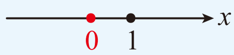
第 1 章
直線方程式

觀念銜接

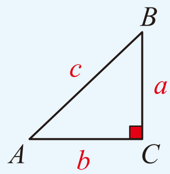
第 1 節

1. 數線：數線的基本要素包含原點、方向及單位長。

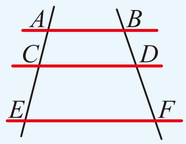


2. 絕對值：一個數的絕對值，就是在數線上代表這個數的點與原點的距離。
   當 $x \geq 0$ 時， $|x| = x$ ；當 $x < 0$ 時，$|x| = -x$。

3. 商高定理（畢氏定理）：任意直角三角形，其兩股的平方和等於斜邊的平方。如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\angle C = 90°$，則 $c^2 = a^2 + b^2$。

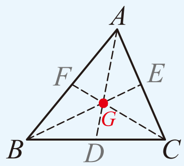


4. 平行線截等比例線段：如圖，若 $\overline{AB} // \overline{CD} // \overline{EF}$，則 $\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{DF}$。



5. 比例式：形如 $a : b = c : d$ 的等式（其中 b、d 不為 0），稱之為比例式。
   若 $a : b = c : d$，則 $ad = bc$。

6. 重心：三角形三邊的中線會交於一點，此點即為此三角形的重心。重心到一頂點的距離等於重心到對邊中點距離的 2 倍。如圖，G 為 $\triangle ABC$ 的重心，$\overline{AG}：\overline{GD}=2：1$。



第2節

1. 直線方程式：每一個二元一次方程式都有無限多組解，在坐標平面上連成的圖形為一直線，故稱二元一次方程式為直線方程式，其通式為 $ax+by+c=0$。

觀念澄清

(　　) 1. 數線上，愈往右邊數字愈大，愈往左邊數字愈小。

(　　) 2. 任何數的絕對值必大於 0。

(　　) 3. 二元一次方程式 $ax+by+c=0$，若 $c=0$，則圖形必過坐標平面的原點。

1-1 直角坐標

1-1.1 平面直角坐標

在國中時，我們已經學過數線，數線上任何一個點恰有一個實數來表示；反之，任何一個實數在數線上也恰有一個點來表示。以此觀念，我們很容易將平面上的點用兩條互相垂直的數線來表示，而建立起平面直角坐標。

在平面上取兩條互相垂直的直線，水平的直線為 x 軸，向右為正方向；鉛垂的直線為 y 軸，向上為正方向，這兩條直線的交點為原點。又任意取定一個單位長，而得出兩條互相垂直的數線，如圖 1−1 所示。

設 P 為平面上任一點，從 P 向 x 軸、y 軸作垂線，分別交 x 軸、y 軸於 A、B 兩點。若 A、B 兩點在 x 軸、y 軸上所對應的數分別為 a 和 b，則 P 點的坐標為 (a , b)，記作 $P(a , b)$，如圖 1−2 所示。a 稱為 P 點的橫坐標（x 坐標），b 稱為 P 點的縱坐標（y 坐標）。又 (a , b) 與 a、b 的次序有關（當 $a \neq b$ 時：$(a , b) \neq (b , a)$），我們稱它為有序數對，或簡稱為數對。

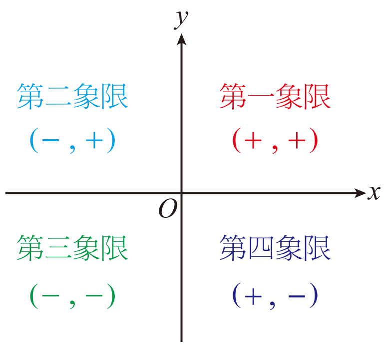


圖 1-1

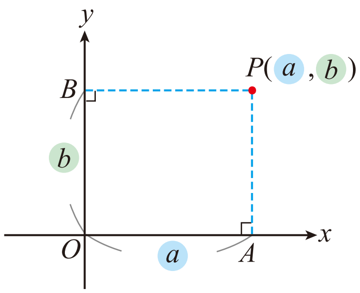


圖 1-2

反之，任給一數對 (a , b)，我們先分別在 x 軸、y 軸上，找出 a、b 對應的點 A、B，然後分別過 A、B 兩點作垂直 x 軸及 y 軸的直線，則這兩條直線之交點 P 的坐標即為 (a , b)。

因此，平面上的每一點都可以用一個數對來表示；反之，每一個數對也表示這個平面上的一個點。這樣就得到一個平面的直角坐標系。

兩條坐標軸將坐標平面分成四個部分，右上角部分稱為第一象限，左上角部分稱為第二象限，左下角部分稱為第三象限，右下角部分稱為第四象限，如圖 1-1 所示。兩坐標軸是它們的界限，所以坐標軸上的點不屬於任何一個象限。

特別說明

(1) 在 x 軸上的點，其 y 坐標為 0，故其坐標必為 $(a, 0)$，a 是實數。

(2) 在 y 軸上的點，其 x 坐標為 0，故其坐標必為 $(0, b)$，b 是實數。

小考箱

(　　) 1. 設 a、b 為實數，若 $ab > 0$，則坐標平面上點 $P(a, b)$ 必在第一象限。

例題 1

設 a、b 為實數，已知點 $P(a, b)$ 在第二象限，試問點 $Q(b-a, ab)$ 在第幾象限？

解　因為點 $P(a, b)$ 在第二象限

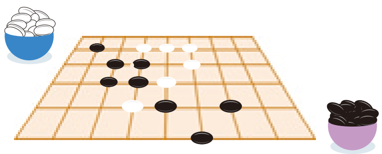
則必 $a < 0$ 且 $b > 0$

得 $b - a > 0$，$ab < 0$

所以點 $Q(b-a, ab)$ 在第四象限

隨堂練習

設 a、b 為實數，若點 $A(ab, b)$ 在第三象限，則點 $B(a-b, b^2)$ 在第幾象限？



1-1.2 距離公式

在數線上，我們學過：若點 A 的坐標為 a，點 B 的坐標為 b，則有

公　式

(1)　$\overline{AB}$ 的中點坐標為 $\dfrac{a+b}{2}$。

(2)　A、B 兩點的距離 $\overline{AB}=|a-b|$。

(A)中點坐標　　(B)兩點間距離

圖 1-3

特別說明　符號 $\overline{AB}$ 在本書中，除代表線段外，同時也代表線段的長度。

設 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$ 為坐標平面上相異兩點，如圖 1-4 所示。藉由數線上距離的概念及商高定理（又稱為畢氏定理或勾股定理），可得

$$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{QR}^2=|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

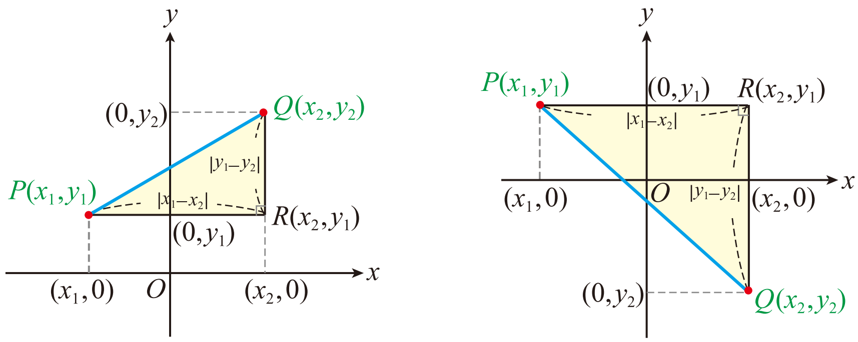


圖 1-4

因此，$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$；當 $\overline{PQ}$ 垂直 x 軸（即 $x_1=x_2$）時，則 $\overline{PQ}=|y_1-y_2|$；又 $\overline{PQ}$ 垂直 y 軸（即 $y_1=y_2$）時，則 $\overline{PQ}=|x_1-x_2|$，上述公式照樣成立。

