

第4章

指數與對數 及其運算



觀念銜接

第1節

1. 當同一個數 a 連乘 n 次時，可以簡記成 a^n ，其中 a 稱為底數， n 稱為指數。
2. 指數律：如果 a 、 b 是不等於 0 的整數或分數， m 、 n 是任意兩個正整數，則
$$a^0 = 1, a^m \times a^n = a^{m+n}, a^m \div a^n = a^{m-n}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (a \times b)^m = a^m \times b^m,$$
$$(a \div b)^m = a^m \div b^m.$$
3. 當 $a > 1$ 時，次方 n 愈大，則 a^n 的值會愈大；
當 $0 < a < 1$ 時，次方 n 愈大，則 a^n 的值會愈小。
4. 平方根：若 $b^2 = a$ ，則稱 b 是 a 的平方根。當 a 為正數時，我們使用「 $\pm\sqrt{a}$ 」來表示 a 的平方根，其中 $\sqrt{a}$ 為 a 的正平方根。

第2節

1. 函數：設 x 與 y 是兩個變數。當 x 的值給定時， y 的值也隨著 x 的值而唯一確定，我們稱這種對應關係為 y 是 x 的函數，而 x 稱為自變數， y 稱為應變數。若此函數命名為 f ，則用記號 $y = f(x)$ 表示，並以 $f(a)$ 表示當 $x = a$ 時所對應的函數值。
2. 一次方程式：形如 $ax + b = 0$ （其中 $a \neq 0$ ）的式子中，因為只含有一個未知數，且未知數的次數是 1，所以稱為一元一次方程式。



3. 二次方程式：形如 $ax^2 + bx + c = 0$ （其中 $a \neq 0$ ）的式子中，因為只含有一個未知數，且該未知數的最高次數為 2，所以稱為一元二次方程式。

第 5 節

1. 科學記號：把一個數記錄為 $a \times 10^m$ 的形式（其中 $1 \leq a < 10$ ， m 為整數），稱為科學記號。
2. 設 n 為正整數且 $1 \leq a < 10$ ，則
 - (1) 如果某數的科學記號為 $a \times 10^n$ ，則該數的整數部分是 $n + 1$ 位數。
 - (2) 如果某數的科學記號為 $a \times 10^{-n}$ ，則該數在小數點後第 n 位開始出現不是 0 的數字。

觀念澄清

- () 1. $5^6 \div 5^3 = 5^2$ 。
- () 2. $0.99^3 < 0.99^2 < 0.99$ 。
- () 3. 3.46×10^{12} 為 12 位數。

4-1 指數的運算與意義

4-1.1 正整數指數與指數律

對於每一個實數 a ，若 n 為一個正整數，則我們用符號 a^n 表示 n 個 a 的連乘積。即

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個}}$$

讀作「 a 的 n 次方」，其中 a 稱為底數、 n 稱為指數。



▲秘訣

通常我們把 a^2 、 a^3 分別讀作「 a 的平方」、「 a 的立方」；而 3 次方以上，則按照其次方來唸，如 a^{10} 讀作「 a 的 10 次方」。

若 a 、 b 為兩個實數， m 、 n 為兩個正整數，則指數的運算具有下列性質：

$$1. a^m \times a^n = (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ 個}}) \times (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}) = a^{m+n}$$

$$\begin{aligned} 2. (a^m)^n &= \underbrace{a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}_{n \text{ 個}} \\ &= (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ 個}}) \times (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ 個}}) \times \cdots \times (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ 個}}) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ 個}} \\ &= a^{mn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. a^n \times b^n &= (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}) \times (\underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ 個}}) \\ &= \underbrace{(ab) \times (ab) \times \cdots \times (ab)}_{n \text{ 個}} \\ &= (ab)^n \end{aligned}$$

我們稱這三個性質為正整數指數的指數律。整理如下：

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad a^n \times b^n = (ab)^n$$

例題

7

試填入適當的數字於空格內：

$$(1) 5^3 \times 5^8 \times 5^6 = 5^{\square}$$

$$(2) (2^3)^8 = 2^{\square}$$

$$(3) 3^{11} \times 5^{11} = \square^{11}$$

解 (1) $5^3 \times 5^8 \times 5^6 = 5^{3+8+6} = 5^{17}$

故得 $\square = 17$

$$(2) (2^3)^8 = 2^{3 \times 8} = 2^{24}$$

故得 $\square = 24$

$$(3) 3^{11} \times 5^{11} = (3 \times 5)^{11} = 15^{11}$$

故得 $\square = 15$

隨堂練習

1. 試填入適當的數字於空格內：

$$(1) 3^6 \times 3^4 = 3^{\square}$$

$$(2) (5^6)^4 = 5^{\square}$$

$$(3) 7^{101} \times 5^{101} = \square^{101}$$

! 小考箱

() 1. 試問 $(2^3)^2 = 2^{(3^2)}$ 是否正確？

4-1.2 零指數與負整數指數

我們思考下面的問題：若要將指數推廣到整數系（除了正整數外，包括零及負整數），則 a^0 、 a^{-n} 應如何定義才適合我們前面學過的指數律？又對底數 a 需要作如何的限制呢？

1. 設 a 為非 0 的實數， n 是一個正整數，若欲合乎指數律，則應有 $a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$ 。因為 $a \neq 0$ ，故 $a^n \neq 0$ ，若將兩邊同除以 a^n ，則得到 $a^0 = 1$ ，故定義 $a^0 = 1$ 是合理的。
2. 又欲使得 $a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$ ，將兩邊同除以 a^n ，得到 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ，故定義 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 亦是合理的。

綜合上述，對於零指數及負整數的指數，我們定義如下：若 a 是不為 0 的實數， n 是一個正整數，則規定

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

上面的定義，均合乎我們學過的指數律。再進一步推演：若 $a \neq 0$ ， m 、 n 為正整數，則

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

例題

2

求下列各式之值：

(1) $(1234)^0$ (2) 3^{-2}

解

(1) $(1234)^0 = 1$

(2) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

隨堂練習

2. 求下列各式之值：

(1) $(4321)^0$ (2) 5^{-3}

例題 3

求 $2^4 \times (2^{-3})^2$ 之值。

解 $2^4 \times (2^{-3})^2 = 2^4 \times 2^{-6} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

隨堂練習

3. 求 $(3^{-2} \times 3^2)^{-10}$ 之值。

例題 4

若 $x + x^{-1} = 3$ ，求 $x^2 + x^{-2}$ 之值。

解 由 $(x + x^{-1})^2 = x^2 + 2 \times x \times x^{-1} + (x^{-1})^2$
 $= x^2 + 2 + x^{-2}$

得 $x^2 + x^{-2} = (x + x^{-1})^2 - 2$
 $= 3^2 - 2 = 7$

隨堂練習

4. 若 $x - x^{-1} = 3$ ，求 $x^2 + x^{-2}$ 之值。

4-1.3 分數指數與實數指數

國中曾經學過，對於任一個正數 a ，若 $b^2 = a$ ，則稱 b 為 a 的平方根，且其中正的平方根恰有一個，記為 $\sqrt{a}$ ，如 $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ ；同理，可推廣到若 $b^3 = a$ ，則稱 b 為 a 的立方根，其中正的立方根也恰有一個，記為 $\sqrt[3]{a}$ ，如 $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ 。一般而言，設 a 為一正數， n 為一正整數，若 $b^n = a$ ，則稱 b 為 a 的 n 次方根，其中正的 n 次方根，亦恰有一個，記為 $\sqrt[n]{a}$ ，如 $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ ，利用 n 次方根的定義，我們可將指數推廣到有理數系中。

