從組合公式談期望值的可加性

◎ 陳憲儀／育成高中　吳孝仁／政大附中

在談到期望值這個單元時，以下是一個很經典的問題：

袋中有白球 3 顆、紅球 4 顆；若拿到一顆白球可得獎金 5 元，拿到一顆紅球可得獎金 10 元。求下列各情形拿到獎金的期望值：

(1) 一次取一顆，取 2 次，取後**放回**。

(2) 一次取一顆，取 2 次，取後**不放回**。

(3) 一次取兩顆。

在處理這個問題的時候，我們其實很希望學生按部就班地把所有情形找出來，再分別求出各情形發生的機率，以及所獲得的報酬。

以(1)來說，做法是這樣子的：

取到球的情形	白　白	紅　紅	紅　白	白　紅
機　率	$\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}$
獎　金	10	20	15	15

所以一次取一顆，取 2 次，取後放回，拿到獎金的期望值為

$$\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times10+\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times20+\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}\times15+\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}\times15=\frac{110}{7}$$

而(2)、(3)兩個問題一樣逐步去計算，答案其實也是 $\frac{110}{7}$ 。

當然！學生很快的發現三者答案都一樣。藉由這個問題，一般來說，我們會引入「期望值」可視為「平均值」的概念。例如(1)中，取一次（顆）平均可拿得

$$\frac{3}{7}(\text{拿到白球機率})\times5(\text{拿到白球報酬})+\frac{4}{7}(\text{拿到紅球機率})\times10(\text{拿到紅球報酬})=\frac{55}{7}$$

所以取兩次（不管是放回或不放回）或一次拿 2 顆，平均可得到 $\frac{55}{7}\times2=\frac{110}{7}$ 。

有了此概念後，期望值就變成「**可加**」了。不管取後放回不放回、不管逐次拿還是一次拿，直接計算拿一次的期望值乘上拿的次數就是了。這個結果似乎蠻讓人訝異的！我們來把它說清楚：雖然這個結果可以由機率統計中的隨機變數來證明，但我們還是希望用高中生可以理解的式子來證明，這是這篇文章的目的。證明過程中，會用到以下兩個組合公式：

公式一：多項式定理

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k)^n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots\cdots n_k!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\cdots\cdots x_k^{n_k},$$

其中 $n_1+n_2+n_3+\cdots\cdots+n_k=n$，而 $0\le n_i\le n,\ i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ k$.

公式二：

$$\sum C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\cdots\cdots C_{n_k}^{m_k}=C_n^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k},$$

其中 $n_1+n_2+n_3+\cdots\cdots+n_k=n$，而 $0\le n_i\le n$ 且 $n_i\le m_i,\ i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ k$.

公式一大部分的中學課本內容均有提及，而公式二亦可在課本後面習題發現其蹤跡，只要由式子 $(1+x)^{m_1}(1+x)^{m_2}\cdots\cdots(1+x)^{m_k}=(1+x)^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k}$, 便可證明公式二。

回到原問題，今將問題一般化：

袋中有 i 號球 m_i 顆，拿到一顆 i 號球可得獎金 n_i 元，其中 $i=1\sim r$（即袋中共有 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r$ 顆球）。今從袋中抽一顆，拿到獎金的期望值為

$$S=\frac{m_1}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}n_1+\frac{m_2}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}n_2+\cdots\cdots+\frac{m_r}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}n_r.$$

以下分三種情況，說明不管是**一次取一顆，取後放回，取了 d 次**；**一次取一顆，取後不放回，取了 d 次**；或**一次取 d 顆**，所拿到獎金的期望值均為 dS 。

(1) 從袋中**一次取一顆，取後放回，取了 d 次**，每次拿到 i 號球的機率為

$$P_i=\frac{m_i}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}.\text{（注意：}P_1+P_2+\cdots\cdots+P_r=1\text{）}$$

假設這 d 顆球中，i 號球取出 d_i 顆（ $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$ ）這種類型機率為

$$\frac{d!}{d_1!d_2!\cdots\cdots d_r!}P_1^{d_1}P_2^{d_2}\cdots\cdots P_r^{d_r},$$

而得到獎金

$$d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r,$$

所以期望值為

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{d!}{(d_1)!(d_2)!\cdots\cdots(d_r)!}P_1^{d_1}P_2^{d_2}\cdots\cdots P_r^{d_r}(d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r),$$

其中 $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$ ，而 $0\le d_i\le d,\ i=1,2,\cdots\cdots,k$.

