第4章

指數與對數及其運算

觀念銜接

第 1 節

1. 當同一個數 a 連乘 n 次時，可以簡記成 a^n，其中 a 稱為底數，n 稱為指數。
2. 指數律：如果 a、b 是不等於 0 的整數或分數，m、n 是任意兩個正整數，則 $a^0=1$、$a^m\times a^n=a^{m+n}$、$a^m\div a^n=a^{m-n}$、$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$、$(a\times b)^m=a^m\times b^m$、$(a\div b)^m=a^m\div b^m$。
3. 當 $a>1$ 時，次方 n 愈大，則 a^n 的值會愈大；當 $0<a<1$ 時，次方 n 愈大，則 a^n 的值會愈小。
4. 平方根：若 $b^2=a$，則稱 b 是 a 的平方根；反過來說，若 b 是 a 的平方根，則 $b^2=a$。a 為正數，我們使用「$\pm\sqrt{a}$」來表示 a 的平方根，其中 $\sqrt{a}$ 為 a 的正平方根。

第 2 節

1. 函數：設 x 與 y 是兩個變數。當 x 的值給定時，y 的值也隨著 x 的值而唯一確定，我們稱這種對應關係為 y 是 x 的函數，而 x 稱為自變數，y 稱為應變數。若此函數命名為 f，則用記號 $y=f(x)$ 表示，並以 $f(a)$ 表示當 $x=a$ 時所對應的函數值。

2. 一次方程式：形如 $ax+b=0$（其中 a、b 為實數且 $a\neq0$）的式子中，因為只含有一個未知數，且未知數的次數是 1，稱為一元一次方程式。
3. 二次方程式：形如 $ax^2+bx+c=0$（其中 a、b、c 為實數且 $a\neq0$）的式子中，因為只含有一種未知數，且該未知數的最高次數為 2，稱為一元二次方程式。

第5節

1. 科學記號：把一個數記錄為 $a\times10^m$ 的形式（其中 $1\leq a<10$，m 為整數），稱為科學記號。
2. 設 n 為正整數且 $1\leq a<10$，則
   (1) 如果某數的科學記號為 $a\times10^n$，則該數的整數部分是 $n+1$ 位數。
   (2) 如果某數的科學記號為 $a\times10^{-n}$，則該數在小數點後第 n 位開始出現不是 0 的數字。

觀念澄清

(　　) 1. $5^6\div5^3=5^2$。
(　　) 2. $0.99^3<0.99^2<0.99$。
(　　) 3. 3.46×10^{12} 為 12 位數。

4-1 指數的運算與意義

4-1.1 正整數指數與指數律

設 n 為正整數，對於每一個實數 a，我們用符號 a^n 表示 a 自乘 n 次的乘積。即

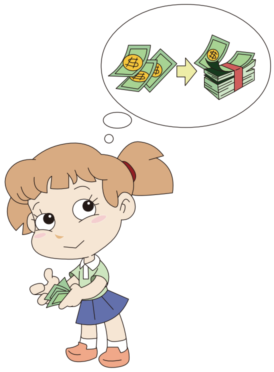
$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個 } a\text{ 相乘}}$$

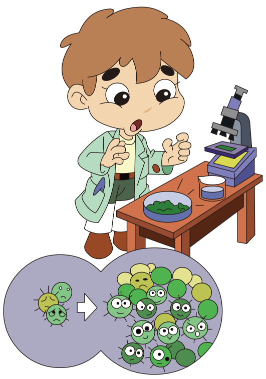
> 小幫手
>
> a^n：$n \longrightarrow$ 指數，$a \longrightarrow$ 底數

讀作「a 的 n 次方」，其中 a 稱為底數，n 稱為指數。通常我們把 a^2 和 a^3 分別讀作「a 的平方」和「a 的立方」，而 3 次方以上，則按照其次方來唸，例如：a^{10} 讀作「a 的 10 次方」。

【例】某君將 10,000 元存入銀行，設銀行存款月利率為 0.8 %，複利計算，則某君一年後所得本利和，可用指數表示為

$$10{,}000 \times (1 + 0.8\ \%)^{12}$$





【例】實驗室內培養某種細菌，其繁殖情形為每 12 小時增加一倍，若開始時細菌數為 100，則經過兩星期後，細菌總數可用指數表示為

$$100 \times 2^{28}$$

利用實數乘法的交換律與結合律，指數的運算具有下列的性質，稱為指數律。

設 m、n 都是正整數，a、b 為實數，則

(1) $a^m \times a^n = (\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{ 個 }a\text{ 相乘}})(\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個 }a\text{ 相乘}})$

$= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{(m+n)\text{個 }a\text{ 相乘}}$

$= a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}_{n\text{ 個 }a^m\text{ 相乘}}$

$= (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{ 個 }a\text{ 相乘}})(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{ 個 }a\text{ 相乘}})\cdots(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{ 個 }a\text{ 相乘}})$

（共有 n 個 $(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{ 個 }a\text{ 相乘}})$ 相乘）

$= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m \times n\text{ 個 }a\text{ 相乘}}$

$= a^{m \times n}$

(3) $(ab)^n = \underbrace{(ab) \times (ab) \times (ab) \times \cdots \times (ab)}_{n\text{ 個 }ab\text{ 相乘}}$

$= (\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個 }a\text{ 相乘}})(\underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{n\text{ 個 }b\text{ 相乘}})$

$= a^n \times b^n$

正整數指數律

設 a、b 為實數，m、n 為正整數，則

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

(3) $(ab)^n = a^n \times b^n$

例題 1

化簡下列各式：

(1) $5^{4}\times 5^{12}$ (2) $[(-2)^{2}]^{3}$ (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\times (27)^{3}$

解 (1) $5^{4}\times 5^{12}=5^{4+12}=5^{16}$

(2) $[(-2)^{2}]^{3}=(-2)^{2\times 3}=(-2)^{6}=64$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\times (27)^{3}=\left(\frac{1}{3}\times 27\right)^{3}=9^{3}=729$

隨堂練習

試填入適當的數字於下列空格中：

(1) $3^{\square}\times 3^{8}=3^{12}=9^{\square}$

(2) $(7^{3})^{4}=7^{\square}=(7^{4})^{\square}$

(3) $4^{10}\times 25^{10}=\boxed{}^{10}=10^{\square}$

我們上面所討論的指數都是自然數，為了實際的需要，我們將把指數的範圍從自然數系逐步推廣到整數系、有理數系，最後到整個實數系。換句話說，就是要規定像 a^{0}、a^{-5}、$a^{\frac{1}{2}}$、$a^{\sqrt{3}}$、…等符號的意義。推廣的原則是讓新規定的指數符號也能滿足指數律。因此，在推廣的過程中為了使新的指數符號有意義，我們必須對底數 a 作適當的限制。

4-1.2 零指數與負整數指數

現在我們要把指數推廣到整數系，就必須對於零指數和負整數指數有所定義。

設 a 為不等於 0 的實數，我們應該如何規定 a^{0} 才能使它也滿足正整數指數律呢？暫時假設已經定義 a^{0}，把它代入正整數指數律中，看會得到什麼結果，然後再利用所得的結果，找出 a^{0} 的適當定義。

在 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 中，令 $m=0$，則

$$a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$$

因為 $a \neq 0$，所以 $a^n \neq 0$，將上式兩邊同除以 a^n 可得

$$a^0 = 1$$

因此，要讓 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 成立，必須定義 $a^0 = 1$ 較適當。接著，我們要檢視 $a^0 = 1$ 是否能滿足正整數指數律 $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 和 $(ab)^n = a^n \times b^n$。

在 $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 中，可依 m、n 是否為 0 而分成三種情形加以考慮：

$$(a^0)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0 \times n}$$

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \times 0}$$

$$(a^0)^0 = 1^0 = 1 = a^0 = a^{0 \times 0}$$

所以，當 m、n 有一為 0 或兩者皆為 0 時，$(a^m)^n = a^{m \times n}$ 仍成立。又

$$(ab)^0 = 1 = 1 \times 1 = a^0 \times b^0$$

故當 $n=0$ 時，$(ab)^n = a^n \times b^n$ 也成立。

我們繼續考慮要如何來定義 a^{-n}，其中 n 為正整數，且 $a \neq 0$。同樣地，我們先假設已定義了 a^{-n}，將其代入正整數指數律中，看會得到什麼結果。在 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 中，令 $m = -n$，則

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

將上式兩邊同除以 a^n 可得

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

因此，我們定義 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ 較合理。

定　義

設 a 為實數且 $a \neq 0$，n 為正整數，我們規定

(1)　$a^0 = 1$

(2)　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

小幫手

$$a^{-\blacktriangle} = \frac{1}{a^{\blacktriangle}}$$

特別說明

(1) 由上面的定義，顯然 0^0 與 0^{-n} 無意義，而且所有整數指數的運算均滿足指數律。

(2) 設 $a\neq 0$，m、n 為正整數，則

$$\frac{a^m}{a^n}=a^m\times\frac{1}{a^n}=a^m\times a^{-n}=a^{m+(-n)}=a^{m-n}\text{，即 }\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\text{。}$$

小考箱

(　　) 1. 設 $a>0$，n 為正整數，則 a^{-n} 不一定為正數。

整數指數律

設 a、b 為非零的實數，m、n 為整數，則

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n=a^{m\times n}$

(3) $(ab)^n=a^n\times b^n$

例題 2

設 a、b 為非零的實數，試化簡下列各式：

(1) $(a^4\times a^{-6})^{-4}$　　(2) $(a^{-3}\times b^2)^{-2}\times(a^2\times b^{-3})^{-3}$

解 (1) $(a^4\times a^{-6})^{-4}=(a^{4+(-6)})^{-4}=(a^{-2})^{-4}=a^{(-2)(-4)}=a^8$

(2) $(a^{-3}\times b^2)^{-2}\times(a^2\times b^{-3})^{-3}$

$=(a^{-3})^{-2}\times(b^2)^{-2}\times(a^2)^{-3}\times(b^{-3})^{-3}$

$=a^{(-3)(-2)}\times b^{2(-2)}\times a^{2(-3)}\times b^{(-3)(-3)}$

$=a^6\times b^{-4}\times a^{-6}\times b^9=a^{6+(-6)}\times b^{(-4)+9}=a^0\times b^5=b^5$

隨堂練習

試計算下列各式的值：

(1) $(2-\sqrt{3})^0$　(2) $(-5)^{-7}\times(-5)^{10}$　(3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$　(4) $\dfrac{(-2)^2}{(-2)^8}$

4-1.3 分數指數

若欲將指數由整數系再推廣到有理數系，則對於底數 a 又應作何種限制？而有理數的指數要如何定義，才能合乎指數律呢？

首先我們考慮 $a^{\frac{1}{n}}$（其中 n 為正整數，a 為正實數），根據指數推廣的原則，希望新定義的 $a^{\frac{1}{n}}$ 仍滿足指數律。在 $(a^m)^n=a^{m\times n}$ 中，令 $m=\dfrac{1}{n}$，則

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a$$

由上式知 $a^{\frac{1}{n}}$ 是方程式 $x^n=a$ 的根，而 $x^n=a$ 恰有一正實數根，即 a 的正 n 次方根（其證明超出教材範圍，在此不予討論），記作 $\sqrt[n]{a}$，因此我們選定 a 的正 n 次方根為 $a^{\frac{1}{n}}$ 的定義，即