設 a 為正實數， n 為正整數，則 $a^{\frac{1}{n}}$ 應該如何定義呢？為了合指數律 $(a^m)^n = a^{mn}$ ，我們可得 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ ，顯然 $a^{\frac{1}{n}}$ 是 a 的正 n 次方根，因此，定義 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 是合理的，即 $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ 、 $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ 。同理，若 m 、 n 為整數且 $n > 0$ 、 $a > 0$ ，則 $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$ ，即 $a^{\frac{m}{n}}$ 為 a^m 的正 n 次方根，故可定義 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ，即 $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$ 。

綜合上述，我們將分數指數定義如下：

若 a 為正實數，且 m 、 n 為整數， $n > 0$ ，則

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \\ a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \end{aligned}$$

▲秘訣

例題 5

求下列各式之值：

(1) $16^{\frac{1}{4}}$

(2) $9^{\frac{3}{2}}$

解

(1) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(2) $9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$

隨堂練習

5. 求下列各式之值：

(1) $27^{\frac{1}{3}}$

(2) $4^{-\frac{5}{2}}$

依照分數指數的定義，我們可以證明指數律對於分數指數亦成立，而且可推廣到實數指數中，只是其證明較艱深，不適合在此介紹，現僅將前面所介紹過的指數性質歸納如下：

設 a 、 b 為正實數， r 、 s 為實數，則

$$1. a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$2. (a^r)^s = a^{rs}$$

$$3. a^r \times b^r = (ab)^r$$

$$4. \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$5. \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

例題

6

設 a 、 b 均為正實數，試化簡下列各式：

$$(1) \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a}$$

$$(2) \frac{a^{\sqrt{2}}}{a^{-2+\sqrt{2}}}$$

$$(3) \sqrt[4]{a^2 b^6} \times \sqrt{ab}$$

解 (1) 原式 $= a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = a$

(2) 原式 $= a^{\sqrt{2} - (-2 + \sqrt{2})} = a^2$

(3) 原式 $= (a^2 b^6)^{\frac{1}{4}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}\right) \times \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\right)$
 $= a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \times b^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = ab^2$

隨堂練習

6. 設 a 、 b 均為正實數，試化簡下列各式：

$$(1) \sqrt[5]{\sqrt{a^{20}}}$$

$$(2) \frac{a^{-1+\sqrt{3}}}{a^{1+\sqrt{3}}}$$

$$(3) \sqrt[3]{a^2 b} \times \left(a^{\frac{1}{2}} b\right)^{\frac{2}{3}}$$

習題 4-1



1. 求下列各式之值：

$$(1) (25 \times 5^{-3})^{-2} + (3^{14} - 5^7)^0$$

$$(2) 10^{2.3} \times 10^{-0.8} \div 10^{2.5}$$

$$(3) (2 + \sqrt{5})^{10} \times (2 - \sqrt{5})^{10}$$

2. 求下列各式之值：

$$(1) (81)^{-\frac{1}{4}}$$

$$(2) 25^{\frac{3}{2}}$$

3. 設 $a > 0$ ，化簡下列各式：

$$(1) \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a^5}$$

$$(2) \sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}}$$

$$(3) \frac{a^{3+2\sqrt{2}}}{a^{-1+2\sqrt{2}}}$$

4. 若 $a > 0$ ， $b > 0$ 且 $(a^{\frac{1}{2}} \times b^{-\frac{1}{6}})^{\frac{3}{2}} \times (ab)^{\frac{9}{4}} = a^m b^n$ ，試求數對 (m, n) 。

5. 若 $x + x^{-1} = 5$ ，求 $x^2 + x^{-2}$ 之值。

4-2 指數函數及其圖形

4-2.1 指數函數的圖形

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，對任意實數 x ，我們稱函數 $y = f(x) = a^x$ 為以 a 為底數的指數函數。為了了解其圖形的特性，我們可依照所學過的函數圖形畫法，畫出 $y = a^x$ 的圖形；並由圖形中，找出一些現象來作為理論的根據。以下先舉例說明，並比較之：

例題 1

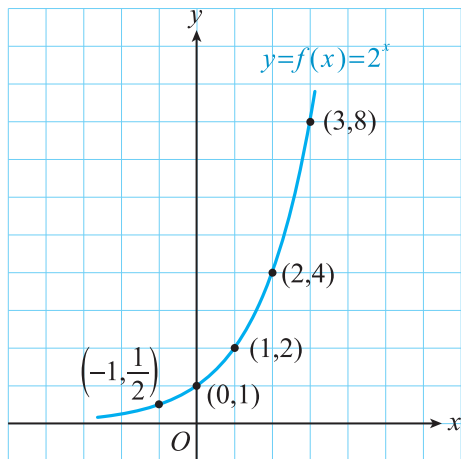
試作 $f(x) = 2^x$ 的圖形。

解 由 $y = f(x) = 2^x$ ，求出 x 與 y 的對應值，列表如下：

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...

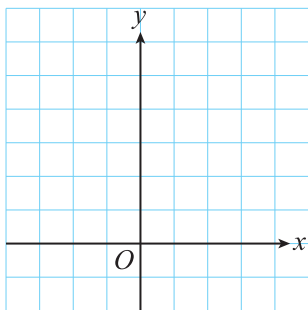
我們發現 x 值愈大，則 y 值也相對愈大； x 值愈小，則 y 值也愈小，最後幾乎等於 0。

由描點可得圖形如下：



隨堂練習

1. 試作 $f(x) = 3^x$ 的圖形。



例題

2

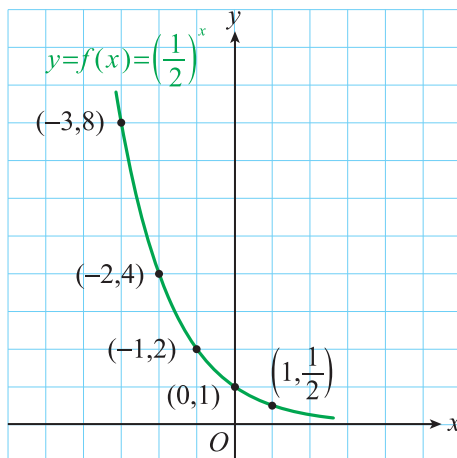
試作 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形。

解 由 $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，求出 x 與 y 的對應值，列表如下：

x	...	-3	-2	-1	0	1	...
y	...	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	...

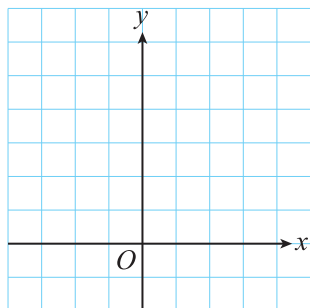
我們發現 x 值愈大，則 y 值愈小，最後幾乎等於 0；但 x 值愈小，則 y 的對應值愈大。

由描點可得圖形如下：

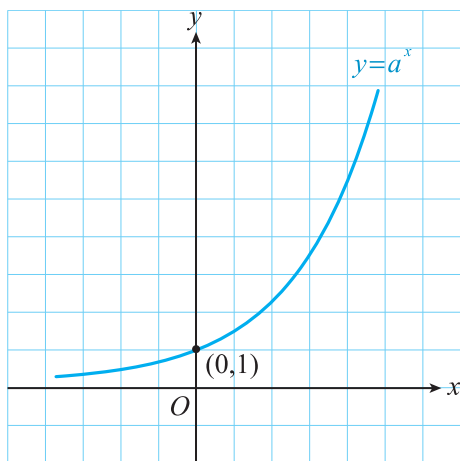


隨堂練習

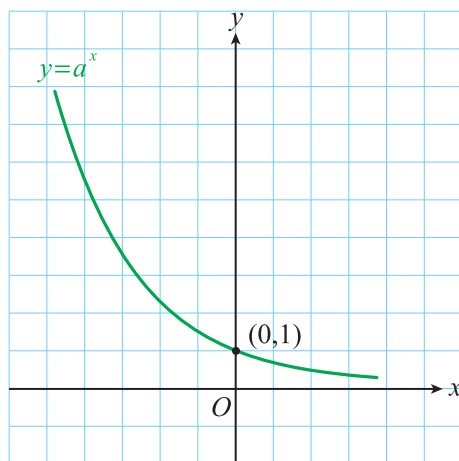
2. 試作 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的圖形。