綜合上面的討論，可得平面上兩點間距離公式如下：

兩點間距離

坐標平面上 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$ 兩點間的距離：

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

小考箱

(　　) 2. 平面上 P、Q 兩點的距離，就是線段 $\overline{PQ}$ 的長度。

例題 2

試求坐標平面上 $A(3, -2)$、$B(-2, 10)$ 兩點間的距離。

解　由兩點間距離公式知：

$$\overline{AB}=\sqrt{[3-(-2)]^2+[(-2)-10]^2}$$

$$=\sqrt{5^2+(-12)^2}$$

$$=\sqrt{169}=13$$

隨堂練習

已知 $P(1, -2)$、$Q(x, 1)$ 兩點的距離為 5，試求 x 值。

1-1.3 分點坐標

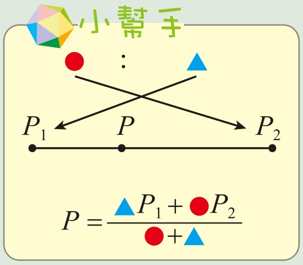
設 P_1、P_2、P 為同一直線上相異三點，且 P 為 $\overline{P_1P_2}$ 上的一點，以 P_1-P-P_2 表示，則 P 點為 $\overline{P_1P_2}$ 的一個內分點。若 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=m:n$（$m$、$n$ 為正數），則 $m:n$ 稱為分點 P 分割 $\overline{P_1P_2}$ 的內分比。

分點坐標

設 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P(x, y)$ 為同一直線上相異三點，且 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的內分點，若 $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = m : n$，則

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \ y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$

P 坐標為 $\left(\dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \dfrac{ny_1 + my_2}{m + n}\right)$



【說明】(1) 當 $\overline{P_1P_2}$ 與坐標軸不垂直時，如圖 1-5 所示。

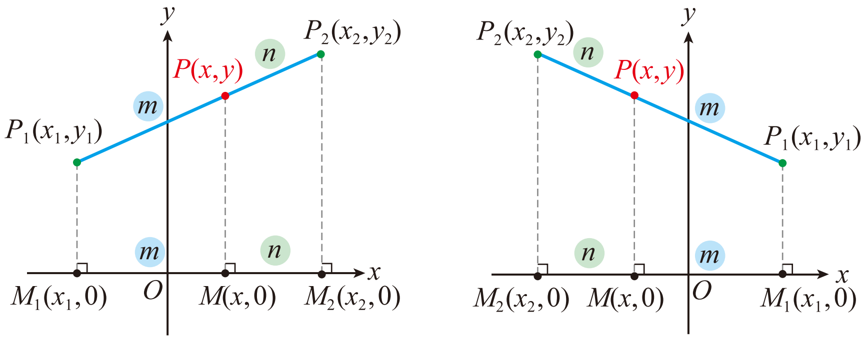


圖 1-5

自 P_1、P、P_2 三點分別作 $\overline{P_1M_1}$、$\overline{PM}$、$\overline{P_2M_2}$ 垂直 x 軸於 M_1、M、M_2，則 $\overline{P_1M_1} \parallel \overline{PM} \parallel \overline{P_2M_2}$

因為平行線截等比例線段，故得 $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = \overline{M_1M} : \overline{MM_2}$

但已知 $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = m : n$，所以 $\overline{M_1M} : \overline{MM_2} = m : n$

當 $x_1 < x_2$ 時，如圖 1-5 (A)所示，即 $x_1 < x < x_2$

則 $\overline{M_1M} = |x_1 - x| = x - x_1$，$\overline{MM_2} = |x - x_2| = x_2 - x$

故得 $(x - x_1) : (x_2 - x) = m : n$

$\Rightarrow \ n(x - x_1) = m(x_2 - x) \ \Rightarrow \ nx - nx_1 = mx_2 - mx$

$\Rightarrow \ (m + n)x = nx_1 + mx_2 \ \Rightarrow \ x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n}$

當 $x_1 > x_2$ 時，如圖 1-5 (B)所示，即 $x_1 > x > x_2$

則 $\overline{M_1M} = |x_1 - x| = x_1 - x$，$\overline{MM_2} = |x - x_2| = x - x_2$

同樣可求得 $x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n}$

依上述方法，同理可得 $y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m + n}$

《註》符號「⇒」表示由前面的敘述可以推衍得後面的敘述。

(2) 當 $\overline{P_1P_2}$ 垂直 x 軸或 y 軸時，同樣可推得

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}\text{，}y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$

例題 3

設 $A(-3, 2)$、$B(1, -6)$ 為平面上兩點，若 P 為 $\overline{AB}$ 上的一點，且 $\overline{AP} = 3\overline{PB}$，試求分點 P 的坐標。

解 設 P 點坐標為 (x, y)

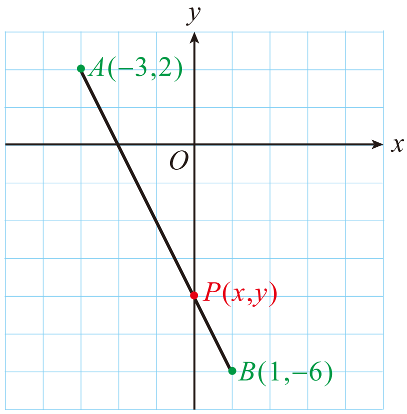
已知 $\overline{AP} = 3\overline{PB}$

⇒ $\overline{AP} : \overline{PB} = 3\overline{PB} : \overline{PB} = 3 : 1$

則 $x = \dfrac{1 \times (-3) + 3 \times 1}{3 + 1} = 0$

$y = \dfrac{1 \times 2 + 3 \times (-6)}{3 + 1} = -4$

所以 P 點坐標為 $(0, -4)$



隨堂練習

設 $P_1(3, 11)$、$P_2(-6, 2)$ 為平面上兩點，若 P 為 $\overline{P_1P_2}$ 的一個內分點，且 $\overline{P_1P} = 2\overline{PP_2}$，試求 P 點坐標。

分點坐標公式中，當$m：n=1：1$時，P為$\overline{P_1P_2}$的中點。因此我們可得線段中點坐標公式如下：

中點坐標

設 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 為平面上相異兩點，若 $P(x,y)$ 為 $\overline{P_1P_2}$ 的中點，則

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}，y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

例題 4

在坐標平面上，設 $P(3,-1)$，若 $M(-2,4)$ 為 $\overline{PQ}$ 的中點，試求 Q 點坐標。

解 設 Q 點坐標為 (x,y)

由中點坐標公式知

$$-2=\frac{3+x}{2}，4=\frac{-1+y}{2}$$

即 $x=-7$，$y=9$

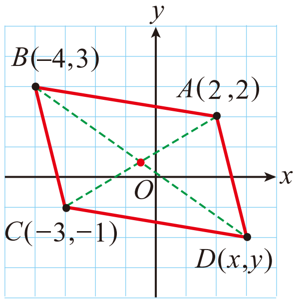
所以 Q 點坐標為 $(-7,9)$

隨堂練習

已知一圓直徑的兩端點分別為 $A(3,-3)$、$B(-5,7)$，試求此圓的圓心坐標。

例題 5

在坐標平面上，平行四邊形 $ABCD$，已知頂點 $A(2,2)$、$B(-4,3)$、$C(-3,-1)$，試求 D 點的坐標。



解　設 D 點坐標為 (x,y)

因為平行四邊形對角線互相平分

所以 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點為同一點

$\overline{BD}$ 的中點坐標為

$$\left(\frac{-4+x}{2},\frac{3+y}{2}\right)$$

$\overline{AC}$ 的中點坐標為

$$\left(\frac{2+(-3)}{2},\frac{2+(-1)}{2}\right)$$

故得 $\left(\frac{-4+x}{2},\frac{3+y}{2}\right)=\left(\frac{2+(-3)}{2},\frac{2+(-1)}{2}\right)$

亦即 $\frac{-4+x}{2}=\frac{2+(-3)}{2}$，$\frac{3+y}{2}=\frac{2+(-1)}{2}$

解得 $x=3$，$y=-2$

所以 D 點坐標為 $(3,-2)$

隨堂練習

設 $A(-3,-7)$、$B(-1,2)$、$C(4,3)$為同一平面上的三個點，若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，試求 D 點坐標。

在國中時，我們曾經學過三角形的重心為三中線的交點，且重心到頂點的距離為中線長的三分之二。依此概念，再利用分點坐標公式，我們可以求出坐標平面上三角形的重心坐標。

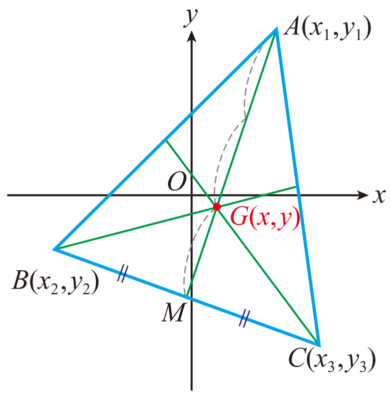


圖 1-6

設 $\triangle ABC$ 三頂點的坐標分別為 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$，又 $G(x, y)$ 為 $\triangle ABC$ 的重心，如圖 1-6 所示。