定　義

設 $a>0$，n 為正整數，我們規定 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$。

接著，我們再考慮一般的分數指數 a^r，r 為有理數。由於有理數的表示方法並不唯一，有理數 r 可表為 $\dfrac{m}{n}$，亦可表為 $\dfrac{km}{kn}$（其中 m 為整數，k、n 為正整數）。但可驗證 $(\sqrt[n]{a})^m=(\sqrt[kn]{a})^{km}$，例如：$(\sqrt{a})^3=(\sqrt[4]{a})^6=(\sqrt[10]{a})^{15}$。因此，在定義 a^r 時，只要定義 $a^{\frac{m}{n}}$ 即可。由 $(a^m)^n=a^{m\times n}$ 知，必須合乎

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}$$

所以，我們可以定義 $a^{\frac{m}{n}}$ 為 $a^{\frac{1}{n}}$ 的 m 次方，即 $\sqrt[n]{a}$ 的 m 次方。令 $b=\sqrt[n]{a}$，則 $b^n=a$，故得 $a^m=b^{nm}=(b^m)^n$。換句話說，b^m 就是 n 次方後等於 a^m 的那個正數，因此可得 $b^m=\sqrt[n]{a^m}$，亦即 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$。

定　義

設 $a>0$，n 為正整數，m 為整數，我們定義

$$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^{m}=\sqrt[n]{a^{m}}$$

小幫手

$a^{\frac{\bullet}{\blacksquare}}=\sqrt[\blacksquare]{a^{\bullet}}$

特別說明　在上面的討論中，我們定義 $a^{\frac{1}{n}}$ 是 $x^{n}=a$ 的正實數根，但當 $a\leq 0$ 時，$x^{n}=a$ 無正實數根，因此定義分數指數，必須限制底數 $a>0$ 才有意義。

依照上面的定義，分數指數都能滿足指數律，唯證明須涉及多處 n 次方根的運算性質，故省略之。

有理數指數律

設 a、b 為正實數，r、s 為有理數，則

(1)　$a^{r}\times a^{s}=a^{r+s}$　　(2)　$(a^{r})^{s}=a^{r\times s}$　　(3)　$(ab)^{r}=a^{r}\times b^{r}$

特別說明　設 a、b 為正實數，r、s 為有理數，由有理數指數律可以推得

(1)　$\dfrac{a^{r}}{a^{s}}=a^{r-s}$　　(2)　$\dfrac{a^{r}}{b^{r}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{r}$

例題 3

求下列各值：

(1)　$64^{\frac{2}{3}}$　　(2)　$\left(\dfrac{16}{81}\right)^{0.25}$　　(3)　$(0.25)^{-1.5}$

解　(1)　$64^{\frac{2}{3}}=(4^{3})^{\frac{2}{3}}=4^{3\times\frac{2}{3}}=4^{2}=16$

(2)　$\left(\dfrac{16}{81}\right)^{0.25}=\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4}\right]^{\frac{1}{4}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4\times\frac{1}{4}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1}=\dfrac{2}{3}$

(3)　$(0.25)^{-1.5}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{1}{2^{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}=(2^{-2})^{-\frac{3}{2}}$

$$=2^{(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)}=2^{3}=8$$

隨堂練習

求下列各值：

(1) $27^{-\frac{2}{3}}$　　(2) $32^{0.4}$　　(3) $\left(\frac{25}{9}\right)^{-1.5}$

例題 4

設 a、b、c 為正數，試化簡下列各式：

(1) $(a^3b^{-1})^{\frac{1}{2}}\times(a^2b^6)^{\frac{1}{4}}$

(2) $(a^{-3}b^6c^9)^{\frac{2}{3}}\times(a^4b^{-4}c^{-6})^{\frac{1}{2}}$

解 (1) $(a^3b^{-1})^{\frac{1}{2}}\times(a^2b^6)^{\frac{1}{4}}$

$$=a^{\frac{3}{2}}\times b^{-\frac{1}{2}}\times a^{\frac{2}{4}}\times b^{\frac{6}{4}}$$

$$=a^{\frac{3}{2}+\frac{2}{4}}\times b^{-\frac{1}{2}+\frac{6}{4}}$$

$$=a^2b$$

(2) $(a^{-3}b^6c^9)^{\frac{2}{3}}\times(a^4b^{-4}c^{-6})^{\frac{1}{2}}$

$$=a^{-2}\times b^4\times c^6\times a^2\times b^{-2}\times c^{-3}$$

$$=a^{-2+2}\times b^{4+(-2)}\times c^{6+(-3)}$$

$$=a^0\times b^2\times c^3$$

$$=b^2c^3$$

隨堂練習

設 a、b 為正數，試化簡下列各式：

(1) $(a^{-\frac{1}{2}})^{-8}\times(a^6)^{-\frac{1}{3}}$　　(2) $(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\times(ab)^{\frac{3}{4}}$

例題 5

設 a、b 為正數，試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{ab^3}\times\sqrt[4]{a^2b^{-2}}$

(2) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}}$

解 (1) $\sqrt{ab^3}\times\sqrt[4]{a^2b^{-2}}=(ab^3)^{\frac{1}{2}}\times(a^2b^{-2})^{\frac{1}{4}}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}\times b^{-\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\times b^{\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}=ab$

(2) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}}=\sqrt{\dfrac{a}{a^{\frac{1}{3}}}}=\sqrt{a^{1-\frac{1}{3}}}=\sqrt{a^{\frac{2}{3}}}$

$=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}$

隨堂練習

設 a 為正數，試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[6]{a^5}$　　(2) $\sqrt[5]{a^2\times\sqrt{a}}$

事實上，當 $a>0$，x 為實數時，a^x 都可定義，而且當指數在實數系中，指數律也都能成立，只是其證明理論較深，不適合於高職學生，故省略之。

習題 4-1

1. 化簡下列各式（或確定其值）：

(1) $10^{2.3}\times 10^{-0.8}\div 10^{2.5}$　　(2) $(3^2)^{-\frac{1}{3}}\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5\right]^{-\frac{1}{3}}$

2. 設 a、b 為正數，化簡下列各式：

(1) $[a^2\times(a^{-5})^3]^{-2}$　　(2) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{2}}\times(ab)^{\frac{1}{4}}$

3. 試求 $\dfrac{2^{-2}+3^{-2}}{9^{-1}-6^{-2}+4^0}$ 的值。

4. 試求 $729^{-\frac{1}{3}}+32^{\frac{2}{5}}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 的值。

5. 設 a 為正數，x、y、z 為有理數，化簡下列各式：

(1) $\sqrt{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[6]{a^5}$　　(2) $\sqrt{a^{x-y}}\times\sqrt{a^{y-z}}\times\sqrt{a^{z-x}}$

6. 試化簡 $\left(\dfrac{\sqrt[4]{27}}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\times\sqrt{3}$。

7. 設 x 為正數，且 $x+x^{-1}=5$，試求下列各值：

(1) x^2+x^{-2}　　(2) x^3+x^{-3}

《提示》令 $A=x$、$B=x^{-1}$，再利用 $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$、

$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$。

4-2 指數函數及其圖形

4-2.1 指數函數的圖形

在 4–1 節中，我們曾提到指數可以推廣到實數系中，使指數律都能成立。因此，當 $a > 0$ 時，對於任意實數 x，a^x 均有意義，如果視 x 為一變數，則我們可將指數函數定義如下：

定　義

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，函數 $f(x) = a^x$（x 為實數）稱為以 a 為底數的**指數函數**。

特別說明

(1)　在上面的定義中，我們排除 $a = 1$ 的情形，是因為當 $a = 1$ 時，$f(x) = a^x = 1^x = 1$ 為常數函數，其圖形為水平線。

(2)　當 $a > 0$ 時，對於任意實數 x，a^x 恆為正數，所以指數函數 $f(x) = a^x$ 將實數對應到正實數。

由指數律 $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \times a^{x_2}$ 知，指數函數 $f(x) = a^x$ 有

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$$

的特性。

小考箱

（　）2. 設函數 $f(x) = a^x$（其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$），若 $f(m) = 3$，$f(n) = 5$，則 $f(m + n) = 8$。

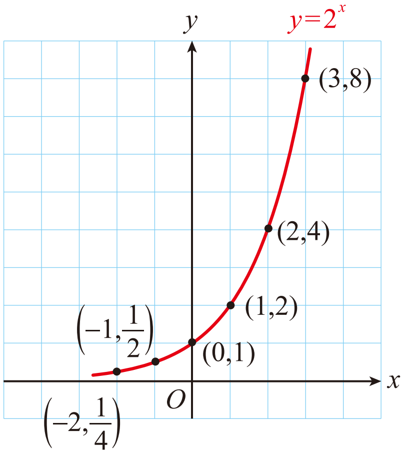
我們可用描點的方式來作出指數函數的圖形。本節主要目的就是要認識指數函數的圖形，特別是當底數 $a > 1$ 及 $0 < a < 1$ 兩種情況圖形的差異，並且要從圖形中觀察指數函數的其他性質。

例題 1

試作 $y=2^x$ 的圖形。

解　將 y 與 x 的對應關係列表如下：

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$



我們發現當 x 愈大，

則 y 值也跟隨著愈大

即 $x\to+\infty$，則 $y\to+\infty$

（其中 ∞ 表示無限大）

又當 x 愈小，

則 y 值也跟隨著愈小，

最後幾乎等於 0

即 $x\to-\infty$，則 $y\to 0$

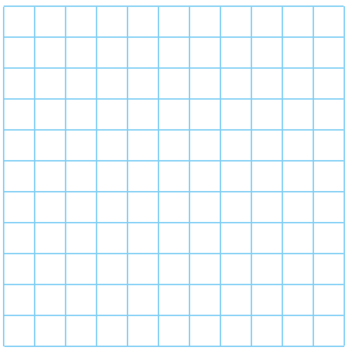
《註》符號「→」唸作「趨近於」

將上表中各對應數對描點，用平滑曲線連接起來

可得 $y=2^x$ 的圖形，如右圖所示

隨堂練習

試作 $y=3^x$ 的圖形，並與 $y=2^x$ 的圖形加以比較。



例題 2

試作 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ 的圖形。

解　將 y 與 x 的對應關係列表如下：

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
y	$\cdots$	8	4	2	1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\cdots$

當 $x\to+\infty$ 時，$y\to 0$

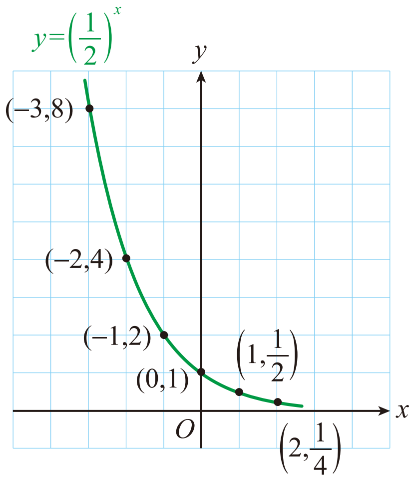
當 $x\to-\infty$ 時，$y\to+\infty$

將上表中各對應數對描點，

用平滑曲線連接起來

可得 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ 的圖形，

如右圖所示



隨堂練習

試作 $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}$ 的圖形，並與 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ 的圖形加以比較。

從例題 1、例題 2 中，我們可以看出 $y=2^x$ 與 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形具有下列之性質：

(1) 圖形均過點 (0 , 1) 且在 x 軸的上方，即 $y=2^x>0$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x>0$。

(2) 平行於 x 軸且在 x 軸上方的任一直線，與 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形，都恰交於一個點。

(3) $y=2^x$ 的圖形由左而右，逐漸升高，愈往右邊升高得愈快，愈往左邊則圖形愈接近 x 軸，又當 $x_1<x_2$ 時，恆有 $2^{x_1}<2^{x_2}$。

