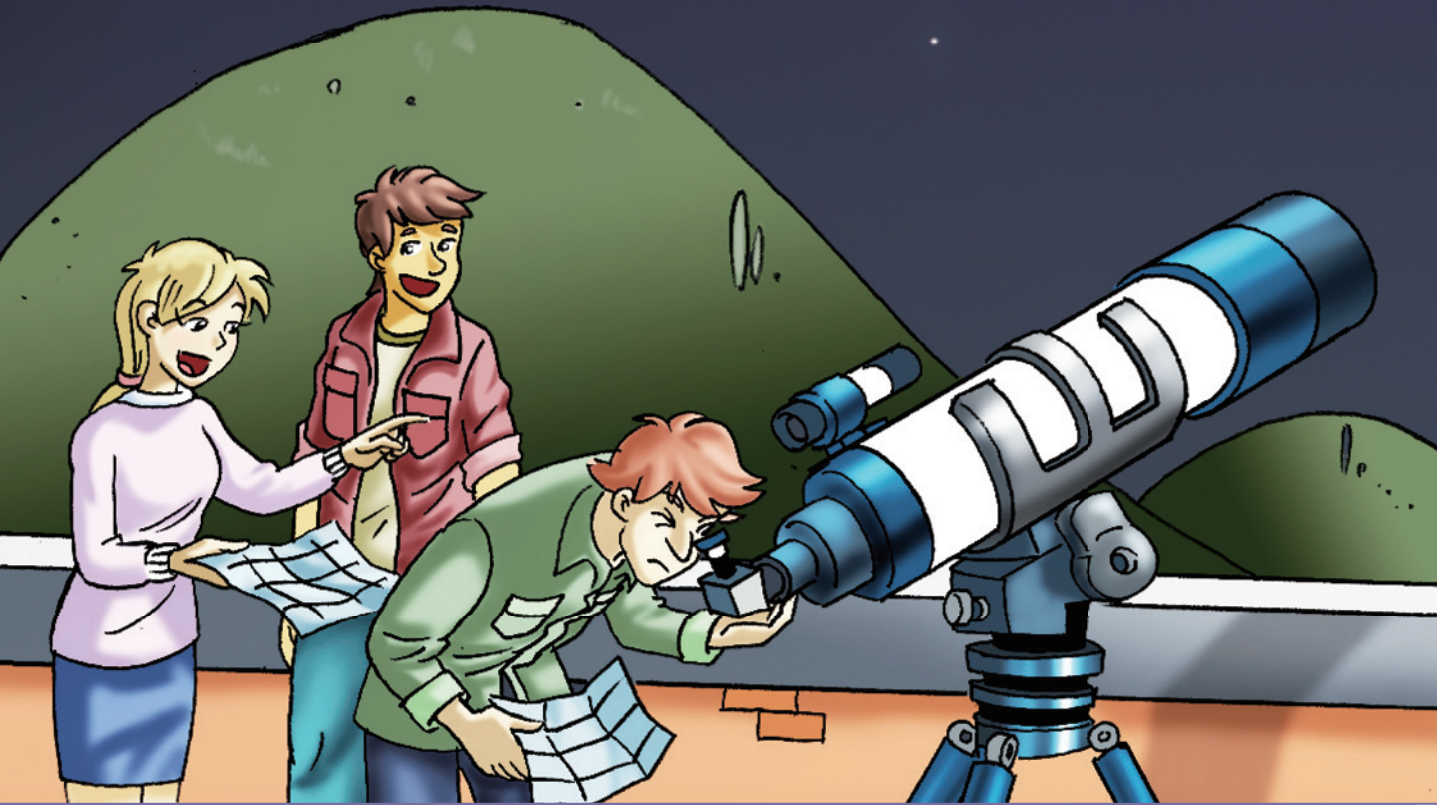


三角函數是測量天體距離的常用工具之一



第 1 章

三角函數的應用



《數學放輕鬆》

設 α 、 β 為兩個角，透過和差角公式，我們可以將 $\alpha+\beta$ 、 $\alpha-\beta$ 的三角函數值用 α 、 β 的三角函數值表示出來，這是三角學上的一個重要工具。

另外，解三角形的問題就是藉由三角形的已知角和邊，去求未知的角和邊。在探討三角形的邊角關係中，除了利用國中所學過的 *SAS*、*ASA*、*SSS* 等性質及畢氏定理外，正弦定理和餘弦定理是兩個重要而且有效的工具。解三角形邊角關係的目的就是用來處理三角測量的問題。

1-1

和差角公式與二倍角公式

1-1.1 和差角公式

當 α 、 β 兩個角的三角函數值皆已知時，如何利用它來求 $\alpha+\beta$ 與 $\alpha-\beta$ 的三角函數值，是本節所要討論的。

首先我們來探討 $\cos(\alpha-\beta)$ 的求法，由於 $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ，亦即 $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha)$ ，在不失一般性的情況下，我們設 $\beta<\alpha$ 。在直角坐標平面上以原點 O 為圓心的單位圓（即半徑為 1 的圓），與標準位置角 α 、 β 、 $\alpha-\beta$ 的終邊分別交於點 A 、 B 、 C ，根據任意角三角函數的定義得知，其坐標分別為 $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 、 $B(\cos\beta, \sin\beta)$ 、 $C(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$ ，又 D 點的坐標為 $D(1, 0)$ ，如圖 1-1 所示。

因為 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=1$ ，又 $\angle AOB=\angle COD=\alpha-\beta$ ，當 $\alpha-\beta\neq 180^\circ$ 時，由 SAS 性質知： $\triangle OAB$ 與 $\triangle OCD$ 全等，故得 $\overline{AB}=\overline{CD}$ ；當 $\alpha-\beta=180^\circ$ 時， \overline{AB} 與 \overline{CD} 的長度均為 2，如圖 1-2 所示，同樣可得 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 。

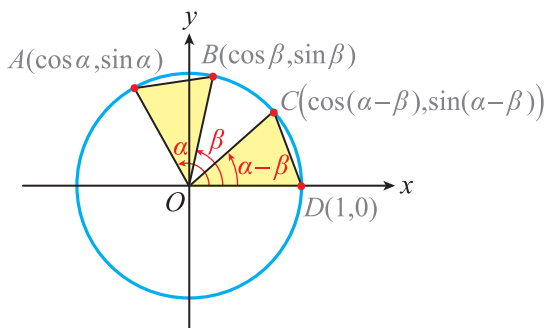


圖 1-1

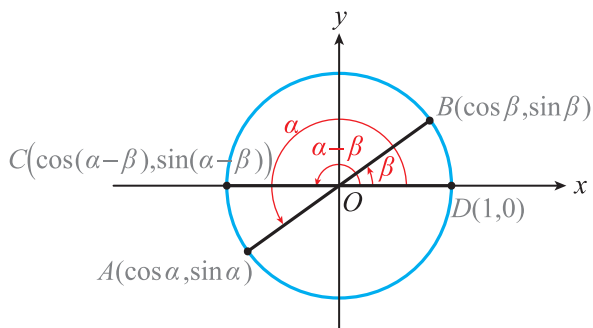


圖 1-2

由距離公式知：

$$\overline{AB} = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2},$$

$$\overline{CD} = \sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha - \beta) - 0]^2},$$

故得

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha - \beta) - 0]^2,$$

整理得

$$2 - 2\cos \alpha \cos \beta - 2\sin \alpha \sin \beta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta),$$

亦即 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ 。

利用上式，我們可得

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] \\ &= \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha (-\sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

