

# 2 三角函數 及其應用



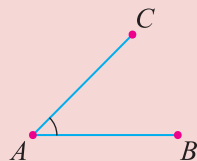
# 觀念銜接

## 第 1 節

1. 角：由兩條有公共端點的射線組成的幾何圖形。例如： $\overrightarrow{AB}$  和  $\overrightarrow{AC}$  相交於  $A$  點形成一個角，以  $\angle BAC$  或  $\angle A$  表示，如圖所示。

(1)  $0^\circ < \text{銳角} < 90^\circ$  (2)  $90^\circ < \text{鈍角} < 180^\circ$

(3) 直角 =  $90^\circ$  (4) 平角 =  $180^\circ$

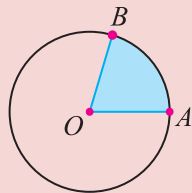


2. (1) 弧：圓上一弦將圓周分為兩部分，每一部分都稱為弧。

(2) 扇形：兩半徑與弧所圍成的圖形。如圖，鋪色部分。

(3) 圓心角：圓上兩半徑所形成的夾角，稱為圓心角。如圖，扇形  $AOB$  中， $\angle AOB$  為圓心角。

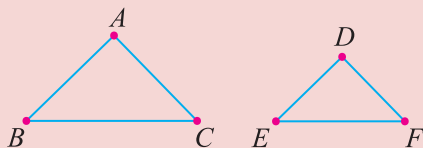
(4) 半徑為  $r$  的圓周長為  $2r\pi$ ，圓面積為  $r^2\pi$ 。



## 第 2 節

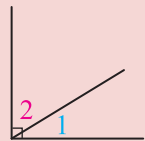
1. 相似三角形：若兩個三角形相似，則此兩三角形的對應邊成比例且對應角相等。

如圖，若  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，則  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ ，且  $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\angle C = \angle F$ 。



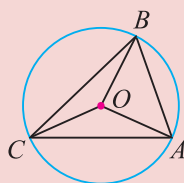
2. 餘角：如果兩個角的度數和為  $90^\circ$ ，就稱這兩個角互為餘角。

如圖，若  $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，則  $\angle 1$  與  $\angle 2$  互為餘角。



## 第 4 節

1. 三角形的外心：三角形三邊的中垂線會交於一點，此點即為三角形的外心。外心到三角形三頂點等距離。



## 觀念澄清

( ) 1. 直角三角形中會有兩個內角互為餘角。

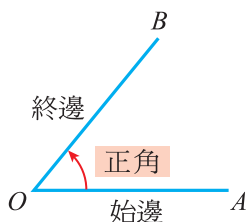
( ) 2.  $\triangle ABC$  中，若  $D$ 、 $E$  分別在  $\overline{AB}$  及  $\overline{AC}$  上，使得  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則  $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ 。

( ) 3. 任意三角形皆可做出此三角形的外接圓。

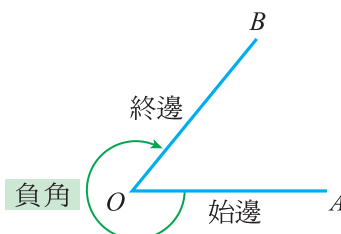
## 2-1 有向角及其度量

### 2-1.1 有向角

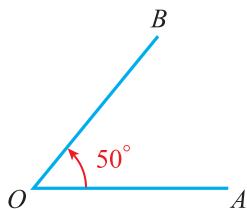
有方向限制的角稱為有向角。 $\angle AOB$  是指由始邊  $OA$  旋轉到終邊  $OB$  所成的角，其旋轉量即為角的大小。規定，往逆時針方向旋轉的角稱為正角；往順時針方向旋轉的角稱為負角。



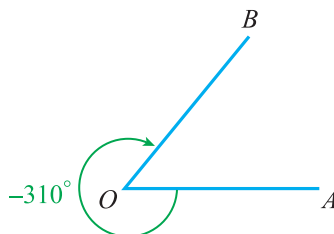
▲圖 2-1



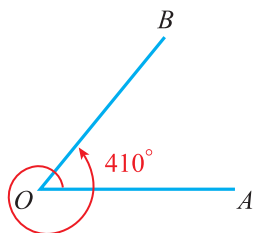
▲圖 2-2



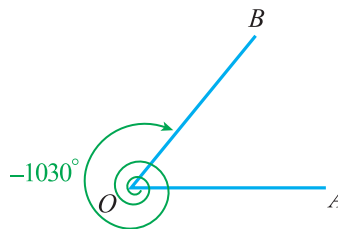
▲圖 2-3



▲圖 2-4



▲圖 2-5



▲圖 2-6

由上面定義，定義出來有正、負方向的角，不再將角限制在  $0^\circ$  到  $180^\circ$  之間，這樣的角就被統稱為**廣義角**。

## 2-1.2 角的度量單位

「角」與「長度」一樣也有各種不同的度量單位，現在我們就來介紹兩種不同的度量單位——「度」與「弧度」。

### 六 十 分 制

將一圓周分成 360 等分，每一等分所對的圓心角即為 1 度，記為  $1^\circ$ 。

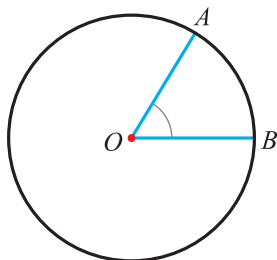
所以一圓所對的圓心角有 360 度，記為  $360^\circ$ 。

又一周角  $= 360^\circ$ 、1 度  $= 60$  分 ( $1^\circ = 60'$ )、1 分  $= 60$  秒 ( $1' = 60''$ )。

### 弧 度 制

在圓周上取一與半徑等長之弧，此弧所對的圓心角即為 1 弧度。

如圖 2-7，如果  $\widehat{AB}$  弧的長度等於  $\overline{OA}$  的長度（即半徑長），則  $\angle AOB = 1$  弧度。



▲圖 2-7

又一圓之圓周為  $2\pi r$ ，其中  $\pi = 3.14159\cdots$  為圓周率，所以一圓所對的圓心角有  $\frac{S}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ （弧度）。

### 度量單位互換

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \quad \text{或} \quad 1 \text{ 弧度} = \frac{180^\circ}{\pi}。$$

因為整個圓周所對的圓心角等於  $360^\circ$ ，又等於  $2\pi$  弧度，所以  $360^\circ = 2\pi$  弧度，

$$\text{得 } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \quad \text{或} \quad 1 \text{ 弧度} = \frac{180^\circ}{\pi}。$$



為了方便，我們常把「弧度」單位省略，例如：一個角是  $\frac{\pi}{4}$  的意思就是  $\frac{\pi}{4}$  弧度的角。但是當所用的單位是「度」時，一定要將度標出來。

### 小考箱

( ) 1. 已知角  $\theta$  的度量為  $\pi$ ，則角  $\theta$  為  $180^\circ$ 。

### 例題 1

(1) 試將  $36^\circ$  化為弧度

(2) 試將  $\frac{2\pi}{9}$  弧度化為度。

解 (1)  $36^\circ = 36 \times \frac{\pi}{180}$  弧度  $= \frac{\pi}{5}$  弧度

(2)  $\frac{2\pi}{9}$  弧度  $= \frac{2\pi}{9} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 40^\circ$

### 隨堂練習

1. 下表為「度」與「弧度」的換算，試完成下表：

度	$0^\circ$		$45^\circ$		$90^\circ$			$150^\circ$	
弧度		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$		$\pi$

### 扇形弧長與面積

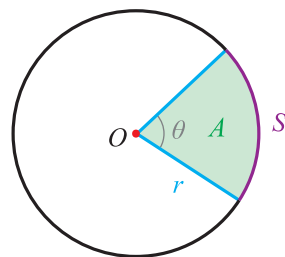
已知一扇形之半徑為  $r$ ，弧長為  $S$ ，圓心角為  $\theta$  弧度，面積為  $A$ ，則

$$S = r\theta, A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rS。$$

證明：(1)由弧度的定義知， $\theta = \frac{S}{r}$

故  $S = r\theta$

$$(2) \text{扇形面積為 } A = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{r^2 \theta}{2} = \frac{r \times r\theta}{2} = \frac{rS}{2}$$



▲圖 2-8

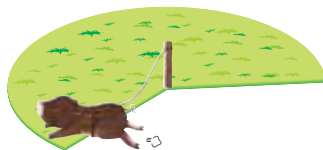
### 例題 2

若一扇形的圓心角為  $\frac{2\pi}{3}$ ，半徑為 6 公分，試求此扇形面積。

解 面積  $A = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2\pi}{3} = 12\pi$  (平方公分)

### 隨堂練習

2. 若一扇形的弧長為  $12\pi$ ，圓心角為  $\frac{\pi}{2}$ ，試求此扇形的半徑。



### 例題 3

若一扇形的半徑為 9 公分，圓心角為  $60^\circ$ ，試求此扇形的周長。

解 已知半徑  $r = 9$  (公分)

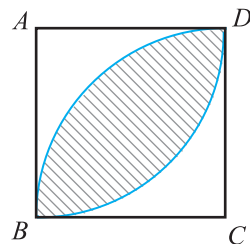
$$\text{又 } \theta = 60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{所以扇形的弧長 } S = r\theta = 9 \times \frac{\pi}{3} = 3\pi \text{ (公分)}$$

$$\text{扇形周長} = 2r + S = 2 \times 9 + 3\pi = 3\pi + 18 \text{ (公分)}$$

**隨堂練習**

3. 如圖， $ABCD$  是一邊長為 8 公分的正方形，斜線部分為二扇形的重疊處，試求斜線部分的周長。



## 2-1.3 同界角

### 同 界 角

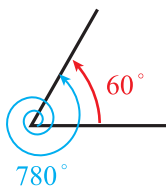
當兩個有向角有共同的始邊和終邊的時候，這兩個角稱為同界角。

若  $\theta_1$  和  $\theta_2$  為同界角，則  $\theta_1 - \theta_2 = 360^\circ \times n$  ( $n$  為整數)，反之亦然。

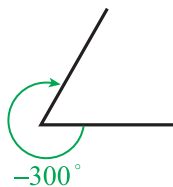
例如： $60^\circ$  與  $780^\circ$  就是一對同界角。

而……、 $-660^\circ$ 、 $-300^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $420^\circ$ 、 $780^\circ$ ……這些有向角有共同的始邊和終邊，他們就是一組同界角。

其中  $60^\circ$  為這一組同界角的**最小正同界角**；而  $-300^\circ$  為**最大負同界角**。



▲圖 2-9



▲圖 2-10

### ? 小考箱

- ( ) 2. 每一個角的最小正同界角只有 1 個。

### 例題 4

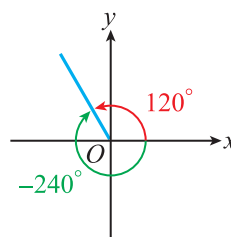
試求出  $480^\circ$  的最小正同界角與最大負同界角。

**解** 因為  $480^\circ = 360^\circ \times 1 + 120^\circ$

$$480^\circ = 360^\circ \times 2 + (-240^\circ)$$

所以  $480^\circ$  的最小正同界角為  $120^\circ$

最大負同界角為  $-240^\circ$



### 隨堂練習

4. 試求出  $-450^\circ$  的最小正同界角與最大負同界角。

### 例題 5

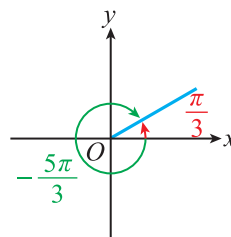
試求出  $-\frac{11\pi}{3}$  的最小正同界角與最大負同界角。

**解** 因為  $-\frac{11\pi}{3} = -\frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

$$-\frac{11\pi}{3} = -\frac{6\pi}{3} + \left(-\frac{5\pi}{3}\right)$$

所以  $-\frac{11\pi}{3}$  的最小正同界角為  $\frac{\pi}{3}$ ，

最大負同界角為  $-\frac{5\pi}{3}$



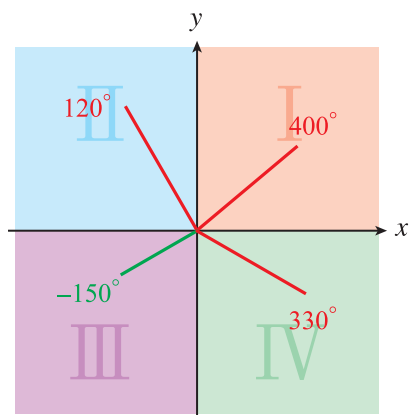
### 隨堂練習

5. 試求出  $\frac{15\pi}{4}$  的最小正同界角與最大負同界角。

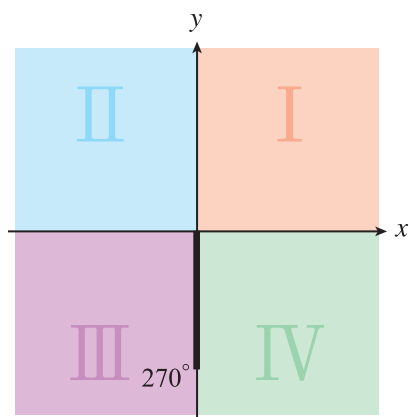
## 標準位置角

將廣義角放在坐標平面上，角的頂點在原點上，角的始邊在 $x$ 軸的正向上，這樣的有向角稱為標準位置角。

標準位置角的終邊落在第幾象限者，稱為**第幾象限角**；標準位置角的終邊落在 $x$ 、 $y$ 軸上者，稱為**象限角**。例如： $400^\circ$ 為第一象限角； $120^\circ$ 為第二象限角； $-150^\circ$ 為第三象限角； $330^\circ$ 為第四象限角； $270^\circ$ 為象限角。