(4) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形由左而右，逐漸下降，愈往左邊升高得愈快，愈往右邊則圖形愈接近 x 軸，又當 $x_1<x_2$ 時，恆有 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$。

特別說明　設 x_1、x_2 為實數函數 f 定義域中的任意二實數：

(1) 若 $x_1<x_2$，恆有 $f(x_1)<f(x_2)$，則稱 f 為嚴格增函數。

(2) 若 $x_1<x_2$，恆有 $f(x_1)>f(x_2)$，則稱 f 為嚴格減函數。

因此，我們可知：$f(x)=2^x$ 為嚴格增函數，而 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 為嚴格減函數。

現在，我們將 $y=2^x$ 與 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形畫在同一坐標平面上，如圖 4-1 所示。

在圖4-1中，我們觀察到 $y=2^x$ 與 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 這兩個圖形對稱於 y 軸。

一般而言，當底數 $a>1$ 時，$y=a^x$ 與 $y=2^x$ 的圖形相類似，且都具有性質(1)、(2)和(3)；而當底數 $a<1$（即 $0<a<1$）時，$y=a^x$ 與 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形相類似，且都具有性質(1)、

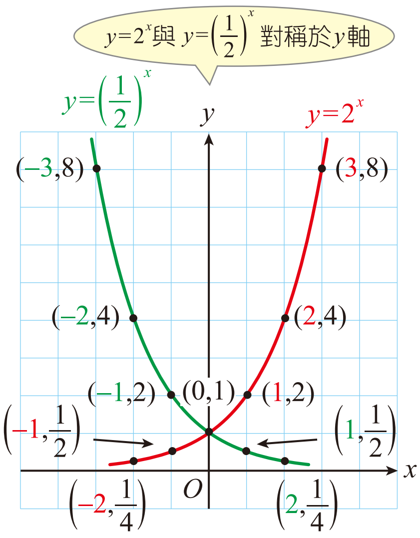
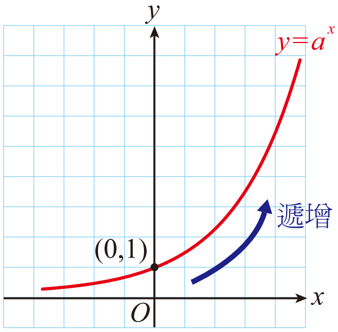


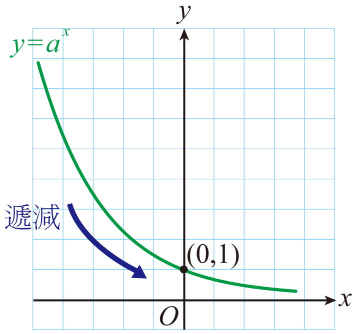
圖 4-1

⑵和⑷，如圖 4-2、圖 4-3 所示。



$a>1$

圖 4-2



$0<a<1$

圖 4-3

由上面的討論，我們可以將指數函數的基本性質歸納如下：

指數函數性質

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若 $f(x)=a^x$（x 為實數），則

⑴　f 的定義域為全部實數，值域為所有正實數。

⑵　對於任意實數 x_1、x_2，恆有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\times f(x_2)$。

⑶　$y=a^x$ 的圖形恆過點 $(0\ ,\ 1)$，且在 x 軸的上方。

⑷　平行於 x 軸且在 x 軸上方的任一直線，與 $y=a^x$ 的圖形恰交於一個點。

⑸　當 $a>1$ 時：$f(x)=a^x$ 為嚴格增函數，$y=a^x$ 的圖形由左而右，逐漸升高，愈往右邊升高得愈快，愈往左邊則圖形愈接近 x 軸。

⑹　當 $0<a<1$ 時：$f(x)=a^x$ 為嚴格減函數，$y=a^x$ 的圖形由左而右，逐漸下降，愈往左邊升高得愈快，愈往右邊則圖形愈接近x 軸。

⑺　$y=a^x$ 的圖形與 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸。

4-2.2 指數方程式與指數不等式

方程式中的未知數出現在指數部分，稱為指數方程式。由指數函數的圖形，我們知道當 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$b>0$ 時，$y=b$（即平行 x 軸且在 x 軸上方的水平線）與 $y=a^x$ 的圖形恰有一個交點，表示方程式 $a^x=b$ 的 x 有唯一的

解，亦即當 $a^{\alpha}=a^{\beta}$ 時，可得 $\alpha=\beta$。利用此一性質，我們可以用來求指數方程式的解。

小考箱

(　) 3. 設 $a>0$，對於實數 x、y，若 $a^{x}=a^{y}$，則 $x=y$。

例題 3

試求下列各式的 x 值：

(1) $(3^{x})^{4}=81^{3}$　　(2) $(2^{4-x})^{x}=16$

解 (1) 因為 $(3^{x})^{4}=3^{4x}$，又 $81^{3}=(3^{4})^{3}=3^{12}$

則原方程式可化為 $3^{4x}=3^{12}$

故得 $4x=12$，所以 $x=3$

(2) 因為 $(2^{4-x})^{x}=2^{(4-x)x}$，又 $16=2^{4}$

則原方程式可化為 $2^{(4-x)x}=2^{4}$

故得 $(4-x)x=4$

整理得 $x^{2}-4x+4=0$

亦即 $(x-2)^{2}=0$，所以 $x=2$

隨堂練習

試求滿足 $(2^{m})^{2}=16$ 且 $3^{n-m}=\frac{1}{27}$ 的 m、n 值。

例題 4

求方程式 $2^{2x}+2^{x+1}-80=0$ 的解。

解 因為 $2^{2x}=(2^{x})^{2}$

又 $2^{x+1}=2^{x}\times 2^{1}=2\times(2^{x})$

則方程式 $2^{2x}+2^{x+1}-80=0$ 可化為

$(2^{x})^{2}+2\times(2^{x})-80=0$

由十字交乘得 $(2^x+10)(2^x-8)=0$

故得 $2^x=-10$ 或 $2^x=8$

但是 $2^x=-10$ 不合（因為 2^x 恆為正數）

即 $2^x=8=2^3$

所以 $x=3$

隨堂練習

解方程式 $3^{2x}-7\times3^x-18=0$。

觀察指數函數 $y=a^x$ 的圖形，我們發現：當底數 $a>1$ 時，y 值隨著 x 值的增加而變大；當 $0<a<1$ 時，y 值隨著 x 值的增加反而變小，如下圖 4-4 所示。

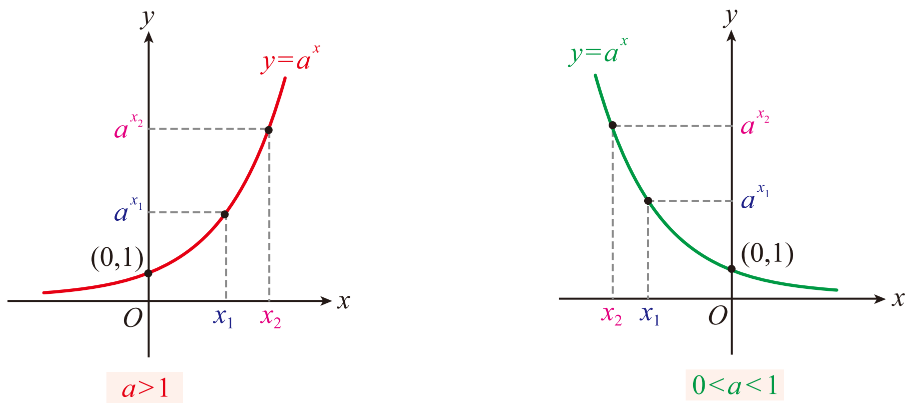


圖 4-4

因此，可以得到指數不等關係如下：

指數不等關係

設 x_1、x_2 為任意實數

(1) 當 $a>1$ 時：$a^{x_1}<a^{x_2} \Leftrightarrow x_1<x_2$

(2) 當 $0<a<1$ 時：$a^{x_1}<a^{x_2} \Leftrightarrow x_1>x_2$

例題 5

試比較下列各組數的大小關係：

(1) $(0.9)^{-3}$，$(0.9)^{4}$，$(0.9)^{\frac{1}{2}}$，$(0.9)^{\sqrt{3}}$　(2) $\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[4]{27}$，$3^{\frac{1}{3}}$

解 (1) 因為底數為 0.9，且 $0<0.9<1$

又 $4>\sqrt{3}>\dfrac{1}{2}>-3$

所以$(0.9)^{4}<(0.9)^{\sqrt{3}}<(0.9)^{\frac{1}{2}}<(0.9)^{-3}$

(2) $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$

因為底數為 3，且 $3>1$

又 $\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}$

所以 $3^{\frac{3}{4}}>3^{\frac{2}{3}}>3^{\frac{1}{2}}>3^{\frac{1}{3}}$

故得 $\sqrt[4]{27}>\sqrt[3]{9}>\sqrt{3}>3^{\frac{1}{3}}$

隨堂練習

比較下列各組的大小關係：

(1) $(\sqrt{2})^{3}$，$(\sqrt{2})^{0.5}$，$(\sqrt{2})^{-0.5}$，$(\sqrt{2})^{0}$

(2) $(0.01)^{-4}$，$(0.01)^{3}$，$(0.01)^{\sqrt{2}}$，$(0.01)^{-1}$

例題 6

解下列各不等式：(1) $3^{x-10}<\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x+2}$　(2) $(0.2)^{5x-3}>0.008$

解 (1) $3^{x-10}<\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x+2}$

因為 $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x+2}=(3^{-3})^{x+2}=3^{-3(x+2)}$

故得 $3^{x-10}<3^{-3(x+2)}$

又底數 3 大於 1，因此得 $x-10<-3(x+2)$

化簡得 $4x<4$，所以 $x<1$

(2) $(0.2)^{5x-3} > 0.008$

因為 $0.008 = (0.2)^3$，故得 $(0.2)^{5x-3} > (0.2)^3$

又底數 0.2 介於 0 與 1 之間，所以 $5x - 3 < 3$

即 $5x < 6$，故得 $x < \dfrac{6}{5}$

隨堂練習

求不等式 $2^{x+2} > 4^{11-x}$ 的解。

例題 7

某電子科技公司每年的年產值穩定以 k % 成長，已知該公司民國 88 年的年產值為 2.5 億元，民國 97 年的年產值為 20 億元，試問該公司民國 94 年的年產值。

解 民國 88 年的年產值為 2.5 億元

又每年的年產值穩定以 k% 成長

故得民國 97 年的年產值應為 $2.5 \times (1 + k\%)^9$ 億元

亦即 $2.5 \times (1 + k\%)^9 = 20$

化簡得 $(1 + k\%)^9 = 8$

所以該公司民國 94 年的年產值為

$$2.5 \times (1 + k\%)^6 = 2.5 \times [(1 + k\%)^9]^{\frac{2}{3}} = 2.5 \times 8^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2.5 \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2.5 \times 2^2$$

$$= 10 \text{（億元）}$$

隨堂練習

煒倫四年前買了一輛新車，買價 150 萬元，該汽車每年以前一年車價的 20 % 折舊，現在煒倫想用這輛車再換新車，試問舊車可抵多少錢？（萬元以下四捨五入）

習題 4-2

1. 試作下列各函數的圖形：

 (1) $y=4^x$　　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

2. 試作 $y=-2^x$ 的圖形，並與 $y=2^x$ 的圖形加以比較。

3. 試求滿足下列各式的 x 值：

 (1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-3}$　　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}=9^{2x+19}$