餘弦函數的和差角公式

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

! 小考箱

() 1. $\cos 3^\circ = \cos 2^\circ \cos 1^\circ + \sin 2^\circ \sin 1^\circ$ 。

例題

試求 $\cos 75^\circ$ 的值。

解
$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

隨堂練習

試求 $\cos 15^\circ$ 的值。

例題

2

設 θ 為任意角度，試求

$\cos(85^\circ + \theta)\cos(25^\circ + \theta) + \sin(85^\circ + \theta)\sin(25^\circ + \theta)$ 的值。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \cos[(85^\circ + \theta) - (25^\circ + \theta)] \\ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}。 \end{aligned}$$

隨堂練習

試求 $\cos 67^\circ \cos 23^\circ - \sin 67^\circ \sin 23^\circ$ 的值。

接著，利用 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ 導出正弦函數的和差角公式。

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta。 \end{aligned}$$

利用上式的結果，我們可得

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin[\alpha + (-\beta)] \\ &= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta。 \end{aligned}$$

正弦函數的和差角公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

例題

3

試求 $\sin 105^\circ$ 的值。

$$\begin{aligned} \text{解 } \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}。 \end{aligned}$$

隨堂練習

試求 $\sin 75^\circ$ 的值。

例題

4

設 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ，又知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ ，試求 $\sin(\alpha - \beta)$ 與 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值。

$$\text{解 } \text{因為 } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}，$$

故知 $\cos \alpha < 0$ ， $\sin \beta < 0$ ，

$$\text{則 } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}，$$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}，$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{63}{65}， \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{56}{65}。 \end{aligned}$$

隨堂練習

設 α 、 β 均為銳角，若 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ， $\cos \beta = \frac{4}{5}$ ，試求 $\sin(\alpha + \beta)$ 與 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值。

現在，我們利用正、餘弦函數的和角公式來導出正切函數的和角公式如下：

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \quad (\text{分子、分母同除以 } \cos \alpha \cos \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.\end{aligned}$$

再利用上式的結果，我們可推得

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \tan[\alpha + (-\beta)] \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.\end{aligned}$$

正切函數的和差角公式

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

例題

試求 $\frac{\tan 174^\circ + \tan 51^\circ}{1 - \tan 174^\circ \tan 51^\circ}$ 的值。

解 由正切函數的和角公式知：

$$\begin{aligned}\frac{\tan 174^\circ + \tan 51^\circ}{1 - \tan 174^\circ \tan 51^\circ} &= \tan(174^\circ + 51^\circ) = \tan 225^\circ \\ &= \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1.\end{aligned}$$

隨堂練習

試求 $\frac{\tan 230^\circ - \tan 110^\circ}{1 + \tan 230^\circ \tan 110^\circ}$ 的值。

例題

設 α 、 β 均為銳角，若 $\tan \alpha = 2$ ， $\tan \beta = 3$ ，試求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值，並求出 $\alpha + \beta$ 。

解 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \times 3} = -1,$

又 α 、 β 均為銳角，亦即 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ， $0^\circ < \beta < 90^\circ$ ，

故得 $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$ ，

但是 $\tan(\alpha + \beta) = -1 < 0$ ，

即 $\alpha + \beta$ 為第二象限角，

所以 $\alpha + \beta = 135^\circ$ 。

隨堂練習

設 α 、 β 均為銳角，若 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ， $\tan \beta = \frac{1}{3}$ ，試求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值，並求出 $\alpha + \beta$ 。

1-1.2 二倍角公式

利用三角函數的和角公式，我們可以導出二倍角公式如下：

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin\theta \cos\theta + \cos\theta \sin\theta = 2\sin\theta \cos\theta。$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos(\theta + \theta) = \cos\theta \cos\theta - \sin\theta \sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 2(1 - \sin^2\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2\theta。 \end{aligned}$$

$$\tan 2\theta = \tan(\theta + \theta) = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta \tan\theta} = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}。$$

二倍角公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

例題

設 θ 為第四象限角，若 $\cos\theta = \frac{4}{5}$ ，試求 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 的值。

解 因為 θ 為第四象限角，故知 $\sin\theta < 0$ ，

$$\text{即 } \sin\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}，$$

$$\text{所以 } \sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta = 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{4}{5} = -\frac{24}{25}，$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}。$$

隨堂練習

設 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，若 $\sin\theta = \frac{5}{13}$ ，試求 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 的值。

例題

8

已知 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{2}{3}$ ，試求 $\sin 2\theta$ 的值。

解 將 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{2}{3}$ 兩邊平方，得

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{4}{9},$$

因為 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ， $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ ，

故得 $1 + \sin 2\theta = \frac{4}{9}$ ，

所以 $\sin 2\theta = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9}$ 。

隨堂練習

已知 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$ ，試求 $\sin 2\theta$ 的值。

例題

9

試求 $\sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}$ 的值。

解 利用 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ 。

$$\begin{aligned} & \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{1}{2} \left(2\sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \right) \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{1}{4} \left(2\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

隨堂練習

試求 $\sin 7.5^\circ \cos 7.5^\circ \cos 15^\circ$ 的值。

1-1.3 $a\sin\theta + b\cos\theta$ 的極值

利用和差角公式，我們可以將 $a\sin\theta + b\cos\theta$ 化成 $r\sin(\theta + \alpha)$ 的形式。

設 a 、 b 均不為 0，則

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\theta \right)。$$

令 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，

由任意角三角函數的定義知（如圖 1-3 所示）：

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{r} = \cos\alpha，$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{r} = \sin\alpha，$$

$$\begin{aligned} \text{故得 } a\sin\theta + b\cos\theta &= r \left(\frac{a}{r} \sin\theta + \frac{b}{r} \cos\theta \right) \\ &= r(\sin\theta \cos\alpha + \cos\theta \sin\alpha) = r\sin(\theta + \alpha)。 \end{aligned}$$

因為 $-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1$ ，

故得 $-r \leq r\sin(\theta + \alpha) \leq r$ ，

亦即 $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a\sin\theta + b\cos\theta \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ 。

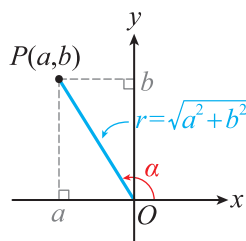


圖 1-3

 $a\sin\theta + b\cos\theta$ 的極值

設 a 、 b 均不為 0， θ 為任意角度，則

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a\sin\theta + b\cos\theta \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

例題

10

設 $f(\theta) = 4\sin\theta - 3\cos\theta + 5$ ，試求 $f(\theta)$ 的最大值及最小值。

解 因為 $-\sqrt{4^2 + (-3)^2} \leq 4\sin\theta - 3\cos\theta \leq \sqrt{4^2 + (-3)^2}$ ，

故得 $-5 \leq 4\sin\theta - 3\cos\theta \leq 5$ ，

則 $(-5) + 5 \leq 4\sin\theta - 3\cos\theta + 5 \leq 5 + 5$ ，

亦即 $0 \leq f(\theta) \leq 10$ ，

所以 $f(\theta)$ 的最大值為 10，最小值為 0。

隨堂練習

設 $f(\theta) = 5\sin\theta + 12\cos\theta - 7$ ，試求 $f(\theta)$ 的最大值及最小值。

例題

11

設 $k > 0$ ， θ 為任意角度，若 $f(\theta) = k\sin\theta + 8\cos\theta$ 的最大值為 17，試求 k 值。

解 因為 $-\sqrt{k^2+8^2} \leq k\sin\theta + 8\cos\theta \leq \sqrt{k^2+8^2}$ ，

又 $f(\theta) = k\sin\theta + 8\cos\theta$ 的最大值為 17，

故得 $\sqrt{k^2+8^2} = 17$ ，

亦即 $k^2 + 64 = 289$ ，得 $k^2 = 225$ ，

但 $k > 0$ ，所以 $k = 15$ 。

隨堂練習

設 $k > 0$ ， θ 為任意角度，若 $f(\theta) = 3\sin\theta + k\cos\theta$ 的最小值為 $-3\sqrt{5}$ ，試求 k 值。

