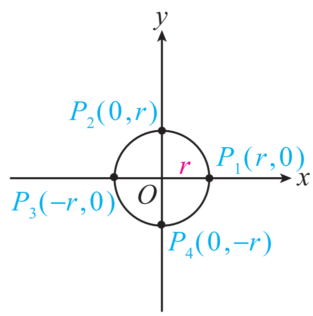


▲ 圖 2-31

③當 $180° \pm \theta$，$360° \pm \theta$ 及 $-\theta$ 換算時，函數不變。當 $90° \pm \theta$，$270° \pm \theta$ 換算時，因為 x 與 y 對調，因此函數 sin 與 cos、tan 與 cot、sec 與csc 須互換。

4. 象限角的三角函數值：

象限角指終邊在 x 軸或 y 軸上，即 0°、90°、180°、270°、360°、……，因同界角的三角函數值相等，我們僅討論 0°、90°、180°、270°。設 $P_1(r,0)$、$P_2(0,r)$、$P_3(-r,0)$、$P_4(0,-r)$分別為 0°、90°、180°、270° 的終邊上一點。可得下列結果：



▲ 圖 2-32

函數＼度數	0°	90°	180°	270°	圖示記憶
$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$	0	1	0	-1	1 0 sin 0 -1
$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$	1	0	-1	0	0 -1 cos 1 0
$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$	0		0		× 0 tan 0 ×

（「×」表不存在）

其餘函數值，利用倒數關係 $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$，$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$，$\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$ 可得。

例題 8

試求下列各函數值：

(1) $\sin 540°$　(2) $\cos(-180°)$　(3) $\tan 720°$　(4) $\sec 180°$

解

(1) $\sin 540° = \sin(360°\times 1+180°)=\sin 180°$（同界角的換算）$=0$

(2) $\cos(-180°)=\cos[360°\times(-1)+180°]=\cos 180°=-1$

(3) $\tan 720°=\tan(360°\times 2+0°)=\tan 0°=0$

(4) $\sec 180°=\dfrac{1}{\cos 180°}=\dfrac{1}{-1}=-1$

隨堂練習

8. 試求下列各函數值：(1) $\sin(-270°)$　(2) $\tan 540°$

例題 9

試求 $\sin 210°\tan(-45°)+\cos 1140°\sin 90°$ 之值。

解

$\sin 210°=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-\dfrac{1}{2}$

$\tan(-45°)=-\tan 45°=-1$

$\cos 1140°=\cos(360°\times 3+60°)=\cos 60°=\dfrac{1}{2}$

$\sin 90°=1$

故原式 $=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-1)+\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

隨堂練習

9. 試求 $\cot^2(-690°)+\tan 180° \sin 30°$ 之值。

例題 10

設 θ 不為象限角，試化簡 $\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180°+\theta)}-\dfrac{\tan(90°+\theta)}{\tan(270°-\theta)}-\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(90°+\theta)}$。

解 原式 $=\dfrac{-\sin\theta}{-\sin\theta}-\dfrac{-\cot\theta}{\cot\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}$

$=1+1-1=1$

隨堂練習

10. 設 θ 不為象限角，試化簡 $\sec(\pi+\theta)+\csc\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)+\cot(-\theta)$。

小考箱

(　) 4. 若 θ 為任意角，$\sin(90°+\theta)=-\cos\theta$？

習題 2-3

1. 角 θ 終邊上一點 $P(-8, y)$，且 $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$，試求 y 之值。

2. 設 $\sin\theta = -\dfrac{2}{3}$ 且 $180° < \theta < 270°$，試求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 之值。

3. 試求下列函數值：

   (1) $\sin 480°$

   (2) $\cos 810°$

   (3) $\tan(-690°)$

4. 試求下列各式之值：

   (1) $\sin 750° + \tan(-135°) - \cos 2280°$

   (2) $(\tan 240° - \sin(-30°))(\cot 390° - \cos 300°)$

5. 設 θ 不為象限角，試求 $\dfrac{\sin(180°+\theta)}{\cos(270°+\theta)} - \dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(90°+\theta)}$ 之值。