4. 解指數方程式 $3^{2x}-4\times3^x-45=0$。

5. 解指數方程式 $2^{2x+1}-33\times2^{x-1}+4=0$。

 《提示》$2^{2x+1}=2^1\times2^{2x}=2\times(2^x)^2$；$2^{x-1}=2^{-1}\times2^x=\frac{1}{2}\times(2^x)$

6. 試比較下列各組數的大小關係：

 (1) $(0.7)^5$，$(0.7)^{-3}$，$(0.7)^{\frac{1}{2}}$，$(0.7)^{-\frac{1}{2}}$

 (2) $(\sqrt{5})^{-3}$，$(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}$，$(\sqrt{5})^{-\frac{1}{4}}$，$(\sqrt{5})^0$

7. 試比較 $\sqrt{2}$，$\sqrt[4]{8}$，$\sqrt[5]{16}$ 的大小關係。

 《提示》$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$；$\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}$；$\sqrt[5]{16}=\sqrt[5]{2^4}=2^{\frac{4}{5}}$

8. 解下列各指數不等式：

 (1) $(0.1)^{x+1}>(0.01)^{1-2x}$　　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}>9^{x+1}$

4-3　對數的運算與意義

4-3.1　對數的意義

在前面指數的討論中，我們知道若給定底數 5，則 5 的 3 次方為 125，即 $5^3 = 125$。但是，如果反過來想知道 125 是 5 的幾次方時，我們會考慮其答案應為 $5^x = 125$ 的解，而方程式 $5^x = 125$ 只有一個解，所以 x 就等於 3。

特別說明　設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，$b > 0$，則方程式 $a^x = b$ 有唯一的一個解，我們已在 4-2 節指數函數及其圖形的討論中加以說明。

對於方程式 $5^x = 10$ 的唯一解 x，相當於 10 是 5 的幾次方？因為在此我們無法寫出 x 的精確值，所以就用符號 $\log_5 10$ 來表示 x。

一般而言，若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，當 $a^x = b$ 時，我們以符號 $\log_a b$ 來表示 x，即 $\log_a b = x$，並將 $\log_a b$ 念作「以 a 為底數時，b 的對數」，其中 b 稱為真數。反過來說，如果 $\log_a b = x$，則 $a^x = b$。

小幫手

$\log_a b$　b → 真數　a → 底數

定　義

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，$b > 0$，則

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$$

小幫手

$\log_{■} ● = ▲ \iff ■^{▲} = ●$

小考箱

（　）4. 設 x 為實數，當 $2^x = 3$ 時，則 $\log_2 3 = x$。

特別說明

(1) 在討論指數 a^x 時，限制 $a>0$，所以在定義對數時，我們也要設 $a>0$，因此 a^x 恆為正數，又 $b=a^x$，所以只有真數 $b>0$ 時，對數才有意義。

(2) 當底數 $a=1$ 時，因為 $1^x=1$，x 可為任意實數，若按照對數的定義，則 $\log_1 1$ 到底應該等於哪一個實數呢？無法確定其值，因此我們規定 $\log_a b$ 的底數 a，除了限制 $a>0$ 外，還必須 $a\neq 1$。

例題 1

下列各式何者無意義？何者有意義？

(1) $\log_{(-2)}3$　(2) $\log_1 5$　(3) $\log_2 8$

(4) $\log_3(-9)$　(5) $\log_7 1$　(6) $\log_4 0$

解 (1) $\log_{(-2)}3$ 因底數 $-2<0$，故無意義

(2) $\log_1 5$ 因底數為 1，故無意義

(3) $\log_2 8$ 因底數 $2>0$ 且不等於 1，真數 $8>0$，故有意義

(4) $\log_3(-9)$ 因真數 $-9<0$，故無意義

(5) $\log_7 1$ 因底數 $7>0$ 且不等於 1，真數 $1>0$，故有意義

(6) $\log_4 0$ 因真數為 0，故無意義

隨堂練習

設 x 為整數，若$\log_{x-2}(15-3x)$有意義，試求 x 的值。

例題 2

試求下列各值：

(1) $\log_8 2$　(2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$　(3) $\log_4\sqrt{2}$

解 (1) 設$\log_8 2=x$，則 $8^x=2$

$\Rightarrow\ 2^{3x}=2^1\ \Rightarrow\ 3x=1\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{3}$

故得 $\log_8 2=\frac{1}{3}$

(2)　設 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = y$，則 $\left(\frac{1}{3}\right)^y = 9$

$\Rightarrow\quad 3^{-y} = 3^2 \quad\Rightarrow\quad -y = 2 \quad\Rightarrow\quad y = -2$

故得 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

(3)　設 $\log_4 \sqrt{2} = z$，則 $4^z = \sqrt{2}$

$\Rightarrow\quad 2^{2z} = 2^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad 2z = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad z = \frac{1}{4}$

故得 $\log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4}$

隨堂練習

試求下列各值：(1)　$\log_7 \sqrt[3]{49}$　　(2)　$\log_8 32$　　(3)　$\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25}$

4-3.2　對數的性質

利用指數律及對數的定義，我們可以導出下列的對數基本性質：

公　式

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，M、N 為正實數，r 為實數且 $r \neq 0$，則

(1)　$\log_a 1 = 0$；$\log_a a = 1$

(2)　$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

(3)　$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(4)　$\log_a M^r = r\log_a M$；$\log_{a^r} M = \frac{1}{r}\log_a M$

(5)　$\log_a a^r = r$；$a^{\log_a M} = M$

(6)　（換底公式）：$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$（其中 b 為異於 1 的正數）

【說明】(1)　因為 $a^0 = 1$，$a^1 = a$，

由對數定義得 $\log_a 1 = 0$，$\log_a a = 1$

(2) 令 $\log_a M = x$，$\log_a N = y$

則 $M = a^x$，$N = a^y \Rightarrow MN = a^x \times a^y = a^{x+y}$

由對數定義知：$\log_a MN = x + y = \log_a M + \log_a N$

(3) 令 $\log_a M = x$，$\log_a N = y$

則 $M = a^x$，$N = a^y \Rightarrow \dfrac{M}{N} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

由對數定義知：$\log_a \dfrac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$

(4) 令 $\log_a M = x$，則 $M = a^x$

$\Rightarrow M^r = (a^x)^r = a^{rx}$，$M = a^x = (a^r)^{\frac{x}{r}}$

由對數定義知：

$\log_a M^r = rx = r\log_a M$

$\log_{a^r} M = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{r} \times x = \dfrac{1}{r}\log_a M$

(5) 由性質(4)知：

$\log_a a^r = r\log_a a = r \times 1 = r$

令 $\log_a M = x$，由對數定義知：$a^x = M$

即 $a^{\log_a M} = M$

(6) 令 $\log_b M = x$，$\log_b a = y$

則 $M = b^x$，$a = b^y \Rightarrow a^{\frac{x}{y}} = (b^y)^{\frac{x}{y}} = b^x = M$

由對數定義知：$\log_a M = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

小考箱

(　　) 5. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，則 $\log_a(8 \times 9) = \log_a 8 + \log_a 9$，$\log_a \dfrac{3}{5} = \log_a 3 \div \log_a 5$。

特別說明

由上述對數的基本性質，我們還可以導出下列常用公式：設 a、b、c 為異於 1 的正數，$M>0$，$d>0$，r、s 為實數且 $r\neq 0$，則

(7) $\log_a \dfrac{1}{M} = -\log_a M$

(8) $(\log_a b)(\log_b a) = 1$（即 $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$）

(9) $\log_{a^r} M^s = \dfrac{s}{r}\log_a M$

(10) $(\log_a b)(\log_b c)(\log_c d) = \log_a d$

例題 3

化簡下列各式：

(1) $\log_3 0.9 + \log_3 12 - \log_3 0.4$

(2) $\log_{10} 6 - 3\log_{10} 2 - \log_{10} 75$

解 (1) $\log_3 0.9 + \log_3 12 - \log_3 0.4$

$= \log_3 \dfrac{0.9\times 12}{0.4}$ …對數性質(2)(3)

$= \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$ ……對數性質(5)

(2) $\log_{10} 6 - 3\log_{10} 2 - \log_{10} 75$

$= \log_{10} 6 - \log_{10} 2^3 - \log_{10} 75$ ……對數性質(4)

$= \log_{10} \dfrac{6}{2^3\times 75}$ …對數性質(2)(3)

$= \log_{10} \dfrac{1}{100} = \log_{10} 10^{-2} = -2$ ……對數性質(5)

隨堂練習

化簡下列各式：

(1) $\log_2 4 - \log_2 \sqrt{3} + \log_2 \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\log_2 6 + \log_2 12 - 2\log_2 3$

例題 4

化簡下列各式：

(1) $3^{\log_3 2+\log_3 5}$

(2) $\log_3\frac{1}{27}-\log_2\frac{1}{16}$

(3) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

(4) $\log_8 9\times\log_9 10\times\log_{10}11\times\cdots\times\log_{15}16$

解 (1) $3^{\log_3 2+\log_3 5}$

$=3^{\log_3(2\times5)}$ ……對數性質(2)

$=2\times5=10$ ……對數性質(5)

(2) $\log_3\frac{1}{27}-\log_2\frac{1}{16}$

$=(-\log_3 27)-(-\log_2 16)$ ……對數性質(7)

$=(-\log_3 3^3)+\log_2 2^4$

$=(-3)+4$ ……對數性質(5)

$=1$

(3) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

$=(\log_2 3+\log_{2^2}3^2)(\log_3 2^2+\log_{3^2}2)$

$=(\log_2 3+\log_2 3)(2\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2)$ …對數性質(9)(4)

$=(2\log_2 3)\left(\frac{5}{2}\log_3 2\right)$

$=2\times\frac{5}{2}\times1$ ……對數性質(8)

$=5$

(4) $\log_8 9\times\log_9 10\times\log_{10}11\times\cdots\times\log_{15}16$

$=\log_8 16$ ……對數性質(10)

$=\log_{2^3}2^4=\frac{4}{3}\log_2 2$ ……對數性質(9)

$=\frac{4}{3}$

隨堂練習

化簡下列各式：

(1)　$2^{\log_2 30-\log_2 5}$

(2)　$\left(\log_5 \dfrac{1}{125}\right)\left(\log_6 \dfrac{1}{36}\right)$

(3)　$(\log_2 125+\log_8 5)(\log_5 64+\log_{25} 8)$

(4)　$\log_5 4\times\log_{27} 5\times\log_4 9$

例題 5

已知$\log_{10} 2=a$，$\log_{10} 3=b$，試以 a、b 表示$\log_{12} 180$的值。

解　利用換底公式

$$\log_{12} 180=\frac{\log_{10} 180}{\log_{10} 12}=\frac{\log_{10}(10\times2\times3^2)}{\log_{10}(2^2\times3)}$$

$$=\frac{\log_{10} 10+\log_{10} 2+\log_{10} 3^2}{\log_{10} 2^2+\log_{10} 3}$$

$$=\frac{1+\log_{10} 2+2\log_{10} 3}{2\log_{10} 2+\log_{10} 3}$$

$$=\frac{1+a+2b}{2a+b}$$

隨堂練習

已知 $\log_{10} 2=a$，$\log_{10} 3=b$，試以 a、b 表示下列各值：

(1)　$\log_{10} 240$

(2)　$\log_{10} \dfrac{4}{3}$

(3)　$\log_{10} \sqrt{6}$

習題 4-3

1. 試求下列各 x 值：

(1) $\log_8 x=-\dfrac{1}{3}$　(2) $\log_x 4\sqrt{2}=5$　(3) $\log_{\sqrt{3}} x=6$

2. 試求下列各值：

(1) $\log_{27}3$　(2) $\log_{\sqrt{2}}16$　(3) $\log_9\sqrt{3}$

3. 化簡下列各式：

(1) $\log_{10}[\log_3(\log_2 8)]$

(2) $\log_2\sqrt{2}+\log_5\sqrt[3]{25}+\log_8\dfrac{1}{2}$

(3) $3\log_{10}5+\log_{10}12-\log_{10}15$

(4) $(\log_{\frac{1}{3}}4)\times(\log_8 9)$

(5) $\log_4 7\times\log_7 11\times\log_{11}25\times\log_{25}32$

(6) $(\log_9 4+\log_3 8)\times(\log_{16}27-\log_4 3)$

4. 設$\log_{10}2=a$，$\log_{10}3=b$，$\log_{10}7=c$，試以 a、b、c 表示下列各值：

(1) $\log_{10}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\log_{10}35$　(3) $\log_{10}\dfrac{\sqrt{7}}{12}$