習題 1-1



- 試求下列各三角函數值：
 - $\sin 15^\circ$
 - $\cos 105^\circ$
 - $\tan 75^\circ$
- 設 α 、 β 均為銳角，若 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\sin \beta = \frac{7}{25}$ ，試求 $\sin(\alpha - \beta)$ 的值。
- 設 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ， $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ，又知 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， $\cos \beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ，試求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值與 $\alpha + \beta$ 。
- 設 $\tan \alpha$ 、 $\tan \beta$ 為方程式 $x^2 - 8x + 3 = 0$ 之二根，試求：
 - $\tan(\alpha + \beta)$
 - $\cos^2(\alpha + \beta)$
- 若 $\frac{\sin 2\theta}{\cos \theta} = \frac{2}{3}$ ，試求 $\cos 2\theta$ 的值。
- 設 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ，且 $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ ，試求 $\cos 2\theta - \sin 2\theta$ 的值。
- 已知 θ 為第三象限角，若 $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$ ，試求 $\sin \theta + \cos \theta$ 的值。
- 設 $f(\theta) = 3\sqrt{5} \sin \theta + 6\cos \theta + 4$ ，試求 $f(\theta)$ 的最大值及最小值。

* 1-2 正弦與餘弦定理

1-2.1 正弦定理

在 $\triangle ABC$ 中，我們常以 a 、 b 、 c 分別表示 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長。由於三角形面積公式有助於正弦定理的證明，因此我們先介紹如下：

三角形面積公式

$$\text{設 } \Delta \text{ 表示 } \triangle ABC \text{ 的面積，則 } \Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

【說明】 $\triangle ABC$ 依 $\angle A$ 為銳角、直角或鈍角，如圖 1-4 所示，有三種情形：

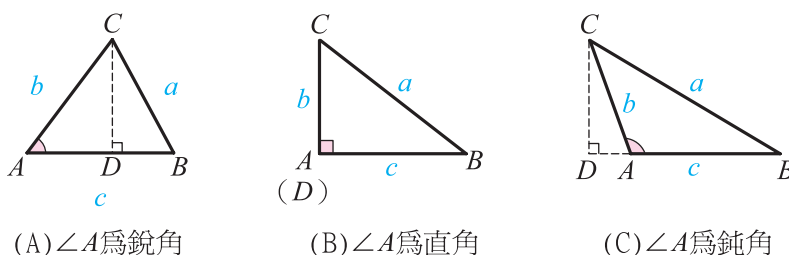


圖 1-4

不管哪一種情形，均可自 C 點作 \overline{AB} 邊上的高 \overline{CD} （當 $\angle A$ 為直角時， $\overline{CD} = \overline{CA}$ ），則 $\overline{CD} = b \sin A$ ，

$$\text{所以 } \Delta = \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{CD} = \frac{1}{2} c \times (b \sin A) = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

$$\text{同理可得 } \Delta = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

特別
說明

在圖 1-4(C) 中， $\overline{CD} = b \sin(180^\circ - A) = b \sin A$ 。

例題

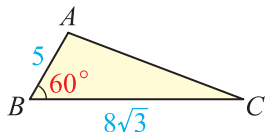
1

$\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BC}=8\sqrt{3}$ ， $\angle B=60^\circ$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積。

解 $\overline{AB}=c=5$ ， $\overline{BC}=a=8\sqrt{3}$ ，

由三角形面積公式知：

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2} c a \sin B = \frac{1}{2} \times 5 \times 8\sqrt{3} \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 8\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \text{ (平方單位)}.\end{aligned}$$



隨堂練習

已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5\sqrt{2}$ ， $\overline{AC}=10$ ， $\angle A=\frac{\pi}{4}$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積。

例題

2

$\triangle ABC$ 中， $\angle A=120^\circ$ ， $\overline{AB}=8$ ， $\overline{AC}=12$ ， $\angle A$ 的內角平分線交 \overline{BC} 於 D ，試求 \overline{AD} 的長度。

解 利用三角形面積公式： $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$ 。
設 \overline{AD} 的長度為 t ，

如右圖所示：

$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle ACD$ 面積 + $\triangle ABD$ 面積，

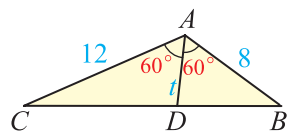
$$\text{即 } \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{AD} \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin 60^\circ,$$

$$\text{但是 } \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } \overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AC} \times \overline{AD} + \overline{AB} \times \overline{AD},$$

$$\text{即 } 8 \times 12 = 12 \times t + 8 \times t, \text{ 化簡得 } 20t = 96, \text{ 得 } t = \frac{96}{20} = \frac{24}{5},$$

故得 \overline{AD} 的長度為 $\frac{24}{5}$ 。



隨堂練習

$\triangle ABC$ 中， $\angle A=60^\circ$ ， $\overline{AB}=4$ ， $\overline{AC}=3$ ， $\angle A$ 的內角平分線交 \overline{BC} 於 D ，試求 \overline{AD} 的長度。

由三角形面積公式可得

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C。$$

將上式同時除以 $\frac{1}{2}abc$ ，得

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}，$$

即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。

因為三角形的內角至少有一個是銳角，在不失一般性的情況下，我們考慮 $\angle A$ 為銳角的 $\triangle ABC$ ，設 R 為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑， O 為外接圓的圓心，如圖 1-5 所示。

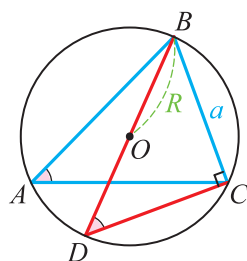
作直徑 \overline{BD} ，並連接 \overline{CD} 。因為 $\angle A$ 和 $\angle D$ 對同弧 \widehat{BC} ，所以 $\angle A = \angle D$ ，又 \overline{BD} 為直徑，使得 $\angle BCD = 90^\circ$ 。

在 $\triangle BCD$ 中，

$$\sin D = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{a}{2R}。$$

又 $\angle A = \angle D$ ，故得 $\sin A = \frac{a}{2R}$ ，亦即 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 。

因此，我們可得三角形的正弦定理如下：



▲ 圖 1-5

正弦定理

設 R 為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑，則 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 。

特別
說明

由正弦定理得知： $\triangle ABC$ 中， $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ 。

! 小考箱

() 2. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 10，若 $\angle A=30^\circ$ ，則 $\angle A$ 的對邊長度為 10。

例題

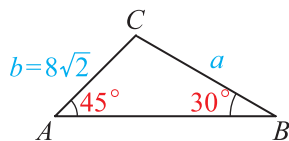
3

$\triangle ABC$ 中，已知 $b=8\sqrt{2}$ ， $\angle A=45^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ，試求 a 。

解 由正弦定理知： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，

$$\text{即 } \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{8\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}，$$

$$\begin{aligned} \text{故得 } a &= \frac{8\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} \times \sin 45^\circ \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16。 \end{aligned}$$



隨堂練習

$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=60^\circ$ ， $a=6$ ， $b=2\sqrt{6}$ ，試求 $\angle B$ 及 $\angle C$ 。

例題

4

$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=75^\circ$ ， $\angle C=45^\circ$ ，試求 $a:b:c$ 。

解 因為 $\triangle ABC$ 的內角和為 180° ，故得
 $\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C=180^\circ-75^\circ-45^\circ=60^\circ$ ，

由正弦定理知：

$$\begin{aligned} a:b:c &= \sin A : \sin B : \sin C \\ &= \sin 60^\circ : \sin 75^\circ : \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2\sqrt{3} : (\sqrt{6} + \sqrt{2}) : 2\sqrt{2} \\ &= \sqrt{6} : (\sqrt{3} + 1) : 2。 \end{aligned}$$