▲圖 2-11



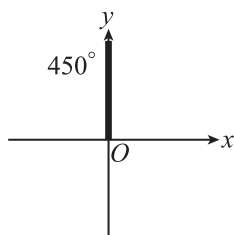
▲圖 2-12

例題 6

下列各角在標準位置時，分別為第幾象限角？

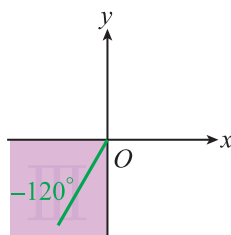
- (1)  $450^\circ$       (2)  $-120^\circ$       (3)  $315^\circ$       (4)  $-\frac{5\pi}{4}$ 。

解 (1)



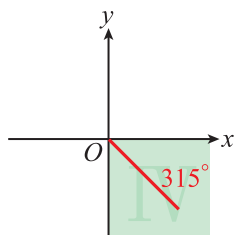
故  $450^\circ$  為象限角

(2)



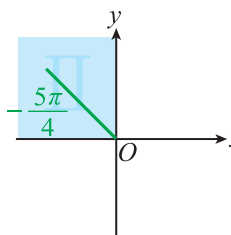
故  $-120^\circ$  為第三象限角

(3)



故  $315^\circ$  為第四象限角

(4)



故  $-\frac{5\pi}{4}$  為第二象限角

隨堂練習

6. 下列各角在標準位置時，分別為第幾象限角？

- (1)  $750^\circ$       (2)  $-60^\circ$       (3)  $-225^\circ$       (4)  $\frac{5\pi}{3}$ 。



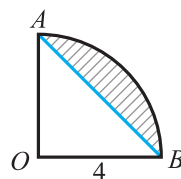


## 習題 2-1

1. 下表為「度」與「弧度」的換算，試完成下表：

度		225°			300°		330°	360°
弧度	$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		

2. 試比較 1、1°兩個角的大小。
3. 若一扇形的弧長為  $6\pi$ ，圓心角為  $60^\circ$ ，試求此扇形的面積。
4. 如右圖，扇形  $AOB$  的圓心角為  $\frac{\pi}{2}$ ，半徑為 4 公分，試求斜線部分（稱為弓形）面積。
5. 美麗華摩天輪，直徑 70 公尺，逆時針旋轉一圈需時 18 分鐘。  
當摩天輪開始運轉時，杰倫剛好坐在離地最近的位置，請問運轉 9 分鐘後，杰倫共繞行多少公尺？



6. 下列各角何者與  $50^\circ$  互為同界角？  
(1)  $230^\circ$  (2)  $-310^\circ$  (3)  $130^\circ$  (4)  $310^\circ$  (5)  $-\frac{5\pi}{18}$ 。
7. 試求出  $750^\circ$  的最小正同界角與最大負同界角。
8. 試求出  $\frac{31\pi}{6}$  的最小正同界角與最大負同界角。
9. 下列各角在標準位置時，分別為第幾象限角？  
(1)  $935^\circ$  (2)  $-500^\circ$  (3)  $185^\circ$  (4)  $\frac{23\pi}{4}$  (5)  $-\frac{11\pi}{6}$ 。

## 2-2 三角函數的定義

### 2-2.1 銳角三角函數

對於 $\triangle ABC$ ，如果 $\angle C=90^\circ$ ，則 $\overline{BC}$ 稱作 $\angle A$ 的對邊， $\overline{AC}$ 稱作 $\angle A$ 的鄰邊， $\overline{AB}$ 稱作斜邊。這時，我們對於邊長的比值有以下的定義：

#### 銳角三角函數定義

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{a}{c}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的正弦函數 (sine)}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{b}{c}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的餘弦函數 (cosine)}$$

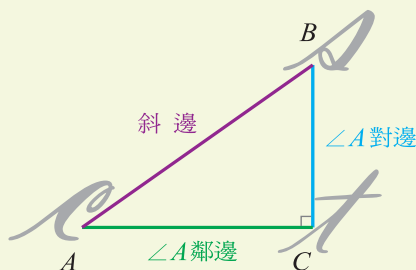
$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{a}{b}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的正切函數 (tangent)}$$

$$\cot A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\angle A \text{ 的對邊}} = \frac{b}{a}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的餘切函數 (cotangent)}$$

$$\sec A = \frac{\text{斜邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{c}{b}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的正割函數 (secant)}$$

$$\csc A = \frac{\text{斜邊}}{\angle A \text{ 的對邊}} = \frac{c}{a}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的餘割函數 (cosecant)}$$

互為倒數



▲圖 2-13

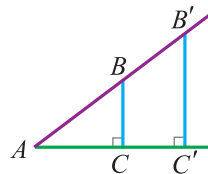
上面利用直角 $\triangle ABC$ 所定義出來的六個三角函數，只跟 $\angle A$ 的大小有關，而跟 $\triangle ABC$ 的邊長無關，說明如下：

如圖，兩個直角 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AB'C'$ ，其中 $\angle A$ 為銳角， $\angle C$ 與 $\angle C'$ 為直角，可知 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AB'C'$ 相似，利用國中所學相似三角形的對應邊成比例得

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} \dots\dots ①$$

又在 $\triangle ABC$ 中  $\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

在 $\triangle AB'C'$ 中  $\sin A = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}$



▲圖 2-14

由①知 $\angle A$ 的正弦函數不會因為邊長的改變而改變。

同理可知依上面三角函數定義出來的六個三角函數都只跟 $\angle A$ 有關，與 $\triangle ABC$ 的大小無關。

由三角函數定義，我們可觀察得知以下性質：

(1)  $\sin A$  與  $\csc A$    (2)  $\cos A$  與  $\sec A$    (3)  $\tan A$  與  $\cot A$    互為倒數。

得

### 倒 數 關 係

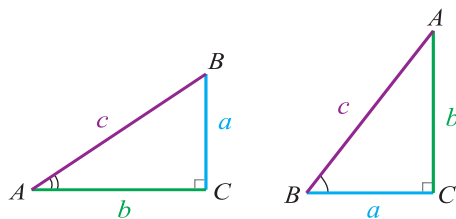
$$\sin \theta \csc \theta = 1, \cos \theta \sec \theta = 1, \tan \theta \cot \theta = 1$$

當 $\angle A$ 與 $\angle B$ 互為餘角時（即 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ）， $\angle A$ 的對邊恰為 $\angle B$ 的鄰邊，由定義可得餘角關係

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{a}{c} = \frac{\angle B \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \cos B$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{a}{b} = \frac{\angle B \text{ 的鄰邊}}{\angle B \text{ 的對邊}} = \cot B$$

$$\sec A = \frac{\text{斜邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{c}{b} = \frac{\text{斜邊}}{\angle B \text{ 的對邊}} = \csc B$$



▲圖 2-15

### 餘 角 關 係

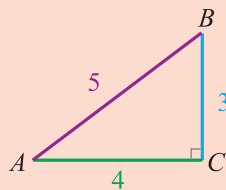
$$\sin \theta = \cos (90^\circ - \theta), \tan \theta = \cot (90^\circ - \theta), \sec \theta = \csc (90^\circ - \theta)$$

## 小考箱

( ) 3.  $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ$ 。

### 例題 1

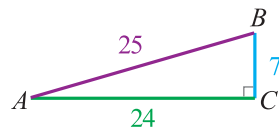
如圖，直角 $\triangle ABC$ 中，試算出  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 、 $\cot A$ 、 $\sec A$ 、 $\csc A$  之值。



解  $\sin A = \frac{3}{5}$ 、 $\cos A = \frac{4}{5}$ 、 $\tan A = \frac{3}{4}$ 、 $\cot A = \frac{4}{3}$ 、 $\sec A = \frac{5}{4}$ 、 $\csc A = \frac{5}{3}$

### 隨堂練習

1. 如圖，直角 $\triangle ABC$ 中，試算出  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 、 $\cot A$ 、 $\sec A$ 、 $\csc A$  之值。



### 例題 2

已知  $\angle A + \angle B = 90^\circ$  且  $\cos A = \frac{5}{13}$

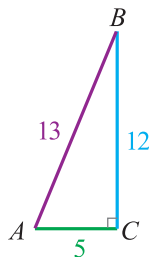
- (1) 試算出  $\sin A$ 、 $\tan A$ 、 $\cot A$ 、 $\sec A$ 、 $\csc A$  之值  
(2) 試算出  $\sin B$ 、 $\cos B$ 、 $\tan B$  之值。

解 作直角 $\triangle ABC$ ，使  $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A$  的鄰邊  $\overline{AC} = 5$ ，斜邊  $\overline{AB} = 13$

則利用商高定理得  $\overline{BC} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

(1)  $\sin A = \frac{12}{13}$ 、 $\tan A = \frac{12}{5}$

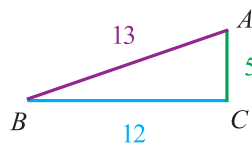
$\cot A = \frac{5}{12}$ 、 $\sec A = \frac{13}{5}$ 、 $\csc A = \frac{13}{12}$



$$(2) \sin B = \cos A = \frac{5}{13}$$

$$\cos B = \sin A = \frac{12}{13}$$

$$\tan B = \cot A = \frac{5}{12}$$



### 隨堂練習

2. 已知  $\angle A + \angle B = 90^\circ$  且  $\tan A = \frac{8}{15}$ ，試算出  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan B$ 、 $\csc B$  之值。

## 2-2.2 特別角三角函數值

$30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  是三個常用的特別角，以下將介紹這三個特別角的三角函數值。

1. 依據三角函數定義，試算出  $30^\circ$  角的三角函數值。

**說明：**在正三角形  $ABC$  中，作  $\angle A$  的內角平分線交  $\overline{BC}$  於  $H$

假設  $\overline{AC} = \overline{BC} = 2$ ，則  $\triangle ABH$  中， $\angle B = 60^\circ$ 、 $\angle BAH = 30^\circ$

而且  $\angle AHB = 90^\circ$ 、 $\overline{BH} = 1$

利用商高定理得  $\overline{AH} = \sqrt{3}$ （如圖 2-16）

所以

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

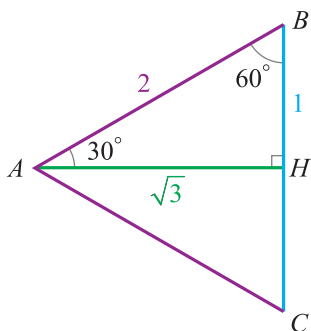
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$



▲圖 2-16

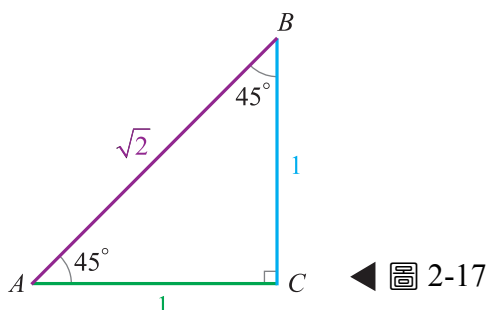
2. 依據三角函數定義，試算出  $45^\circ$  角的三角函數值。

**說明：**在等腰直角三角形  $ABC$  中，假設  $\angle C = 90^\circ$ ，而且  $\overline{AC} = \overline{BC} = 1$

利用商高定理得  $\overline{AB} = \sqrt{2}$ （如圖 2-17），所以

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \quad \sec 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \quad \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$



◀ 圖 2-17

3. 依據三角函數定義，試算出  $60^\circ$  角的三角函數值。

**說明：**在正三角形  $ABC$  中，作  $\angle A$  的內角平分線交  $\overline{BC}$  於  $H$

假設  $\overline{AC} = \overline{BC} = 2$ ，則  $\triangle ABH$  中， $\angle B = 60^\circ$