M 為 $\overline{BC}$ 的中點，由中點坐標公式知 M 坐標為 $\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$

又由三角形重心性質知 $\overline{AG}=\dfrac{2}{3}\overline{AM}$

即 $\overline{AG}=2\overline{GM}$，因此 $\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$

由分點坐標公式得

$$x=\frac{1\times x_1+2\times\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{1\times y_1+2\times\dfrac{y_2+y_3}{2}}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

重心坐標

設 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$ 為平面上三點，若 $G(x, y)$ 為 $\triangle ABC$ 的重心，則

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

例題 6

設 $A(7,2)$、$B(-4,1)$、$C(3,-6)$ 為平面上三點，試求 $\triangle ABC$ 的重心坐標。

解 設 $\triangle ABC$ 重心坐標為 (x,y)

由三角形重心坐標公式知

$$x=\frac{7+(-4)+3}{3}=2$$

$$y=\frac{2+1+(-6)}{3}=-1$$

所以 $\triangle ABC$ 的重心坐標為 $(2,-1)$

隨堂練習

設 $A(-5,2)$、$B(1,-1)$、$G(-2,0)$ 為平面上三點，若 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，試求 C 點坐標。

習題 1-1

1. 試在坐標平面上描出下列各點：

$A(-1,4)$，$B(3,0)$，$C(3,-3)$，$D(4,2)$，$E(-4,-2)$

2. 設 $a>0$、$b<0$，則下列各點分別在直角坐標平面上的哪一象限或軸上？

$A(-a,b^2)$，$B(a,b-a)$，$C(-b,0)$，$D(a-b,-b)$，$E(0,-a)$，$F(-a,-b^2)$

3. 試求下列各組 A、B 兩點的距離：

⑴ $A(3,-7)$，$B(8,5)$　　⑵ $A(-3,6)$，$B(12,-2)$

4. 已知一圓直徑兩端點 A、B 坐標分別為 $(m,-3)$ 及 $(8,5)$，又圓心 P 坐標為 $(5,n)$，試求 m、n 的值。

5. 平行四邊形 $ABCD$，已知頂點坐標 $A(-6,7)$、$B(4,1)$、$C(12,-9)$，試求 D 點坐標。

6. 設 $A(3,-4)$、$B(-7,-3)$、$C(5,1)$ 為平面上三點，試求 $\triangle ABC$ 中 $\overline{BC}$ 邊上的中線長。

《提示》$\overline{BC}$ 邊上的中線，就是頂點 A 到 $\overline{BC}$ 中點的連線段。

7. 設 $P_1(-3,4)$、$P_2(3,-8)$ 為平面上兩點，若 P 為 $\overline{P_1P_2}$ 上的一個點，且 $\overline{P_1P}=5\overline{PP_2}$，試求 P 點坐標。

8. 求下列各組 $\triangle ABC$ 的重心坐標：

⑴ $A(2,-3)$，$B(5,1)$，$C(8,-7)$

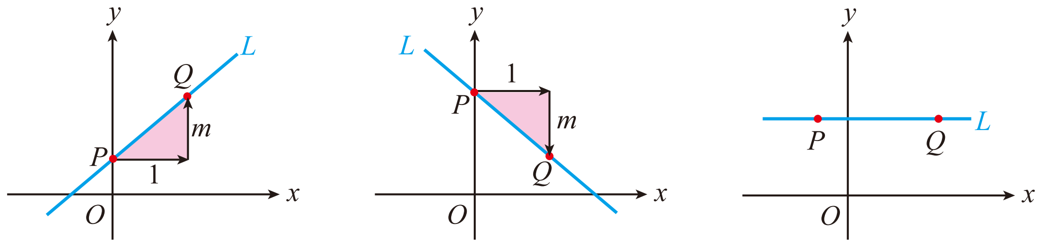
⑵ $A(-4,2)$，$B(8,4)$，$C(2,-6)$

1-2 直線的斜率與方程式

1-2.1 直線的斜率

在百貨公司裡，銜接兩個樓層的電扶梯，其傾斜的程度各有不同，用來衡量傾斜程度的大小，我們稱為斜率。當我們從下面的樓層搭乘往上的電扶梯，在水平前進的同時也把我們推升到上面的樓層；當我們從上面的樓層搭乘往下的電扶梯，在水平前進的同時也把我們下降到底下的樓層。在數學上，我們以「水平方向每前進一單位時，鉛垂方向上升（或下降）多少單位」來描述坡度的大小，上升的坡度以正值表示，下降的坡度以負值表示，坡度的絕對值愈大愈陡峭。

在直角坐標平面上，除了鉛直線外，要衡量直線的傾斜程度，如圖 1-7 所示，沿著直線 L 由 P 點向右移動，當橫坐標每增加 1 單位時，若縱坐標的變化量為 m 單位（當 $m>0$ 時，直線 L 由左而右往上升；當 $m<0$ 時，直線 L 由左而右往下降；當 $m=0$ 時，直線 L 為水平線），我們就以 m 來表示直線 L 的傾斜程度。



(A) $m>0$　　(B) $m<0$　　(C) $m=0$

圖 1-7

設 L 為坐標平面上的一直線，且不為鉛直線，$P_1(x_1,y_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2)$ 為 L 上相異兩點（此時 $x_1\neq x_2$），如圖 1-8 所示，由相似三角形對應邊成比例，可得

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{|m|}{1}=m\ (m>0) \quad 與 \quad \frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}=\frac{|m|}{1}=-m\ (m<0)$$

整理後均可化成

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

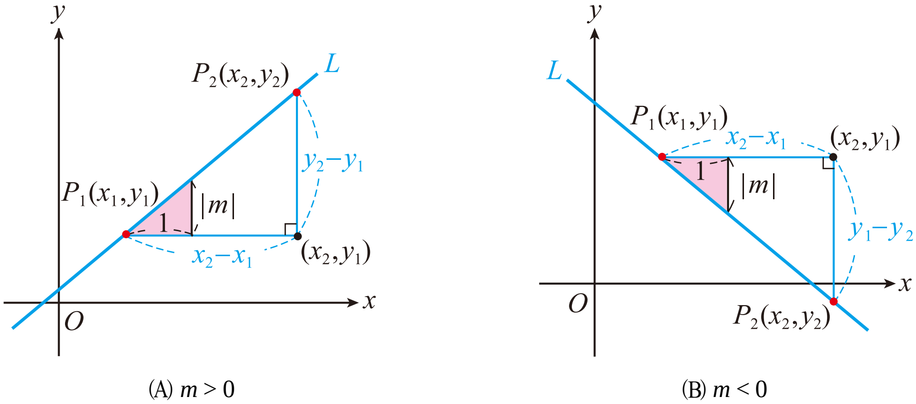


圖 1-8

就同一直線而言，比值 m 並不會因為選擇點的不同或順序不同而有所差異。因此，比值 m 為一定值，只跟直線 L 有關，我們稱它為直線 L 的斜率。

斜　率

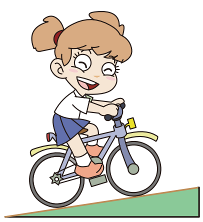
設 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 為直線 L 上相異的兩點，則

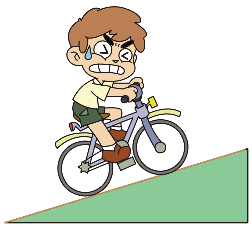
(1)　當 L 不垂直 x 軸時，L 的斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。

(2)　當 L 垂直 x 軸時，即 $x_1=x_2$，L 的斜率不存在。

小考箱

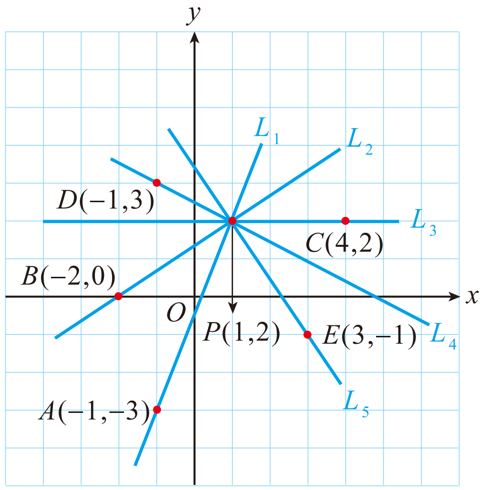
(　　) 3. 在直線 L 上，任意相異兩點所計算出的斜率都相同。





例題 1

如圖所示，直線 L_1、L_2、L_3、L_4、L_5 都通過點 $P(1,2)$，且 $A(-1,-3)$、$B(-2,0)$、$C(4,2)$、$D(-1,3)$、$E(3,-1)$ 分別在 L_1、L_2、L_3、L_4、L_5 上，試求各直線的斜率。