隨堂練習

$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=60^\circ$ ， $\angle C=90^\circ$ ，試求 $a:b:c$ 。

例題

設 $\triangle ABC$ 中， $\sin A = \frac{2}{3}$ ， $\overline{BC} = 8$ ，試求 $\triangle ABC$ 的外接圓面積。

解 $a = \overline{BC} = 8$ ， $\sin A = \frac{2}{3}$ ，

由 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ ，即 $\frac{8}{\frac{2}{3}} = 2R$ ，得 $R = 6$ ，

故得 $\pi R^2 = \pi \times 6^2 = 36\pi$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的外接圓面積為 36π (平方單位)。

隨堂練習

$\triangle ABC$ 中， $\angle A=64^\circ$ ， $\angle C=56^\circ$ ，又 $\overline{AC} = 8\sqrt{3}$ ，試求 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。

1-2.2 餘弦定理

當三角形的兩邊及其夾角確定時，由 *SAS* 性質知，此夾角所對的邊長也跟著確定。餘弦定理就是把夾角所對的邊長，用夾角兩邊的邊長及該夾角的餘弦所表示出的關係式，現在我們討論說明如下：

餘弦定理

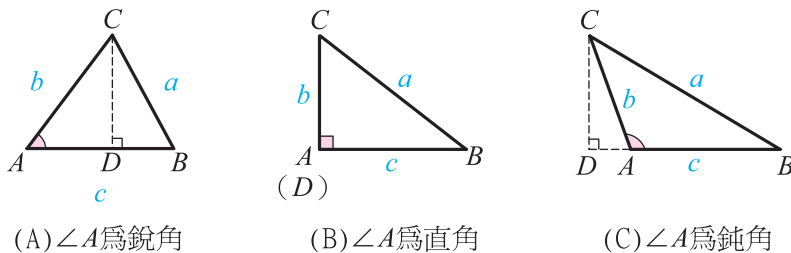
在 $\triangle ABC$ 中，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

【說明】 $\triangle ABC$ 依 $\angle A$ 為銳角、直角或鈍角，如圖 1-6 所示，有三種情形：



● 圖 1-6

不管哪一種情形，均可自 C 點作 \overline{AB} 邊上的高 \overline{CD} 。

在圖 (A) 中， $\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = c - b\cos A$ ，

$$\overline{CD} = b\sin A。$$

在圖 (B) 中，因為 $\overline{CD} = \overline{CA}$ ，且 $\angle A = 90^\circ$ ，故得

$$\overline{BD} = \overline{AB} = c = c - b\cos A，$$

$$\overline{CD} = \overline{CA} = b = b\sin A。$$

在圖 (C) 中， $\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AD} = c + b\cos(180^\circ - A) = c - b\cos A$ ，

$$\overline{CD} = b\sin(180^\circ - A) = b\sin A。$$

因此，任何一種情形均有 $\overline{BD} = c - b\cos A$ ， $\overline{CD} = b\sin A$ 。

在直角 $\triangle BCD$ 中，由畢氏定理知：

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \\ &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bccos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bccos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bccos A。 \end{aligned}$$

同理可得 $b^2 = c^2 + a^2 - 2cacos B$ ， $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos C$ 。



$\triangle ABC$ 中，當 $\angle A$ 為直角時， $\cos A = 0$ ，此時，餘弦定理中的 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$ ，就變成畢氏定理的 $a^2 = b^2 + c^2$ 。由此可知：畢氏定理是餘弦定理的特殊情況，而餘弦定理則為畢氏定理的推廣。

! 小考箱

() 3. 設 a 、 b 、 c 為 $\triangle ABC$ 的三邊長，若 $\angle A$ 為銳角，則 $a^2 > b^2 + c^2$ 。

例題

6

$\triangle ABC$ 中， $a=4$ ， $c=5$ ， $\angle B=60^\circ$ ，試求 b 。

解 由餘弦定理知：

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2cac\cos B \\ &= 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos 60^\circ \\ &= 25 + 16 - 40 \times \frac{1}{2} \\ &= 21, \end{aligned}$$

故得 $b = \sqrt{21}$ 。

隨堂練習

$\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6\sqrt{2}$ ， $\overline{AC} = 8$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，試求 \overline{BC} 長。

在 $\triangle ABC$ 中，因為 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bcc\cos A$ ，

則 $2bcc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ ，即 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 。

因此，我們也可以把餘弦定理寫成

餘弦定理

在 $\triangle ABC$ 中，

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

例題

7

已知 $\triangle ABC$ 中， $a=3$ ， $b=5$ ， $c=7$ ，試求 $\angle C$ 。

解 由餘弦定理知：

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} \\ &= \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故得 $\angle C = 120^\circ$ 。

隨堂練習

$\triangle ABC$ 中，若 $a=2$ ， $b=3$ ， $c=4$ ，試求 $\cos A$ 的值。

例題

8

已知 $\triangle ABC$ 中， $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$ ，試求 $\cos A$ 的值。

解 因為 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ ，

又知 $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$ ，

即 $a : b : c = 4 : 5 : 6$ ，

故設 $a=4k$ ， $b=5k$ ， $c=6k$ （其中 k 為正數），

因此可得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5k)^2 + (6k)^2 - (4k)^2}{2 \times 5k \times 6k} = \frac{45k^2}{60k^2} = \frac{3}{4}。$$

隨堂練習

已知 $\triangle ABC$ 中， $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 7 : 8$ ，試求 $\angle B$ 。

例題

9

$\triangle ABC$ 中，若 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$ ，試求 $\angle C$ 。

解 已知 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$ ，

$$\text{則 } (a+b)^2 - c^2 = 3ab,$$

$$\text{展開得 } a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 3ab,$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 - c^2 = ab,$$

$$\text{又 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2},$$

故得 $\angle C = 60^\circ$ 。

隨堂練習

在 $\triangle ABC$ 中， $a^2 - (b-c)^2 = (2 - \sqrt{3})bc$ ，試求 $\angle A$ 。

1-2.3 海龍公式

利用 1-2.1 節中的三角形面積公式及餘弦定理，我們可以導出只用三個邊長來表示的三角形面積公式，這就是著名的海龍公式： $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ （即 s 為三角形周長之半），它是由古希臘數學家海龍

（Heron of Alexandria，西元 10 ~ 75 年）利用平面幾何知識導出的。

由三角形面積公式知， $\triangle ABC$ 的面積

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

$$\text{則 } \Delta^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 A = \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2 A) = \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 + \cos A)(1 - \cos A).$$

$$\text{由餘弦定理知 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\begin{aligned} \text{故得 } 1 + \cos A &= 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}, \end{aligned}$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}。$$

$$\text{即 } \Delta^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \times \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} \times \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$= \frac{1}{16} (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)。$$

令 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (即三角形周長之半), 則

$$a+b+c=2s, \quad b+c-a=2(s-a),$$

$$c+a-b=2(s-b), \quad a+b-c=2(s-c)。$$

故得 $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$,

$$\text{即 } \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

海龍公式 (Heron 公式)

$\triangle ABC$ 中, 設 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, 則 $\triangle ABC$ 的面積

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

例題

10

已知 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=7$, 試求 $\triangle ABC$ 的面積。

解 $a = \overline{BC} = 8$, $b = \overline{CA} = 7$, $c = \overline{AB} = 9$,

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{8+7+9}{2} = 12,$$

由海龍公式知:

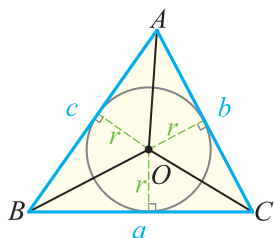
$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ 的面積} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{12(12-8)(12-7)(12-9)} \\ &= \sqrt{720} = 12\sqrt{5} \text{ (平方單位)}. \end{aligned}$$