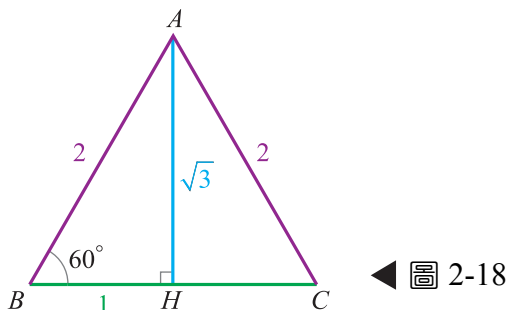
而且  $\angle AHB = 90^\circ$ 、 $\overline{BH} = 1$

利用商高定理得  $\overline{AH} = \sqrt{3}$ （如圖 2-18）

所以

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \sec 60^\circ = \frac{2}{1} = 2 \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

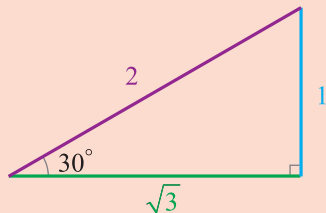


◀ 圖 2-18



**例題 3**

參考下圖，試完成下表：



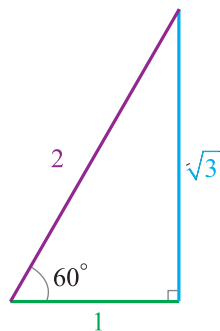
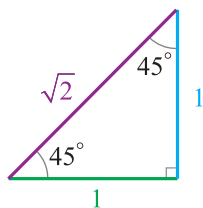
函數 \ 角度	函數值	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$30^\circ \left( \frac{\pi}{6} \right)$							

**解**

函數 \ 角度	函數值	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$30^\circ \left( \frac{\pi}{6} \right)$		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2

**隨堂練習**

3. 參考下兩圖，試完成下表：



函 數 值 角度	函 數	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$45^\circ \left( \frac{\pi}{4} \right)$							
$60^\circ \left( \frac{\pi}{3} \right)$							

### 例題 4

試求下列各式的值：

(1)  $(\sin 60^\circ - \tan 30^\circ) \times \cot 30^\circ$

(2)  $\tan 45^\circ + \sec^2 45^\circ$ 。

**解** (1)  $(\sin 60^\circ - \tan 30^\circ) \times \cot 30^\circ = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \times \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

(2)  $\tan 45^\circ + \sec^2 45^\circ = 1 + (\sqrt{2})^2 = 3$

### 隨堂練習

4. 試求下列各式的值：

(1)  $2 \cos 30^\circ - \tan 60^\circ + \csc 30^\circ$

(2)  $\sec^2 60^\circ \times \csc^2 45^\circ$ 。

## 2-2.3 任意角三角函數

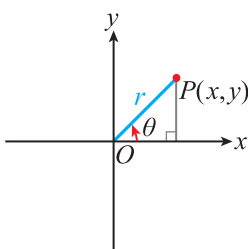
### 1. 任意角三角函數定義：

在標準位置角  $\theta$  的終邊上任取一點  $P(x, y)$ ，假設  $\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$

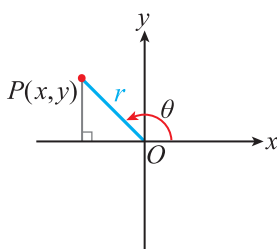
$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \quad \sec \theta = \frac{r}{x} \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

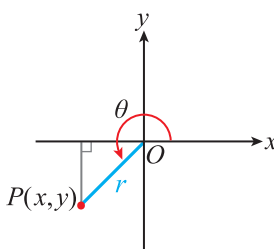
(以上定義只有在比值有意義時，即分母不為零，才成立)



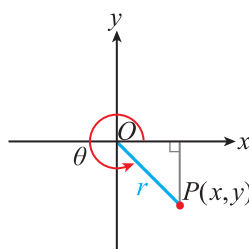
▲圖 2-19



▲圖 2-20



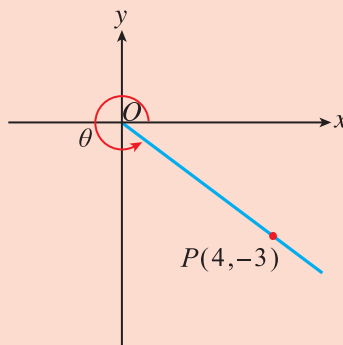
▲圖 2-21



▲圖 2-22

### 例題 5

如圖，已知點  $P(4, -3)$  為標準位置角  $\theta$  終邊上的一點，試求  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ 。



**解** 因為  $x=4$ ， $y=-3$

$$\text{所以 } r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\text{得 } \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

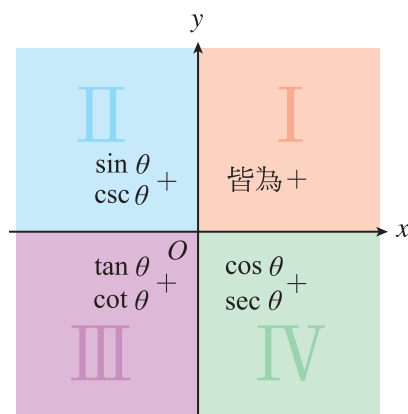
隨堂練習

5. 已知點  $P(-2, 2)$  為標準位置角  $\theta$  終邊上的一點，試求  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ 。

由任意角三角函數定義可知，標準位置角  $\theta$  終邊上的點  $P(x, y)$  決定了  $\theta$  的三角函數值，所以點  $P$  的  $x$  坐標和  $y$  坐標決定了  $\theta$  的三角函數值的正負符號。

列表整理如下：（其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ ）

正 負 函數 象 限	第一象限角	第二象限角	第三象限角	第四象限角
$(x, y)$	$(+, +)$	$(-, +)$	$(-, -)$	$(+, -)$
$\sin \theta = \frac{y}{r}$ 、 $\csc \theta = \frac{r}{y}$	+	+	-	-
$\cos \theta = \frac{x}{r}$ 、 $\sec \theta = \frac{r}{x}$	+	-	-	+
$\tan \theta = \frac{y}{x}$ 、 $\cot \theta = \frac{x}{y}$	+	-	+	-



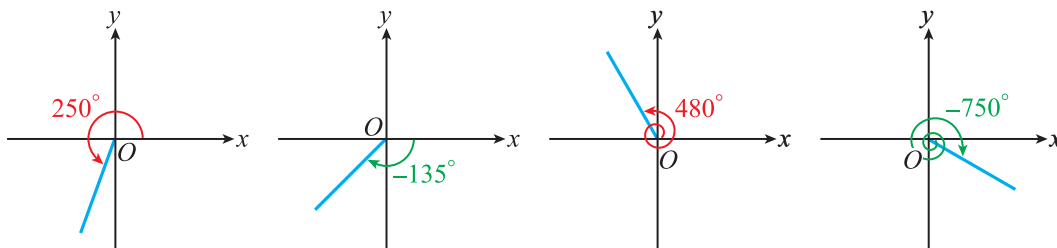
▲圖 2-23

**例題 6**

試判斷下列各函數值的正負：

- (1)  $\sin 250^\circ$     (2)  $\tan(-135^\circ)$     (3)  $\cos 480^\circ$     (4)  $\sec(-750^\circ)$ 。

- 解** (1)  $250^\circ$  為第三象限角，所以  $\sin 250^\circ < 0$   
 (2)  $-135^\circ$  為第三象限角，所以  $\tan(-135^\circ) > 0$   
 (3)  $480^\circ$  為第二象限角，所以  $\cos 480^\circ < 0$   
 (4)  $-750^\circ$  為第四象限角，所以  $\sec(-750^\circ) > 0$



**隨堂練習**

6. 試判斷下列各函數值的正負：

- (1)  $\sin(-195^\circ)$     (2)  $\tan 125^\circ$     (3)  $\cos(-700^\circ)$     (4)  $\csc 40^\circ$ 。

**例題 7**

已知  $\sin \theta < 0$ ， $\cos \theta > 0$ ，試判斷  $\theta$  為第幾象限角。

**解** 因為  $\sin \theta < 0$ ， $\theta$  可能為第三或第四象限角

$\cos \theta > 0$ ， $\theta$  可能為第一或第四象限角

所以  $\theta$  為第四象限角

$\theta$	I	II	III	IV
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+

隨堂練習

7. 已知  $\tan \theta > 0$ ,  $\sec \theta > 0$ , 試判斷  $\theta$  為第幾象限角。

例題 8

已知  $\theta$  為第二象限角且  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ , 試求  $\theta$  的六個三角函數值。

● 解 因為  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  且  $\theta$  為第二象限角，

我們可在  $\theta$  終邊上任取一點  $P(x, y)$

其中  $y = 1$ ,  $r = 2$ ,  $x = -\sqrt{2^2 - 1^2} = -\sqrt{3}$

所以

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

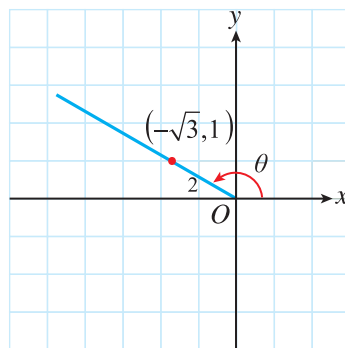
$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{2}{-\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{2}{1} = 2$$



隨堂練習

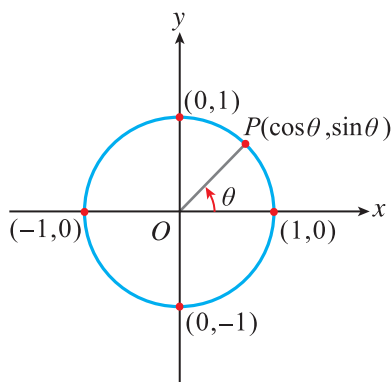
8. 已知  $\theta$  為第三象限角且  $\tan \theta = \frac{3}{4}$ , 試求  $\theta$  的六個三角函數值。



## 2. 象限角的三角函數值：

$0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $180^\circ$ 、 $270^\circ$ 是常用的特別角，以下將介紹這些特別角的三角函數值。

如果規定  $r = \overline{OP} = 1$  時，則  $\sin \theta = \frac{y}{r} = y$ ， $\cos \theta = \frac{x}{r} = x$ ，也就是在單位圓（圓心為原點，半徑為 1 的圓）上的點  $P$  的  $x$  坐標為  $\cos \theta$ ， $y$  坐標為  $\sin \theta$ 。



▲圖 2-24

所以

(1) 當  $\theta = 0^\circ$  時，如圖 2-25 知

可在  $0^\circ$  的終邊上取點  $P(1, 0)$

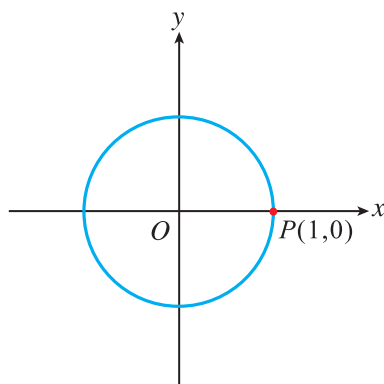
$$\text{得 } \sin 0^\circ = y = 0$$

$$\cos 0^\circ = x = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 0^\circ = 1$$

$\csc 0^\circ$ ， $\cot 0^\circ$  沒有意義



▲圖 2-25

(2) 當  $\theta = 90^\circ$  時，如圖 2-26 知

可在  $90^\circ$  的終邊上取點  $P(0, 1)$

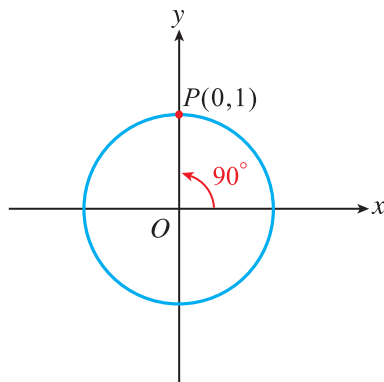
$$\text{得 } \sin 90^\circ = y = 1$$

$$\cos 90^\circ = x = 0$$

$$\cot 90^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc 90^\circ = 1$$

$\sec 90^\circ$ ， $\tan 90^\circ$  沒有意義



▲圖 2-26

(3) 當  $\theta = 180^\circ$  時，如圖 2-27 知

可在  $180^\circ$  的終邊上取點  $P(-1, 0)$

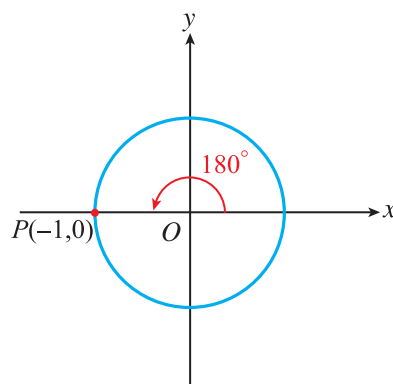
得  $\sin 180^\circ = y = 0$

$\cos 180^\circ = x = -1$

$\tan 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0$

$\sec 180^\circ = -1$

$\csc 180^\circ$ ， $\cot 180^\circ$  沒有意義



▲圖 2-27

(4) 當  $\theta = 270^\circ$  時，如圖 2-28 知

可在  $270^\circ$  的終邊上取點  $P(0, -1)$

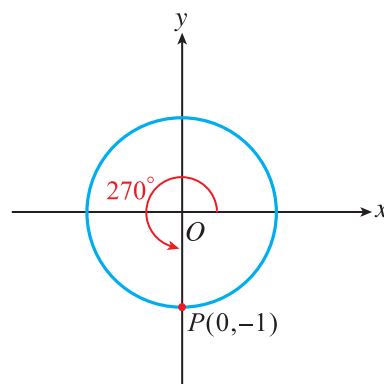
得  $\sin 270^\circ = y = -1$

$\cos 270^\circ = x = 0$

$\cot 270^\circ = \frac{0}{-1} = 0$

$\csc 270^\circ = -1$

$\sec 270^\circ$ ， $\tan 270^\circ$  沒有意義



▲圖 2-28

### 例題 9

試完成下表：

函 數 值 角度	函 數	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$0^\circ$							

解

函 數 值 函 數 角 度	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$0^\circ$	0	1	0	無意義	1	無意義