由例題 1、例題 2 的圖形，我們可歸納得 $y = a^x$ 的圖形，如圖 4-1 所示：



(a) $a > 1$



(b) $0 < a < 1$

圖 4-1

【說明】

1. 圖形恆在 x 軸的上方，且漸漸接近於 x 軸。
2. 圖形通過點 $(0, 1)$ 。
3. 若 $a > 1$ ，則 $y = a^x$ 的值是隨 x 值增大而遞增；即若 $x_2 > x_1$ ，則 $a^{x_2} > a^{x_1}$ 。
此時稱函數 $y = a^x$ 為嚴格增函數。如圖 4-1(a) 所示。

4. 若 $0 < a < 1$ ，則 $y = a^x$ 的值是隨 x 值增大而遞減；即若 $x_2 > x_1$ ，則 $a^{x_2} < a^{x_1}$ 。

此時稱函數 $y = a^x$ 為嚴格減函數。如圖 4-1(b) 所示。

5. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則 $y = a^x$ 的圖形與 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸。

! 小考箱

() 2. 若指數函數 $f(x) = a^x$ ，則 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 。

例題 3

試比較下列各值之大小：

(1) 11^{-3} 、 11^3 、 $11^{\frac{1}{3}}$

(2) $(0.2)^{-2.5}$ 、 $(0.2)^{-3}$ 、 $(0.2)^2$

解 (1) 底數為 11，而 $11 > 1$ 且 $3 > \frac{1}{3} > -3$

$$\text{故 } 11^3 > 11^{\frac{1}{3}} > 11^{-3}$$

(2) 底數為 0.2，而 $0 < 0.2 < 1$ 且 $2 > -2.5 > -3$

$$\text{故 } (0.2)^2 < (0.2)^{-2.5} < (0.2)^{-3}$$

隨堂練習

3. 試比較下列各值之大小： $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt[3]{25}$ 、 $\sqrt[4]{125}$ 。

4-2.2 指數方程式

方程式中的未知數出現在指數部分者，通稱為指數方程式。由指數函數的圖形可知：當 $a > 1$ 時， $y = a^x$ 為嚴格增函數；當 $0 < a < 1$ 時， $y = a^x$ 為嚴格減函數。故若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $a^r = a^s$ ，則 $r = s$ 。根據此性質及指數律，就可處理指數方程式的問題。

! 小考箱

() 3. 若 $2^x = 3^x$ ，則 $x = 0$ 。

例題 4

解方程式 $5^{2x-1} = 125$ 。

解 將兩邊均化為以 5 為底，得 $5^{2x-1} = 5^3$
 令 $2x - 1 = 3$ ，得 $x = 2$

隨堂練習

4. 解方程式 $3^{2x-1} = \frac{1}{27}$ 。

例題 5

解方程式 $2^{2x} + 2^x - 6 = 0$ 。

解 將原式化為 $(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0$
 令 $2^x = y$ ，則原式為 $y^2 + y - 6 = 0$
 因式分解得 $(y + 3)(y - 2) = 0$
 得 $y = -3$ 或 $y = 2$
 但 $y = 2^x > 0$ ，故 $y = 2$
 即 $2^x = 2$ ，得 $x = 1$

隨堂練習

5. 解方程式 $3^{2x} - 3^{x+1} - 54 = 0$ 。

例題

6

已知 $\frac{1}{3} < 3^{2x-1} < 27$ ，試求 x 的範圍。

解

原式可化為 $3^{-1} < 3^{2x-1} < 3^3$

因為底數 $3 > 1$ ，所以 $-1 < 2x - 1 < 3$

即 $0 < 2x < 4$ ，得 $0 < x < 2$

隨堂練習

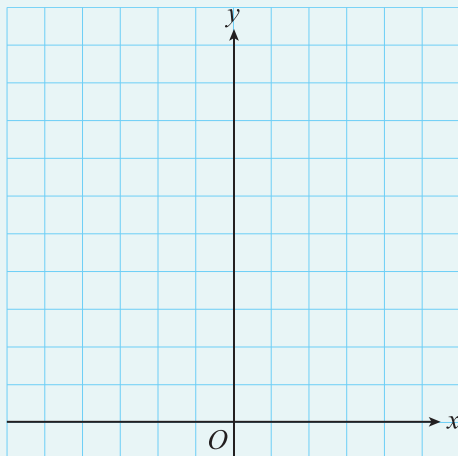
6. 已知 $(0.5)^{2x+1} > 0.125$ ，試求 x 的範圍。

習題 4-2

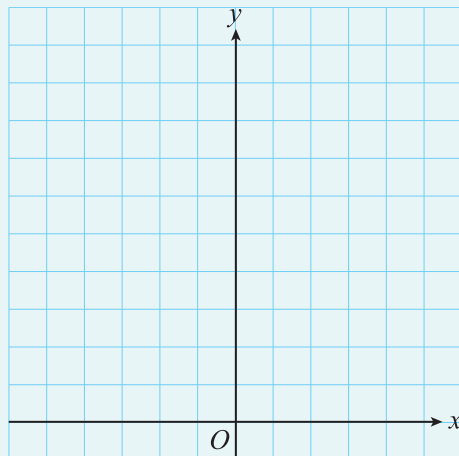


1. 試作下列指數函數的圖形：

(1) $f(x) = 5^x$



(2) $f(x) = 5^{-x}$



2. 試比較 $(\sqrt{2})^3$ 、 $(\sqrt{2})^{0.3}$ 、 $(\sqrt{2})^{-0.3}$ 、 $(\sqrt{2})^0$ 的大小。

3. 試比較 $(0.5)^3$ 、 $(0.5)^{0.3}$ 、 $(0.5)^{-0.3}$ 、 $(0.5)^0$ 的大小。

4. 解方程式 $\left(\frac{9}{2}\right)^x = \left(\frac{2}{9}\right)^5$ 。

5. 解方程式 $(2^{4-x})^x = 16$ 。

6. 解方程式 $9^x = 27^{x-1}$ 。

7. 解方程式 $4^x - 5 \times 2^x + 4 = 0$ 。

8. 已知 $(0.7)^{3x-1} < 0.49$ ，試求 x 的範圍。

4-3 對數的運算與意義

4-3.1 對數的定義

由指數定義，我們知道 $2^3 = 8$ ；但如果反過來，欲知 8 是 2 的多少次方，答案顯然是 3，也就是方程式 $2^x = 8$ 的解是 3，則我們定義以 2 為底，8 的對數是 3，記為 $\log_2 8 = 3$ 。

故由 $2^3 = 8$ ，得 $\log_2 8 = 3$

同理 $7^2 = 49$ ，得 $\log_7 49 = 2$

$10^0 = 1$ ，得 $\log_{10} 1 = 0$

一般而言，我們可將對數定義如下：

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $b > 0$ ，則滿足 $a^x = b$ 的唯一實數 x ，稱為以 a 為底數時 b 的對數，記為 $\log_a b = x$ ，且稱 b 為真數。即

若 $a^x = b$ ，則 $\log_a b = x$ ；且若 $\log_a b = x$ ，則 $a^x = b$ 。

▲ 祕訣

【指對數的轉換】

$$a^n = b$$

$$n = \log_a b$$

▲ 祕訣

【說明】

1. 因為在指數函數 $y = a^x$ 的定義中，規定底數 a 為正數，所以在對數的定義中，底數 a 也必須規定為正數，即 $a > 0$ 。而 $b = a^x > 0$ ，故真數 b 亦為正數，即 $b > 0$ 。
2. 我們知道 $1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^{100} = 1$ ，若按照對數的定義，則 $\log_1 1$ 到底為 1、2、3 或 100 呢？因為無法確定其值，故規定底數 $a \neq 1$ 。