2-4　三角函數的圖形

「三角函數」是把角度對應到數值的函數，將角度視為自變數 x，三角函數值視為應變數 y，我們將介紹畫圖形的方法：一為描點繪圖，另一為利用電腦軟體繪圖。在介紹圖形之前，我們先介紹圖形中的一個特別現象：週期。

週期函數

存在一實數 p 使得 $f(x+p)=f(x)$ 恆成立，我們稱函數 f 為週期函數，而滿足此關係的最小正數 p 稱為 $f(x)$的週期。

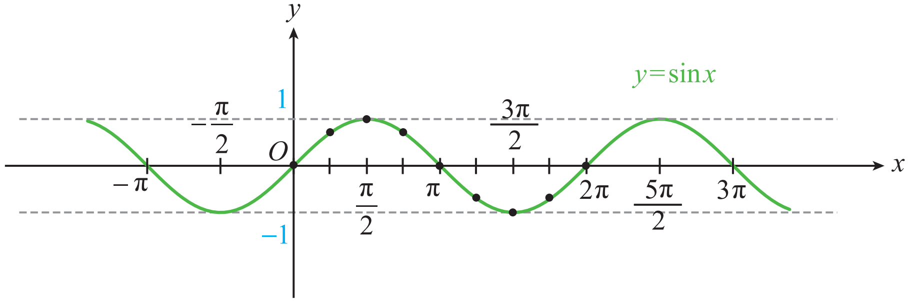
討論三角函數的圖形時，習慣上自變數 x 採弧度量。

(1) 描點繪圖法：

在函數中，給特別角 x 值，求其所對應的函數值 y。

①正弦函數 $y=\sin x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

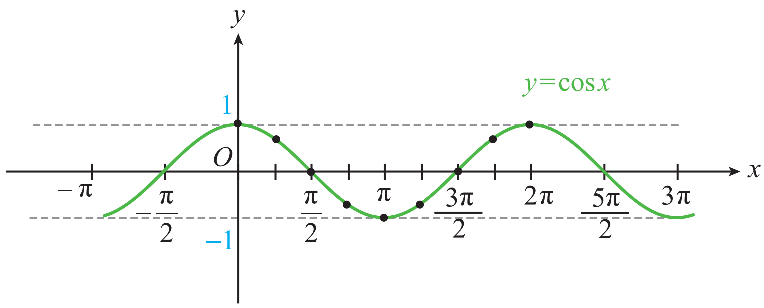


▲ 圖 2-33

將列表中的值描點，以圓滑曲線連接可得 0 到 2π 的圖形，又因為 $\sin(x+2\pi)=\sin x$，其週期為 2π，故經過 2π 單位出現相同的圖形，可依此關係延伸圖形。

②餘弦函數 $y=\cos x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

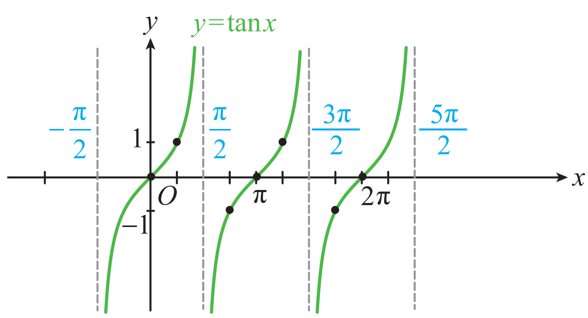


▲ 圖 2-34

同(1)的方法，因為 $\cos(x+2\pi)=\cos x$，其週期為 2π。

③正切函數 $y=\tan x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	1		-1	0	1		-1	0

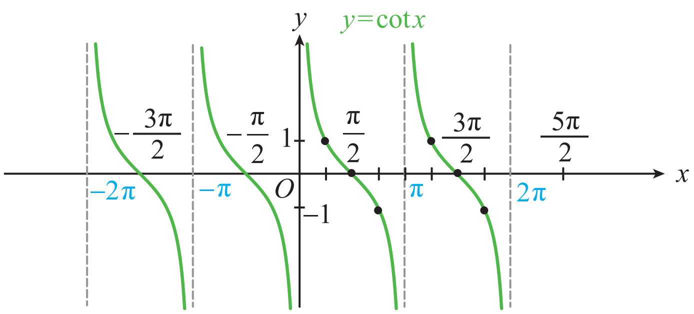


▲ 圖 2-35

同(1)的方法，因為 $\tan(x+\pi)=\tan x$，其週期為 π。

④餘切函數 $y = \cot x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y		1	0	-1		1	0	-1	