### 隨堂練習

9. 試完成下表：

函 數 值 函 數 角 度	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$90^\circ \left( \frac{\pi}{2} \right)$						
$180^\circ (\pi)$						
$270^\circ \left( \frac{3\pi}{2} \right)$						

### 小考箱

- ( ) 4. 若角  $\theta$  的終邊落在  $y$  軸上，則  $\tan \theta$  和  $\sec \theta$  無意義。
- ( ) 5. 若角  $\theta$  的終邊落在  $x$  軸上，則  $\cot \theta$  和  $\csc \theta$  無意義。

### 3. 換算公式：

#### 同界角關係式

以下  $n$  為整數

$$\sin(\theta + 360^\circ \times n) = \sin \theta, \cos(\theta + 360^\circ \times n) = \cos \theta, \tan(\theta + 360^\circ \times n) = \tan \theta$$

$$\csc(\theta + 360^\circ \times n) = \csc \theta, \sec(\theta + 360^\circ \times n) = \sec \theta, \cot(\theta + 360^\circ \times n) = \cot \theta$$

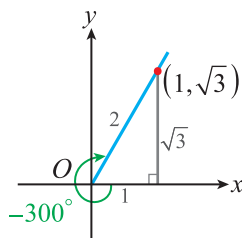
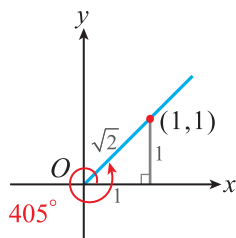
說明：由定義可知，同界角的三角函數值相同。

#### 例題 10

試求  $\cos 405^\circ$ 、 $\tan(-300^\circ)$  之值。

**解**  $\cos 405^\circ = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\tan(-300^\circ) = \tan(-360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



#### 隨堂練習

10. 試求  $\sin(-330^\circ)$  之值。

#### $(-\theta)$ 關係式

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \cos(-\theta) = \cos \theta, \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc \theta, \sec(-\theta) = \sec \theta, \cot(-\theta) = -\cot \theta$$

**說明：**設  $\theta$  與  $(-\theta)$  的終邊與單位圓的交點分別為  $P$  和  $Q$ ，如圖 2-29、2-30，

$P$  和  $Q$  對稱於  $x$  軸，若  $P$  點坐標為  $(x, y)$ ，則  $Q$  點坐標為  $(x, -y)$

依據三角函數定義得

$$\sin(-\theta) = -y = -\sin \theta$$

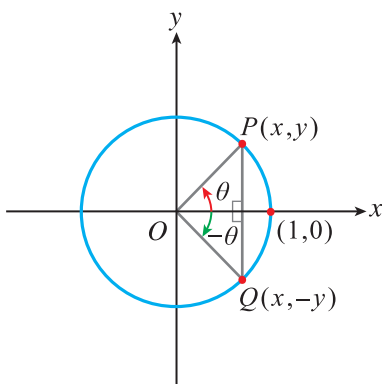
$$\cos(-\theta) = x = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\tan \theta$$

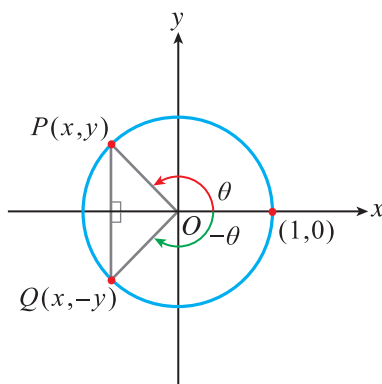
$$\cot(-\theta) = \frac{x}{-y} = -\cot \theta$$

$$\sec(-\theta) = \frac{1}{x} = \sec \theta$$

$$\csc(-\theta) = \frac{1}{-y} = -\csc \theta$$



▲圖 2-29



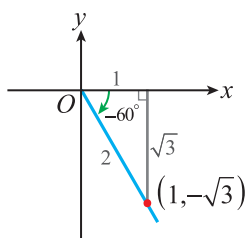
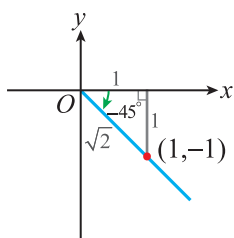
▲圖 2-30

### 例題 11

試求  $\cos(-45^\circ)$ 、 $\tan(-60^\circ)$  之值。

**解**  $\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$



### 隨堂練習

11. 試求  $\sin(-30^\circ)$  之值。

### $(180^\circ - \theta)$ 關係式

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta, \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta, \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

$$\csc(180^\circ - \theta) = \csc \theta, \sec(180^\circ - \theta) = -\sec \theta, \cot(180^\circ - \theta) = -\cot \theta$$

**說明：**設  $\theta$  與  $(180^\circ - \theta)$  的終邊與單位圓的交點分別為  $P$  和  $Q$ ，如圖 2-31

$P$  和  $Q$  對稱於  $y$  軸，若  $P$  點坐標為  $(x, y)$ ，則  $Q$  點坐標為  $(-x, y)$

依據三角函數定義得

$$\sin(180^\circ - \theta) = y = \sin \theta$$

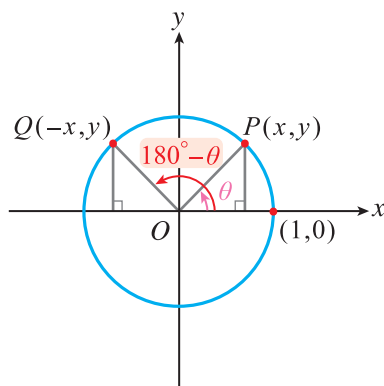
$$\cos(180^\circ - \theta) = -x = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{y}{-x} = -\tan \theta$$

$$\cot(180^\circ - \theta) = \frac{-x}{y} = -\cot \theta$$

$$\sec(180^\circ - \theta) = \frac{1}{-x} = -\sec \theta$$

$$\csc(180^\circ - \theta) = \frac{1}{y} = \csc \theta$$



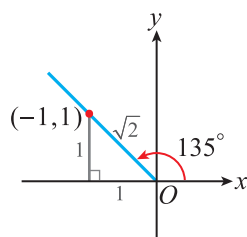
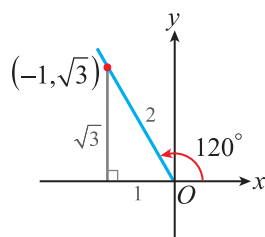
▲圖 2-31

### 例題 12

試求  $\sin 120^\circ$ 、 $\cos 135^\circ$  之值。

$$\text{解} \quad \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



### 隨堂練習

12. 試求  $\tan 150^\circ$  之值。

### ( $180^\circ + \theta$ ) 關係式

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta, \cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta, \tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\csc(180^\circ + \theta) = -\csc \theta, \sec(180^\circ + \theta) = -\sec \theta, \cot(180^\circ + \theta) = \cot \theta$$

**說明：**設  $\theta$  與  $(180^\circ + \theta)$  的終邊與單位圓的交點分別為  $P$  和  $Q$ ，如圖 2-32、2-33

$P$  和  $Q$  對稱於原點，若  $P$  點坐標為  $(x, y)$ ，則  $Q$  點坐標為  $(-x, -y)$

依據三角函數定義得

$$\sin(180^\circ + \theta) = -y = -\sin \theta$$

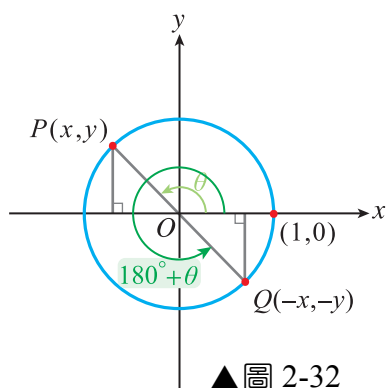
$$\cos(180^\circ + \theta) = -x = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \frac{-y}{-x} = \tan \theta$$

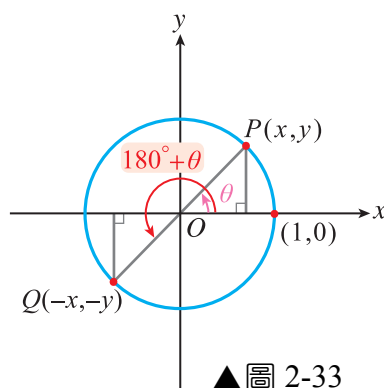
$$\cot(180^\circ + \theta) = \frac{-x}{-y} = \cot \theta$$

$$\sec(180^\circ + \theta) = \frac{1}{-x} = -\sec \theta$$

$$\csc(180^\circ + \theta) = \frac{1}{-y} = -\csc \theta$$



▲圖 2-32



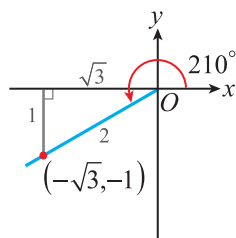
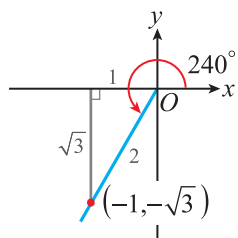
▲圖 2-33

### 例題 13

試求  $\cos 240^\circ$ 、 $\tan 210^\circ$  之值。

解  $\cos 240^\circ = \cos (180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\tan 210^\circ = \tan (180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



### 隨堂練習

13. 試求  $\sin 225^\circ$  之值。



### ( $90^\circ - \theta$ ) 關係式

(餘角關係)

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta, \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \sec \theta, \sec(90^\circ - \theta) = \csc \theta, \cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$$

**說明：**設  $\theta$  與  $(90^\circ - \theta)$  的終邊與單位圓的交點分別為  $P$  和  $Q$ ，如圖 2-34

$P$  和  $Q$  對稱於  $y=x$ ，若  $P$  點坐標為  $(x, y)$ ，則  $Q$  點坐標為  $(y, x)$

依據三角函數定義得

$$\sin(90^\circ - \theta) = x = \cos \theta$$

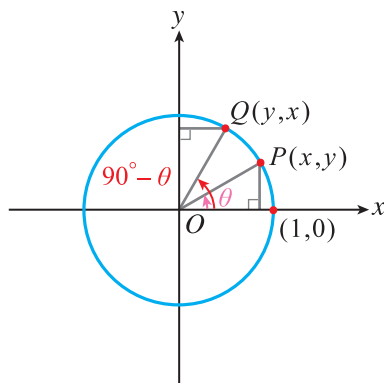
$$\cos(90^\circ - \theta) = y = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} = \cot \theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{1}{y} = \csc \theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{1}{x} = \sec \theta$$



▲圖 2-34

### ( $90^\circ + \theta$ ) 關係式

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta, \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta, \tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta$$

$$\csc(90^\circ + \theta) = \sec \theta, \sec(90^\circ + \theta) = -\csc \theta, \cot(90^\circ + \theta) = -\tan \theta$$

**說明：**因為  $\sin(90^\circ + \theta)$

$$= \sin(90^\circ - (-\theta)) \quad (\text{利用 } (90^\circ - \theta) \text{ 關係式})$$

$$= \cos(-\theta) \quad (\text{利用 } (-\theta) \text{ 關係式})$$

$$= \cos \theta$$

### ( $270^\circ - \theta$ ) 關係式

$$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta, \cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta, \tan(270^\circ - \theta) = \cot \theta$$

$$\csc(270^\circ - \theta) = -\sec \theta, \sec(270^\circ - \theta) = -\csc \theta, \cot(270^\circ - \theta) = \tan \theta$$