5. 設 a、b、c 為異於 1 的正數且滿足 $abc=1$，試求 $\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c a+\log_c b$ 的值。

《提示》因為 $abc=1$，故得$bc=\dfrac{1}{a}$，$ca=\dfrac{1}{b}$，$ab=\dfrac{1}{c}$。

4-4 對數函數及其圖形

4-4.1 對數函數的圖形

在 4-3 節對數的討論中，我們知道，當 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 時，對於任一正實數 x，$\log_a x$ 均有意義，如果視 x 為變數，則可將對數函數定義如下：

定　義

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函數 $f(x)=\log_a x$（$x>0$）稱為以 a 為底數的對數函數。

由對數性質 $\log_a(x_1\times x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$ 知，對數函數 $f(x)=\log_a x$ 有

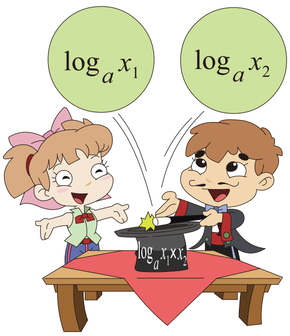
$f(x_1\times x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

的特性。

小考箱

（　）6. 設 $x>0$，函數 $f(x)=\log_a x$（其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$），若 $f(m)=7$，$f(n)=3$，則 $f(m\times n)=21$。

我們可以仿照描繪指數函數圖形的方法來描繪對數函數的圖形，並和 $y=a^x$ 的圖形作一個比較。



例題 1

試作 $y=\log_2 x$ 的圖形。

解 將 y 與 x 的對應關係列表如下：

x	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
y	…	-2	-1	0	1	2	3	…

當 $x\to+\infty$ 時，$y\to+\infty$

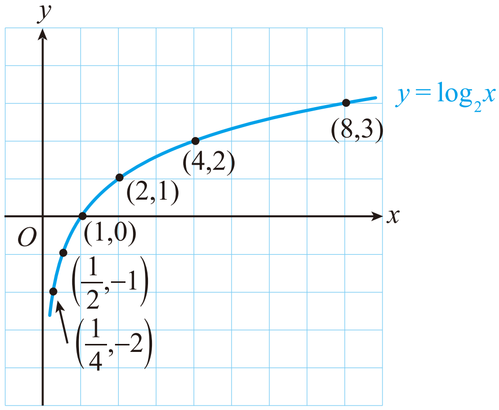
當 $x\to 0$ 時，$y\to-\infty$

將上表各對應數對描點，

用平滑曲線連接起來

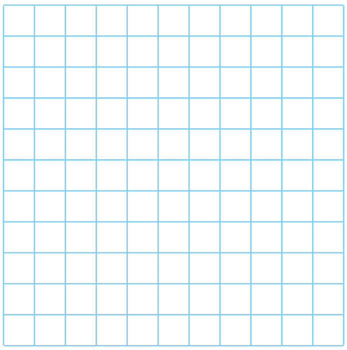
可得 $y=\log_2 x$ 的圖形，

如右圖所示



隨堂練習

試作 $y=\log_3 x$ 的圖形，並與 $y=\log_2 x$ 的圖形加以比較。



例題 2

試作 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的圖形。

解　將 y 與 x 的對應關係列表如下：

x	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
y	$\cdots$	2	1	0	-1	-2	-3	$\cdots$

當 $x\to+\infty$ 時，$y\to-\infty$

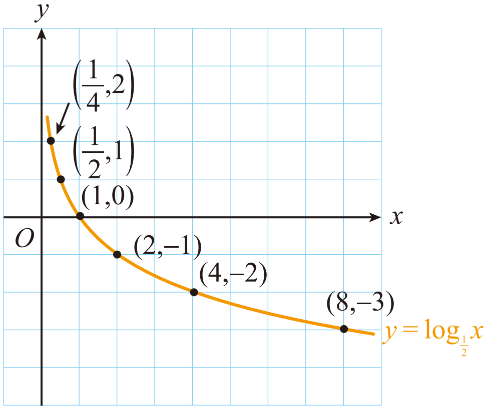
當 $x\to0$ 時，$y\to+\infty$

將上表各對應數對描點，

用平滑曲線連接起來

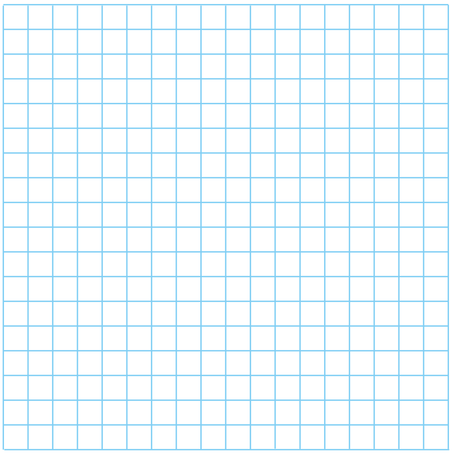
可得 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的圖形，

如右圖所示



隨堂練習

試作 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 的圖形，並與 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的圖形加以比較。



從例題 1、例題 2 中，我們可以看出 $y=\log_2 x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形具有下列之性質：

(1) 圖形均過點 $(1,0)$，且在 y 軸的右方。

(2) 平行 x 軸的任一直線與 $y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形都恰交於一個點。

(3) $y=\log_2 x$ 的圖形隨著 x 的變大，y 也變大，即當 $x_1<x_2$ 時，恆有 $\log_2 x_1<\log_2 x_2$。

(4) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形隨著 x 的變大，y 則變小，即當 $x_1<x_2$ 時，恆有 $\log_{\frac{1}{2}} x_1>\log_{\frac{1}{2}} x_2$。

現在我們來討論指數函數 $y=2^x$ 與對數函數 $y=\log_2 x$ 圖形的關係。將兩者畫在同一坐標平面上，如圖 4-5 所示。

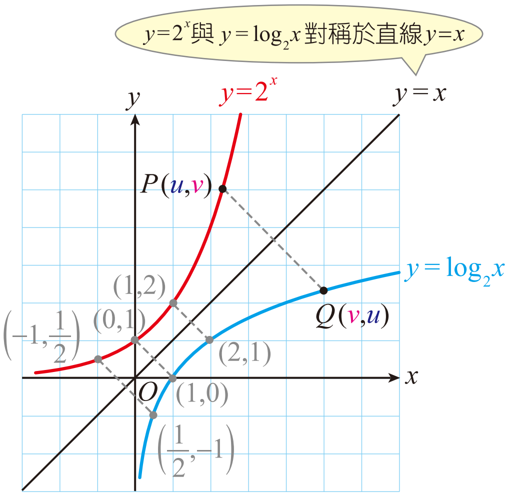


圖 4-5

設點 $P(u,v)$ 為 $y=2^x$ 的圖形上任一點，則 $v=2^u$，故得 $u=\log_2 v$，所以點 $Q(v,u)$ 必在 $y=\log_2 x$ 的圖形上，反之亦然。又 $P(u,v)$ 與 $Q(v,u)$ 兩點對稱於直線 $y=x$（亦即直線 $y=x$ 為線段 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線），所以 $y=2^x$ 與 $y=\log_2 x$ 圖形對稱於直線 $y=x$。同樣的，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形也對稱於直線 $y=x$，如下圖 4-6 所示。

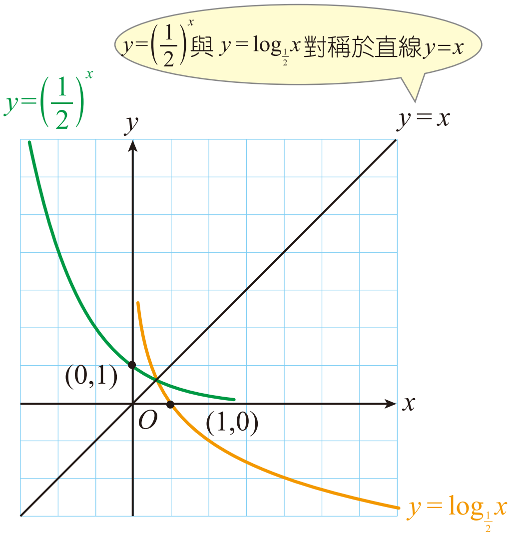


圖 4-6

一般而言，當底數 $a>1$ 時，$y=\log_a x$ 與 $y=\log_2 x$ 的圖形相類似，且都具有上述性質(1)、(2)和(3)；而當 $0<a<1$ 時，$y=\log_a x$ 則與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形相類似，且都具有上述性質(1)、(2)和(4)，如圖 4−7、圖 4−8 所示。

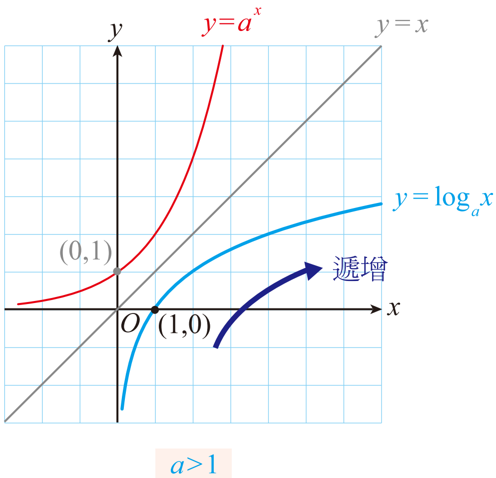


圖 4-7

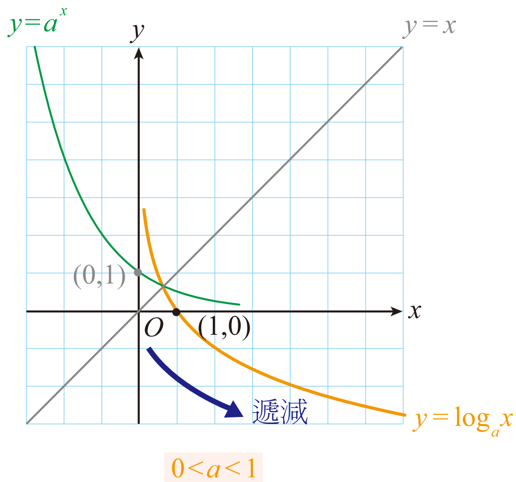


圖 4-8

在 4−2 節的討論中，我們知道函數 $y=2^x$ 與 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸，同樣觀察圖形，我們也可以得到函數 $y=\log_2 x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形對稱於 x 軸，如下圖 4−9 所示。