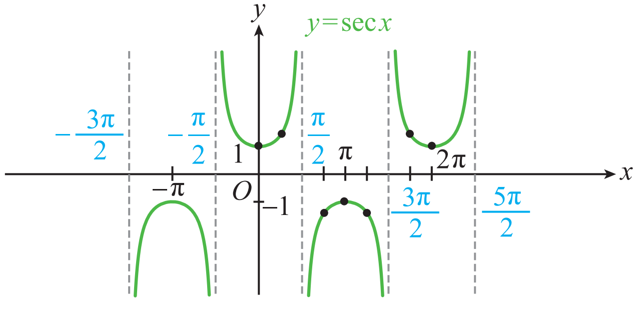


▲ 圖 2-36

同(1)的方法，因為 $\cot(x+\pi)=\cot x$，其週期為 π。

⑤正割函數 $y = \sec x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	1	$\sqrt{2}$		$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	1



▲ 圖 2-37

同(1)的方法，因為 $\sec(x+2\pi)=\sec x$，其週期為 2π。

⑥餘割函數 $y = \csc x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y		$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$		$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	

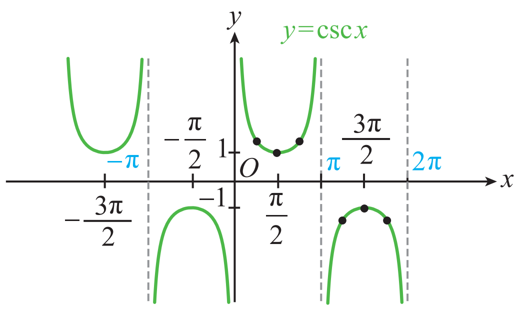


圖 2-38

同(1)的方法，因為 $\csc(x + 2\pi) = \csc x$，其週期為 2π。

⑦六個三角函數圖形列表歸納整理：

函數	定義域(x)	值域(y)	週期 p
$y = \sin x$ $y = \cos x$	x 為任意實數	$-1 \le y \le 1$ $(\lvert y \rvert \le 1)$	2π
$y = \tan x$ $y = \cot x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$（$k$ 為整數） $x \neq k\pi$	y 為任意實數	π
$y = \sec x$ $y = \csc x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$（$k$ 為整數） $x \neq k\pi$	$y \ge 1$ 或 $y \le -1$ $(\lvert y \rvert \ge 1)$	2π