說明：因為  $\cos(270^\circ - \theta)$

$$= \cos(180^\circ + 90^\circ - \theta) \quad (\text{利用 } (180^\circ + \theta) \text{ 關係式})$$

$$= -\cos(90^\circ - \theta) \quad (\text{利用 } (90^\circ - \theta) \text{ 關係式})$$

$$= -\sin \theta$$

### ( $270^\circ + \theta$ ) 關係式

$$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta, \cos(270^\circ + \theta) = \sin \theta, \tan(270^\circ + \theta) = -\cot \theta$$

$$\csc(270^\circ + \theta) = -\sec \theta, \sec(270^\circ + \theta) = \csc \theta, \cot(270^\circ + \theta) = -\tan \theta$$

說明：因為  $\tan(270^\circ + \theta)$

$$= \tan(180^\circ + 90^\circ + \theta) \quad (\text{利用 } (180^\circ + \theta) \text{ 關係式})$$

$$= \tan(90^\circ + \theta) \quad (\text{利用 } (90^\circ + \theta) \text{ 關係式})$$

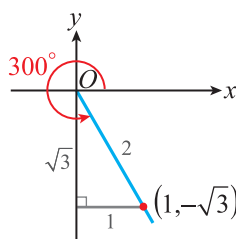
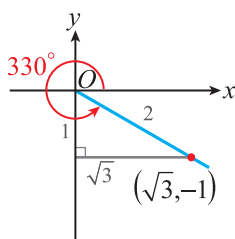
$$= -\cot \theta$$

### 例題 14

試求  $\sin 330^\circ$ 、 $\tan 300^\circ$  之值。

解  $\sin 330^\circ = \sin(270^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\tan 300^\circ = \tan(270^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$



**隨堂練習**

14. 試求  $\cos 315^\circ$  之值。

**例題 15**

試化簡  $\frac{\sin(90^\circ + \theta)}{\cos(180^\circ + \theta)} + \frac{\tan(270^\circ + \theta)}{\tan(90^\circ - \theta)}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 } & \frac{\sin(90^\circ + \theta)}{\cos(180^\circ + \theta)} + \frac{\tan(270^\circ + \theta)}{\tan(90^\circ - \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta}{-\cos \theta} + \frac{-\cot \theta}{\cot \theta} \\ &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

**隨堂練習**

15. 試化簡  $\frac{\cos(180^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ + \theta)} + \frac{\tan(270^\circ - \theta)}{\cot(360^\circ - \theta)}$ 。

## 2-2.4 三角函數的基本關係

依據三角函數定義，可知三角函數之間具有某些關係，分析如下：

### 倒數關係

$$\sin \theta \csc \theta = 1, \cos \theta \sec \theta = 1, \tan \theta \cot \theta = 1$$

### 商數關係

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

說明：利用任意角三角函數定義

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

### 平方關係

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta, 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

說明：利用任意角三角函數定義

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

將  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

兩邊同除以  $\cos^2 \theta$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta},$$

則  $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

將  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

兩邊同除以  $\sin^2 \theta$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta},$$

則  $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

**例題 16**

試求  $\sin 27^\circ \csc 27^\circ + \cos 63^\circ \sec 63^\circ$  之值。

**解** 利用倒數關係  $\sin 27^\circ \csc 27^\circ + \cos 63^\circ \sec 63^\circ = 1 + 1 = 2$

**隨堂練習**

16. 試求  $\tan 70^\circ \tan 20^\circ$  之值。

**例題 17**

試求  $\cos^2 43^\circ + \cos^2 47^\circ$  之值。

**解** 利用餘角關係  $\cos 43^\circ = \sin 47^\circ$

利用平方關係  $\cos^2 43^\circ + \cos^2 47^\circ = \sin^2 47^\circ + \cos^2 47^\circ = 1$

**隨堂練習**

17. 試求  $\tan^2 27^\circ - \csc^2 63^\circ$  之值。

例題 18

設  $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$ ，試求  $\sin \theta \times \cos \theta$  之值。

解 因為  $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$

將兩邊平方得  $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 2$

則  $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 2$

故  $\sin \theta \times \cos \theta = \frac{1}{2}$

隨堂練習

18. 設  $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$ ，試求  $\tan \theta + \cot \theta$  之值。

? 小考箱

( ) 6. 設  $\theta$  不為象限角，則  $\tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \csc \theta$ 。



## 習題 2-2

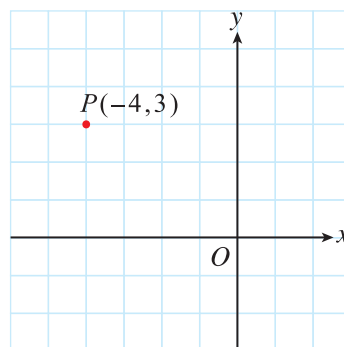
1. 已知  $\angle A$  為銳角且  $\sin A = \frac{15}{17}$ ，試算出  $\cos A$ 、 $\tan A$  之值。

2. 試求下列各式的值：

(1)  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ + \cot 45^\circ$

(2)  $\sin 60^\circ \times \csc 60^\circ + \tan 45^\circ \times \cot 45^\circ + \cos 30^\circ \times \sec 30^\circ$ 。

3. 如右圖，已知點  $P(-4, 3)$  為標準位置角  $\theta$  終邊上的一點，試求  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$  之值。



4. 試判斷下列各函數值的正負：

(1)  $\sin 350^\circ$

(2)  $\cos(-150^\circ)$

(3)  $\tan 780^\circ$

(4)  $\sec(-200^\circ)$ 。

5. 已知點  $(\tan \theta, \sec \theta)$  落在第二象限，試判斷  $\theta$  為第幾象限角。

6. 已知  $\theta$  為第三象限角且  $\cot \theta = -\frac{5}{12}$ ，試求  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$  之值。

7. 試求下列各式的值：

(1)  $\sin 90^\circ + \cos 180^\circ + \tan 360^\circ + \cot 270^\circ$

(2)  $\sin 0^\circ + \cos 90^\circ + \tan 0^\circ + \cot 90^\circ + \sec 0^\circ + \csc 90^\circ$ 。

8. 試求下列各函數的值：

(1)  $\sin 150^\circ$                       (2)  $\cos(-150^\circ)$

(3)  $\tan 1500^\circ$                       (4)  $\sec(-240^\circ)$

(5)  $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$                       (6)  $\cot \frac{3\pi}{4}$

(7)  $\sin \frac{17\pi}{6}$                       (8)  $\cos \frac{5\pi}{2}$ 。

9. 試化簡  $\frac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} + \frac{\sec(180^\circ - \theta)}{\sec(180^\circ + \theta)} + \frac{\cos(270^\circ + \theta)}{\sin(360^\circ - \theta)}$ 。

10. 試求下列各式的值：

(1)  $\tan 40^\circ \tan 50^\circ$

(2)  $\sin^2 15^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 75^\circ$ 。

11. 設  $\theta$  為實數，若  $\tan \theta = -\frac{4}{3}$ ，試求  $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$  的值。



## 2-3 三角函數的圖形

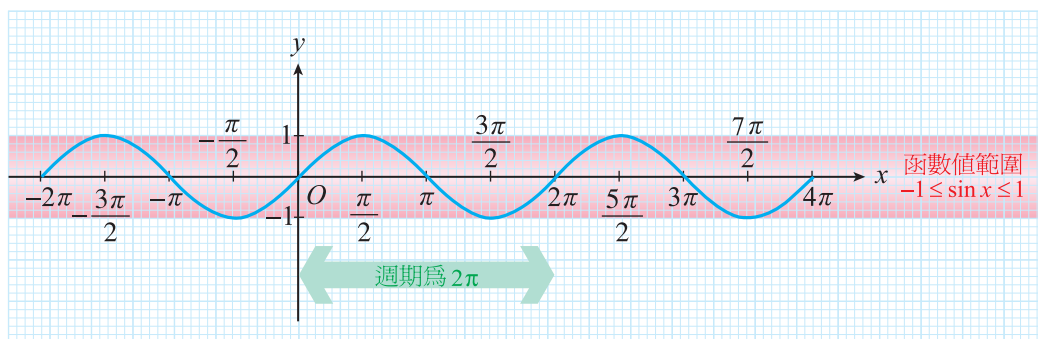
三角函數是一個角對應到一個實數的函數，而如果我們將角度以弧度表示，又省略角度單位，則三角函數可看成一個實數對應到一個實數的函數，接下來我們來看它的圖形變化。

1. 正弦函數  $y = \sin x$  的圖形：

(1) 找出對應值

$x$	...	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$	...
$y$	...	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	...

(2) 描繪圖形



▲圖 2-35

**註：**何謂週期函數？

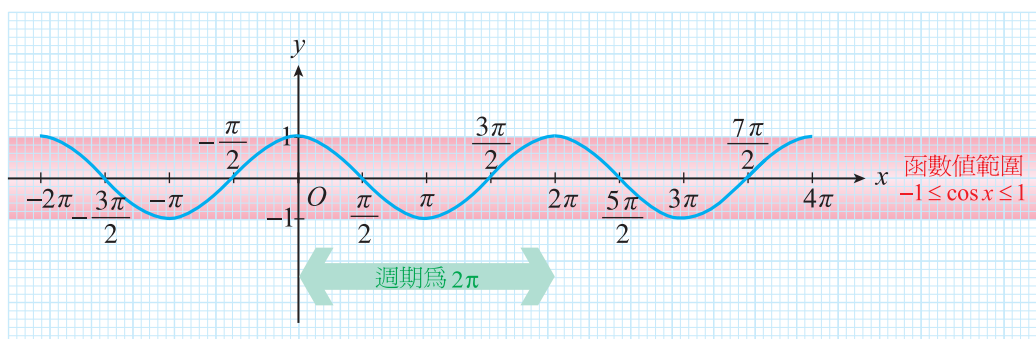
自變數均為實數的函數  $f$ ，如果有一實數  $p$ ，使得定義域中任何  $x$  與  $x+p$  恆有  $f(x+p) = f(x)$ ，我們稱  $f$  為週期函數。滿足  $f(x+p) = f(x)$  之最小正數  $p$ ，就稱為  $f(x)$  的週期。

## 2. 餘弦函數 $y = \cos x$ 的圖形：

### (1) 找出對應值

$x$	...	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$	...
$y$	...	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	...

### (2) 描繪圖形



▲圖 2-36

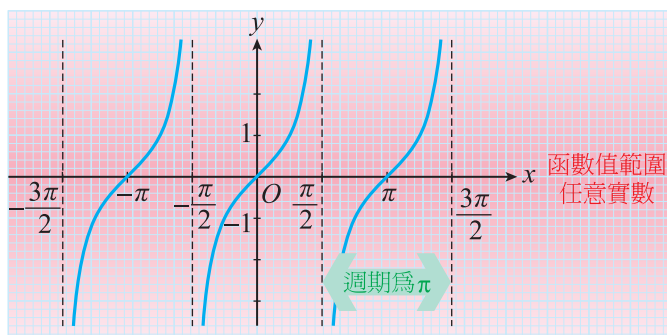
(3) 正弦函數與餘弦函數的圖形，每隔  $2\pi$  單位後就會重複出現，像這樣具有週期性的函數我們稱它為週期函數，且  $\sin x$ 、 $\cos x$  的週期均為  $2\pi$ 。

## 3. 正切函數 $y = \tan x$ 的圖形：

### (1) 找出對應值

$x$	...	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	...
$y$	...	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	...

### (2) 描繪圖形



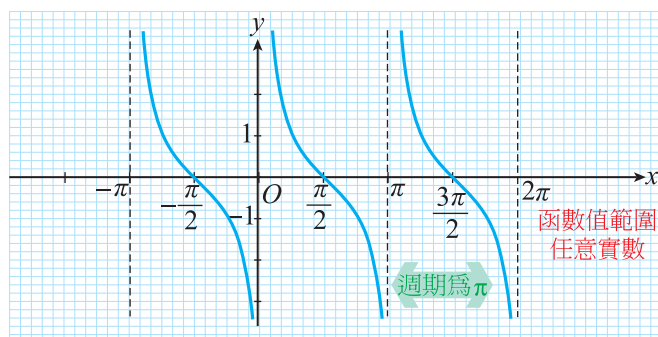
▲圖 2-37

#### 4. 餘切函數 $y = \cot x$ 的圖形：

(1) 找出對應值

$x$	...	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	...
$y$	...	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	...