綜合上述，我們需注意：在對數 $\log_a b$ 中，底數 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，而真數 $b > 0$ 。故如 $\log_{-3} 5$ 、 $\log_1 5$ 、 $\log_3 (-9)$ 均無意義。

例題



試求下列各式之值：

(1) $\log_3 81$

(2) $\log_2 \frac{1}{2}$

(3) $\log_5 \sqrt{5}$

解

(1) 因為 $81 = 3^4$ ，所以 $\log_3 81 = 4$

(2) 因為 $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ ，所以 $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

(3) 因為 $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ ，所以 $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$

隨堂練習

1. 試求下列各式之值：

(1) $\log_{10} 100$

(2) $\log_2 \frac{1}{16}$

(3) $\log_7 \sqrt[3]{7}$

4-3.2 對數的性質

由對數的定義與指數的性質，我們可以推論出下列對數的基本性質：

若 a 、 b 、 M 、 N 均為正實數，且 a 、 $b \neq 1$ ； r 、 s 為實數，且 $r \neq 0$ ，則

公 式

性質(一) (1) $\log_a 1 = 0$ ；(2) $\log_a a = 1$

證 明

因為 $1 = a^0$ 且 $a = a^1$

故 $\log_a 1 = 0$ 且 $\log_a a = 1$

公 式

性質(二) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

證 明

設 $\log_a M = x$, $\log_a N = y$, 則 $M = a^x$, $N = a^y$

故 $MN = a^x \times a^y = a^{x+y}$

由對數的定義可得

$\log_a(MN) = x + y = \log_a M + \log_a N$

公 式

性質(三) (1) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$; (2) $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$

證 明

(1) 設 $\log_a M = x$, $\log_a N = y$, 則 $M = a^x$, $N = a^y$

得 $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

故 $\log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$

(2) $\log_a \frac{1}{N} = \log_a 1 - \log_a N = -\log_a N$

! 小考箱

() 4. 若 x 、 y 、 z 均為正實數且 $a > 0$, $a \neq 1$, 則 $\log_a x + \log_a y - \log_a z$
 $= \log_a \frac{xy}{z}$ 。

例題

2

已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ ，試求下列各式之值：

(1) $\log_{10} 6$ (2) $\log_{10} 5$ (3) $\log_{10} \frac{1}{2}$

解 (1) $\log_{10} 6 = \log_{10} (2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$
 $= 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$

(2) $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$
 $= 1 - 0.3010 = 0.6990$

(3) $\log_{10} \frac{1}{2} = -\log_{10} 2 = -0.3010$

隨堂練習

2. 已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ ，試求下列各式之值：

(1) $\log_{10} 15$ (2) $\log_{10} \frac{3}{2}$ (3) $\log_{10} \frac{1}{3}$

例題

3

化簡下列各式：

(1) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$ (2) $\log_3 63 - \log_3 7$

解 (1) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} (2 \times 5) = \log_{10} 10 = 1$

(2) $\log_3 63 - \log_3 7 = \log_3 \left(\frac{63}{7} \right) = \log_3 9 = 2$

隨堂練習

3. 化簡下列各式：

(1) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$ (2) $\log_5 375 - \log_5 3$

公 式

性質(四) (1) $\log_{a^r} M^s = \frac{s}{r} \log_a M$; (2) $\log_{a^r} a^s = \frac{s}{r}$

證 明

(1) 設 $\log_a M = x$, 則 $M = a^x$

$$\text{得 } M^s = (a^x)^s = a^{xs} = (a^r)^{\frac{xs}{r}}$$

$$\text{故 } \log_{a^r} M^s = \frac{xs}{r} = \frac{s}{r} \log_a M$$

$$(2) \log_{a^r} a^s = \frac{s}{r} \log_a a = \frac{s}{r}$$

例
題

4

已知 $\log_a 2 = x$, $\log_a 3 = y$, 試以 x 、 y 表示下列各式：

(1) $\log_a 32$

(2) $\log_a 18$

解

(1) $\log_a 32 = \log_a 2^5 = 5 \log_a 2 = 5x$

$$\begin{aligned} (2) \log_a 18 &= \log_a (2 \times 3^2) = \log_a 2 + \log_a 3^2 \\ &= \log_a 2 + 2 \log_a 3 = x + 2y \end{aligned}$$

隨堂練習

4. 已知 $\log_a 2 = x$, $\log_a 7 = y$, 試以 x 、 y 表示 $\log_a \frac{8}{7}$ 。

例題 5

試求下列各式之值：

(1) $\log_8 16$

(2) $\log_{25} \frac{1}{5}$

解 (1) $\log_8 16 = \log_2 2^4 = \frac{4}{3}$

(2) $\log_{25} \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -\frac{1}{2}$

隨堂練習

5. 試求下列各式之值：

(1) $\log_9 \frac{1}{3}$

(2) $\log_{49} \sqrt[3]{7}$

例題 6

化簡 $2 \log_{10} 2 + \log_{10} 15 - \log_{10} 0.6$ 。

解 $2 \log_{10} 2 + \log_{10} 15 - \log_{10} 0.6$
 $= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 15 - \log_{10} 0.6$
 $= \log_{10} \left(\frac{2^2 \times 15}{0.6} \right)$
 $= \log_{10} 100 = 2$

隨堂練習

6. 化簡 $\log_3 18 + \log_3 6 - 2 \log_3 2$ 。

公 式

性質(五) (1) $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$ (換底公式) ; (2) $(\log_a b) \times (\log_b a) = 1$

證 明

(1) 設 $\log_a M = x$, 則 $M = a^x$

故 $\log_b M = \log_b a^x = x \log_b a$

得 $x = \frac{\log_b M}{\log_b a}$, 即 $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(2) 由換底公式知 :

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\text{故 } (\log_a b) \times (\log_b a) = 1$$

! 小考箱

() 5. 試問 $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$ 是否正確?

例
題

已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, 試求 $\log_2 3$ 之值。(取到小數點後第四位)

解 $\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{0.4771}{0.3010} \approx 1.5850$

隨堂練習

7. 承此例題，試求 $\log_3 2$ 之值。（取到小數點後第四位）

例題 8

試求 $(\log_3 5) \times (\log_5 9)$ 之值。

$$\begin{aligned}
 \text{解 } (\log_3 5) \times (\log_5 9) &= (\log_3 5) \times (\log_5 3^2) \\
 &= (\log_3 5) \times (2 \log_5 3) \\
 &= 2 (\log_3 5) \times (\log_5 3) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

隨堂練習

8. 試求 $(\log_2 49) \times (\log_7 2)$ 之值。

公 式

性質(六) $a^{\log_a M} = M$

證 明

設 $\log_a M = x$ ，則 $M = a^x$

故得 $a^{\log_a M} = a^x = M$

例題

9

試求下列各式之值：

(1) $11^{\log_{11} 8}$

(2) $7^{\log_7 3 - \log_7 5}$

解 (1) 由性質(六)知： $11^{\log_{11} 8} = 8$

(2) $7^{\log_7 3 - \log_7 5} = 7^{\log_7 \frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$