(2) 電腦軟體繪圖：

利用 GeoGebra 軟體繪出三角函數圖形及其變化，同學們可藉由圖形了解振幅、週期及位置的變化，請參閱附錄中的電腦輔助教學。

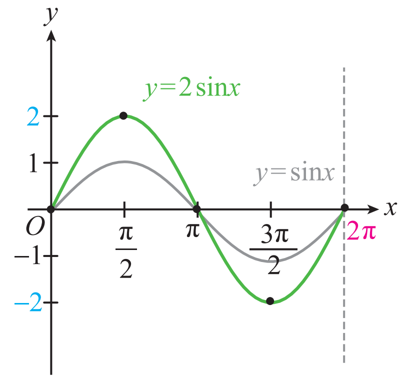
例題 1

試描繪下列各函數圖形，並求其週期與函數值範圍：

(1) $y = 2\sin x$　　　　(2) $y = \sin 2x$

解 (1) 描點繪圖：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	2	0	-2	0



※ 將 $y=\sin x$ 圖形的高度增爲2倍

①週期 $p = 2\pi$

（因為 $2\sin(x+2\pi) = 2\sin x$）

②因為 $-1 \le \sin x \le 1$，

所以 $-2 \le 2\sin x \le 2$

即 $-2 \le y \le 2$

(2) 描點繪圖：

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

①週期 $p = \pi$，新週期變為

原週期的 $\frac{1}{2}$

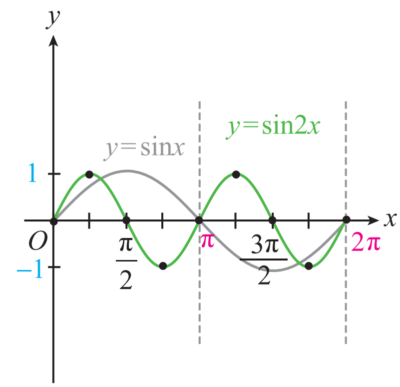
（因為 $\sin\left[2(x+\pi)\right]$

$= \sin(2x+2\pi) = \sin 2x$）

②函數值範圍：

$-1 \le \sin 2x \le 1$，

即 $-1 \le y \le 1$



※ 將 $y=\sin x$ 圖形的週期調爲 π

隨堂練習

1. 試描繪下列各函數圖形，並求其週期與函數值範圍：

(1) $y = 2\cos x$　　(2) $y = \cos\dfrac{x}{2}$

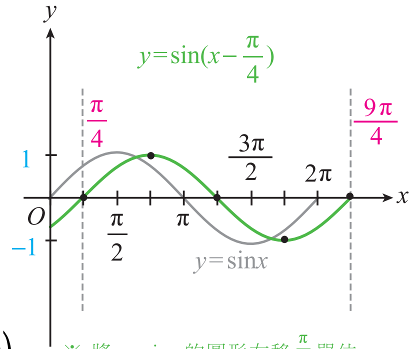
例題 2

試描繪下列各函數圖形，並求其週期與函數值範圍：

(1) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$　　(2) $y = \sin x + 2$

解 (1) 描點繪圖：

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
y	0	1	0	-1	0



※ 將 $y=\sin x$ 的圖形右移 $\frac{\pi}{4}$ 單位

①週期 $p = \dfrac{9\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = 2\pi$

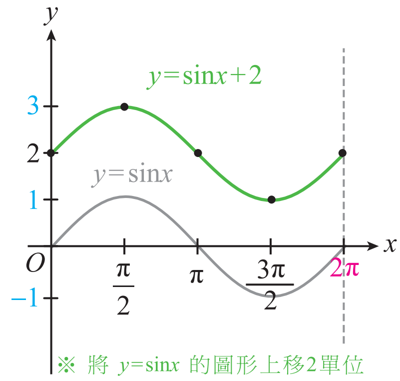
$\left(\text{因為 } \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

②函數值範圍：$-1 \le \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$

即 $-1 \le y \le 1$

(2) 描點繪圖：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	2	3	2	1	2



①週期 $p=2\pi$

（因為 $\sin(x+2\pi)+2=\sin x+2$）

②因為 $-1\leq\sin x\leq 1$，

所以 $1\leq\sin x+2\leq 3$

即 $1\leq y\leq 3$

隨堂練習

2. 試描繪下列各函數圖形，並求其週期與函數值範圍：

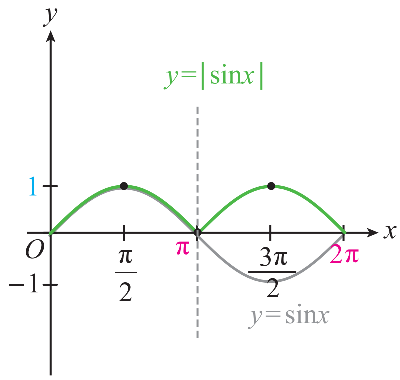
(1) $y=\cos(x-\frac{\pi}{6})$　　(2) $y=\cos x+1$

例題 3

試描繪 $y=|\sin x|$ 的圖形，並求其週期與函數值範圍。

解 描點繪圖：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	1	0



①週期 $p=\pi$

②因為 $-1\leq\sin x\leq 1$，

所以 $0\leq|\sin x|\leq 1$

即 $0\leq y\leq 1$

隨堂練習

3. 試描繪 $y=|\cos x|$ 的圖形，並求其週期與函數值範圍。

【註】(1) 仿例題 1、2 可得

①週期僅與 x 前的係數有關。

②函數值範圍與函數前的常數和上下移動有關。

(2) 函數圖形的變化

$$y=a\boxed{\begin{matrix}\sin\\\cos\\\tan\\\cot\\\sec\\\csc\end{matrix}}\left(kx+m\right)+n$$，其中

a	將圖形高度（振幅）調為 $\lvert a\rvert$ 倍
k	使圖形週期變為原週期 p 的 $\frac{1}{\lvert k\rvert}$ 倍，即新週期 $p'=\frac{p}{\lvert k\rvert}$
m	使圖形水平移動 m 個單位
n	使圖形垂直移動 n 個單位