(2) 描繪圖形



▲圖 2-38

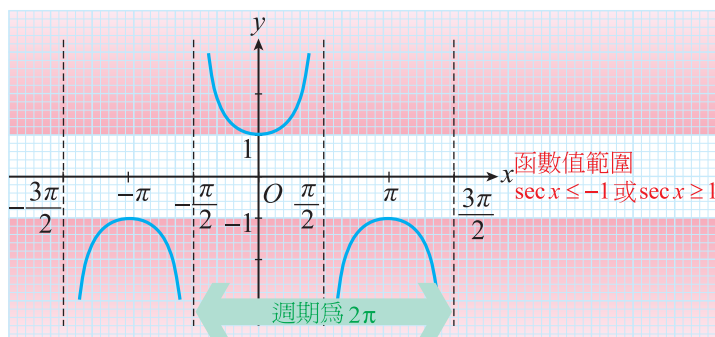
(3) 正切函數與餘切函數的圖形，每隔  $\pi$  單位後就會重複出現，所以  $\tan x$  和  $\cot x$  也都是週期函數，且週期均為  $\pi$ 。

#### 5. 正割函數 $y = \sec x$ 的圖形：

(1) 找出對應值

$x$	...	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	...
$y$	...	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	...	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	-2	...

(2) 描繪圖形



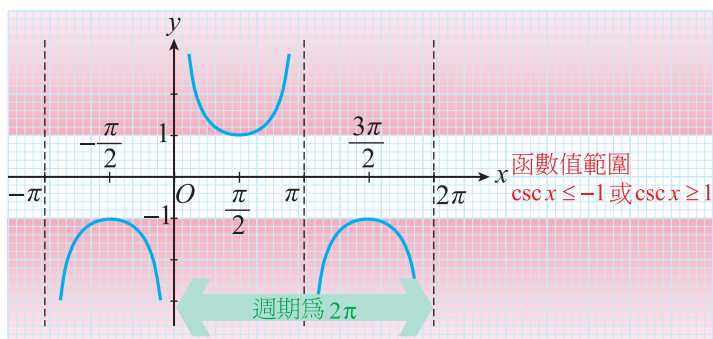
▲圖 2-39

6. 餘割函數  $y = \csc x$  的圖形：

(1) 找出對應值

$x$	...	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	...	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	...
$y$	...	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	...	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	-2	...

(2) 描繪圖形



▲圖 2-40

(3) 正割函數與餘割函數的圖形，每隔  $2\pi$  單位後就會重複出現，所以  $\sec x$  和  $\csc x$  也都是週期函數，且週期均為  $2\pi$ 。

### ? 小考箱

( ) 7. 設  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ ，則  $\sin \theta_1 < \sin \theta_2$ ， $\tan \theta_1 < \tan \theta_2$ ， $\sec \theta_1 < \sec \theta_2$ 。

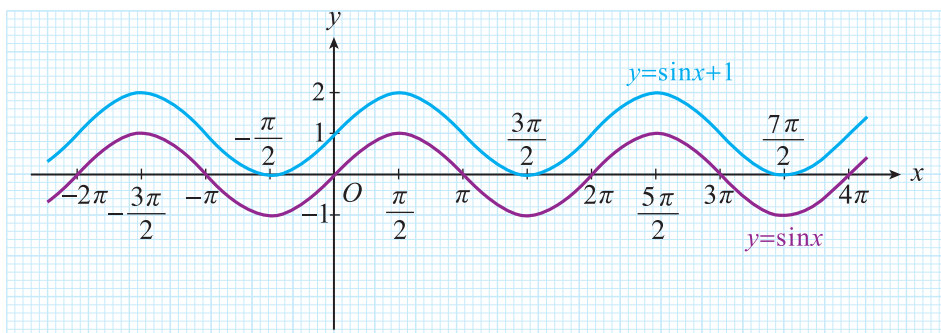
**例題 1**

試作  $y = \sin x + 1$  的圖形，並找出週期。

**解** 找出對應值

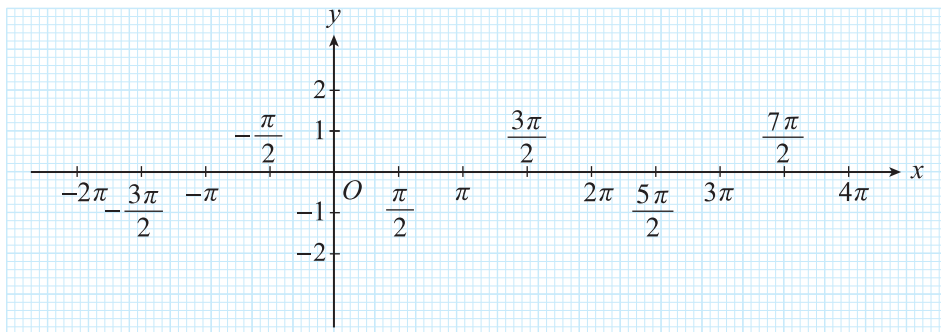
$x$	...	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	...
$y$	...	1	2	1	0	1	...

或先作  $y = \sin x$  的圖形，再將  $y = \sin x$  的圖形沿  $y$  軸往上移動一單位，即可得  $y = \sin x + 1$  的圖形。得  $y = \sin x + 1$  圖形的週期為  $2\pi$ 。



**隨堂練習**

1. 試作  $y = \cos x - 1$  的圖形，並找出週期。

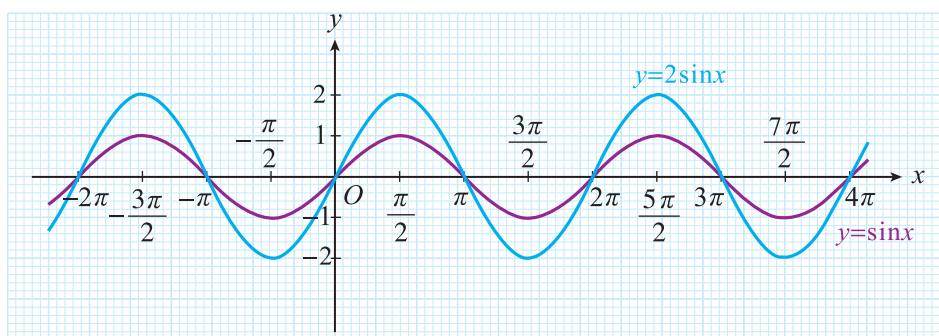


例題 2

試作  $y=2 \sin x$  的圖形，並找出週期。

解 找出對應值

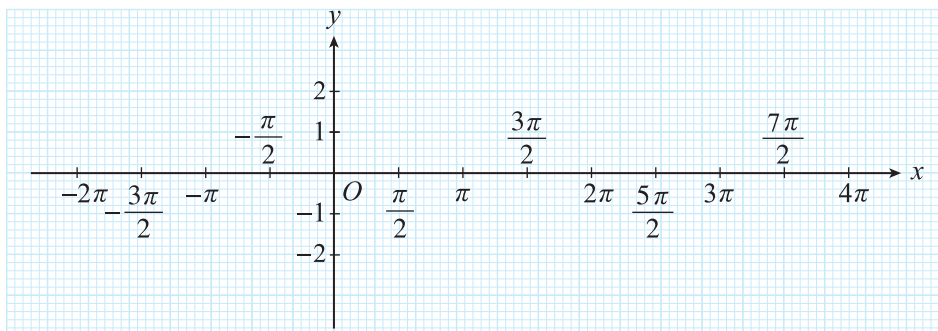
$x$	...	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	...
$y$	...	0	2	0	-2	0	...



得週期為  $2\pi$

隨堂練習

2. 試作  $y=2 \cos x$  的圖形，並找出週期。

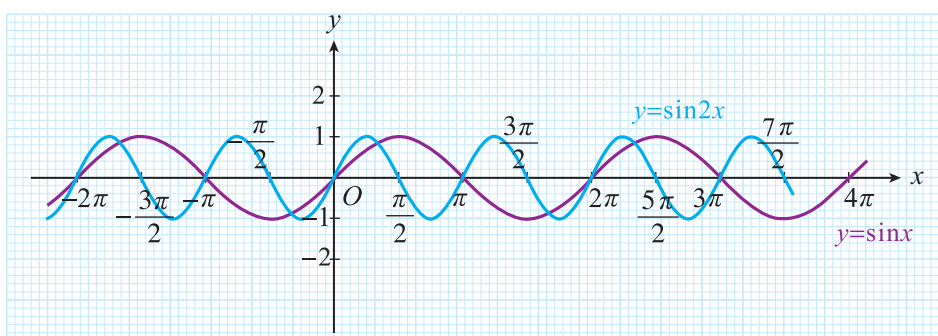


**例題 3**

試作  $y = \sin 2x$  的圖形，並找出週期。

**解** 找出對應值

$x$	...	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	...
$2x$	...	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	...
$y$	...	0	1	0	-1	0	...

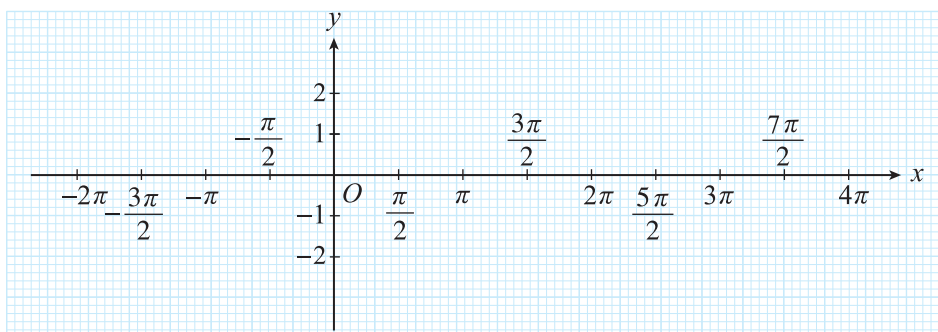


得週期為  $\pi$

由上圖可以看出， $y = \sin 2x$  的圖形是將  $y = \sin x$  的圖形以  $y$  軸為基準線，水平方向左右壓縮為  $\frac{1}{2}$  倍而得

**隨堂練習**

3. 試作  $y = \cos 2x$  的圖形，並找出週期。



例題 4

設  $2 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta + 2 = 0$ ，試求  $\sin \theta$  的值。

解  $2 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta + 2 = 0$

得  $(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta - 2) = 0$

則  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  或  $\sin \theta = 2$

但因為  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$

所以  $\sin \theta = \frac{1}{2}$

隨堂練習

4. 設  $2 \sec^2 \theta + 5 \sec \theta - 3 = 0$ ，試求  $\sec \theta$  的值。

例題 5

已知  $f(x) = 3 \sin x + 1$ ，試求  $f(x)$  的最大值與最小值。

解 因為  $-1 \leq \sin x \leq 1$

則  $-3 \leq 3 \sin x \leq 3$

得  $-2 \leq 3 \sin x + 1 \leq 4$

所以  $f(x)$  的最大值為 4 與最小值為 -2

隨堂練習

5. 已知  $f(x) = 2 \cos x - 3$ ，試求  $f(x)$  之最大值與最小值。



**例題 6**

已知  $f(x) = \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2$ ，試求  $f(x)$  的最大值與最小值。

**解** 因為  $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\text{又 } f(x) = \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2$$

當  $\sin x = -1$  時， $f(x)$  有最大值為  $\frac{9}{4}$

當  $\sin x = \frac{1}{2}$  時， $f(x)$  有最小值為 0

所以  $f(x)$  的最大值為  $\frac{9}{4}$  與最小值為 0

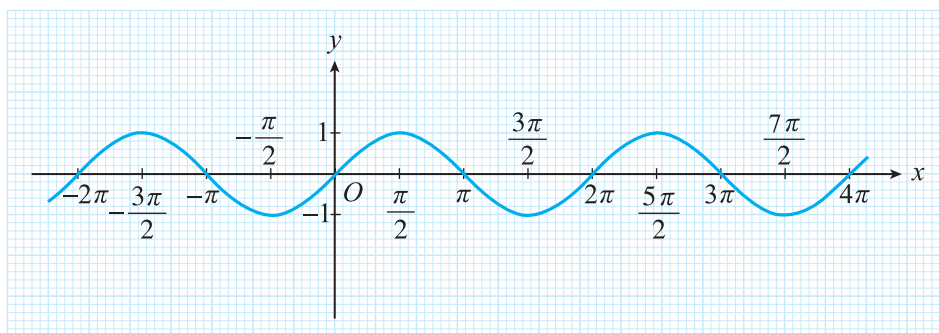
**隨堂練習**

6. 已知  $f(x) = -(\cos x + 1)^2$ ，試求  $f(x)$  的最大值與最小值。

例題 7

已知  $a = \sin 15^\circ$ 、 $b = \sin 25^\circ$ 、 $c = \sin 35^\circ$ ，試比較  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小。