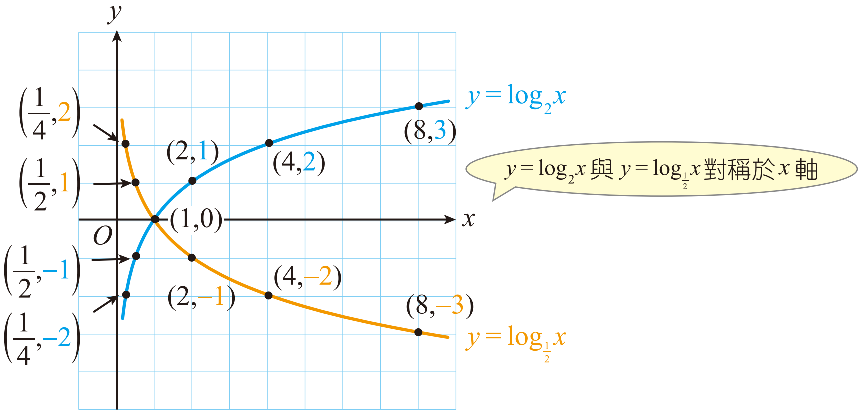


圖 4−9

由上面的討論，我們可以將對數函數的基本性質歸納如下：

對數函數性質

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若 $f(x)=\log_a x$（$x>0$），則

(1) f 的定義域為所有正實數，而值域為全部實數。

(2) 對於任意正數 x_1、x_2 恆有 $f(x_1\times x_2)=f(x_1)+f(x_2)$。

(3) $y=\log_a x$ 的圖形恆過點 $(1,0)$，且在 y 軸右方。

(4) 平行於 x 軸的任一直線，與 $y=\log_a x$ 的圖形恰交於一個點。

(5) 當 $a>1$ 時：$f(x)=\log_a x$ 為嚴格增函數，其函數圖形由左而右，逐漸升高，圖形愈往左邊則愈接近 y 軸。

(6) 當 $0<a<1$ 時：$f(x)=\log_a x$ 為嚴格減函數，其函數圖形由左而右，逐漸降低，圖形愈往左邊則愈接近 y 軸。

(7) $y=\log_a x$ 的圖形與 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 x 軸。

(8) $y=\log_a x$ 的圖形與 $y=a^x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$。

小考箱

(　　) 7. 函數 $y=\log_3 x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形對稱於 x 軸；而函數 $y=3^x$ 與 $y=\log_3 x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$。

4-4.2 對數方程式與對數不等式

凡未知數出現在對數的真數或底數的方程式，稱為對數方程式。由對數函數的圖形，我們知道平行 x 軸的任一直線與 $y=\log_a x$ 的圖形恰交於一個點，表示方程式 $\log_a x=b$ 的 x 有唯一的解，亦即當 $\log_a \alpha=\log_a \beta$ 時，可得 $\alpha=\beta$。利用此一性質，我們可以用來求對數方程式的解。

例題 3

解對數方程式 $\log_5(2x-1)+\log_5(x-3)=\log_5 18$。

解 由對數定義知 $2x-1>0$ 且 $x-3>0$

所以必須 $x>3$ 才有意義

原式 $\Rightarrow \log_5(2x-1)(x-3)=\log_5 18$

$\Rightarrow (2x-1)(x-3)=18$

$\Rightarrow 2x^2-7x-15=0$

$\Rightarrow (x-5)(2x+3)=0$

$\Rightarrow x=5$ 或 $x=-\dfrac{3}{2}$

但 $x>3$，因此 $x=-\dfrac{3}{2}$ 不合

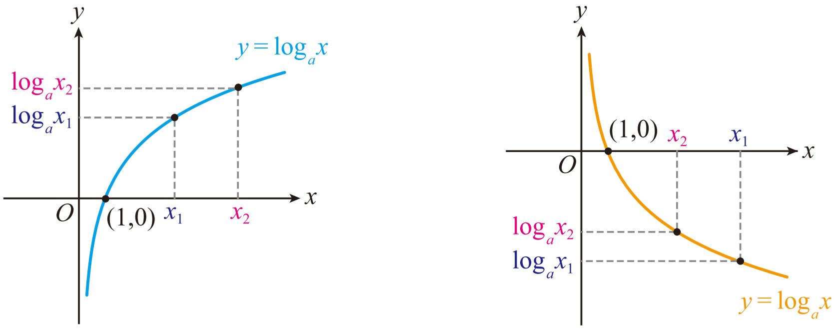
所以方程式的解為 $x=5$

隨堂練習

解對數方程式 $\log_{10}(x+\sqrt{6})+\log_{10}(x-\sqrt{6})=1$。

特別說明 對數方程式所得的解必須使原方程式有意義，即真數大於 0，底數大於 0 且不等於 1。

觀察對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形，我們發現：當底數 $a>1$ 時，y 值隨著 x 值的增加而變大；當 $0<a<1$ 時，y 值隨著 x 值的增加反而變小，如下圖 4−10 所示。



$a>1$　　　$0<a<1$

圖 4-10

因此，可以得到對數不等關係如下：

對數不等關係

設 x_1、x_2 為正實數

(1)　當 $a>1$ 時：$\log_a x_1<\log_a x_2 \ \Leftrightarrow\ x_1<x_2$

(2)　當 $0<a<1$ 時：$\log_a x_1<\log_a x_2 \ \Leftrightarrow\ x_1>x_2$

例題 4

試比較下列各組數的大小：

(1)　$\log_{0.3}5$，$\log_{0.3}\dfrac{1}{3}$，$\log_{0.3}1$　　(2)　$\log_5 4$，$\log_5\dfrac{1}{2}$，$\log_5\sqrt{10}$

解　(1)　因為 $0<$ 底數 $0.3<1$，又 $\dfrac{1}{3}<1<5$

所以 $\log_{0.3}\dfrac{1}{3}>\log_{0.3}1>\log_{0.3}5$

(2)　因為底數 $5>1$，又 $4>\sqrt{10}>\dfrac{1}{2}$

所以 $\log_5 4>\log_5\sqrt{10}>\log_5\dfrac{1}{2}$

隨堂練習

比較下列各組數的大小：

(1) $\log_7 10$，$\log_7\sqrt{70}$，$\log_7\dfrac{1}{7}$　　(2) $\log_{0.1}\dfrac{1}{10}$，$\log_{0.1}10$，$\log_{0.1}\sqrt{10}$

例題 5

解不等式 $\log_{\frac{2}{3}}(2x-3)>\log_{\frac{2}{3}}(x+4)$。

解 由對數定義知 $2x-3>0$ 且 $x+4>0$

所以必須 $x>\dfrac{3}{2}$ 才有意義……①

因為 $0<$ 底數 $\dfrac{2}{3}<1$

原式 $\Rightarrow$ $2x-3<x+4$

移項整理得 $x<7$……②

所以由①②得知不等式的解為 $\dfrac{3}{2}<x<7$

隨堂練習

解不等式 $\log_5(2-x)<\log_5 5x$。

習題 4-4

1. 試作下列各函數的圖形：

(1) $y=\log_4 x$ (2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

2. 試將 $y=\log_3 x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形描繪於同一坐標平面上，並加以比較。

3. 解下列各方程式：

(1) $\log_3(x^2-2x)=1$ (2) $\log_{\frac{1}{8}}(3x-5)=-\frac{2}{3}$

《提示》若 $\log_a f(x)=b$，則 $f(x)=a^b$ 。

4. 解下列各方程式：

(1) $\log_{10}(x-2)+\log_{10}(x+1)=1$

(2) $\log_2(x-3)=\log_4(x-1)$

《提示》$\log_2(x-3)=\log_{2^2}(x-3)^2=\log_4(x-3)^2$

5. 試比較下列各組數的大小關係：

(1) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}$，$\log_{\sqrt{2}}2$，$\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{4}$，$\log_{\sqrt{2}}5$

(2) $\log_{0.5}\frac{1}{3}$，$\log_{0.5}2$，$\log_{0.5}\frac{1}{5}$，$\log_{0.5}4$

6. 試比較下列各數的大小：

$\log_2\sqrt{10}$，2，$\log_2 2\sqrt{5}$，$\log_4 15$

7. 解下列各對數不等式：

(1) $\log_2(3x-1)>\log_2(4-2x)$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3)>\log_{\frac{1}{3}}2+\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$

4-5 常用對數及其應用

在數字的運算上，我們常採用十進位制，因此我們將以 10 為底的對數稱為常用對數，記作 $\log_{10}x$，或簡記為 $\log x$（將底數 10 省略不寫）。另外還有一種以無理數 $e = 2.71828\cdots$為底的對數，稱為自然對數，記作 $\log_e x$，或簡記為 $\ln x$。為了使用對數方便起見，這兩種對數均有人將其對數值列成表，便於參考查索。由於自然對數是在較深入的數學領域中探討，在此我們不予討論。本書僅就常用對數的真數從 1 到 9.99 間一些實數的對數值，列表（一般稱為常用對數表）於附錄中，以方便讀者參考查索。由於對數表中的數值均為近似值，因此本節中涉及對數求值計算中的「＝」均指「≒」。

4-5.1 常用對數表

現在，我們將對數表的使用，以例子說明如下。

例題 1

利用對數表，求下列各對數的近似值：

(1) $\log 7$　　(2) $\log 4.8$

解 (1) 先從表中 x 行找到「70」，再於 x 列中找到「0」，則由「70」的列與「0」的行相交的數值 8451，得 $\log 7 = 0.8451$。

$$y = \log x$$

x	0	1	2	3	$\cdots$
10					
11					
$\vdots$					
70	$\boxed{8451}$				

(2) 先從表中 x 行找到「48」，再於 x 列中找到「0」，則由「48」的列與「0」的行相交的數值 6812，得 $\log 4.8=0.6812$。

$$y=\log x$$

x	0	1	2	3	$\cdots$
10					
$\vdots$					
40					
$\vdots$					
48	$\boxed{6812}$				

隨堂練習

利用查表，求下列各對數的近似值：

(1) $\log 9.5$　　(2) $\log 3.46$

上面例題 1 所討論的，都是真數為小數點後面只有二位數字的。如果真數在小數點後面超過二位數字時，又應如何查表呢？（可用內插法，但本書不予討論），我們可利用對數表中的表尾差予以校正，用例題 2 來加以說明。

例題 2

利用查表，求下列各對數的近似值：

(1) $\log 2.783$　　(2) $\log 5.676$

解 (1) 用例題 1 的方法，先查出 $\log 2.78 = 0.4440$，再由 x 行為「27」的列，找出表尾差為「3」的數值是 5，則

$$\log 2.783 = \log 2.78 + 0.0005$$
$$= 0.4440 + 0.0005 = 0.4445$$

$y = \log x$

x	0	1	⋯	8	9	表尾差			
						1	2	3	⋯
10									
⋮									
27				4440				5	

(2) 先查出 $\log 5.67 = 0.7536$，再由 x 行為「56」的列，找出表尾差為「6」的數值是 5，則

$$\log 5.676 = \log 5.67 + 0.0005$$
$$= 0.7536 + 0.0005 = 0.7541$$

$y = \log x$

x	0	1	⋯	7	8	9	表尾差						
							1	2	3	4	5	6	⋯
10													
⋮													
56				7536								5	