例題 4

試求 $y=5\cos 3x-2$ 的週期與函數值範圍。

解　週期僅與 x 前的係數有關，所以 $p=\frac{2\pi}{3}$

$-1\le\cos 3x\le 1$

$\Rightarrow\quad -5\le 5\cos 3x\le 5$（同乘以 5）

$\Rightarrow\quad -5-2\le 5\cos 3x-2\le 5-2$（同減去 2）

$\Rightarrow\quad -7\le y\le 3$

隨堂練習

4. 試求 $y = -2\sin 2x + 3$ 的週期與函數值範圍。

利用三角函數圖形可比較同函數的大小，可化為銳角（即第一象限角）或與特別值 0、1 作比較。

小考箱

（　）5. $y = \sin x$、$y = \tan x$、$y = \sec x$ 在第一象限內皆為遞增函數？

例題 5

設 $a = \sin 77°$，$b = \cos 77°$，$c = \tan 77°$，試比較 a、b、c 的大小。

解　化為同函數或相關函數可得：

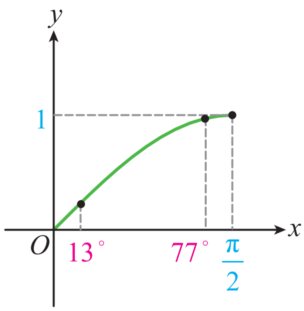
$a = \sin 77° < 1$　$b = \cos 77° = \sin 13° < 1$