解



由  $y = \sin x$  的圖形可知

當  $0^\circ < x < 90^\circ$  時， $\sin x$  的值隨  $x$  的增加而增加

所以  $c > b > a$

隨堂練習

7. 已知  $a = \cos 15^\circ$ 、 $b = \cos 25^\circ$ 、 $c = \cos 35^\circ$ ，試比較  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小。



## 習題 2-3

1. 試作函數  $y = \cos x + 1$  的圖形，並找出其週期。
2. 試找出函數  $y = -\sin x$  圖形的週期。
3. 設  $2 \cos^2 \theta + 5 \cos \theta - 3 = 0$ ，試求  $\cos \theta$  的值。
4. 設  $3 \csc^2 \theta + 4 \csc \theta - 4 = 0$ ，試求  $\csc \theta$  的值。
5. 已知  $f(x) = -\sin x + 5$ ，試求  $f(x)$  之最大值與最小值。
6. 已知  $f(x) = (\sin x - 1)^2$ ，試求  $f(x)$  之最小值。
7. 已知  $a = \tan 10^\circ$ 、 $b = \tan 40^\circ$ 、 $c = \tan 70^\circ$ ，試比較  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小。

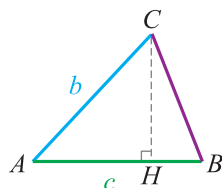
## 2-4 三角函數的應用

### 2-4.1 正弦定理與餘弦定理

#### 面積公式

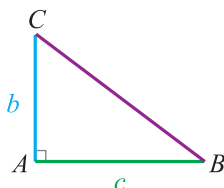
在 $\triangle ABC$ 中，若 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 分別表 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長，以 $\Delta$ 表三角形面積，則 $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$ 。

證明：(1)  $\angle A$  為銳角



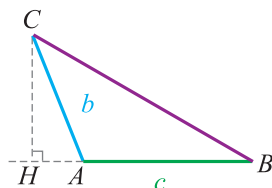
▲圖 2-41

(2)  $\angle A$  為直角



▲圖 2-42

(3)  $\angle A$  為鈍角



▲圖 2-43

$$\Delta = \frac{1}{2} (\text{底} \times \text{高}) = \frac{1}{2} (\overline{AB} \times \overline{CH}) = \frac{1}{2} \times c \times b \sin A$$

$$\text{同理可證 } \Delta = \frac{1}{2} (\text{底} \times \text{高}) = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ca \sin B$$

$$\text{所以 } \Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

#### 例題 1

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AC}=10$ 、 $\overline{AB}=8$ 、 $\angle A=30^\circ$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積。

**解** 利用面積公式

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \sin 30^\circ = 20$$

**隨堂練習**

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{BC}=4$ 、 $\overline{AB}=5$ 、 $\angle B=120^\circ$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積。

**正 弦 定 理**

在 $\triangle ABC$ 中，若 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 分別表 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長， $R$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑，則 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 。

**證明：**將三角形面積公式 $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$ ，同除以 $\frac{1}{2}abc$

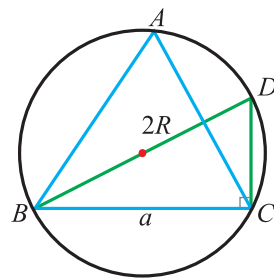
化簡得 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ ，即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

(1)  $\angle A$  為銳角

過 $B$ 作直徑 $\overline{BD}$ ，連接 $\overline{CD}$

則 $\angle A = \angle D$ （同弧所對圓周角相等）

$$\text{所以 } \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin D} = \frac{a}{\frac{a}{2R}} = 2R$$

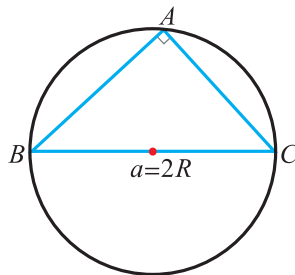


▲圖 2-44

(2)  $\angle A$  為直角

因為 $\overline{BC}=2R=a$

$$\text{所以 } \frac{a}{\sin A} = \frac{2R}{\sin 90^\circ} = 2R$$



▲圖 2-45

(3)  $\angle A$  為鈍角

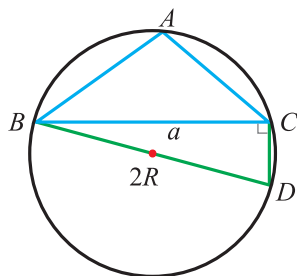
過  $B$  作直徑  $\overline{BD}$ ，連接  $\overline{CD}$

則  $\angle A = 180^\circ - \angle D$

又  $\sin A = \sin(180^\circ - D) = \sin D$

所以  $\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin D} = \frac{a}{\frac{a}{2R}} = 2R$

由(1)(2)(3)得知  $\frac{a}{\sin A} = 2R$  成立



▲圖 2-46

### 小考箱

( ) 8. 在  $\triangle ABC$  中， $a : b : c = \angle A : \angle B : \angle C$ 。

### 例題 2

在  $\triangle ABC$  中，已知  $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ ，試求  $a : b : c$ 。

**解** 因為三角形內角和為  $180^\circ$ ，所以

$$\angle A = \frac{1}{1+2+3} \times 180^\circ = 30^\circ$$

$$\angle B = \frac{2}{1+2+3} \times 180^\circ = 60^\circ$$

$$\angle C = \frac{3}{1+2+3} \times 180^\circ = 90^\circ$$

利用正弦定理  $a : b : c = \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ = 1 : \sqrt{3} : 2$

### 隨堂練習

2. 在  $\triangle ABC$  中，已知  $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 1 : 2$ ，試求  $a : b : c$ 。

**例題 3**

已知 $\triangle ABC$ 之外接圓的半徑為 8 且 $\angle A = 30^\circ$ ，試求 $\overline{BC}$ 的長度。

**解** 利用正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = 2R$

$$\text{則 } \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2 \times 8, \text{ 得 } a = 8$$

$$\text{因此 } \overline{BC} = a = 8$$

**隨堂練習**

3. 已知 $\triangle ABC$ 之外接圓的半徑為 5 且 $\angle B = 90^\circ$ ，試求 $\overline{AC}$ 的長度。

**例題 4**

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 30^\circ$ 、 $\angle B = 45^\circ$ 且 $\overline{BC} = \sqrt{2}$ ，試求 $\overline{AC}$ 的長度。

**解** 利用正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$\text{則 } \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}, \text{ 得 } b = 2$$

$$\text{因此 } \overline{AC} = b = 2$$

**隨堂練習**

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ 且 $\overline{AC} = \sqrt{6}$ ，試求 $\overline{BC}$ 的長度。

## 餘弦定理

在 $\triangle ABC$ 中，若 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 分別表 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長，則

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

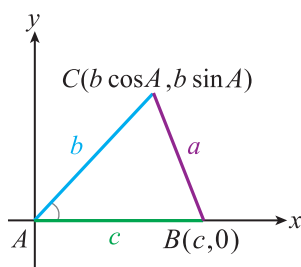
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

**證明：**將 $\triangle ABC$ 放在坐標平面上，使 $A$ 在原點， $B$ 在 $x$ 軸上，如圖 2-47~2-49

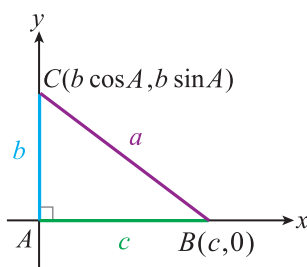
所以 $B$ 、 $C$ 兩點坐標分別為 $(c, 0)$ 、 $(b \cos A, b \sin A)$

(1)  $\angle A$  為銳角



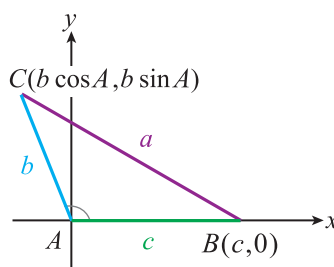
▲圖 2-47

(2)  $\angle A$  為直角



▲圖 2-48

(3)  $\angle A$  為鈍角



▲圖 2-49

$$\begin{aligned} a &= \overline{BC} \\ &= \sqrt{(b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2} \\ &= \sqrt{b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A} \\ &= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} \end{aligned}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

同理可證  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ ， $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



**例題 5**

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 120^\circ$ 、 $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{AC} = 3$ ，試求 $\overline{BC}$ 的長度。

**解** 利用餘弦定理得

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A \\ &= 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 120^\circ = 49 \\ \text{故 } \overline{BC} &= 7\end{aligned}$$

**隨堂練習**

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{AC} = 3$ 、 $\angle A = 60^\circ$ ，試求 $\overline{BC}$ 的長度。

**例題 6**

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 13$ 、 $\overline{AC} = 8$ 、 $\overline{BC} = 7$ ，試求 $\angle C$ 的角度。

**解** 利用餘弦定理  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$$\text{得 } \cos C = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{AC} \times \overline{BC}} = \frac{8^2 + 7^2 - 13^2}{2 \times 8 \times 7} = -\frac{1}{2}$$

則  $\angle C = 120^\circ$

**隨堂練習**

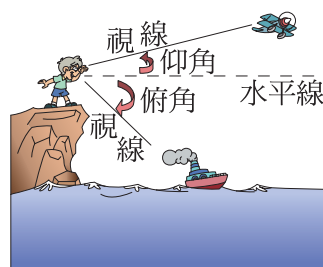
6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{BC} = 3$ 、 $\overline{AC} = 8$ 、 $\overline{AB} = 7$ ，試求 $\angle C$ 的角度。

**? 小考箱**

( ) 9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a > b$ ，則 $\angle A > \angle B$ 。

## 2-4.2 簡易三角測量

在進行測量時，從下向上看，視線與水平線的夾角稱為仰角；從上向下看，視線與水平線的夾角稱為俯角，如圖所示。



▲圖 2-50

### 例題 7

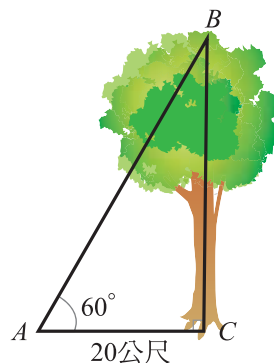
杰倫站在距離樹根 20 公尺處測得  $\angle A = 60^\circ$ ，試計算出樹的高度。

解 直角  $\triangle ABC$  中

$$\angle A = 60^\circ, \overline{AC} = 20$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \tan 60^\circ$$

$$\text{得樹高 } \overline{BC} = \overline{AC} \times \tan 60^\circ = 20\sqrt{3} \text{ 公尺}$$



### 隨堂練習

- 依林放風箏，放出 60 公尺的線，而風箏的仰角為  $60^\circ$ ，試求風箏距離地面的高度。

### 例題 8

湘琴在地面測得一山峰的仰角為  $30^\circ$ ，她向山前進 200 公尺後，再測得山峰的仰角為  $60^\circ$ ，試求山的高度。

**解** 設山的高度為  $h$

直角  $\triangle BDC$  中， $\angle BDC = 60^\circ$

$$\text{得 } \frac{h}{CD} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ 即 } \overline{CD} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

直角  $\triangle ABC$  中  $\angle A = 30^\circ$ 、 $\overline{AD} = 200$

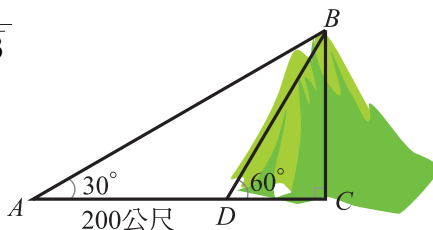
$$\text{得 } \frac{h}{AC} = \tan 30^\circ, \text{ 即 } \overline{AC} = \sqrt{3}h$$

$$\text{又 } \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD}$$

$$\text{則 } \sqrt{3}h = 200 + \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\text{得 } 3h = 200\sqrt{3} + h, \text{ 即 } h = 100\sqrt{3}$$

故山高為  $100\sqrt{3}$  公尺

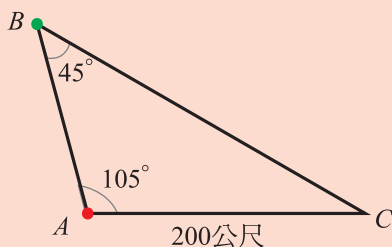


### 隨堂練習

8. 直樹在地面測得一電塔塔頂的仰角為  $45^\circ$ ，他向電塔前進 6 公尺後，再測得電塔塔頂的仰角為  $60^\circ$ ，試求電塔的高度。

### 例題 9

如圖，小麥想要測量  $A$  和  $B$  兩點的距離，得資料  $\overline{AC} = 200$  公尺、 $\angle A = 105^\circ$ 、 $\angle B = 45^\circ$ ，求  $A$  和  $B$  兩點的距離。



解  $\triangle ABC$  中  $\angle C = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$