隨堂練習

9. 試求下列各式之值：

(1) $10^{\log_{10} 2}$

(2) $5^{\log_5 2 + \log_5 3}$

習題 4-3



1. 試求下列各式之值：

$$(1) \log_{0.3} 0.027$$

$$(2) \log_5 \frac{1}{125}$$

$$(3) \log_{32} \sqrt{2}$$

2. 已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ 、 $\log_{10} 7 = 0.8451$ ，試求下列各式之值：

$$(1) \log_{10} (1 \times 2 \times 3 \times 7) \quad (2) \log_{10} \frac{3}{5}$$

$$(3) \log_{10} 12$$

3. 化簡下列各式：

$$(1) \log_3 108 - \log_3 4$$

$$(2) \log_2 18 + \log_2 12 - 3\log_2 3$$

4. 設 $\log_{10} 2 = a$ 、 $\log_{10} 3 = b$ ，試以 a 、 b 表示下列各式：

$$(1) \log_{10} \sqrt[3]{6}$$

$$(2) \log_5 81$$

5. 試求 $(\log_2 27) \times (\log_3 4)$ 之值。

6. 試求下列各式之值：

$$(1) 5^{\log_5 8}$$

$$(2) 3^{\log_3 2 + \log_3 7}$$

4-4 對數函數及其圖形

4-4.1 對數函數的圖形

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $x > 0$, 若將 x 視為一變數, 則函數 $f(x) = \log_a x$ 稱為以 a 為底數的對數函數。現在我們利用描點法畫出其圖形, 以便討論其性質, 並和指數函數 $y = a^x$ 的圖形作比較。

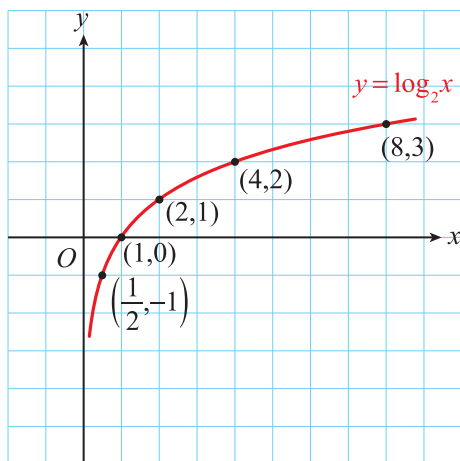
例題 1

試描繪 $y = \log_2 x$ 的圖形。

解 求出 x 與 y 的對應值, 列表如下:

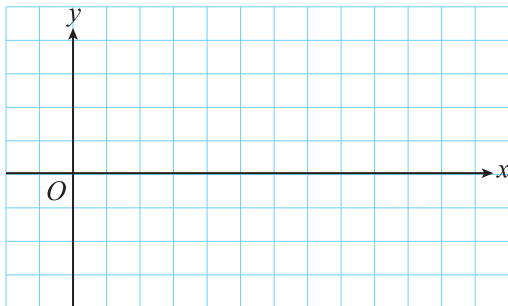
x	...	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
y	...	-1	0	1	2	3	...

由描點可得圖形如下:



隨堂練習

1. 試描繪 $y = \log_3 x$ 的圖形。



【說明】若將 $y = \log_2 x$ 與 $y = 2^x$ 的圖形畫在同一坐標平面上，如圖 4-2 所示，則我們發現它們的圖形恰好對稱於直線 $y = x$ 。

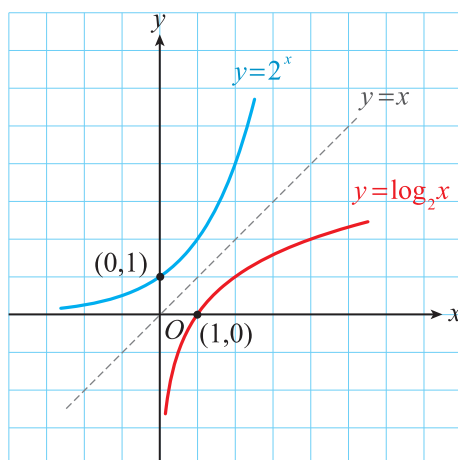


圖 4-2

例題

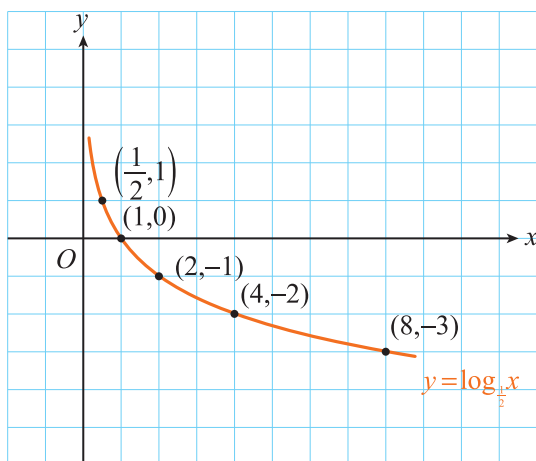
2

試描繪 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形。

解 求出 x 與 y 的對應值，列表如下：

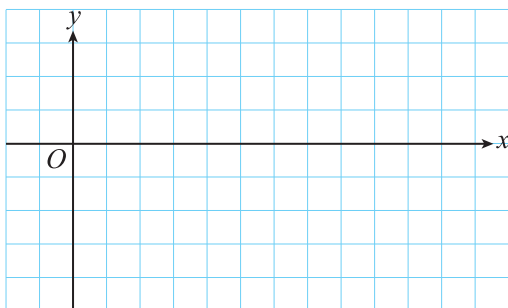
x	...	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
y	...	1	0	-1	-2	-3	...

由描點可得圖形如下：



隨堂練習

2. 試描繪 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形。



【說明】若將 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 與 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形畫在同一坐標平面上，如圖 4-3 所示，則我們發現它們的圖形也對稱於直線 $y = x$ 。

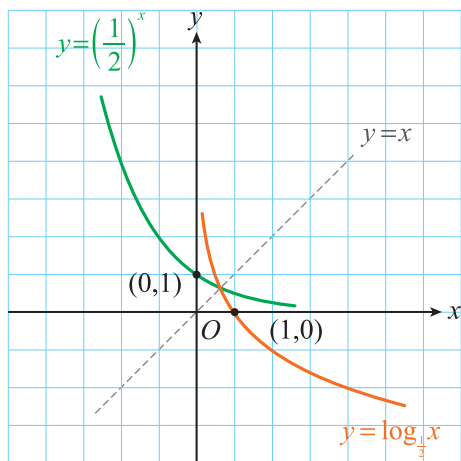
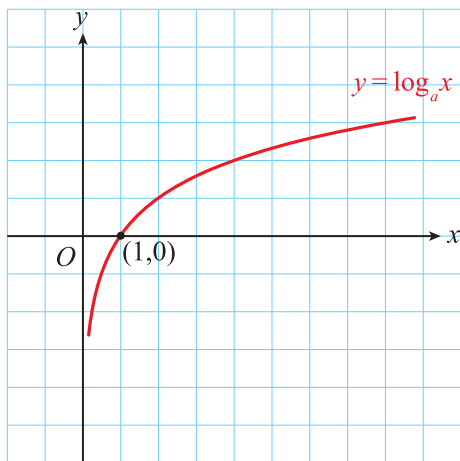
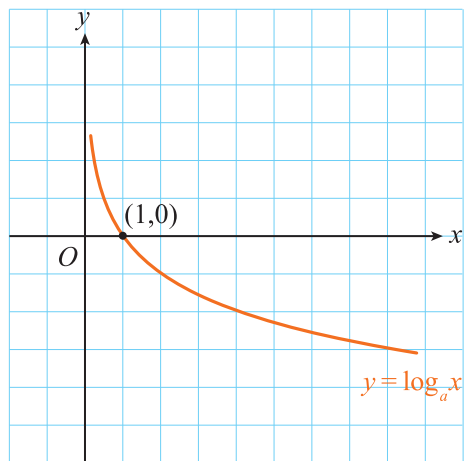