解

L_1 通過 $P(1,2)$ 及 $A(-1,-3)$，斜率為 $m_1=\dfrac{(-3)-2}{(-1)-1}=\dfrac{5}{2}$

L_2 通過 $P(1,2)$ 及 $B(-2,0)$，斜率為 $m_2=\dfrac{0-2}{(-2)-1}=\dfrac{2}{3}$

L_3 通過 $P(1,2)$ 及 $C(4,2)$，斜率為 $m_3=\dfrac{2-2}{4-1}=0$

L_4 通過 $P(1,2)$ 及 $D(-1,3)$，斜率為 $m_4=\dfrac{3-2}{(-1)-1}=-\dfrac{1}{2}$

L_5 通過 $P(1,2)$ 及 $E(3,-1)$，斜率為 $m_5=\dfrac{(-1)-2}{3-1}=-\dfrac{3}{2}$

特別說明　當直線斜率的絕對值愈大時，直線的傾斜程度也愈大。

隨堂練習

試求過下列各組 A、B 兩點的直線斜率：

(1) $A(2,-6)$，$B(-1,3)$

(2) $A(0,-3)$，$B(-5,7)$

例題 2

給定三點 $A(-2,-1)$、$B(6,3)$、$C(10,5)$，試證此三點共線。

證 已知 $A(-2,-1)$、$B(6,3)$

直線 AB 的斜率 $=\dfrac{3-(-1)}{6-(-2)}=\dfrac{1}{2}$

又 $B(6,3)$、$C(10,5)$

直線 BC 的斜率 $=\dfrac{5-3}{10-6}=\dfrac{1}{2}$

因為直線 AB 的斜率等於直線 BC 的斜率

而兩直線有公共點 B

故此兩直線為同一直線

即 A、B、C 三點共線

特別說明 當 A、B、C 三點滿足：直線 AB 的斜率等於直線 BC 的斜率時，則 A、B、C 三點共線。

隨堂練習

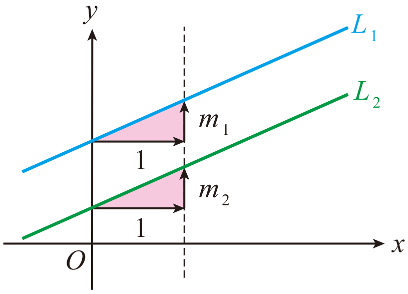
設 $A(8,k)$、$B(5,k+1)$、$C(-1,6)$ 三點共線，試求 k 值。

斜率既然是用來表示直線的傾斜程度，所以斜率相同的直線，其傾斜程度也相同，故彼此會互相平行。反之，互相平行的兩直線，其斜率也必相等。如圖 1-9 所示，設直線 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，若 $L_1 // L_2$，當橫坐標增加 1 單位時，縱坐標的變化應相等，即 $m_1=m_2$。又當 $m_1=m_2$ 時，由直線 $x=1$ 與 L_1、L_2 所夾的同位角相等，可得 $L_1 // L_2$。故我們可得結論如下：

公　式

設相異直線 L_1、L_2 的斜率分別為 m_1 及 m_2，則

$$L_1 // L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1=m_2$$



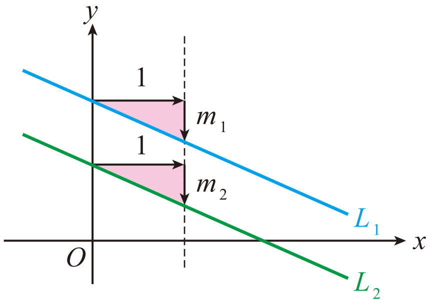


圖 1-9

《註》符號「⇔」表示由前面的敘述可以推衍得後面的敘述，且由後面的敘述也可推衍得前面的敘述。

小考箱

(　　) 4. 設 L_1、L_2 為兩平行直線，已知 L_1 的斜率為 3，則 L_2 的斜率也為 3。

斜率除了可以用來判斷兩直線是否平行外，還可以用來判斷兩直線是否垂直。因為平行線的斜率相等，我們可以將垂直相交於一點的兩直線平行移動，使其交點落在原點，如圖 1–10 所示，則兩直線的斜率仍然不變。

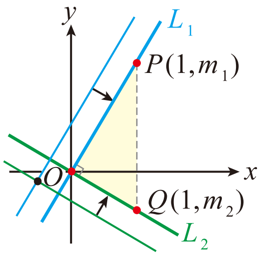


圖 1-10

設直線 L_1 與 L_2 均不垂直於坐標軸，而斜率分別為 m_1、m_2，若 $L_1 \perp L_2$ 且相交於 $(0\ ,\ 0)$，依照斜率的定義，$P(1\ ,\ m_1)$、$Q(1\ ,\ m_2)$ 分別為 L_1 及 L_2 上的點，因為 $L_1 \perp L_2$，所以 $\triangle POQ$ 為直角三角形，由商高定理得 $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{PQ}^2$

即 $(1 + m_1^2) + (1 + m_2^2) = (m_1 - m_2)^2$

整理化簡得 $m_1 \times m_2 = -1$

反之，若 $m_1 \times m_2 = -1$，則前述步驟皆可逆推而得 $L_1 \perp L_2$。

因此，我們可得結論如下：

公 式

設直線 L_1、L_2 的斜率分別為 m_1 與 m_2，則

$$L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \times m_2 = -1$$

特別說明 當一直線斜率不存在（即此直線垂直 x 軸），另一直線斜率為 0（即此直線平行 x 軸），則此兩直線亦互相垂直。

小考箱

（ ）5. 設 L_1、L_2 為互相垂直的直線，已知 L_1 的斜率為 $\dfrac{2}{3}$，則 L_2 的斜率為 $\dfrac{3}{2}$。

例題 3

設 $A(2, k)$、$B(k+1, 3)$、$C(-1, 1)$、$D(3, -2)$，

(1) 若 $\overline{AB} // \overline{CD}$，試求 k 值。

(2) 若 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$，試求 k 值。

解 $\overline{AB}$ 的斜率 $m_{\overline{AB}} = \dfrac{3-k}{(k+1)-2} = \dfrac{3-k}{k-1}$

$\overline{CD}$ 的斜率 $m_{\overline{CD}} = \dfrac{(-2)-1}{3-(-1)} = -\dfrac{3}{4}$

(1) 若 $\overline{AB} // \overline{CD}$，則 $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{CD}}$

即 $\dfrac{3-k}{k-1} = -\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad -3(k-1) = 4(3-k) \quad \Rightarrow \quad -3k+3 = 12-4k$

所以 $k = 9$

(2) 若 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$，則 $m_{\overline{AB}} \times m_{\overline{CD}} = -1$

即 $\dfrac{3-k}{k-1} \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) = -1$

$\Rightarrow \quad 3(3-k)=4(k-1) \quad \Rightarrow \quad -7k=-13$

所以 $k=\dfrac{13}{7}$

隨堂練習

設 $A(2,1)$、$B(k,-1)$、$C(4,-2)$、$D(2k+1,3)$，

(1) 若 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，試求 k 值。

(2) 若 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$，試求 k 值。

1-2.2 直線方程式

過平面上一定點 A 的直線有無限多條，如果再給定直線的斜率 m，則過 A 點且斜率為 m 的直線只有一條。另外，平面上相異兩點亦可決定一直線。現在，我們就這兩種情形來討論直線方程式。

設直線 L 過點 $A(x_1,y_1)$，且斜率為 m，又 $P(x,y)$ 為直線 L 上異於 A 的任意一點，如圖 1-11 所示，則由 P、A 兩點所決定的斜率就是直線 L 的斜率，即