$c = \tan 77° > \tan 45° = 1$

由 $y = \sin x$ 的圖形可知

$\sin 77° > \sin 13°$，所以 $a > b$

故 $c > a > b$



隨堂練習

5. 設 $a = \sin 38°$，$b = \cos 38°$，$c = \cot 38°$，試比較 a、b、c 的大小。

習題 2-4

1. 試描繪下列各函數圖形：

 (1) $y = \cos x - 1$

 (2) $y = |\cos x| + 2$

2. 試求下列各函數的週期：

 (1) $y = \sin \dfrac{2x}{3} + 5$

 (2) $y = \tan\left(5x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

 (3) $y = 2\cos 3x$

3. 試求 $y = 3\cos x + 1$ 的函數值範圍。

4. 若 $a = \sin 40°$，$b = \cos 40°$，$c = \sec 40°$，試比較 a、b、c 的大小。

本章彙總

2-1 有向角及其度量

1. 角度互換：

(1) $1° = \dfrac{\pi}{180} = 0.01745$（弧度）

(2) 1（弧度）$= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 57.2958°$

2. 同 界 角：

兩有向角 α、β 有相同的始邊和終邊，即 $\alpha - \beta = 360°\,k$（或 $2k\pi$），其中 k 為整數，則 α、β 互為同界角。

3. 扇　　形：

(1) 弧長 $S = r\theta$

(2) 周長 $L = S + 2r$

(3) 面積 $A = \dfrac{1}{2}r^2\,\theta$

2-2 三角函數的定義

1. 銳角三角函數的定義：

$\sin A = \dfrac{y\text{（對）}}{r\text{（斜）}}$

$\cos A = \dfrac{x\text{（鄰）}}{r\text{（斜）}}$

$\tan A = \dfrac{y\text{（對）}}{x\text{（鄰）}}$

$\cot A = \dfrac{x\text{（鄰）}}{y\text{（對）}}$

$\sec A = \dfrac{r\text{（斜）}}{x\text{（鄰）}}$

$\csc A = \dfrac{r\text{（斜）}}{y\text{（對）}}$

互為倒數

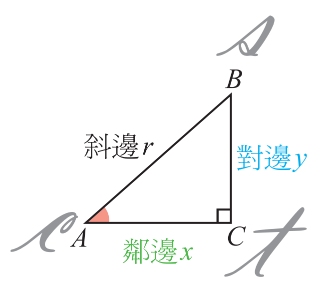


圖 2-39

2. 三角函數的基本性質：

(1) 倒數關係：

$$\sin\theta\csc\theta = 1$$

$$\cos\theta\sec\theta = 1$$

$$\tan\theta\cot\theta = 1$$

(2) 平方關係：

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

(3) 商數關係：

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

(4) 餘角關係：

$$\sin\theta = \cos(90° - \theta)$$

$$\tan\theta = \cot(90° - \theta)$$

$$\sec\theta = \csc(90° - \theta)$$

3. 特別角的三角函數：列出 sin，cos，tan，其餘利用倒數可得。

函數 \ θ	sin	cos	tan
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

本章彙總

2-3　任意角的三角函數值

1. θ 為標準位置角，且 θ 不是象限角

   在其終邊上取一點 $P\,(x\,,y)$，$r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$，則

   $$\sin\theta=\frac{y}{r}\text{，}\cos\theta=\frac{x}{r}\text{，}\tan\theta=\frac{y}{x}$$

   $$\cot\theta=\frac{x}{y}\text{，}\sec\theta=\frac{r}{x}\text{，}\csc\theta=\frac{r}{y}$$

2. 象限角的三角函數值：

函數 θ	sin	cos	tan
$0°$	0	1	0
$90°$	1	0	
$180°$	0	-1	0
$270°$	-1	0	

3. 化任意角的三角函數值為銳角的三角函數值：

   利用 $90°\pm\theta$，$180°\pm\theta$，$270°\pm\theta$，$360°\pm\theta$（或 $\pm\theta$）和第一、第二、第三、第四象限角的三角函數值的正負作換算。

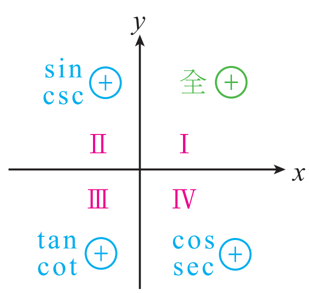
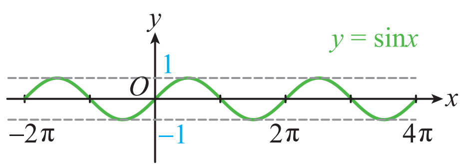
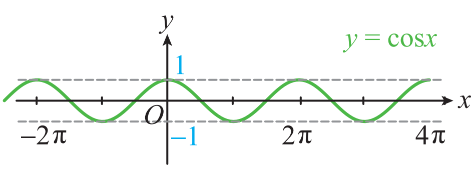
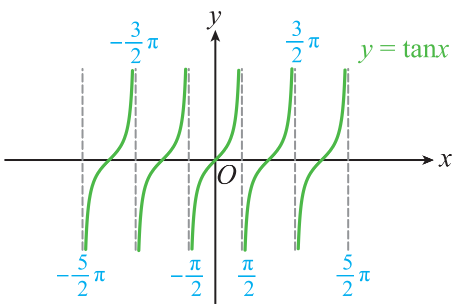
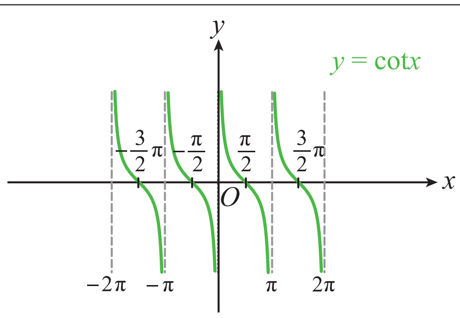


圖 2-40

2-4　三角函數的圖形

1. 三角函數的圖形：

三角函數圖形	週期	值域
 ▲ 圖 2-41	2π	$-1\le y\le 1$ （即 $\lvert y\rvert\le 1$）
 ▲ 圖 2-42	2π	$-1\le y\le 1$ （即 $\lvert y\rvert\le 1$）
 ▲ 圖 2-43	π	y 為任意實數
 ▲ 圖 2-44	π	y 為任意實數