隨堂練習

$\triangle ABC$ 中, $\overline{AB}=13$, $\overline{BC}=14$, $\overline{CA}=15$, 試求 $\triangle ABC$ 的面積。

接著，我們再介紹兩個與三角形的內切圓半徑及外接圓半徑有關的面積公式。

設 r 為 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑，又內切圓的圓心為 O ，如圖 1-7 所示。



▲ 圖 1-7

$$\begin{aligned}\triangle ABC \text{ 的面積} &= \triangle OBC \text{ 的面積} + \triangle OCA \text{ 的面積} + \triangle OAB \text{ 的面積} \\ &= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr \\ &= \frac{1}{2} r(a+b+c) \\ &= rs \text{ (因為 } s = \frac{a+b+c}{2} \text{)}.\end{aligned}$$

另外，若 R 為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑，由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ ，故得

$$\sin A = \frac{a}{2R}.$$

再由面積公式知， $\triangle ABC$ 的面積

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} bc \times \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

整理敘述如下：

公 式

設 r 、 R 分別為 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑與外接圓半徑，則 $\triangle ABC$ 的面積

$$\Delta = rs = \frac{abc}{4R} \text{ (其中 } s = \frac{a+b+c}{2} \text{)}$$

! 小考箱

- () 4. 已知 $\triangle ABC$ 的周長為 18，內切圓半徑為 3，則 $\triangle ABC$ 的面積為 27 平方單位。

例題

11

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BC}=6$ ， $\overline{CA}=7$ ，試求：

- (1) $\triangle ABC$ 的內切圓半徑 (2) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑

解 $a=\overline{BC}=6$ ， $b=\overline{CA}=7$ ， $c=\overline{AB}=5$ ，

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(6+7+5) = 9,$$

由海龍公式知：

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ 的面積} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-6)(9-7)(9-5)} \\ &= \sqrt{9 \times 3 \times 2 \times 4} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}. \end{aligned}$$

- (1) 利用 $\Delta = rs$ ，

$$\text{故得 } 6\sqrt{6} = r \times 9,$$

$$\text{即 } r = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

所以 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 。

- (2) 利用 $\Delta = \frac{abc}{4R}$ ，

$$\text{故得 } 6\sqrt{6} = \frac{6 \times 7 \times 5}{4R},$$

$$\text{即 } R = \frac{6 \times 7 \times 5}{4 \times 6\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24},$$

所以 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $\frac{35\sqrt{6}}{24}$ 。

隨堂練習

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=7$ ， $\overline{BC}=6$ ， $\overline{CA}=3$ ，試求：

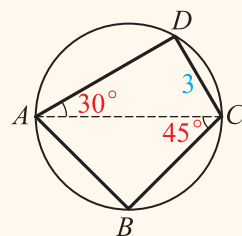
- (1) $\triangle ABC$ 的內切圓半徑 (2) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑

習題 1-2

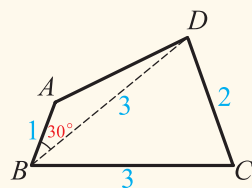


1. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=30^\circ$ ， $\overline{AB}=4\sqrt{3}$ ， $\overline{AC}=6$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積及 \overline{BC} 的長。
2. $\triangle ABC$ 中， $a=8$ ， $b=3$ ， $c=7$ ，試求 $\angle C$ 的度數。
3. $\triangle ABC$ 中， $a=5$ ， $b=6$ ， $c=7$ ，試求 $\cos A$ 的值。
4. $\triangle ABC$ 中， $\angle A=120^\circ$ ， $a=5\sqrt{3}$ ， $b=5$ ，試求其餘兩角。
5. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\cos B=-\frac{3}{5}$ ，又 $\overline{AC}=40$ ，試求 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。

6. 如右圖所示，圓內接四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{CD}=3$ ，又 $\angle ACB=45^\circ$ ， $\angle CAD=30^\circ$ ，試求 \overline{AB} 邊長。



7. 如右圖所示，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=1$ ， $\overline{BC}=3$ ， $\overline{CD}=2$ ， $\overline{BD}=3$ ，又 $\angle ABD=30^\circ$ ，試求此四邊形的面積。



8. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{BC}=5$ ， $\overline{CA}=6$ ，試求：
 - (1) $\triangle ABC$ 的面積
 - (2) $\triangle ABC$ 的內切圓半徑
 - (3) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑

1-3 解三角形問題（含三角測量）

一個三角形是由三個內角與三個邊長所構成，稱為三角形的六個要素。已知三角形的三個要素（其中至少包含有一個邊長），求得剩餘要素的過程，稱為解三角形。

1-3.1 三角形的解法

我們在解三角形時，除了可以利用國中時所學過的一些平面幾何知識外，更少不了正弦定理和餘弦定理的應用。一個三角形若已知兩邊及其夾角、兩角及一邊或三邊的大小，依據 *SAS*、*ASA*（或 *AAS*）、*SSS* 的全等性質，則其餘的邊和角的大小也隨之確定。在各種不同條件下，現在分別敘述其三角形之解法如下：

1. 已知三角形的兩邊及其夾角（*SAS* 型）

先利用餘弦定理求出第三邊，再利用正弦定理或餘弦定理求出另外兩個角。

例題

1

$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=30^\circ$ ， $b=2$ ， $c=\sqrt{3}+1$ ，試解此三角形。

解 已知三角形的兩邊 b 、 c 及其夾角 $\angle A$ ，
利用餘弦定理先求出第三邊 a ，

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2 \times 2 \times (\sqrt{3}+1) \times \cos 30^\circ \\ &= 4 + (4 + 2\sqrt{3}) - 4 \times (\sqrt{3}+1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 6 - 2\sqrt{3} = 2, \end{aligned}$$

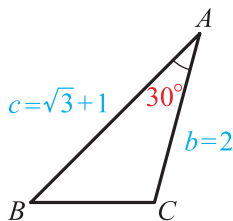
$$\text{即 } a = \sqrt{2},$$

再利用正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin B},$$

$$\text{得 } \sin B = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

因為 $b < c$ ，可推得 $\angle B < \angle C$ ，



故知 $\angle B$ 必為銳角，所以 $\angle B=45^\circ$ ，
 由於 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ ，
 所以 $\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-30^\circ-45^\circ=105^\circ$ ，
 故得 $a=\sqrt{2}$ ， $\angle B=45^\circ$ ， $\angle C=105^\circ$ 。

隨堂練習

$\triangle ABC$ 中，已知 $a=4\sqrt{3}$ ， $b=4$ ， $\angle C=30^\circ$ ，試解此三角形。

2. 已知三角形的兩角及一邊（ASA 型或 AAS 型）

利用三角形三個內角和為 180° （即 $\triangle ABC$ 中， $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ ）的關係，先求出第三個角，再利用正弦定理求出其餘兩邊。

! 小考箱

() 5. 已知三角形的兩邊及其夾角，或三角形的兩角及一邊，均可確定唯一的一個三角形。

例題

2

$\triangle ABC$ 中，已知 $a=4$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $\angle C=75^\circ$ ，試解此三角形。

解 因為 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ ，
 所以 $\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C=180^\circ-60^\circ-75^\circ=45^\circ$ ，

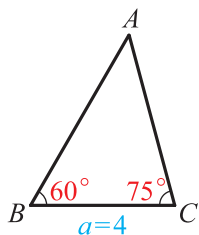
又由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，

故得 $\frac{4}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 75^\circ}$ ，

$$\text{則 } b = \frac{4 \times \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{6}，$$

$$c = \frac{4 \times \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{4 \times \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{3} + 2，$$

所以 $\angle A=45^\circ$ ， $b=2\sqrt{6}$ ， $c=2\sqrt{3}+2$ 。



隨堂練習

$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=15^\circ$ ， $\angle B=45^\circ$ ， $b=20$ ，試解此三角形。