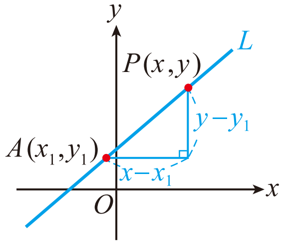


圖 1-11

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

化簡得

$$y-y_1=m(x-x_1)\cdots\cdots(1)$$

事實上，當 P 與 A 兩點重合時，$x=x_1$且 $y=y_1$，此時(1)式仍然成立。反之，滿足(1)式的點也都在直線 L 上，所以我們稱(1)式為直線 L 的點斜式。

點斜式

直線 L 過點 $A(x_1,y_1)$，且斜率為 m，則 L 的方程式為

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

例題 4

(1) 試求過點 $(3,-2)$，且斜率為 $\frac{3}{2}$ 的直線方程式。

(2) 試求過點 $(-2,1)$，且斜率為 -5 的直線方程式。

解 (1) 因直線過點 $(3,-2)$，且斜率 $m=\frac{3}{2}$

由點斜式知：直線方程式為 $y-(-2)=\frac{3}{2}(x-3)$

整理得 $3x-2y-13=0$

(2) 因直線過點 $(-2,1)$，且斜率 $m=-5$

由點斜式知：直線方程式為 $y-1=(-5)[x-(-2)]$

整理得 $5x+y+9=0$

隨堂練習

試求過點 $P(-1,3)$，且滿足下列條件的各直線方程式：

(1) 斜率為 $\frac{4}{3}$　(2) 斜率為 $-\frac{2}{7}$

例題 5

已知直線 $L：x=ay+b$ 通過點 $P(-1,2)$ 且斜率為 3，試求 a、b 的值。

解 因直線 L 通過點 $P(-1,2)$，且斜率為 3

由點斜式知：$y-2=3[x-(-1)]$

整理得 $3x=y-5$，亦即 $x=\frac{1}{3}y-\frac{5}{3}$

與 $x=ay+b$ 比較得 $a=\frac{1}{3}$，$b=-\frac{5}{3}$

隨堂練習

已知直線 $L：ax+by+1=0$ 通過點 $A(6,2)$ 且斜率為 $\frac{2}{3}$，試求 a、b 的值。

小考箱

(　　) 6. 設直線 L 為線段 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線，則 L 垂直 $\overline{PQ}$ 且通過 $\overline{PQ}$ 的中點。

例題 6

設 $A(-1, 2)$、$B(3, -2)$ 為平面上兩點，試求 $\overline{AB}$ 的垂直平分線方程式。

解 $\overline{AB}$ 的中點 M 坐標為

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right)=(1, 0)$$

又 $\overline{AB}$ 的斜率為

$$m_1=\frac{(-2)-2}{3-(-1)}=-1$$

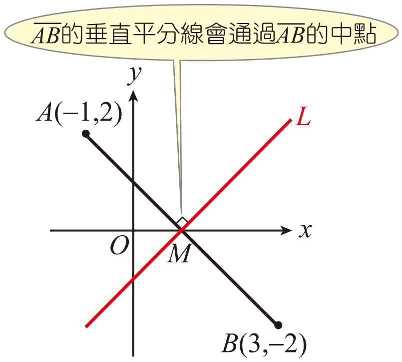
設直線 L 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線

則 L 過點 $M(1, 0)$ 且 $L \perp \overline{AB}$

故得直線 L 的斜率 $m=1$

由點斜式知：L 的方程式為 $y-0=1\times(x-1)$

整理得 $x-y-1=0$



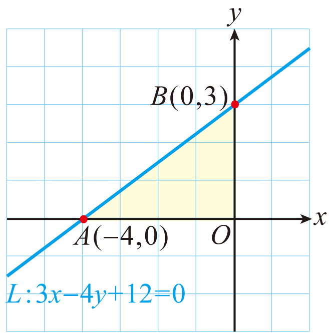
隨堂練習

設 $P(-3, 1)$、$Q(5, 3)$ 為平面上兩點，試求 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線方程式。

在介紹直線的斜截式之前，我們先說明一下什麼是截距。設直線 L 交 x 軸於點 $(a, 0)$，交 y 軸於點 $(0, b)$，則 a 稱為直線 L 的 x 截距，b 稱為直線 L 的 y 截距。

例題 7

試求直線 $L：3x-4y+12=0$ 的 x 截距及 y 截距，並求直線 L 與兩坐標軸所圍成的三角形面積。



解 $L：3x-4y+12=0$

以 $y=0$ 代入得 $3x+12=0$

$\Rightarrow\ x=-4$

即直線 L 交 x 軸於點 $A(-4,0)$

所以 L 的 x 截距為 -4

以 $x=0$ 代入得 $-4y+12=0$

$\Rightarrow\ y=3$

即直線 L 交 y 軸於點 $B(0,3)$

所以 L 的 y 截距為 3

如圖所示，直線 L 與兩坐標軸所圍成的三角形為直角 $\triangle OAB$

$\overline{OA}=|-4|=4$，$\overline{OB}=|3|=3$

所以 $\triangle OAB$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{OB}$

$=\dfrac{1}{2}\times 4\times 3=6$

特別說明 設直線 L 的 x 截距、y 截距分別為 a、b（其中 $ab\neq 0$），則 L 與兩坐標軸所圍成的三角形面積為 $\dfrac{1}{2}|ab|$。

隨堂練習

試求直線 $L：4x-5y-20=0$ 的 x 截距及 y 截距，並求直線 L 與兩坐標軸所圍成的三角形面積。

設直線 L 的斜率為 m，y 截距為 b，則 L 交 y 軸於點 $(0, b)$，由點斜式知：直線 L 的方程式為

$$y-b=m(x-0)$$

整理得

$$y=mx+b\cdots\cdots(2)$$

我們稱(2)式為直線 L 的斜截式。

斜截式

直線 L 的斜率為 m，y 截距為 b，則 L 的方程式為

$$y=mx+b$$

特別說明 斜率為 m，且 x 截距為 a 的直線方程式為 $y=m(x-a)$。

例題 8

試求斜率為 $\frac{5}{3}$，且 y 截距為 4 的直線方程式。

解 斜率 $m=\frac{5}{3}$，y 截距 $b=4$

由斜截式知：直線方程式為 $y=\frac{5}{3}x+4$

整理得 $5x-3y+12=0$

隨堂練習

試求斜率為 $\frac{3}{5}$，x 截距為 4 的直線方程式。

設 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 為平面上相異兩點，則此兩點可決定一直線 L。

當 $x_1=x_2$ 時，直線 L 垂直 x 軸，且與 x 軸交於點$(x_1, 0)$，如圖1-12所示，則 L 上任一點 $P(x, y)$ 均滿足 $x=x_1$，故直線 L 的方程式為 $x-x_1=0$。

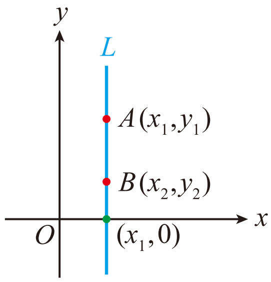


圖 1-12

當 $x_1 \neq x_2$ 時，直線 L 與 x 軸不垂直，且斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，又直線 L 過點 $A(x_1, y_1)$，所以由點斜式知：L 的方程式為

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\cdots\cdots(3)$$

我們稱(3)式為直線 L 的兩點式。

兩點式

直線 L 過相異兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，

(1)　若 $x_1 \neq x_2$，則 L 的方程式為

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

(2)　若 $x_1 = x_2$，則 L 垂直 x 軸，方程式為

$$x-x_1=0$$

例題 9

試求通過下列各組 A、B 兩點的直線方程式：

(1)　$A(2, 3)$，$B(-1, 7)$

(2)　$A(4, -13)$，$B(4, 9)$

解　(1)　由兩點式知：直線方程式為 $y-3=\dfrac{7-3}{(-1)-2}(x-2)$

$\Rightarrow\quad -3y+9=4x-8$

整理得 $4x+3y-17=0$

(2)　因為 $A(4, -13)$、$B(4, 9)$ 兩點的 x 坐標都是 4

所以過 A、B 兩點的直線方程式為 $x-4=0$

隨堂練習

試求通過下列各組 A、B 兩點的直線方程式：

(1)　$A(-3, 4)$，$B(3, 1)$

(2)　$A(-7, 9)$，$B(-7, -23)$

設直線 L 的 x 截距為 a，y 截距為 b，且 $ab \neq 0$，則直線 L 過點 $(a, 0)$ 及 $(0, b)$，如圖 1-13 所示，由兩點式知：直線 L 的方程式為