圖 4-3

由例題 1、例題 2 的圖形，我們可歸納得 $y = \log_a x$ 的圖形，如圖 4-4 所示：



(a) $a > 1$



(b) $0 < a < 1$

圖 4-4

【說明】

1. 圖形恆在 y 軸的右側，且漸漸接近於 y 軸。
2. 圖形通過點 $(1, 0)$ 。

3. 若 $a > 1$ ，則 $y = \log_a x$ 的值是隨 x 值增大而遞增；即若 $x_2 > x_1 > 0$ ，則 $\log_a x_2 > \log_a x_1$ 。此時稱函數 $y = \log_a x$ 為嚴格增函數。如圖 4-4(a) 所示。
4. 若 $0 < a < 1$ ，則 $y = \log_a x$ 的值是隨 x 值增大而遞減；即若 $x_2 > x_1 > 0$ ，則 $\log_a x_2 < \log_a x_1$ 。此時稱函數 $y = \log_a x$ 為嚴格減函數。如圖 4-4(b) 所示。
5. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則 $y = \log_a x$ 的圖形與 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 x 軸。
6. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則 $y = a^x$ 的圖形與 $y = \log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ 。

! 小考箱

- () 6. 若對數函數 $g(x) = \log_a x$ ，則 $g(x_1 \times x_2) = g(x_1) \times g(x_2)$ 。

例題 3

試比較下列各值之大小：

(1) $\log_7 5$ 、 $\log_7 \frac{1}{5}$ 、 $\log_7 0.5$ (2) $\log_{0.7} 3$ 、 $\log_{0.7} \frac{1}{3}$ 、 $\log_{0.7} 0.3$

解 (1) 因為底數 $7 > 1$ 且 $5 > 0.5 > \frac{1}{5}$

$$\text{故 } \log_7 5 > \log_7 0.5 > \log_7 \frac{1}{5}$$

(2) 因為底數 $0.7 < 1$ 且 $3 > \frac{1}{3} > 0.3$

$$\text{故 } \log_{0.7} 3 < \log_{0.7} \frac{1}{3} < \log_{0.7} 0.3$$

隨堂練習

3. 試比較 $\log_{10} \sqrt{2}$ 、 $\log_{10} 2$ 、 $\log_{10} \frac{1}{2}$ 之大小。

4-4.2 對數方程式

方程式中的未知數出現在對數的真數或底數者，通稱為對數方程式。由對數函數的圖形可知：當 $a > 1$ 時， $y = \log_a x$ 為嚴格增函數；當 $0 < a < 1$ 時， $y = \log_a x$ 為嚴格減函數。故若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $M、N > 0$ 且 $\log_a M = \log_a N$ ，則 $M = N$ 。利用此性質及對數的定義，就可解決對數方程式的問題。現以實例說明如下：

例題

4

試求下列各式之 x 值：

(1) $\log_2 x = 0$

(2) $\log_x \frac{1}{4} = 2$

解 (1) 因為 $\log_2 x = 0 = \log_2 1$ ，

故得 $x = 1$

(2) 因為 $\log_x \frac{1}{4} = 2 = \log_x x^2$ ，

所以 $x^2 = \frac{1}{4}$ 且 $x > 0$

故得 $x = \frac{1}{2}$

隨堂練習

4. 試求下列各式之 x 值：

(1) $\log_8 x = \frac{1}{3}$

(2) $\log_x 25 = -2$

例題

解方程式 $\log_{10} x + \log_{10} (x + 1) = \log_{10} 20$ 。

解 原式可化為 $\log_{10} x(x + 1) = \log_{10} 20$

則 $x(x + 1) = 20$ ，化簡得 $x^2 + x - 20 = 0$

因式分解得 $(x - 4)(x + 5) = 0$ ，故得 $x = 4$ 或 $x = -5$

因為真數 x 及 $x + 1$ 必須是正數，

所以 $x = 4$



注意 對數方程式算完後的解答，一定要驗算原式中的真數及底數部分，不合的情形要扣除。

隨堂練習

5. 解方程式 $\log_3 (x^2 + 6x + 5) - \log_3 (x + 3) = 1$ 。

例題

已知 $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > -1$ ，試求 x 的範圍。

解 先討論有意義的範圍，真數 $x - 1$ 必須大於 0，即 $x > 1$

將原式化為 $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} 2$

因為 $0 < \frac{1}{2} < 1$ ，所以 $x - 1 < 2$ ，即 $x < 3$

故得 $1 < x < 3$

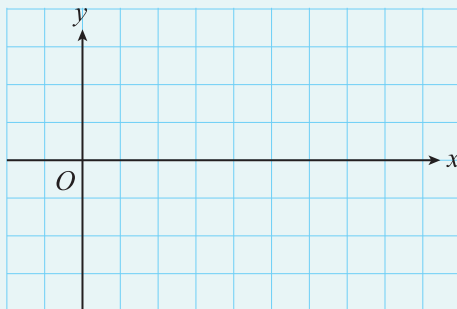
隨堂練習

6. 已知 $\log_3 (x + 2) < 2$ ，試求 x 的範圍。

習題 4-4



1. 試描繪出 $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 的圖形，並和 $y = \log_5 x$ 畫在同一坐標平面上，觀察此二者的圖形，是否對稱於 x 軸？



2. 試比較 $\log_3 5$ 、 $\log_3 10$ 、 $\log_3 15$ 的大小。
3. 試比較 $\log_{0.5} 5$ 、 $\log_{0.5} 10$ 、 $\log_{0.5} 15$ 的大小。
4. 若 $\log_x 7 = -1$ ，求 x 之值。
5. 解方程式 $\log_{25} (3x - 4) = \frac{1}{2}$ 。
6. 解方程式 $\log_{10} (x + \sqrt{6}) + \log_{10} (x - \sqrt{6}) = 1$ 。
7. 解方程式 $\log_2 x = \log_x 2$ 。
 (提示：利用 $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ ，則原式可化為 $\log_2 x = \frac{1}{\log_2 x} \Rightarrow \log_2 x = \pm 1$ 。)
8. 已知 $\log_5 (3x - 1) < 3$ ，試求 x 的範圍。

4-5 常用對數及其應用

4-5.1 常用對數表

在數字的運算上，我們常用十進位制，所以我們將以 10 為底數的對數稱為常用對數，以 $\log_{10}x$ 記之，通常簡記為 $\log x$ （即底數 10 省略不寫）。所謂常用對數表是將真數與對數的對應數值列成一個表格，以便於查索。本書只依真數為 1 到 9.99，而對數值取到小數點後面 4 位的近似值，列表於附錄中，對數表中，最左邊第一行真數 x 下方的數 10, 11, 12, $\dots$, 99，表示 1.0, 1.1, 1.2, $\dots$, 9.9； x 的小數第二位擺在最上列，而表內每一個四位數字代表介於 0 與 1 之間的一個純小數，如 8451 表示 0.8451。現在我們利用底下的例子來介紹如何使用對數表：

例題



查對數表，求下列各式的近似值：

(1) $\log 7$

(2) $\log 9.73$

解

(1) 於表中 x 行先找到「70」，再找 x 列中的「0」，則「70」的列和「0」的行所相交的數值 8451 即為所求，即 $\log 7 = 0.8451$ 。

$$y = \log x$$

x	0	1	2	3	$\dots$
10					
11					
$\vdots$					
70	8451				

(2) 方法同(1) 得 $\log 9.73 = 0.9881$ 。

$$y = \log x$$

x	0	1	2	3	...
10					
⋮					
90					
⋮					
97				9881	

隨堂練習

1. 查對數表，求下列各式的近似值：

(1) $\log 3.2$

(2) $\log 4.73$

例題 2

若 $\log x = 0.1959$ ，利用查表，求 x 之值。

解 依照例題 1 的方法，取相反的步驟。先找出數值 1959 的位置，向左作水平線，向上作垂直線，則可得真數 $x = 1.57$ 。

$$y = \log x$$

x	0	1	2	...	7
10					
⋮					
15					1959

隨堂練習

2. 若 $\log x = 0.3075$ ，利用查表，求 x 之值。

上面兩個例子所討論的，均針對真數為小數點後面 2 位數字的；但若真數小數點後有 3 位數字時，又應如何查表呢？（可用內插法，但本書不予以討論）我們可利用對數表中的表尾差予以校正。