3. 已知三角形的三邊（SSS 型）

利用餘弦定理先求出一個角，再利用正弦定理及三角形三個內角和為 180° 的關係求其餘的角。

特別
說明

已知三角形的三邊解三角形時，也可以直接利用餘弦定理分別求出三個角。

! 小考箱

() 6. 構成三角形的三邊長，任兩邊長的和必須大於第三邊的長。

例題

3

$\triangle ABC$ 中，已知 $a=2$ ， $b=\sqrt{2}$ ， $c=\sqrt{3}+1$ ，試求此三角形三個內角的度量。

解 已知三角形的三邊長，

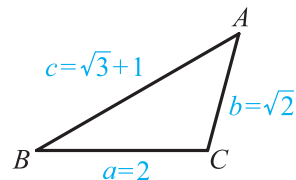
由餘弦定理知：

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{2} \times (\sqrt{3} + 1)} = \frac{2 + (3 + 2\sqrt{3} + 1) - 4}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

故得 $\angle A = 45^\circ$ ，

由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，

$$\text{即 } \frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin B}, \text{ 得 } \sin B = \frac{\sqrt{2} \sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2},$$



但 $b < a$ ，可推得 $\angle B < \angle A$ ，故得 $\angle B = 30^\circ$ ，
 而 $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$ ，
 所以 $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle C = 105^\circ$ 。

隨堂練習

$\triangle ABC$ 中，已知 $a = \sqrt{6}$ ， $b = 2$ ， $c = \sqrt{3} - 1$ ，試求其各內角的度量。

4. 已知三角形的兩邊及其中一邊的對角（不確定型）

另外，已知三角形的兩邊及其中一邊的對角時，因為在平面幾何中，並無 SSA 的全等性質，因此無法確定有唯一的一個三角形（可能無解、有一解或兩解）。針對這種不確定型三角形的解法，我們可以利用正弦定理，以實例說明如下。

例題

4

$\triangle ABC$ 中，已知 $a = 4$ ， $b = 2\sqrt{6}$ ， $\angle B = 120^\circ$ ，試解此三角形。

解 已知三角形的兩邊 a 、 b 及 b 邊的對角 $\angle B$ ，

由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，

$$\text{故得 } \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{4 \times \sin 120^\circ}{2\sqrt{6}} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}，$$

但 $a < b$ ，可推得 $\angle A < \angle B$ ，即 $\angle A = 45^\circ$ ，

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 15^\circ，$$

$$\text{又 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}，\text{即 } \frac{4}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 15^\circ}，$$

$$\text{故得 } c = \frac{4 \times \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3} - 2，$$

所以 $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle C = 15^\circ$ ， $c = 2\sqrt{3} - 2$ 。

隨堂練習

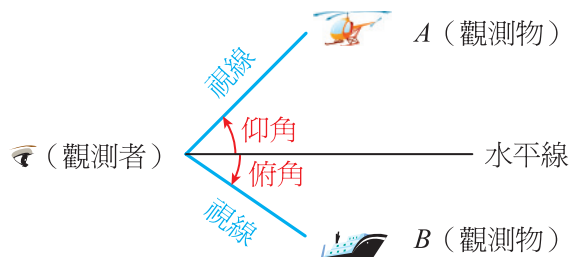
$\triangle ABC$ 中，已知 $a=2\sqrt{3}$ ， $b=2\sqrt{2}$ ， $\angle A=60^\circ$ ，試求 $\angle C$ 。

1-3.2 三角測量

要測定山的高度，河流的寬度，船舶的遠近，地球與月亮的距離…等，均為測量問題，在無法實際丈量時，常借助儀器、憑著經驗及三角學的知識，來求得其結果。三角測量的特色就是依據測量所得的數據，經由解三角形間接推算出要度量的對象，而並非直接去度量。

為了處理有關測量的問題，我們將一些常用的測量名詞簡介如下：

1. **鉛垂線**：將一細繩的一端繫一重物（如鉛塊），任其自由下垂，則此細繩形成一條與水平面垂直的直線，稱為鉛垂線。通過地心的任一直線即為鉛垂線。
2. **水平線**：與鉛垂線垂直的直線稱為水平線。
3. **視線**：觀測者的眼睛與觀測物的連線，稱為視線。
4. **仰角與俯角**：均指視線與水平線的交角，當視線在水平線上方時，稱為仰角；當視線在水平線下方時，稱為俯角，如圖 1-8 所示。



▲ 圖 1-8

5. **方位**：利用南北或東西為基準線，所定出路徑或觀測物位置的方向，稱為方位。除了東、西、南、北四個主要方位外，還有其他的方位，如圖 1-9 所示。

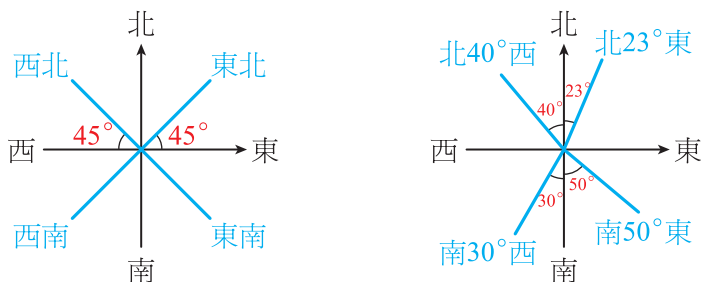


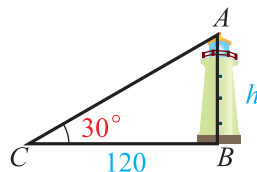
圖 1-9

雖然三角測量的對象並不侷限於平面上，空間中的問題也可以處理，但在此我們只討論平面上的測量問題。一般解決測量問題的步驟是利用作圖，將它轉化成處理三角形邊與角的問題。

例題

小偉在離塔基 120 公尺處，測得塔頂的仰角為 30° ，試求此塔的高度。

解 如右圖所示： A 為塔頂， B 為塔基，
 設塔高 $\overline{AB} = h$ 公尺，
 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 30^\circ$ ， $\overline{BC} = 120$ ，
 因為 $\tan C = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ ，即 $\tan 30^\circ = \frac{h}{120}$ ，
 故 $h = 120 \times \tan 30^\circ = 120 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$ ，
 所以此塔的高度為 $40\sqrt{3}$ 公尺。



隨堂練習

大華在其家門口，觀測到附近一座摩天大樓頂部的仰角為 60° ，已知該摩天大樓高 300 公尺，試求大華的家與摩天大樓的直線距離。

例題

6

某人在地面上 A 處測得山峰的仰角為 30° ，他向著山水平前進 150 公尺至 B 處，再測得山峰的仰角為 45° ，試求山高。

解 如右圖所示： C 為山頂， D 為山的底部，

設山高 $\overline{CD} = h$ 公尺，

在直角 $\triangle CBD$ 中， $\angle CBD = 45^\circ$ ，

$$\text{則 } \cot 45^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}, \text{ 即 } 1 = \frac{\overline{BD}}{h},$$

故 $\overline{BD} = h$ 公尺，

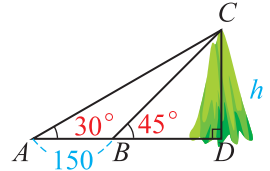
又在直角 $\triangle ACD$ 中， $\angle CAD = 30^\circ$ ，

$$\text{則 } \tan 30^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB} + \overline{BD}},$$

$$\text{即 } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{150 + h} \text{ (因為 } \overline{AB} = 150\text{)}, \text{ 化簡得 } \sqrt{3}h = 150 + h,$$

$$\text{移項得 } (\sqrt{3} - 1)h = 150, \text{ 故 } h = \frac{150}{\sqrt{3} - 1} = 75(\sqrt{3} + 1),$$