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

即 $-ay = bx - ab \quad \Rightarrow \quad bx + ay = ab$

兩端同除以 ab 得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \cdots\cdots(4)$$

我們稱(4)式為直線 L 的截距式。

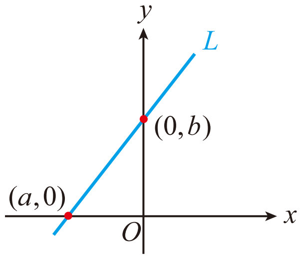


圖 1-13

截距式

直線 L 的 x 截距為 a，y 截距為 b，且 $ab \neq 0$，則直線 L 的方程式為

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

例題 10

已知直線 L 的 x 截距為 -3，y 截距為 4，試求 L 的方程式。

解 $a = -3$，$b = 4$

由截距式知：

直線 L 的方程式為 $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{4} = 1$

整理得 $4x - 3y + 12 = 0$

隨堂練習

試求 x 截距為 6，y 截距為 -5 的直線方程式。

1-2.3 直線和二元一次方程式的關係

在 1-2.2 節中，我們討論過各種直線方程式的求法，它們都可以化成 $ax+by+c=0$ 的形式，其中 a、b、c 為實數，但 a、b 不同時為 0。因此我們知道，直線的方程式就是二元一次方程式。相反的，是否二元一次方程式的圖形都是直線？現在我們討論如下：

設 a、b、c 為實數，且 a、b 不同時為 0，二元一次方程式 $ax+by+c=0$。

(1) 當 $b=0$ 時：

則 $a\neq 0$（因 a、b 不同時為 0），$ax+by+c=0$ 可化為 $x=-\dfrac{c}{a}$，其圖形為垂直 x 軸且交 x 軸於點 $\left(-\dfrac{c}{a},0\right)$ 的直線，如圖 1-14 所示。

(2) 當 $b\neq 0$ 時：

$ax+by+c=0$ 可化為 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$，由直線的斜截式知：其圖形是斜率為 $-\dfrac{a}{b}$，且 y 截距為 $-\dfrac{c}{b}$ 的直線，如圖 1-15 所示。

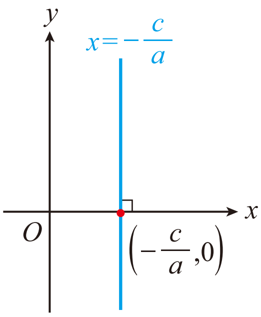


圖 1-14

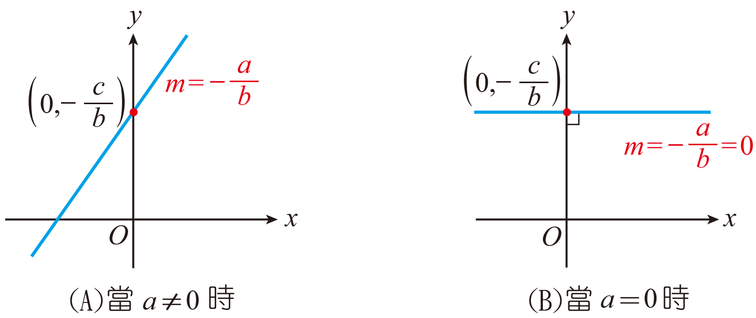


圖 1-15

由上面的討論，我們得知二元一次方程式 $ax+by+c=0$ 的圖形必為一直線，而「$ax+by+c=0$」稱為直線的一般式。很顯然，由直線的一般式 $ax+by+c=0$ 就可以直接知道它的斜率，這個性質很重要，我們整理如下：

公　式

設直線 L：$ax+by+c=0$（a、b 不同時為 0）

(1)　當 $b=0$ 時：

直線 L 過點 $\left(-\frac{c}{a},0\right)$，且垂直 x 軸。（斜率不存在）

(2)　當 $b\neq 0$ 時：

直線 L 過點 $\left(0,-\frac{c}{b}\right)$，且斜率為 $-\frac{a}{b}$。

小考箱

（　　）7. 一直線平行 y 軸，則斜率不存在。

例題 11

試求下列各直線的斜率：

(1)　L_1：$2x-3y+4=0$　　(2)　L_2：$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

(3)　L_3：$3y+5=0$　　(4)　L_4：$5x-2=0$

解

(1)　L_1：$2x-3y+4=0$，斜率 $m_1=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$

(2)　L_2：$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

可化為 L_2：$4x+3y-12=0$，斜率 $m_2=-\frac{4}{3}$

(3)　L_3：$3y+5=0$，斜率 $m_3=-\frac{0}{3}=0$

(4)　L_4：$5x-2=0$

因 y 係數為 0，故 L_4 斜率不存在

隨堂練習

試求下列各直線的斜率：

(1)　L_1：$5x-3y+8=0$　　(2)　L_2：$2y+3x-4=0$

由於二元一次方程式的圖形是直線，因此我們只要找出方程式的任意兩組解，在坐標平面上描出這兩組解所代表的點，用直線連接起來即得方程式的圖形。

例題 12

試作下列各二元一次方程式的圖形：

(1) $3x-4y+12=0$

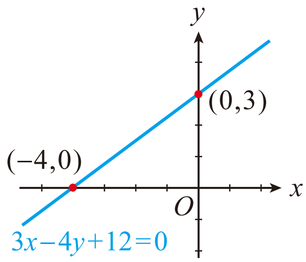
(2) $2x-3=0$

(3) $3y+5=0$

解 (1) $3x-4y+12=0$

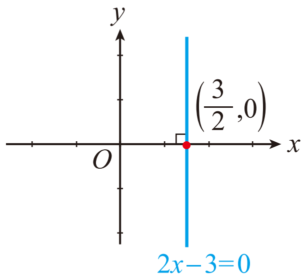
x	0	-4
y	3	0

圖形為通過 $(0,3)$ 及 $(-4,0)$ 兩點的直線，如右圖所示



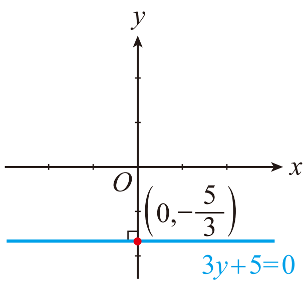
(2) $2x-3=0$

因為 $2x-3=0$ 所代表的直線斜率不存在，又 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ 為方程式的一組解，所以圖形為通過點 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ 且垂直 x 軸的直線，如右圖所示



(3) $3y+5=0$

因為 $3y+5=0$ 所代表的直線斜率為 0，又 $\left(0,-\dfrac{5}{3}\right)$ 為方程式的一組解，所以圖形為通過點 $\left(0,-\dfrac{5}{3}\right)$ 且平行 x 軸的直線，如右圖所示



隨堂練習

試作下列各二元一次方程式的圖形：

(1) $x+2y-4=0$ (2) $5x-4y+20=0$

設直線 L：$ax+by+c=0$（其中 $b\neq 0$），則直線 L 的斜率為 $-\dfrac{a}{b}$。若直線 L_1 平行 L 時，由於平行線的斜率相等，故 L_1 的方程式應為 $ax+by+k=0$ 的形式，其中 k 為一常數。若直線 L_2 垂直 L 時，由於垂直的兩直線斜率乘積等於 -1，所以 L_2 的斜率必為 $\dfrac{b}{a}$（其中 $a\neq 0$），故 L_2 的方程式應為 $bx-ay+n=0$ 的形式，其中 n 為一常數。

當 $b=0$ 時，直線 L：$ax+by+c=0$ 為垂直 x 軸的直線，斜率不存在，L_1 亦為垂直 x 軸的直線，而 L_2為平行 x 軸的直線，故斜率為 0，此時，L_1、L_2 的方程式仍為前述形式。