例題 3

利用查表，求 $\log 2.783$ 之值。

解 利用例題 1 的方法，先查出 $\log 2.78 = 0.4440$ ，再由 x 為「27」的列，找出表尾差為「3」的是 5，則

$$\log 2.783 = \log 2.78 + 0.0005 = 0.4440 + 0.0005 = 0.4445。$$

$$y = \log x$$

x	0	1	2	...	8	9	表尾差			
							1	2	3	...
⋮										
27					4440				5	

隨堂練習

3. 利用查表，求 $\log 1.387$ 之值。

在日常生活中，我們也常利用電算器按出對數值，在使用電算器時，首先應參閱使用手冊，以明瞭該電算器的操作程序。

一般的電算器求對數值時，先按入真數值，再按 $\boxed{\log}$ 鍵，即可讀出對數值。例如，欲求 $\log 7$ 之值，則先按入 7，再按 $\boxed{\log}$ 鍵後，電算器會顯示 0.84509804，即得 $\log 7 = 0.84509804$ 。

讀者可自行練習，由電算器按出 $\log 13$ 及 $\log 9.73$ 的對數值四捨五入，取到小數點後第 4 位，與對數表相比較。

【註】 $\log 13 = 1.1139$ ， $\log 9.73 = 0.9881$ 。

在數的四則運算中，加減比乘除簡單，而乘法比乘方容易，除法比開方容易。而應用對數的一些基本性質，再配合查表，我們於一些計算式中可將乘、除化為加、減，乘方化為乘法，開方化為除法的方式來做，則計算將顯得更容易，時間也相對用得更少。

例題



小龍向銀行貸款 200 萬元，以年利率 3%，每年複利計算，則 20 年後，須繳納本利和共多少萬元。（由查表得 $\log 1.03 = 0.0128$ 、 $\log 1.803 = 0.2560$ ）

解 依題意：本利和 $= 200 \times (1 + 3\%)^{20} = 200 \times 1.03^{20}$

$$\text{令 } x = 1.03^{20}$$

$$\text{得 } \log x = \log 1.03^{20} = 20 \log 1.03 = 20 \times 0.0128 = 0.2560$$

$$\text{由題目可得 } \log 1.803 = 0.2560, \text{ 即 } x = 1.803$$

$$\text{故本利和} = 200 \times 1.803 = 360.6 \text{ 萬}$$

隨堂練習

4. 小玲將 10000 元存入銀行，年利率 2%，一年複利一次，求 15 年後的本利和有多少元。（查表得 $\log 1.02 = 0.0086$ ， $\log 1.346 = 0.1290$ ）

4-5.2 首數及尾數

對於任意一個正實數 x ，都可以寫成 $x = a \times 10^n$ 的形式，其中 a 滿足 $1 \leq a < 10$ ，而 n 是一個整數，我們稱 $a \times 10^n$ 為 x 的科學記號。例如：
 $168 = 1.68 \times 10^2$ ； $0.0168 = 1.68 \times 10^{-2}$ 。

前面所談的對數表 $\log x$ 的真數 x 均介於 1 到 10 之間，但若真數大於 10 或小於 1 時，又應該如何求對數值呢？

透過科學記號的表示，我們依然可求出 $\log x$ 之值。

首先我們思考下面的例子，並找出某些規則來：

$$\log 0.2 = \log(2 \times 10^{-1}) = \log 2 + \log 10^{-1} = -1 + 0.3010$$

$$\log 0.02 = \log(2 \times 10^{-2}) = \log 2 + \log 10^{-2} = -2 + 0.3010$$

$$\log 0.002 = \log(2 \times 10^{-3}) = \log 2 + \log 10^{-3} = -3 + 0.3010$$

⋮

$$\log 2 = 0.3010$$

$$\log 20 = \log(2 \times 10) = \log 2 + \log 10 = 1 + 0.3010 = 1.3010$$

$$\log 200 = \log(2 \times 10^2) = \log 2 + \log 10^2 = 2 + 0.3010 = 2.3010$$

$$\log 2000 = \log(2 \times 10^3) = \log 2 + \log 10^3 = 3 + 0.3010 = 3.3010$$

由這些例子，我們發覺這些對數值，均有相同的正小數 0.3010，不同的是整數部分。有了這個想法後，我們想對數值是否能將其整數部分及純小數部分予以分開，再探討其中的規則性？

依照此種想法，我們分別給予常用對數的整數部分及純小數部分一個特別的名稱：設 x 為大於 0 的實數，若 $\log x = n + \alpha$ ，其中 n 為整數， α 為正的純小數或 0（即 $0 \leq \alpha < 1$ ），則 n 稱為 $\log x$ 的首數， α 稱為 $\log x$ 的尾數。例如：

$$\log 36 = 1.5563 = 1 + 0.5563, \quad \text{則首數為 } 1, \quad \text{尾數為 } 0.5563$$

$$\log 200 = 2.3010 = 2 + 0.3010, \quad \text{則首數為 } 2, \quad \text{尾數為 } 0.3010$$

$$\log 0.002 = -3 + 0.3010, \quad \text{則首數為 } -3, \quad \text{尾數為 } 0.3010$$

由上面的例子中，我們不難發現真數 x 和 $\log x$ 的首數有以下的關係：

1. 若 $x > 1$ ，且 x 的整數部分為 m 位數，則 $\log x$ 的首數為 $m - 1$ 。
2. 若 $0 < x < 1$ ，且 x 的小數部分在小數點後第 m 位以前均為 0（即第 m 位開始出現不為 0 的數字），則 $\log x$ 的首數為 $-m$ 。

小考箱

- () 7. 若 $x = 1234$ ，則 $\log x$ 的首數為 3。

例題

已知 $\log 3.45 = 0.5378$ ，試求下列各對數的首數與尾數：

(1) $\log 345$

(2) $\log 0.0345$

解

$$(1) \log 345 = \log(10^2 \times 3.45) = \log 10^2 + \log 3.45 = 2 + 0.5378$$

故得 $\log 345$ 的首數為 2，尾數為 0.5378

$$(2) \log 0.0345 = \log(10^{-2} \times 3.45) = \log 10^{-2} + \log 3.45 = -2 + 0.5378$$

故得 $\log 0.0345$ 的首數為 -2，尾數為 0.5378

隨堂練習

5. 已知 $\log 7.28 = 0.8621$ ，試求下列各對數的首數與尾數：

(1) $\log 7280$

(2) $\log 0.728$

例題

6

設 $\log a = 7.3838$ ，試問：

- (1) $\log a$ 的首數及尾數 (2) a 的整數部分是幾位數

解 由 $\log a = 7.3838 = 7 + 0.3838$ ，得

(1) $\log a$ 的首數為 7，尾數為 0.3838

(2) a 的整數部分為 $7 + 1 = 8$ 位數

隨堂練習

6. 設 $\log y = -6.7653$ ，試問：

(1) $\log y$ 的首數及尾數

(2) y 自小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字

例題

7

試問 2^{-50} 表成小數時，小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

(已知 $\log 2 = 0.3010$)

解 令 $x = 2^{-50}$ ，則

$$\begin{aligned}\log x &= \log 2^{-50} = -50 \times \log 2 \\ &= -50 \times 0.3010 = -15.05 \\ &= -16 + 0.95\end{aligned}$$

得 $\log 2^{-50}$ 的首數為 -16

故 2^{-50} 自小數點後第 16 位開始出現不為 0 的數字

隨堂練習

7. 試問 3^{100} 是幾位數？(已知 $\log 3 = 0.4771$)