所以山高為 $75(\sqrt{3} + 1)$ 公尺。



隨堂練習

某人從地面上 A 處，測得一塔頂的仰角為 45° ，向此塔水平前進 40 公尺至 B 處，再測得塔頂的仰角為 60° ，求此塔的高度。

例題



設船 A 在下午 1 點時，從港口朝東北方向以每小時 8 浬的速度出發，船 B 於下午 4 點時，從同一港口朝南 75° 東的方向以每小時 10 浬的速度出發，試求在下午 6 點時兩船的距離。

解 如右圖所示：

設船 A 於 P 點出發，下午 6 點時到達 Q 點，

又船 B 也於 P 點出發，下午 6 點時到達 R 點，

在 $\triangle PQR$ 中，

$$\angle QPR = 45^\circ + (90^\circ - 75^\circ) = 60^\circ,$$

$$\text{又 } \overline{PQ} = 8 \times (6 - 1) = 40 \text{ (浬)},$$

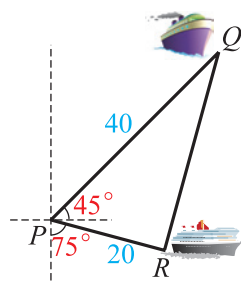
$$\overline{PR} = 10 \times (6 - 4) = 20 \text{ (浬)},$$

由餘弦定理知：

$$\begin{aligned} \overline{QR}^2 &= \overline{PQ}^2 + \overline{PR}^2 - 2 \times \overline{PQ} \times \overline{PR} \times \cos 60^\circ \\ &= 40^2 + 20^2 - 2 \times 40 \times 20 \times \frac{1}{2} = 1200, \end{aligned}$$

$$\text{故得 } \overline{QR} = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3},$$

所以下午 6 點時兩船的距離為 $20\sqrt{3}$ 浬。



隨堂練習

已知船 A 在燈塔 P 之南 63° 西 50 浬處，船 B 在燈塔 P 之南 57° 東 30 浬處，試求 A 、 B 兩船的距離。

例題 8

如右圖所示，某人欲測得 A 、 C 兩點的距離，得資料如下：

$\overline{AB} = 20\sqrt{6}$ 公里， $\angle CAB = 75^\circ$ ， $\angle BCA = 45^\circ$ ，試求 \overline{AC} 。

解 如右圖所示： $\angle A = 75^\circ$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，
則 $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$ ，

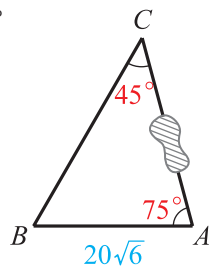
由正弦定理知 $\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin B}$ ，

又知 $\overline{AB} = 20\sqrt{6}$ ，

即 $\frac{20\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}$ ，

故得 $\overline{AC} = \frac{20\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} \times \sin 60^\circ = \frac{20\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 60$ ，

所以 A 、 C 兩點的距離為 60 公里。



隨堂練習

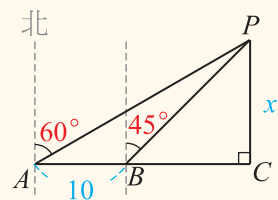
在海岸上有 A 、 B 兩觀測站，同時發現海上有一艘船 C ，在 A 測得 $\angle BAC = 60^\circ$ ，在 B 測得 $\angle ABC = 75^\circ$ ，已知 A 、 B 相距 4 公里，試求船 C 到 B 的距離。

習題 1-3



1. $\triangle ABC$ 中，已知 $a = \sqrt{6}$ ， $b = 3 + \sqrt{3}$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，試解此三角形。
2. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 120^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $b = 4\sqrt{3}$ ，試解此三角形。
3. 有一小孩放風箏，放出 80 公尺的線，而風箏的仰角為 60° ，試求風箏的高度。
4. 某人從 A 處測得山峰 P 的仰角為 30° ，往山腳水平前進 200 公尺至 B 處，再測得山峰的仰角為 60° ，試求山高。
5. 一建築物上有一旗桿，旗桿長 20 公尺，某人於地面上 A 處測得建築物頂端的仰角為 45° ，旗桿頂端的仰角為 60° ，試求此建築物的高度。
6. 有一艦艇由西向東行駛，於 A 點測得岸邊一燈塔在其北 60° 東，繼續行駛 10 哩到 B 點，再測得該燈塔在其北 45° 東，若此艦艇不改變方向繼續行駛，試求艦艇與燈塔的最近距離。

《提示》如右圖所示，設燈塔的位置為 P ，艦艇與燈塔的最近距離為 $\overline{PC} = x$ (哩)。





本章彙總

1-1 重點

1. 和差角公式：

正弦函數	$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$
餘弦函數	$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
正切函數	$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

2. 特別角 15° 及 75° 的三角函數值：

角度 函數	$15^\circ \left(\frac{\pi}{12} \right)$	$75^\circ \left(\frac{5\pi}{12} \right)$
sin	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
cos	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
tan	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$

3. 二倍角公式：

$$(1) \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta \circ$$

$$(2) \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \circ$$

$$(3) \quad \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \circ$$



4. $a\sin\theta + b\cos\theta$ 的極值：(a 、 b 均不為 0， θ 為任意角度)

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\sin\theta + b\cos\theta \leq \sqrt{a^2+b^2}。$$

1-2 重點

1. 三角形面積公式：在 $\triangle ABC$ 中，

$$\Delta = \frac{1}{2} bc\sin A = \frac{1}{2} ca\sin B = \frac{1}{2} ab\sin C。$$

2. 正弦定理：在 $\triangle ABC$ 中，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (其中 } R \text{ 為 } \triangle ABC \text{ 之外接圓半徑)，}$$

$$\text{即 } a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C。$$

3. 餘弦定理：在 $\triangle ABC$ 中，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \text{ 即 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}。$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B, \text{ 即 } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}。$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \text{ 即 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}。$$

4. 海龍公式 (Heron 公式)：

$\triangle ABC$ 中，設 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$



本章彙總

5. 設 r 、 R 分別為 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑與外接圓半徑，則 $\triangle ABC$ 的面積

$$\Delta = rs = \frac{abc}{4R} \quad \left(\text{其中 } s = \frac{a+b+c}{2} \right)。$$

1-3 重點

1. 確定型三角形的解法：

(1) 已知三角形的兩邊及其夾角：(SAS 型)

先利用餘弦定理求出第三邊，再利用正弦定理或餘弦定理求出另外兩個角。

(2) 已知三角形的兩角及一邊：(ASA 型或 AAS 型)

利用三角形內角和為 180° 的關係，先求出第三個角，再利用正弦定理求出其餘兩邊。

(3) 已知三角形的三邊：(SSS 型)

利用餘弦定理先求出一個角，再利用正弦定理及三角形內角和為 180° 的關係求其餘各角。

《註》亦可直接利用餘弦定理分別求出三個角。

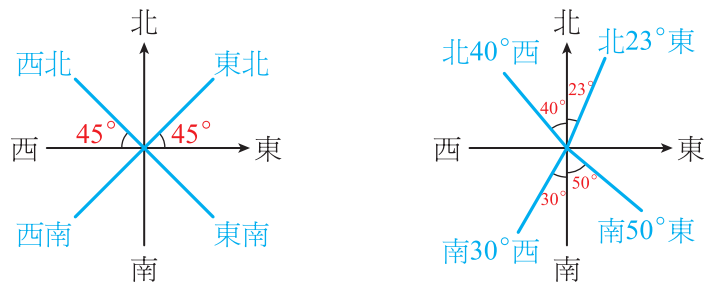
2. 不確定型三角形的解法：(已知三角形的兩邊及其中一邊的對角)