我們將上面的討論整理如下：

公式

設直線 L：$ax+by+c=0$

(1) 若直線 L_1 平行 L，則 L_1 的方程式應為 $ax+by+k=0$ 的形式，而常數 k 可由 L_1 上任一點決定。

(2) 若直線 L_2 垂直 L，則 L_2 的方程式應為 $bx-ay+n=0$ 的形式，而常數 n 可由 L_2 上任一點決定。

例題 13

試求過點 $(2,-4)$ 且平行直線 $7x-5y+2=0$ 的直線方程式。

解　因所求直線 L 平行直線 $7x-5y+2=0$

故設所求直線 $L：7x-5y+k=0$

又 L 過點 $(2,-4)$

$\Rightarrow\ 7\times2-5\times(-4)+k=0 \ \Rightarrow\ k=-34$

故所求直線方程式為 $7x-5y-34=0$

隨堂練習

試求過點 $P(4,-4)$ 且平行直線 $L：7x-5y-3=0$ 的直線方程式。

例題 14

試求過點 $(-1,4)$ 且與直線 $2x-3y+4=0$ 垂直的直線方程式。

解　因所求直線 L 與直線 $2x-3y+4=0$ 垂直

故設所求直線 $L：3x+2y+n=0$

又 L 過點 $(-1,4)$

$\Rightarrow\ 3\times(-1)+2\times4+n=0 \ \Rightarrow\ n=-5$

故所求直線方程式為 $3x+2y-5=0$

隨堂練習

試求過點 $P(-3,2)$ 且與直線 $L：4x+9y+2=0$ 垂直的直線方程式。

1-2.4 點到直線的距離

設 P 為平面上直線 L 外的一點，則過 P 點恰可作一直線 L_1 垂直直線 L，令垂足為 Q（即 L 與 L_1 的交點），如圖 1-16 所示。線段 $\overline{PQ}$ 的長度就是 P 點到直線 L 的距離 d。因此，我們只要求出 Q 點的坐標，再利用兩點間的距離公式，便可求出 P 點到直線 L 的距離。

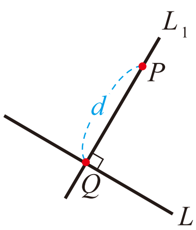


圖 1-16

例題 15

試求點 $P(6,4)$ 到直線 $L：4x+3y-11=0$ 的距離。

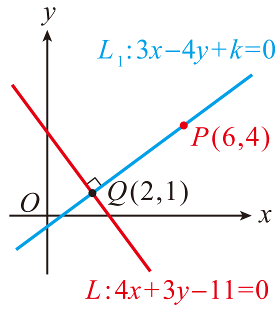
解 設 L_1 為過點 $P(6,4)$ 且垂直 $L：4x+3y-11=0$ 的直線

則 L_1 方程式為 $3x-4y+k=0$

因為 L_1 過 $P(6,4)$

$\Rightarrow\ 3\times6-4\times4+k=0$，即 $k=-2$

所以 $L_1：3x-4y-2=0$



為了求得 L_1 與 L 之交點 Q 的坐標

我們需要解方程組

$$\begin{cases}3x-4y-2=0\cdots\cdots①\\4x+3y-11=0\cdots\cdots②\end{cases}$$

由① $\times3+$ ② $\times4$ 得 $25x-50=0\ \Rightarrow\ x=2$

再將 $x=2$ 代入①得 $6-4y-2=0\ \Rightarrow\ y=1$

即 Q 點的坐標為 $(2,1)$

因此，點 $P(6,4)$ 到直線 $L：4x+3y-11=0$ 的距離為

$$\overline{PQ}=\sqrt{(6-2)^2+(4-1)^2}$$
$$=\sqrt{25}=5$$

隨堂練習

試求點 $P(-11,3)$ 到直線 $L：12x-5y-22=0$ 的距離。

由上面例題的概念，我們可以推得點到直線距離公式如下：

點到直線距離

設點 $P(x_1, y_1)$，直線 $L：ax+by+c=0$，則 P 點到直線 L 的距離為

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

例題 16

試求點 $P(6, -3)$ 到直線 $L：5x+12y-20=0$ 的距離。

解　由點到直線的距離公式知：

$$d=\frac{|5\times6+12\times(-3)-20|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{26}{13}=2$$

隨堂練習

試求點 $(5, -1)$ 到直線 $L：4x-3y+2=0$ 的距離。

小考箱

(　　) 8. 坐標平面上，原點 $(0, 0)$ 到直線 $L：\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ 的距離為 $\frac{12}{5}$。

設兩平行線 $L_1：ax+by+c_1=0$ 與 $L_2：ax+by+c_2=0$，由於平行線間的距離處處相等，所以只要在 L_1 上任取一點 $P(x_1, y_1)$，則 P 點到 L_2 的距離即為兩平行線 L_1、L_2 的距離，如圖 1-17 所示。

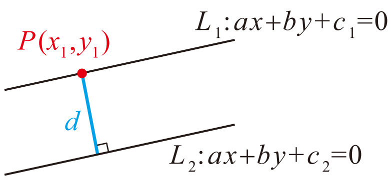


圖 1-17

設 $P(x_1, y_1)$ 為 $L_1：ax+by+c_1=0$ 上任一點，

則 P 到 $L_2：ax+by+c_2=0$ 的距離為 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

又 $P(x_1, y_1)$ 在 L_1 上，即 $ax_1+by_1+c_1=0 \Rightarrow ax_1+by_1=-c_1$，

故得

$$d=\frac{|-c_1+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

兩平行線間距離

設兩平行線 $L_1：ax+by+c_1=0$ 與 $L_2：ax+by+c_2=0$，則

L_1、L_2 的距離為

$$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

例題 17

試求兩平行線 $L_1：4x-3y+5=0$ 與 $L_2：8x-6y-3=0$ 的距離。

解 $L_1：4x-3y+5=0$ 可化為 $L_1：8x-6y+10=0$

由兩平行線間的距離公式知：

$$d=\frac{|10-(-3)|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}}=\frac{13}{10}$$

隨堂練習

試求兩平行線 $L_1：x-2y-6=0$ 與 $L_2：x-2y+4=0$ 間的距離。

習題 1-2

1. 試求過下列各組點的直線斜率：

 (1) $(-4,2)$、$(2,-2)$　(2) $(0,-2)$、$(5,0)$

 (3) $(-3,7)$、$(-3,-4)$

2. 過 $P(2,a)$、$Q(1-a,3)$ 兩點的直線斜率為 2，試求 a 值。

3. 設 $A(0,7)$、$B(a,-1)$、$C(-7,3)$、$D(-a-2,5)$，

 (1) 若 A、B、C 三點共線，試求 a 值。　(2) 若 $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，試求 a 值。

 (3) 若 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，試求 a 值。

4. 試求通過下列各組點的直線方程式：

 (1) $A(3,-1)$、$B(-2,4)$　(2) $C(-2,5)$、$D(-2,-3)$

5. 試求滿足下列條件的直線方程式：

 (1) 斜率為 -3，y 截距為 4　(2) 斜率為 $\dfrac{7}{2}$，x 截距為 -3

 (3) x 截距為 4，y 截距為 $-\dfrac{2}{3}$

6. 設直線 $L：3x-5y+4=0$，點 $P(2,-1)$，

 (1) 試求過點 P 且平行 L 的直線方程式。

 (2) 試求過點 P 且垂直 L 的直線方程式。

7. 試求下列各組給定點 P 到直線 L 的距離：

 (1) $P(7,-2)$，$L：3x+4y+7=0$　(2) $P(0,7)$，$L：12x-5y-4=0$

 (3) $P(2,7)$，$L：\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-4}=1$

8. 試求下列各組平行線間的距離：

 (1) $L_1：3x-4y+7=0$，$L_2：3x-4y-8=0$

 (2) $L_1：-5x+12y=7$，$L_2：5x-12y=19$

1-3 線型函數與二次函數的坐標圖形

設一正方形的邊長為 x，面積為 y，則 x 與 y 的關係式為「$y=x^2$」。當邊長 x 值給定時，面積 y 的值亦隨著確定，我們稱此關係為「y 是 x 的函數」。在日常生活中，很多實際的問題都可以化成函數的形式來處理。因此，我們將函數定義如下：

設 x、y 為兩個變數，當變數 y 依照某種規則隨著 x 的變化而確定時，我們稱 y 是 x 的函數 ，記作 $y=f(x)$，其中 x 稱為自變數，y 稱為應變數。

當 $x=a$ 時，$y=f(a)$，$f(a)$ 稱為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的函數值；又 x 的變動範圍稱為函數的定義域，而函數值的範圍稱為值域。

特別說明　當 y 是 x 的函數時，對於每一個 x 值，必有一個而且只有一個對應的 y 值。

函數 $y=f(x)$，除了可以用數學式子來表達兩個變量的關係，也可以用圖形將兩個相對應的變量表達出來。在函數 $y=f(x)$ 中，對於每一個 x 值，恰有唯一的 y 值與之對應，因此 $y=f(x)$ 的圖形與 $x=a$ 僅交於一點$(a, f(a))$，如圖 1-18 所示。將所有 $(x, f(x))$ 的點，描繪在坐標平面上，便可得到 $y=f(x)$ 的圖形。