 習題 4-5

1. 利用查表，求下列各式之值：
 - (1) $\log 3.4$
 - (2) $\log 8.88$

2. 利用表尾差，求下列各式之值：
 - (1) $\log 7.777$
 - (2) $\log 3.838$

3. 利用查表，求下列各式中 x 之值：
 - (1) $\log x = 0.6053$
 - (2) $\log x = 0.8482$

4. 利用電算器按出下列對數值，四捨五入後取到小數點後第 4 位
 - (1) $\log 3.4$
 - (2) $\log 8.88$

5. 龍龍向銀行貸款 100 萬元，依年利率 5%，一年複利一次計算，求 20 年後須還本利和共多少萬元。

6. 已知 $\log x = 5.6990$ ，試問 $\log x$ 的首數及尾數？

7. 已知 $\log x = -5.6990$ ，試問 $\log x$ 的首數及尾數？

8. 試問 2^{20} 是幾位數？（已知 $\log 2 = 0.3010$ ）



本章彙總

4-1 重點

1. 指數的定義：

設 n 為正整數，則符號 a^n 表示 n 個 a 的連乘積。

2. 整數指數：

設 $a \neq 0$ ， n 為正整數，則

$$(1) a^0 = 1$$

$$(2) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

3. 分數指數：

若 a 為正實數，且 m 、 n 為整數， $n > 0$ ，則

$$(1) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$(2) a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

4. 實數指數的指數律：

設 a 、 b 為正實數， r 、 s 為實數，則

$$(1) a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$(2) (a^r)^s = a^{rs}$$

$$(3) a^r \times b^r = (ab)^r$$

$$(4) \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(5) \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$



4-2 重點

1. 指數函數：

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，若將任意實數 x 視為一變數，則函數 $y = f(x) = a^x$ 稱為以 a 為底數的指數函數。

2. 指數函數圖形的性質：

(1) 圖形恆在 x 軸的上方，且漸漸接近於 x 軸。

(2) 圖形通過點 $(0, 1)$ 。

(3) 當 $a > 1$ 時， $y = a^x$ 為嚴格增函數。

(4) 當 $0 < a < 1$ 時， $y = a^x$ 為嚴格減函數。

(5) 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則 $y = a^x$ 與 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸。

3. 指數方程式：

(1) 方程式中的未知數出現在指數部分者，稱為指數方程式。

(2) 求解原理：若 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 且 $a^r = a^s$ ，則 $r = s$ 。

4-3 重點

1. 對數的定義：

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $b > 0$ ，則滿足 $a^x = b$ 的唯一實數 x ，稱為以 a 為底數之 b 的對數，記為 $\log_a b = x$ ，且稱 b 為真數。



本章彙總

2. 對數的性質：

設 a 、 b 、 M 、 N 均為正實數，且 a 、 $b \neq 1$ ； r 、 s 為實數，且 $r \neq 0$ ，則

$$(1) \log_a 1 = 0; \log_a a = 1$$

$$(2) \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$(3) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N; \log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

$$(4) \log_{a^r} M^s = \frac{s}{r} \log_a M; \log_{a^r} a^s = \frac{s}{r}$$

$$(5) \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \text{ (換底公式)}; (\log_a b) \times (\log_b a) = 1$$

4-4 重點

1. 對數函數：

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 、 $x > 0$ ，若將 x 視為一變數，則函數 $y = f(x) = \log_a x$ 稱為以 a 為底數的對數函數。

2. 對數函數圖形的性質：

(1) 圖形恆在 y 軸的右側，且漸漸接近於 y 軸。

(2) 圖形通過點 $(1, 0)$ 。

(3) 當 $a > 1$ 時， $y = \log_a x$ 為嚴格增函數。

(4) 當 $0 < a < 1$ 時， $y = \log_a x$ 為嚴格減函數。

(5) 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則 $y = \log_a x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 x 軸。

(6) 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ 。

3. 對數方程式：

(1) 方程式中的未知數出現在對數中的真數或底數者，通稱為對數方程式。

(2) 求解原理：若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， M 、 $N > 0$ 且 $\log_a M = \log_a N$ ，則 $M = N$ 。

**4-5 重點**

1. 常用對數：

以 10 為底數的對數，稱為常用對數，簡記為 $\log x$ 。

2. 熟知常用對數表的查法及表尾差法的使用。

3. 首數、尾數：

若 $\log x = n + \alpha$ ，其中 n 為整數， $0 \leq \alpha < 1$ ，則稱 n 為首數， α 為尾數。

(1) 若 $x > 1$ ，且 x 的整數部分為 m 位數，則 $n = m - 1$ 。

(2) 若 $0 < x < 1$ ，且 x 自小數點後第 m 位開始出現不為 0 的數字，則 $n = -m$ 。



自我評量

() 1. 若 $(2^m)^2 = 16$ 且 $3^{n-m} = \frac{1}{27}$, 則 $m+n =$ (A) 5 (B) 1 (C) -5 (D) -1。

【4-1】

() 2. $(0.0625)^{-1.5} =$ (A) 4 (B) 16 (C) 64 (D) 128。

【4-1】

() 3. 設 $f(x) = 3^x$, 若 $f(a) = 1$ 且 $f(b) = 2$, 則 $f(a+b) =$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

【4-1】

() 4. 設 $a = \sqrt[3]{5}$ 、 $b = \sqrt[4]{125}$ 、 $c = \sqrt[3]{25}$, 則 (A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$

(C) $b > c > a$ (D) $b > a > c$ 。

【4-2】

() 5. 設 $4^{x+2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x-6}$, 則 x 為 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

【4-2】

() 6. 解方程式 $16^x - 4^x - 2 = 0$, 得 x 為 (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1。 【4-2】

() 7. 下列何者有意義? (A) $\log_{-3} 2$ (B) $\log_{\sqrt{2}} 0$ (C) $\log(-10)$ (D) $\log_{\pi} \pi$ 。

【4-3】

() 8. $2 \log_4 3 + \log_4 20 - \log_4 45 =$ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

【4-3】

() 9. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若 $\log_a 3 + \log_a 7 = 3$, 則 $a =$ (A) $\sqrt[3]{21}$ (B) $\sqrt{21}$ (C) 3

(D) 7。

【4-3】



- () 10. 若已知 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ ，則 $\log \frac{1}{12} =$ (A) 0.7781
(B) -0.7781 (C) 1.0791 (D) -1.0791。 【4-3】
- () 11. 若 m 、 n 為大於 1 的實數，且 $\frac{\log_2 m}{\log_2 n} = 3$ ，則 $\log_m n =$ (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{2}{3}$ (D) 3。 【4-3】
- () 12. $y = 5^x$ 的圖形和 $y = \log_5 x$ 的圖形必對稱於 (A) x 軸 (B) y 軸 (C) 原點
(D) 直線 $y = x$ 。 【4-4】
- () 13. 若 $a = 7^{\log_7 4}$ 、 $b = 9^{\frac{1}{2}}$ 、 $c = \log_2 10$ ，則 (A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$
(C) $c > a > b$ (D) $c > b > a$ 。 【4-4】
- () 14. 設方程式 $\log_2 (x^2 - 5x + 12) = 1 + \log_2 x$ 的根為 a 、 b ，則 $a + b =$
(A) -5 (B) 5 (C) -7 (D) 7。 【4-4】
- () 15. 試問滿足不等式 $\log_{\frac{1}{3}} (x + 1) > -1$ 的整數有多少個？ (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4。 【4-4】
- () 16. 若已知 $\log 0.031 = -1.5086$ ，則 $\log 31000 =$ (A) 31.4914 (B) 5.4914
(C) 4.4914 (D) 4.5086。 【4-5】
- () 17. 若 $\log 3 = 0.4771$ ，則 $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ 表成小數時，小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？ (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13。 【4-5】