在平面幾何中，並無 SSA 的全等性質，因此無法確定有唯一的一個三角形 (可能無解、有一解或兩解)。一般先利用正弦定理求出另一個角，再利用三角形三內角和為 180° 的關係及正、餘弦定理來求其餘的邊及角。



3. 三角測量術語：

- (1) 鉛垂線：通過地心的任一直線（即與地平面垂直的直線）。
- (2) 水平線：與鉛垂線垂直的直線。
- (3) 視線：觀測者的眼睛與觀測物的連線。
- (4) 仰角與俯角：均指視線與水平線的交角，當視線在水平線上方時，稱為仰角；當視線在水平線下方時，稱為俯角。
- (5) 方位：利用南北或東西為基準線，所定出路徑或觀測物的方向。



▲ 圖 1-10

4. 三角測量：將所欲求解的測量問題作圖，轉化成處理三角形邊與角的問題。

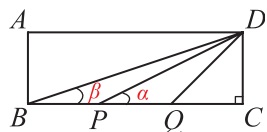


自我評量

- () 1. 設 θ 為任意角度，則 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\theta\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$
 $+\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$ 的值為 (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (D) 0。 【1-1】

- () 2. 設 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ， $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ ，若 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos\beta = \frac{5}{13}$ ，則
 $\sin(\alpha - \beta) =$ (A) $\frac{33}{65}$ (B) $\frac{16}{65}$ (C) $-\frac{33}{65}$ (D) $-\frac{16}{65}$ 。 【1-1】

- () 3. 如右圖所示，矩形 $ABCD$ ， $\overline{BC} = 3\overline{AB}$ ，點 P 、
 Q 在 \overline{BC} 上，且 $\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$ ，若 $\angle DPC = \alpha$ ，
 $\angle DBC = \beta$ ，則 $\tan(\alpha - \beta) =$ (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{6}$
 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{8}$ 。 【1-1】



- () 4. 設 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ，則 $(1 + \tan\alpha)(1 + \tan\beta)$ 的值為 (A) 0 (B) 1 (C) 2
 (D) 4。 【1-1】

《提示》 $\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4}$ ，即 $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = 1$ ，

故得 $\tan\alpha + \tan\beta = 1 - \tan\alpha \tan\beta$ 。

- () 5. 已知 $\sin 2\theta = \frac{1}{3}$ ，則 $(\sin\theta - \cos\theta)^2$ 的值為 (A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{4}{3}$
 (D) $\frac{5}{3}$ 。 【1-1】

- () 6. 若 $\sin^4\theta - \cos^4\theta = \frac{2}{3}$ ，則 $\cos 2\theta$ 的值為 (A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$
 (C) $\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{2}{3}$ 。 【1-1】

《提示》 $\sin^4\theta - \cos^4\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$



- () 7. 設 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ，若 $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ ，則 $\tan 2\theta$ 的值为 (A) $\frac{24}{7}$
 (B) $-\frac{24}{7}$ (C) $\frac{7}{24}$ (D) $-\frac{7}{24}$ 。 【1-1】
- () 8. 設 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，若 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，則 $\sin 2\theta + \cos 2\theta$ 的值为 (A) $-\frac{1}{5}$
 (B) $\frac{1}{5}$ (C) $-\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$ 。 【1-1】
- () 9. 設 $f(\theta) = \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta - 5$ 的最大值为 M ，最小值为 m ，则
 $2M - m =$ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 【1-1】
- () 10. $\triangle ABC$ 中，若 $b=7$ ， $c=3$ ， $\angle A=60^\circ$ ，则 $a=$ (A) $\sqrt{79}$ (B) $\sqrt{43}$
 (C) $\sqrt{37}$ (D) $2\sqrt{7}$ 。 【1-2】
- () 11. $\triangle ABC$ 中，若 $\frac{7}{\sin A} = \frac{8}{\sin B} = \frac{13}{\sin C}$ ，则 $\angle C=$ (A) 150° (B) 135°
 (C) 120° (D) 105° 。 【1-2】
- () 12. $\triangle ABC$ 中， $\angle B=74^\circ$ ， $\angle C=61^\circ$ ，又 $b=6$ ， $c=4$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积
 为 (A) $12\sqrt{2}$ (B) $6\sqrt{2}$ (C) $8\sqrt{3}$ (D) $6\sqrt{3}$ 。 【1-2】
- () 13. $\triangle ABC$ 中， $a^2 + ab + b^2 = c^2$ ，则 $\angle C=$ (A) 60° (B) 120° (C) 135°
 (D) 150° 。 【1-2】
- () 14. $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 15，又知 $\overline{BC}=10$ ，则 $\sin A$ 的值为 (A) $\frac{2}{5}$
 (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$ 。 【1-2】
- () 15. 已知三角形的三边长为 5、6、7，最大内角为 θ ，则 $\cos\theta =$ (A) $\frac{1}{5}$
 (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$ 。 【1-2】
- () 16. $\triangle ABC$ 中， $a=8$ ， $b=5$ ， $c=7$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积
 为 (A) $5\sqrt{6}$ (B) $6\sqrt{3}$ (C) $10\sqrt{2}$ (D) $10\sqrt{3}$ 。 【1-2】



自我評量

- () 17. 承上題， $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 (A) $2\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{5}$
(D) $\sqrt{3}$ 。 【1-2】
- () 18. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=9$ ， $\angle B=45^\circ$ ， $\angle C=120^\circ$ ，則 $\overline{AC} =$
(A) $3\sqrt{6}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $6\sqrt{2}$ 。 【1-3】
- () 19. $\triangle ABC$ 中，已知 $a=3$ ， $b=\sqrt{6}$ ， $\angle A=60^\circ$ ，則 $\angle B =$ (A) 15° (B) 45°
(C) 75° (D) 105° 。 【1-3】
- () 20. $\triangle ABC$ 中，若 $a=2$ ， $b=4$ ， $\angle A=60^\circ$ ，則 (A) $c=\sqrt{3}-1$
(B) $\angle C=45^\circ$ (C) $\angle B=135^\circ$ (D) $\triangle ABC$ 不存在 。 【1-3】
- () 21. $\triangle ABC$ 中， $\angle A=120^\circ$ ， $\angle B=45^\circ$ ， $b=20$ ，則 $c =$ (A) $10\sqrt{6}$
(B) $10\sqrt{2}$ (C) $10(\sqrt{3}-1)$ (D) $10(2-\sqrt{3})$ 。 【1-3】
- () 22. $\triangle ABC$ 中， $c>b$ ，若 $a=\sqrt{2}$ ， $b=2$ ， $\angle A=30^\circ$ ，則 $\angle C =$ (A) 135°
(B) 120° (C) 105° (D) 90° 。 【1-3】
- () 23. 一樹生於高 30 公尺的山頂上，自平地上一點測得樹頂的仰角為
 45° ，山頂的仰角為 30° ，則此樹高為 (A) $30(3-\sqrt{3})$
(B) $30(\sqrt{3}+1)$ (C) $30(2-\sqrt{3})$ (D) $30(\sqrt{3}-1)$ 公尺。 【1-3】
- () 24. 某甲在平地上看一旗桿桿頂的仰角為 30° ，今某甲朝旗桿的方向水平
前進 30 公尺後，再看同一旗桿桿頂的仰角為 60° ，則此時某甲與旗
桿間的距離為 (A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) $15\sqrt{3}$ 公尺。 【1-3】
- () 25. 在高 150 公尺的山頂，依同一方向測得地面上 A 、 B 兩處的俯角分別
為 30° 及 45° ，則 A 、 B 的距離為 (A) $150(\sqrt{3}-1)$ (B) $50(\sqrt{3}+1)$
(C) $100(\sqrt{3}-1)$ (D) $50(3+\sqrt{3})$ 公尺。 【1-3】