本章彙總

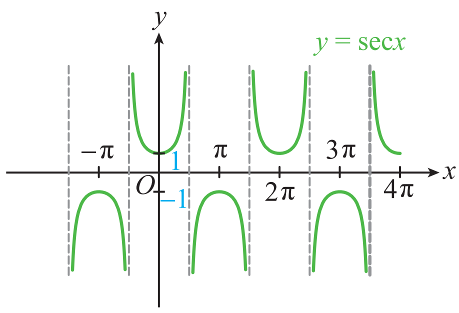
<table>
<tr>
<td>

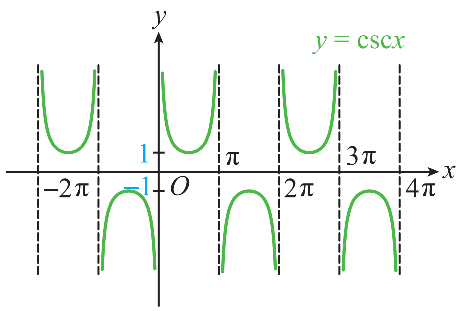
圖 2-45</td>
<td>2π</td>
<td>$y \geq 1$ 或 $y \leq -1$
（即 $|y| \geq 1$）</td>
</tr>
<tr>
<td>

圖 2-46</td>
<td>2π</td>
<td>$y \geq 1$ 或 $y \leq -1$
（即 $|y| \geq 1$）</td>
</tr>
</table>

2. 圖形變化：

$f(x) = a \boxed{\begin{matrix} \text{sin} \\ \text{cos} \\ \text{tan} \\ \text{cot} \\ \text{sec} \\ \text{csc} \end{matrix}} (kx + m) + n$，其中

a	振幅
k	週期為 $\dfrac{\text{原週期}}{\lvert k \rvert}$
m	左右移
n	上下移

自我評量

(　　) 1. 若角 $\theta=228^\circ$，則 θ 為第　(A)一　(B)二　(C)三　(D)四　象限角。

【2-1】

(　　) 2. 若 $-\dfrac{14\pi}{3}$ 的最小正同界角為 α，最大負同界角為 β，則

(A) $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$　(B) $\beta=-\dfrac{2\pi}{3}$　(C) $\beta=-\dfrac{4\pi}{3}$　(D) $\alpha=\dfrac{5\pi}{3}$。　【2-1】

(　　) 3. 半徑為 6 的扇形區域，其面積為 3π，則此扇形的周長為

(A) π　(B) $12+\pi$　(C) $6+\pi$　(D) 2π。　【2-1】

(　　) 4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，且 $\sin A=\dfrac{3}{4}$，下列何者錯誤？

(A) $\tan A=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　(B) $\tan B=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　(C) $\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　(D) $\cos B=\dfrac{3}{4}$。

【2-2】

(　　) 5. 試求 $\dfrac{1+\cos 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\csc 30^\circ-\cot 45^\circ}$ 之值為　(A) $-\dfrac{4}{5}$　(B) -5　(C) $\dfrac{5}{4}$

(D) $-\dfrac{5}{4}$。　【2-2】

(　　) 6. 若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{6}{5}$，且 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{q}{p}$（其中 p、q 為互質整數，

$q>0$），試求 $p+q$ 之值為　(A) 61　(B) 51　(C) 31　(D) 11。【2-2】

(　　) 7. 化簡 $\cos\theta+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi+\theta)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)$ 為

(A) 1　(B) -1　(C) 0　(D) $2\cos\theta$。　【2-3】

自我評量

(　　) 8. 試求 $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{6}+\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\frac{2\pi}{3}+\cot\frac{7\pi}{4}}$ 之值為　(A) -1　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) 2　(D) -2。

【2-3】

(　　) 9. 設 $a=-\sin 37°$，$b=\sin 47°$，$c=\sin 34°$，試比較 a、b、c 之大小

(A) $c>b>a$　(B) $b>a>c$　(C) $b>c>a$　(D) $c>a>b$。　【2-4】

(　　) 10. 下列何者為三角函數 $y=3\tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right)+1$ 的週期？　(A) 4π　(B) 2π

(C) π　(D) $\frac{\pi}{2}$。　【2-4】