隨堂練習

利用查表，求下列各對數的近似值：

(1) $\log 4.357$　　(2) $\log 7.623$

事實上，我們也可以利用電腦軟體或電算器來求對數值，一般電算器均只能按出自然對數及常用對數的對數值。

用電算器求對數值時，先按入真數值，再按 $\boxed{\log}$ 鍵，即可讀出常用對數值。

例如：（以使用具有十位數字的電算器為例）先按入 5，再按 $\boxed{\log}$ 鍵，電算器會顯示：$\boxed{0.698970004}$，即得 $\log 5 = 0.698970004$。同樣地，若按入 13，再按 $\boxed{\log}$ 鍵，電算器會顯示：$\boxed{1.113943352}$，即得 $\log 13 = 1.113943352$。

要用電算器來求真數的近似值，必須要有 $\boxed{x^y}$ 鍵的電算器才能進行，實際上就是在求指數值。

例如：欲求 $\log x = 0.8560$ 的真數 x，因為 $x = 10^{0.8560}$，故先輸入 10，再按 $\boxed{x^y}$ 鍵，然後輸入 0.8560，最後按執行鍵 $\boxed{\text{EXE}}$，則電算器會顯示：$\boxed{7.177942913}$，表示 $\log x = 0.8560$ 的真數 $x = 7.177942913$。

把電算器所按的數值四捨五入，取到小數點後四位，則所得的近似值，都與上述各例使用查表所得的數值相吻合。讀者可自行練習，再與前面各例題加以比較。

4-5.2 常用對數的首數及尾數

對於每一個正數 x，都可以表示成 $x = a \times 10^n$，其中 $1 \leq a < 10$，而 n 為一個整數，我們稱 $a \times 10^n$ 為 x 的科學記號。例如：

$273200 = 2.732 \times 10^5$

$0.00735 = 7.35 \times 10^{-3}$

在常用對數表中，真數 x 的範圍為 $1 \leq x < 10$，而對於一般非介於 1 與 10 之間的正數 x，若要求其對數值 $\log x$，則可透過科學記號來求出，觀察下面的幾個例子：

$\log 9730 = \log(9.73\times 10^3) = \log 10^3 + \log 9.73$

$= 3 + 0.9881 = 3.9881$

$\log 24.35 = \log(2.435\times 10) = \log 10 + \log 2.435$

$= 1 + 0.3865 = 1.3865$

$\log 0.0741 = \log(7.41\times 10^{-2}) = \log 10^{-2} + \log 7.41$

$= -2 + 0.8698$

$\log 0.154 = \log(1.54\times 10^{-1}) = \log 10^{-1} + \log 1.54$

$= -1 + 0.1875$

$\log 5.67 = 0.7536 = 0 + 0.7536$

$\log 10000 = \log 10^4 = 4 = 4 + 0$

其實，任何一個常用對數均可表示成整數及正純小數（或 0）的和。（正純小數部分可由查表求得）

設 $x > 0$，將其寫成科學記號 $x = a\times 10^n$（$1 \leq a < 10$，n 為整數），取其常用對數得

$\log x = \log(a\times 10^n) = n + \log a$

令 $\alpha = \log a$，因為 $1 \leq a < 10$，故得 $0 \leq \log a < 1$，亦即 $0 \leq \alpha < 1$。

定　義

$x > 0$，設 $\log x = n + \alpha$，其中 n 為整數，且 $0 \leq \alpha < 1$，則 n 稱為 x 的常用對數 $\log x$ 的 **首數** ，α 稱為 **尾數** 。

特別說明

$\log x = n$（首數）$+\alpha$（尾數）

(1) n 可以是正、負整數或 0。

(2) α 只能是正純小數或 0，不得為負。

例題 3

求下列各常用對數的首數及尾數：

(1) $\log A = 2.345$　(2) $\log B = -3.587$

解 (1) $\log A = 2.345$

$= 2 + 0.345$

故首數為 2，尾數為 0.345

(2) $\log B = -3.587$

$= (-3) + (-0.587)$

$= (-4) + (1 - 0.587)$

$= -4 + 0.413$

故首數為 -4，尾數為 0.413

隨堂練習

求下列各常用對數的首數及尾數：

(1) $\log A = 4.325$　(2) $\log B = -1.372$

一般而言，在 $\log x$ 中，真數 x 與首數 n 具有下列的性質：

(1) 若真數 $x > 1$ 且 x 的整數部分為 m 位數時，則首數 $n = m - 1$。

(2) 若真數 $x < 1$（即 $0 < x < 1$）且 x 在小數點後第 m 位以前均為 0，而第 m 位開始出現不為 0 的數字，則首數 $n = -m$。

小考箱

(　) 8. 已知 $\log A = 3.1416$，則真數 A 的整數部分為 4 位數。

例題 4

利用查表求下列各近似值：

(1) $\log 254000$　　(2) $\log 0.00385$

解 (1) $\log 254000 = \log(2.54 \times 10^{5})$

$= \log 10^{5} + \log 2.54$

$= 5 + \log 2.54$

由查表得知 $\log 2.54 = 0.4048$

故得 $\log 254000 = 5 + 0.4048 = 5.4048$

驗證：真數 254000 為 6 位數，故可推得首數為 $6 - 1 = 5$，與上面的結果相同。

(2) $\log 0.00385 = \log(3.85 \times 10^{-3})$

$= \log 10^{-3} + \log 3.85$

$= -3 + \log 3.85$

由查表得知 $\log 3.85 = 0.5855$

故得 $\log 0.00385 = -3 + 0.5855 = -2.4145$

驗證：真數 0.00385 在小數點後第 3 位開始出現不為 0 的數字，故可推得首數為 -3，與上面的結果相同。

隨堂練習

利用查表求下列各近似值：

(1) $\log 7835000$　　(2) $\log 0.000283$

4-5.3 常用對數的應用

利用對數可以化乘除為加減，化次方為乘法，在過去沒有電算器時，配合常用對數可以處理一些複雜的乘除運算。另外，銀行計算利息多採用複利計算，透過常用對數表查表計算後，就可以估算本利和有多少？以下舉一些常用對數應用的例子。

例題 5

12^{20} 乘開後為幾位數？

解 因為 $\log 12^{20} = 20\log 12 = 20\log(2^2 \times 3)$

$= 20(2\log 2 + \log 3)$

$= 20(2 \times 0.3010 + 0.4771)$

$= 21.582$

$\Rightarrow$ $\log 12^{20}$ 的首數為 21

所以 12^{20} 乘開後為 22 位數

隨堂練習

5^{40} 乘開後為幾位數？

例題 6

$\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$ 化為小數，則在小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

解 因為 $\log\left(\frac{1}{4}\right)^{50} = \log 2^{-100} = -100\log 2$

$= -100 \times 0.3010$

$= -30.1 = -31 + 0.9$

$\Rightarrow$ $\log\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$ 的首數為 -31

所以 $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$ 化為小數，在小數點後第 31 位開始出現不為 0 的數字

隨堂練習

$\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ 化為小數，則在小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

例題 7

已知 $\log 3 = 0.4771$，$\log 7 = 0.8451$，試求滿足 $\left(\frac{7}{3}\right)^n > 1000$ 的最小整數 n。

解 $\left(\frac{7}{3}\right)^n > 1000$ 兩邊分別取常用對數得

$$\log\left(\frac{7}{3}\right)^n > \log 1000$$

$$\Rightarrow\quad n(\log 7 - \log 3) > 3$$

$$\Rightarrow\quad n(0.8451 - 0.4771) > 3$$

$$\Rightarrow\quad 0.368n > 3$$

$$\Rightarrow\quad n > \frac{3}{0.368} = 8.152\cdots$$

故所求最小整數 $n = 9$

隨堂練習

已知 $\log 15 = 1.1761$，試求滿足 $15^n > 10^{15}$ 的最小整數 n。

例題 8

鈞昊在銀行存款 100000 元，銀行的存款年利率為 10 %，規定一年一期複利計算，問幾年後鈞昊在銀行存款的本利和會超過 300000 元？（已知 $\log 3 = 0.4771$，$\log 1.1 = 0.0414$）

解 設 n 年後本利和超過 300000 元，由複利的概念得

$100000(1 + 10\%)^n > 300000$

兩邊同除以 100000 得

$(1 + 10\%)^n > 3$

兩邊分別取常用對數得

$\log(1 + 10\%)^n > \log 3$

亦即 $n \times \log(1.1) > \log 3$

又 $\log 3 = 0.4771$，$\log 1.1 = 0.0414$

故得 $n \times 0.0414 > 0.4771$

即 $n > \dfrac{0.4771}{0.0414} = 11.524\cdots$

所以，12 年後鈞昊在銀行存款的本利和會超過 300000 元

隨堂練習

融哲將本金 P 元存入銀行，銀行存款的年利率為 7 %，規定一年一期複利計算，那麼經過幾年後，融哲在銀行存款的本利和會超過本金的兩倍？（已知 $\log 2 = 0.3010$，$\log 1.07 = 0.0294$）

習題 4-5

1. 利用查表，求下列各對數的近似值：

　(1) $\log 3.14$　(2) $\log 4.735$

　(3) $\log 6750$　(4) $\log 0.0123$

2. 已知 $\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，試求下列各近似值：

　(1) $\log 40$　(2) $\log 72$

　(3) $\log 0.036$　(4) $\log 2160$

3. 18^{10} 乘開後為幾位數？

4. 已知 $\log 7 = 0.8451$，則 $\left(\frac{1}{7}\right)^{10}$ 化為小數，在小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

5. 試比較 15^{16} 與 16^{15} 兩數的大小。

　《提示》計算 $\log 15^{16}$ 與 $\log 16^{15}$ 的值。

6. 試求滿足 $5^n > 10^{20}$ 的最小正整數 n。

　《提示》將原式兩邊同取對數。

7. 本金 50000 元存入銀行，年利率為 5 %，規定一年一期複利計算，則 25 年後共可得本利和多少元？（已知 $\log 5 = 0.6990$，$\log 1.05 = 0.0212$，$\log 1.694 = 0.2290$）

本章彙總

4-1 重點

1. 正整數的指數律：a、b 為實數，m、n 為正整數，則

   (1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$　(2) $(a^m)^n = a^{m\times n}$　(3) $(ab)^n = a^n \times b^n$

2. 設 a 為實數，且 $a \neq 0$，m、n 為正整數，則

   (1) $a^0 = 1$　(2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$　(3) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. 設 $a > 0$，n 為正整數，m 為整數，則

   (1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$　(2) $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

4. 有理數的指數律：$a > 0$，$b > 0$ 且 r、s 為有理數，則

   (1) $a^r \times a^s = a^{r+s}$　(2) $(a^r)^s = a^{r\times s}$　(3) $(ab)^r = a^r \times b^r$

4-2 重點

1. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，x 為實數，則 $f(x) = a^x$ 稱為以 a 為底數的指數函數。

2. 指數函數圖形：$y = a^x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$，x 為實數）

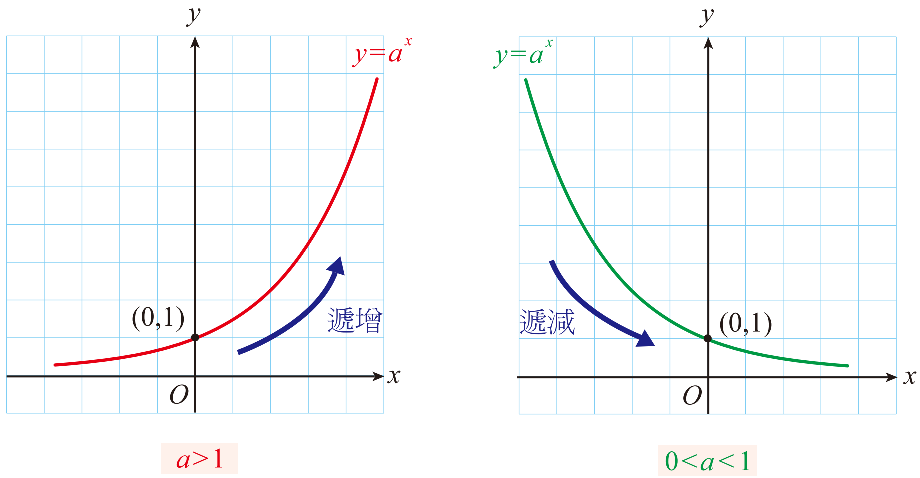


圖 4-11　圖 4-12

本 章 彙 總

(1) 圖形恆過定點 $(0,1)$，且在 x 軸上方。

(2) 當 $a>1$ 時，f 為嚴格增函數；當 $0<a<1$ 時，f 為嚴格減函數。

(3) $y=a^x$ 的圖形與 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸。

3. 設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若 $a^{\alpha}=a^{\beta}$，則 $\alpha=\beta$。