化簡上式得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{d_1+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{d!}{(d_1)!(d_2)!\cdots\cdots(d_r)!}P_1^{d_1}P_2^{d_2}\cdots\cdots P_r^{d_r}\right)d_kn_k\\&=\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{d_1+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{d!}{(d_1)!(d_2)!\cdots\cdots(d_k-1)!\cdots\cdots(d_r)!}P_1^{d_1}P_2^{d_2}\cdots\cdots P_r^{d_r}\right)n_k\\&=\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{d_1+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{(d-1)!}{(d_1)!(d_2)!\cdots\cdots(d_k-1)!\cdots\cdots(d_r)!}P_1^{d_1}P_2^{d_2}\cdots\cdots P_k^{d_k-1}\cdots\cdots P_r^{d_r}\right)dP_kn_k\ .\end{aligned}$$

由公式一，上式可化簡為

$$\sum_{k=1}^{r}(P_1+P_2+\cdots\cdots+P_r)^{d-1}dP_kn_k=\sum_{k=1}^{r}1^{d-1}dP_kn_k=d\sum_{k=1}^{r}P_kn_k=dS\,.$$

(2) 從袋中**一次取 d 顆**，若這 d 顆中 i 號球有 d_i 顆（ $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$ ）這種類型機率為

$$\frac{C_{d_1}^{m_1}C_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots C_{d_r}^{m_r}}{C_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}},$$

所以得到獎金

$$d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r\,,$$

則一次取 d 顆得到獎金的期望值為

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{C_{d_1}^{m_1}C_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots C_{d_r}^{m_r}}{C_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}}(d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r)\,,$$

其中 $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$ ，而 $0\le d_i\le d,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$.

化簡上式得

$$\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{C_{d_1}^{m_1}C_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots C_{d_r}^{m_r}}{C_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}}\right)d_kn_k\,.$$

因為 $d_kC_{d_k}^{m_k}=m_kC_{d_k-1}^{m_k-1}$ ，所以可得

$$\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{C_{d_1}^{m_1}C_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots C_{d_k-1}^{m_k-1}\cdots\cdots C_{d_r}^{m_r}}{C_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}}\right)m_kn_k\,.$$

由公式二，上式可化簡為

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{C_{d-1}^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r-1}}{C_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}}\right)m_kn_k\\&=\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{d}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}\right)m_kn_k\\&=d\sum_{k=1}^{r}\frac{m_kn_k}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}\\&=dS\,.\end{aligned}$$

(3) 今從袋中**一次取一顆，取後不放回，取了 d 次**：

針對這種情形我們做這樣的思考：想像一張有序的列表，一共有 d 個位置，在這張列表擺上 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r$ 顆球中的 d 個球，那麼所有可能的情形就是樣本空間。接著算一算各種情形發生的機率，乘上得到的獎金，再通通求和。

依每號球取出的個數分類，假設 d 顆球中，i 號球取出了 d_i 顆，但是注意到因為表是有序的，所以每種取球個數的類型還蘊含著排列情形。所以 d 顆球中，i 號球取出 d_i 顆

（$d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$）這種類型蘊含了

$$\frac{d!}{d_1!d_2!\cdots\cdots d_r!}P_{d_1}^{m_1}P_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots P_{d_r}^{m_r}$$

這麼多情形。從而機率為

$$\frac{d!}{d_1!d_2!\cdots\cdots d_r!}\frac{P_{d_1}^{m_1}P_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots P_{d_r}^{m_r}}{P_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}},$$

得到獎金

$$d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r,$$

所以期望值為

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{d!}{d_1!d_2!\cdots\cdots d_r!}\frac{P_{d_1}^{m_1}P_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots P_{d_r}^{m_r}}{P_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}}(d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r),$$

其中 $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$ ，而 $0\le d_i\le d,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$.

很清楚的，這和(2)是相同的，所以期望值依然是 dS 。

以上推導過程中，大量使用求和記號 $\sum$ 來表示複雜的式子，並配合組合公式證明了期望值的可加性，程度比較好的高中生若能仔細推導一遍，相信在本身數學程度上會有一定的提升！

最後，在中學課本上也很常見此種題目：

丟一顆骰子 d 次（通常是一次或兩次），求出現點數和的期望值。

此可視為上述題目的特例；投擲到 i 點可視為拿到 i 號球一顆，而拿到 i 號球可得到 i 元，其中 $i=1,2,\cdots\cdots,6$ ，所以點數和的期望值等於投一顆骰子得到點數的期望值 $(\frac{1+2+3+\cdots\cdots+6}{6}=\frac{7}{2})$ 再乘上 d。