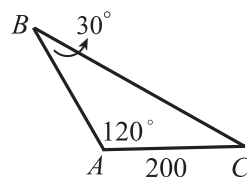
利用正弦定理得  $\frac{200}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}$

整理得  $200 \times \frac{1}{2} = \overline{AB} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

所以  $\overline{AB} = 100\sqrt{2}$  公尺

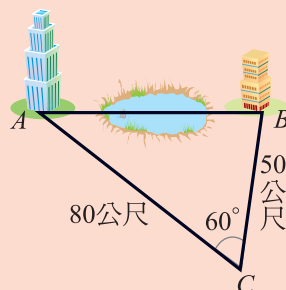
### 隨堂練習

9. 如圖，小田想要測量  $B$  和  $C$  兩點的距離，得資料  $\overline{AC} = 200$  公尺、 $\angle A = 120^\circ$ 、 $\angle B = 30^\circ$ ，試求  $B$  和  $C$  兩點的距離。



### 例題 10

如圖，湖的兩邊各有一棟大樓  $A$  和  $B$ ，南風瑾想要測量兩棟大樓的距離。南風瑾便在一點  $C$  測量，得資料  $\overline{AC} = 80$  公尺、 $\overline{BC} = 50$  公尺、 $\angle ACB = 60^\circ$ ，試求  $A$  和  $B$  兩棟大樓的距離。



解 利用餘弦定理

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{BC} \cos C \\ &= 80^2 + 50^2 - 2 \times 80 \times 50 \cos 60^\circ \\ &= 6400 + 2500 - 4000 = 4900\end{aligned}$$

$$\overline{AB} = 70$$

故  $A$  和  $B$  兩棟大樓距離 70 公尺

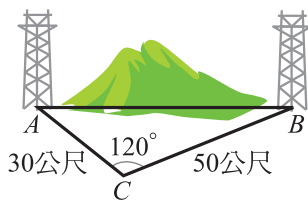
### 隨堂練習

10. 氣象局公布颱風中心位置，由蘭嶼正南方 300 公里處直線移動到蘭嶼正東方 400 公里處，試求颱風移動的距離。



## 習題 2-4

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 1 : 4$ ，試求 $a : b : c$ 。
2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AC} = 9$ 、 $\overline{BC} = 8$ 、 $\angle C = 45^\circ$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積。
3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = 75^\circ$ 、 $\angle A = 60^\circ$ 、 $\overline{AB} = 2$ ，試求 $\overline{BC}$ 的長度與 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。
4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 7$ 、 $\overline{AC} = 3$ 、 $\overline{BC} = 5$ ，試求 $\angle C$ 的角度。
5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AC} = 7$ 、 $\overline{BC} = 15$ 、 $\angle C = 60^\circ$ ，試求 $\overline{AB}$ 的長度。
6. 荳荳想測量某一高塔的高度，當荳荳距離高塔底部 10.5 公尺處，剛好使高塔的影子與荳荳的影子對齊，荳荳量出自己的影子長度為 1.5 公尺，而已知荳荳的高度為 1.5 公尺，請問此高塔高度為多少公尺？
7. 如下圖，一山丘的兩邊各有一座電塔  $A$  和  $B$ ，綠光想要測量兩座電塔的距離。綠光便在一點  $C$  測量，得資料  $\overline{AC} = 30$  公尺、 $\overline{BC} = 50$  公尺、 $\angle ACB = 120^\circ$ ，試求  $A$  和  $B$  兩座電塔的距離。



# 本章彙總



## 2-1

### 1. 有向角：

有方向限制的角稱為有向角。往逆時針方向旋轉的角稱為正角；往順時針方向旋轉的角稱為負角。

### 2. (1) 六十分制

將一圓周分成 360 等分，每一等分所對的圓心角即為 1 度。

### (2) 弧度制

在圓周上取一與半徑等長之弧，此弧所對的圓心角即為 1 弧度。

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \quad \text{或} \quad 1 \text{ 弧度} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

### 3. 已知一扇形之半徑為 $r$ ，弧長為 $S$ ，圓心角為 $\theta$ 弧度，面積為 $A$ ，則

$$S = r\theta, A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rS。$$

### 4. 同界角：

當兩個角有共同的始邊和終邊的時候，這兩個角稱為同界角。

### 5. 標準位置角：

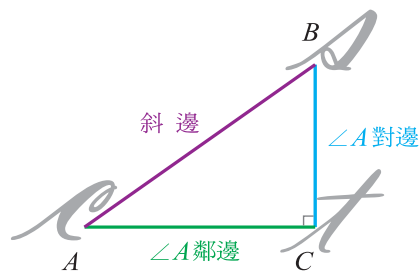
將廣義角放在坐標平面上，角的頂點在原點上，角的始邊在  $x$  軸的正向上，這樣的有向角稱為標準位置角。

## 2-2

### 1. 銳角三角函數定義：

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{a}{c}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的正弦函數}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{b}{c}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的餘弦函數}$$



▲圖 2-51

# 本章彙總

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{a}{b}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的正切函數}$$

$$\cot A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\angle A \text{ 的對邊}} = \frac{b}{a}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的餘切函數}$$

$$\sec A = \frac{\text{斜邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{c}{b}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的正割函數}$$

$$\csc A = \frac{\text{斜邊}}{\angle A \text{ 的對邊}} = \frac{c}{a}, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的餘割函數}$$

2. 特別角三角函數值：

函 數 值 角度	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$30^\circ \left( \frac{\pi}{6} \right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$45^\circ \left( \frac{\pi}{4} \right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60^\circ \left( \frac{\pi}{3} \right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

3. 任意角三角函數定義：

在標準位置角  $\theta$  的終邊上任取一點  $P(x, y)$ ，假設  $\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y}, \sec \theta = \frac{r}{x}, \cot \theta = \frac{x}{y}$$



#### 4. 三角函數值的正負符號：

正負象限 函數	第一象限角	第二象限角	第三象限角	第四象限角
$\sin \theta$ 、 $\csc \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$ 、 $\sec \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$ 、 $\cot \theta$	+	-	+	-

#### 5. 象限角三角函數值：

函數值 角度	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$0^\circ$	0	1	0	無意義	1	無意義
$90^\circ \left( \frac{\pi}{2} \right)$	1	0	無意義	0	無意義	1
$180^\circ (\pi)$	0	-1	0	無意義	-1	無意義
$270^\circ \left( \frac{3\pi}{2} \right)$	-1	0	無意義	0	無意義	-1

#### 6. 三角函數之間具有的關係：

##### (1) 倒數關係

$$\sin \theta \csc \theta = 1, \cos \theta \sec \theta = 1, \tan \theta \cot \theta = 1$$

##### (2) 商數關係

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

##### (3) 平方關係

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta, 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$



# 本章彙總

## 2-3

1.  $y = \sin x$  的圖形可知

(1)  $y = \sin x$  的圖形的週期為  $2\pi$

(2)  $-1 \leq \sin x \leq 1$

2.  $y = \cos x$  的圖形可知

(1)  $y = \cos x$  的圖形的週期為  $2\pi$

(2)  $-1 \leq \cos x \leq 1$

3.  $y = \tan x$  的圖形可知

(1)  $y = \tan x$  的圖形的週期為  $\pi$

(2)  $\tan x$  的值可為任意實數

4.  $y = \cot x$  的圖形可知

(1)  $y = \cot x$  的圖形的週期為  $\pi$

(2)  $\cot x$  的值可為任意實數

5.  $y = \sec x$  的圖形可知

(1)  $y = \sec x$  的圖形的週期為  $2\pi$

(2)  $\sec x \leq -1$  或  $\sec x \geq 1$

6.  $y = \csc x$  的圖形可知

(1)  $y = \csc x$  的圖形的週期為  $2\pi$

(2)  $\csc x \leq -1$  或  $\csc x \geq 1$

## 2-4

在  $\triangle ABC$  中，若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分別表  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的對邊長，以  $\Delta$  表三角形面積， $R$  為  $\triangle ABC$  的外接圓半徑

(1) 面積公式

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

(2) 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(3) 餘弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

# 自我評量

- ( ) 1.  $950^\circ$  為第幾象限角？  
(A) 第一象限角 (B) 第二象限角 (C) 第三象限角 (D) 第四象限角。【2-1】
- ( ) 2.  $345^\circ$  的最大負同界角為  
(A)  $-15^\circ$  (B)  $-35^\circ$  (C)  $-135^\circ$  (D)  $-345^\circ$ 。【2-1】
- ( ) 3.  $135^\circ$  等於多少弧度？  
(A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{3\pi}{4}$  (D)  $\frac{5\pi}{4}$ 。【2-1】
- ( ) 4. 3 弧度等於多少度？  
(A)  $540^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $\left(\frac{540}{\pi}\right)^\circ$  (D)  $\left(\frac{\pi}{60}\right)^\circ$ 。【2-1】
- ( ) 5. 設一扇形的半徑為 4，圓心角為  $45^\circ$ ，則扇形的面積為  
(A) 360 (B) 90 (C)  $2\pi$  (D)  $\frac{\pi}{2}$ 。【2-1】
- ( ) 6. 直角  $\triangle ABC$  中，已知  $\angle C = 90^\circ$  且  $\tan A = \frac{3}{4}$ ，則  $\cos B$  之值為  
(A)  $\frac{4}{5}$  (B)  $\frac{3}{5}$  (C)  $\frac{3}{4}$  (D)  $\frac{1}{2}$ 。【2-2】
- ( ) 7. 試求  $\tan 30^\circ \times \sin 60^\circ \times \cot 45^\circ$  之值為  
(A) 0 (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 1 (D) 2。【2-2】
- ( ) 8. 設  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  且  $\tan \theta = 3$ ，則  $\sin \theta$  之值為  
(A)  $\frac{\sqrt{10}}{3}$  (B)  $\frac{3}{\sqrt{10}}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ 。【2-2】
- ( ) 9. 設  $\cos \theta < 0$  且  $\tan \theta > 0$ ，則角度  $\theta$  是第幾象限角？  
(A) 第一象限角 (B) 第二象限角 (C) 第三象限角 (D) 第四象限角。【2-2】
- ( ) 10. 試判斷下列各式何者正確？  
(A)  $\sin(-295^\circ) > 0$  (B)  $\tan 135^\circ > 0$  (C)  $\csc(-80^\circ) > 0$  (D)  $\cos 40^\circ < 0$ 。【2-2】

## 自我評量

- ( ) 11.  $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$  之值為  
(A)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $-\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{2}$ 。 【2-2】
- ( ) 12. 若  $\theta$  為第二象限角且  $\tan \theta = -\frac{5}{12}$ ，則  $\cos \theta$  之值等於  
(A)  $-\frac{5}{13}$  (B)  $-\frac{12}{13}$  (C)  $\frac{12}{13}$  (D)  $\frac{5}{13}$ 。 【2-2】
- ( ) 13. 已知  $f(x) = (\cos x - 2)^2 + 3$ ，則  $f(x)$  的最大值為  
(A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 12。 【2-3】
- ( ) 14. 設  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ， $y = \sin x$  與  $y = \cos x$  圖形的交點共有  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 個。 【2-3】
- ( ) 15. 函數  $f(x) = 3 \sin 2x$  的週期為  
(A)  $4\pi$  (B)  $2\pi$  (C)  $\pi$  (D)  $\frac{\pi}{2}$ 。 【2-3】
- ( ) 16. 下列敘述何者為真？  
(A)  $\tan 55^\circ > \sec 55^\circ$  (B)  $\tan 55^\circ < \cot 55^\circ$  (C)  $\sin 55^\circ < \cos 55^\circ$   
(D)  $\tan 125^\circ < \sin 125^\circ$ 。 【2-3】
- ( ) 17.  $3 \sec^2 \theta + 10 \sec \theta - 8 = 0$ ，則  $\sec \theta$  之值為  
(A) 4 (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $-\frac{2}{3}$  (D) -4。 【2-3】
- ( ) 18.  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 20$  公分、 $\overline{AC} = 5$  公分、 $\angle A = 30^\circ$ ，則  $\frac{\sin C}{\sin B}$  之值為  
(A) 4 (B) 2 (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{4}$ 。 【2-4】
- ( ) 19. 在  $\triangle ABC$  中，已知  $\overline{AB} = 7$ 、 $\overline{AC} = 4$ 、 $\overline{BC} = 5$ ，則  $\sin A : \sin B : \sin C$  為  
(A) 7 : 4 : 5 (B) 4 : 5 : 7 (C) 5 : 7 : 4 (D) 5 : 4 : 7。 【2-4】
- ( ) 20. 梯子靠牆放置，使梯子與地面成  $45^\circ$  角，已知梯長 10 公尺，則梯腳與牆的距離為  
(A) 5 (B)  $5\sqrt{2}$  (C) 10 (D)  $10\sqrt{2}$  公尺。 【2-4】