4. 指數不等關係：設 x_1、x_2 為實數

(1) 當 $a>1$ 時：$a^{x_1}<a^{x_2} \Leftrightarrow x_1<x_2$

(2) 當 $0<a<1$ 時：$a^{x_1}<a^{x_2} \Leftrightarrow x_1>x_2$

4-3 重點

1. $\log_a b$ 有意義：底數 $a>0$ 且 $a\neq 1$；真數 $b>0$。

2. 對數的定義：設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$b>0$，則

$\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b$

3. 對數運算性質：

設 a、b、c 為異於 1 的正實數，M、N、d 均為正實數，r、s 為實數且 $r\neq 0$，則

(1) $\log_a 1=0$；$\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^r=r\log_a M$；$\log_{a^r} M=\dfrac{1}{r}\log_a M$

(5) $\log_a a^r=r$；$a^{\log_a M}=M$

(6) （換底公式）：$\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

(7) $\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M$

(8) $(\log_a b)(\log_b a) = 1$（即 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$）

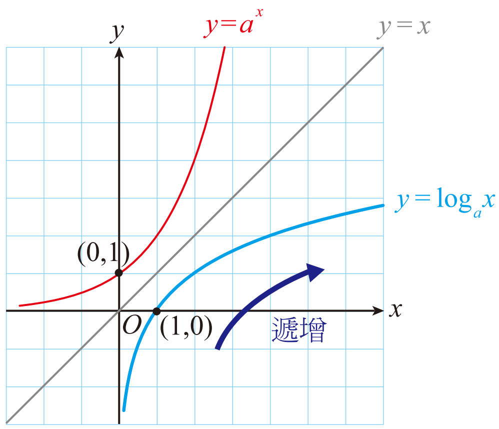
(9) $\log_{a^r} M^s = \frac{s}{r}\log_a M$

(10) $(\log_a b)(\log_b c)(\log_c d) = \log_a d$

4-4 重點

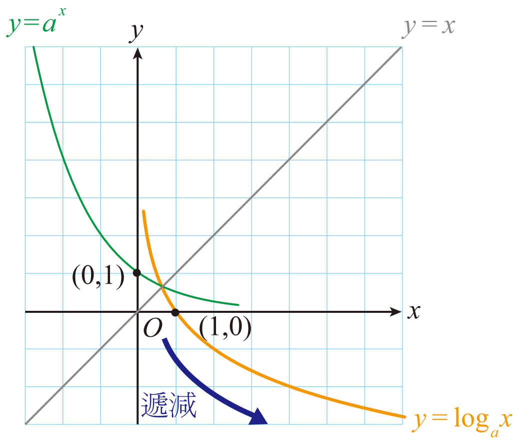
1. 設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$x>0$，則 $f(x)=\log_a x$ 稱為以 a 為底數的對數函數。

2. 對數函數圖形：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，$x>0$）



$a>1$

圖 4-13



$0<a<1$

圖 4-14

(1) 圖形恆過定點 $(1, 0)$，且在 y 軸的右方。

(2) 當 $a>1$ 時，f 為嚴格增函數；當 $0<a<1$ 時，f 為嚴格減函數。

(3) $y=\log_a x$ 的圖形與 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 x 軸。

(4) $y=\log_a x$ 的圖形與 $y=a^x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$。

3. 設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，α、β 為正數，若 $\log_a\alpha=\log_a\beta$，則 $\alpha=\beta$。

本章彙總

4. 對數不等關係：設 x_1、x_2 為正實數

 ⑴ 當 $a>1$ 時：$\log_a x_1<\log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1<x_2$

 ⑵ 當 $0<a<1$ 時：$\log_a x_1<\log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1>x_2$

4-5 重點

1. 學習使用常用對數表，查對數值。

2. 對於每一個正數 x，都可以表示成 $x=a\times10^n$，其中 $1\leq a<10$，而 n 為一個整數，我們稱 $a\times10^n$ 為 x 的科學記號。

3. $\log x=n$（首數）$+\alpha$（尾數）（其中 n 為整數，$0\leq\alpha<1$）

 ⑴ 若真數 $x>1$且 x 的整數部分為 m 位數時，則首數 $n=m-1$。

 ⑵ 若真數 $x<1$（即 $0<x<1$）且 x 在小數點後第 m 位以前均為 0，而第 m 位開始出現不為 0 的數字，則首數 $n=-m$。

自我評量

(　　) 1. $\left(\dfrac{81}{16}\right)^{-0.25}=$　(A)$\dfrac{9}{4}$　(B)$\dfrac{4}{9}$　(C)$\dfrac{3}{2}$　(D)$\dfrac{2}{3}$。【4-1】

(　　) 2. 化簡 $(a^{-3})^2\times a^2\times a^3$ 得　(A)a^{14}　(B)a^{12}　(C)1　(D)$\dfrac{1}{a}$。【4-1】

(　　) 3. 化簡$(2-\sqrt{3})^8(2+\sqrt{3})^{10}$得　(A)$17+8\sqrt{3}$　(B)$12+6\sqrt{3}$　(C)$7+4\sqrt{3}$　(D)$12-4\sqrt{3}$。【4-1】

(　　) 4. 設 a 為正數，則$\dfrac{\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}=$　(A)$a^{\frac{3}{4}}$　(B)$a^{\frac{2}{3}}$　(C)$a^{\frac{1}{3}}$　(D)$a^{-\frac{1}{3}}$。【4-1】

(　　) 5. 若 $a^{2x}=3$，則 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}=$　(A)$\dfrac{7}{3}$　(B)$\dfrac{10}{3}$　(C)$\dfrac{13}{3}$　(D)$\dfrac{17}{3}$。【4-1】

《提示》 $a^{3x}-a^{-3x}=(a^x)^3-(a^{-x})^3=(a^x-a^{-x})(a^{2x}+a^x\times a^{-x}+a^{-2x})$

(　　) 6. $a>0$ 且 $a\neq1$，關於 $f(x)=a^x$ 圖形的敘述，下列何者正確？　(A)圖形在 y 軸右方　(B)恆過定點 $(1,0)$　(C)圖形在 x 軸上方　(D)為嚴格增函數。【4-2】

(　　) 7. 若 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x-7}$，則 $x=$　(A)4　(B)2　(C)-4　(D)-2。【4-2】

(　　) 8. 方程式 $2^{2x+3}-3\times2^{x+1}+1=0$ 之所有解的和為　(A)4　(B)2　(C)-1　(D)-3。【4-2】

(　　) 9. 設 $a=\sqrt{5}$、$b=\sqrt[4]{125}$、$c=\sqrt{5\sqrt[3]{5}}$、$d=\sqrt[6]{25}$，則 a、b、c、d 的大小關係為　(A)$b>c>a>d$　(B)$b>a>c>d$　(C)$c>b>a>d$　(D)$c>a>b>d$。【4-2】

(　　) 10. 不等式 $(0.25)^{x-2}<(0.5)^{x+3}$ 的解為　(A)$x<7$　(B)$x>7$　(C)$x>5$　(D)$x<5$。【4-2】

(　　) 11. $\log_{27}(\log_2 8)=$　(A)3　(B)-3　(C)1　(D)$\dfrac{1}{3}$。【4-3】

自我評量

(　　) 12. $\log_2\frac{1}{32}+\log_3 81+\log_5 125=$　(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5。　【4-3】

(　　) 13. 設$2^x=3^y=6$，則 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的值為　(A) 1　(B) 2　(C) -1　(D) -2。

《提示》$x=\log_2 6$，$y=\log_3 6$　【4-3】

(　　) 14. 化簡 $\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{127}{128}=$　(A) -6　(B) -7　(C) $\frac{1}{6}$　(D) $\frac{1}{7}$。　【4-3】

(　　) 15. 設 $\log_a 3=x$，$\log_a 5=y$，$\log_a 7=z$，則以 x、y、z 表示 $\log_a\frac{63}{125}=$

(A) $2x-3y+z$　(B) $3x-2y+z$　(C) $x-3y+2z$　(D) $2x-5y+z$。

《提示》$\log_a\frac{63}{125}=\log_a\frac{3^2\times 7}{5^3}=\log_a 3^2+\log_a 7-\log_a 5^3$　【4-3】

(　　) 16. 設 x、y 均爲正數，且 $x\neq 1$、$\frac{1}{2}$，若 $(\log_2 x)(\log_x 2x)(\log_{2x} y)=-3$，則 $y=$　(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{4}$　(C) $\frac{1}{6}$　(D) $\frac{1}{8}$。　【4-3】

(　　) 17. 下列哪一個函數的圖形與 $y=\log_3 x$ 的圖形對稱於直線 $x-y=0$？

(A) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$　(B) $y=3^{-x}$　(C) $y=3^x$　(D) $y=-3^x$。　【4-4】

(　　) 18. $\log_3(x+2)=3$，則 $x=$　(A) 7　(B) 25　(C) 27　(D) 30。　【4-4】

(　　) 19. 對數方程式 $\log_2 x+2\log_4 x^2+\frac{3}{2}=0$，則 $x=$　(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $2\sqrt{2}$。　【4-4】

《提示》$\log_4 x^2=\log_{2^2} x^2=\log_2 x$

(　　) 20. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 的解為　(A) $x<4$　(B) $x>4$

(C) $0<x<4$　(D) $\frac{3}{2}<x<4$。　【4-4】

(　　) 21. 滿足 $0 \leq \log_3(\log_2 x) \leq 1$ 的整數 x 共有　(A)8　(B)7　(C)6　(D)5　個。

《提示》原式可化為 $\log_3 1 \leq \log_3(\log_2 x) \leq \log_3 3$。　【4－4】

(　　) 22. 已知 $\log 3.49 = 0.5428$，若 $\log A = 3.5428$，則 $A =$　(A)34.9　(B)349　(C)3490　(D)34900。　【4－5】

(　　) 23. 已知 $\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，則 6^{20} 乘開後為　(A)15　(B)16　(C)17　(D)18　位數。　【4－5】

(　　) 24. 已知 $\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，則滿足 $\left(\frac{6}{5}\right)^n > 100$ 的最小整數 n 為　(A)24　(B)25　(C)26　(D)27。　【4－5】

(　　) 25. 已知 $\log 2 = 0.3010$，又長度 10^{-9} 公尺稱為 1 奈米，若頭髮的直徑為 d 公尺，而且 $\log d = -4.097$，則頭髮的直徑大約為　(A)8×10^4　(B)8×10^5　(C)4×10^5　(D)4×10^6　奈米。　【4－5】

《提示》$\log d = -4.097 = -5 + 0.903 = -5 + 3\times0.3010$