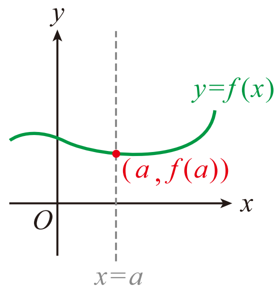


圖 1-18

當函數 $y=f(x)$ 的定義域為有限個值時，其圖形亦為有限個點，故可在坐標平面上完全描出；當函數 $y=f(x)$ 的定義域為無限多個值時，其圖形亦為無限多個點，因而無法將其圖形的所有點在坐標平面上全部描出。此時，我們只好描出其中一些適當的點，然後再用平滑曲線連接起來，即可得到函數 $y=f(x)$ 的大致圖形。當然，所描的點愈多，則所得的函數圖形愈精確。

1-3.1 線型函數的圖形

在國中數學第二冊我們已經學過線型函數的圖形，在此我們再予複習加強。凡是能寫成 $f(x)=ax+b$ 形式的函數，其中 a、b 為常數，稱為線型函數，當 $a\neq 0$ 時，稱為一次函數；當 $a=0$ 時，$f(x)=b$ 稱為常數函數。我們知道，線型函數的圖形都是一直線，因此只要任取線型函數的兩組對應值 $(x_1, f(x_1))$ 與 $(x_2, f(x_2))$，描繪在坐標平面上，再連成一直線，即得線型函數的圖形。

小考箱

(　) 9. 函數 $f(x)=3x-2$ 與 $g(x)=6$ 都是線型函數。

例題 1

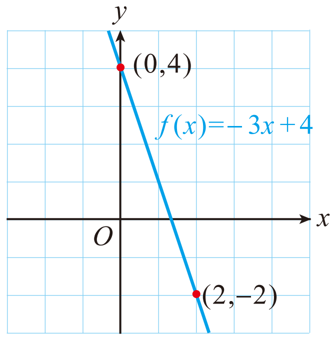
設 x 為任意實數，試作函數 $f(x)=-3x+4$ 的圖形。

解　任取兩組函數的對應值

$f(0)=(-3)\times 0+4=4$

$f(2)=(-3)\times 2+4=-2$

x	0	2
$f(x)$	4	-2



在坐標平面上，描繪出

$(0,4)$、$(2,-2)$ 兩點，並連成一直線

即得 $f(x)=-3x+4$ 的圖形，如右圖所示

隨堂練習

x 為任意實數，試作函數 $f(x)=2x+3$ 的圖形。

例題 2

已知線型函數 $f(x)$ 的圖形通過 $(0, 3)$ 及 $(1, -1)$ 兩點，試求 $f(2)$ 的函數值。

解 設函數 $f(x)=ax+b$（線型函數）

因函數圖形通過 $(0, 3)$ 及 $(1, -1)$ 兩點

故得 $f(0)=a\times 0+b=3 \quad \Rightarrow \quad b=3$

$f(1)=a\times 1+b=-1 \quad \Rightarrow \quad a=-4$

亦即 $f(x)=-4x+3$，所以 $f(2)=(-4)\times 2+3=-5$

隨堂練習

已知線型函數 $f(x)$ 的圖形通過 $(1, 3)$ 及 $(-2, -12)$ 兩點，試求 $f(3)$ 的函數值。

1-3.2 二次函數的圖形

凡是能寫成 $f(x)=ax^2+bx+c$ 形式的函數，其中 a、b、c 為常數且 $a\neq 0$，稱為二次函數。在國中數學裡我們也學過二次函數的圖形。在此我們先複習函數 $f(x)=ax^2$（$a\neq 0$）的圖形，如圖 1-19 所示。

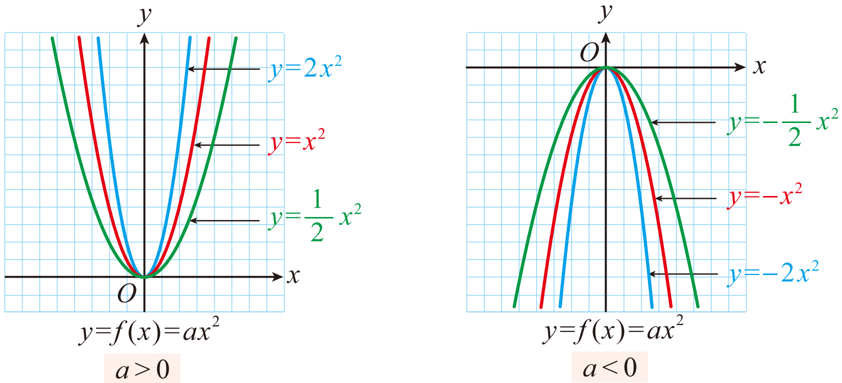


圖 1-19

重　點

(1)　當 $a>0$ 時：

二次函數 $f(x)=ax^2$ 的圖形是以原點為最低點，y 軸為對稱軸，開口向上，左右對稱的拋物線。當 a 的值愈大，圖形的開口愈小；a 的值愈小，圖形的開口愈大。

(2)　當 $a<0$ 時：

二次函數 $f(x)=ax^2$ 的圖形是以原點為最高點，y 軸為對稱軸，開口向下，左右對稱的拋物線。當 a 的絕對值愈大，圖形的開口愈小；a 的絕對值愈小，圖形的開口愈大。

利用配方法，我們可將二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 化成 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2+bx+c\ (a\neq 0)\\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\
&= a\left[x^2+2\times x\times\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-\frac{b^2}{4a}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}
\end{aligned}$$

令 $h=-\dfrac{b}{2a}$，$k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，則可得

$$f(x)=a(x-h)^2+k$$

將二次函數 $f(x)=ax^2$ 的圖形，左右移動可得 $f(x)=a(x-h)^2$ 的圖形，再將 $f(x)=a(x-h)^2$ 的圖形上下移動即可得 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的圖形，如圖 1−20。

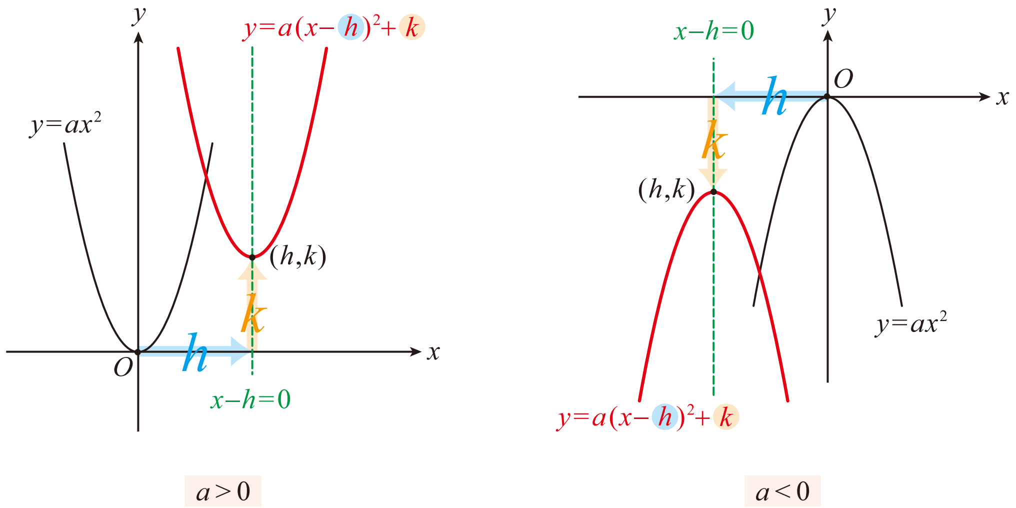


圖 1-20

重　點

(1) 當 $a>0$ 時：

二次函數 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的圖形是以 $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k})$ 為最低點，直線 $x-\boldsymbol{h}=0$ 為對稱軸，開口向上，左右對稱的拋物線。

(2) 當 $a<0$ 時：

二次函數 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的圖形是以 $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k})$ 為最高點，直線 $x-\boldsymbol{h}=0$ 為對稱軸，開口向下，左右對稱的拋物線。

小考箱

(　　) 10. 二次函數 $f(x)=3(x-4)^2+5$ 的圖形是以 $x-4=0$ 為對稱軸的拋物線，其圖形最高點的坐標為 $(4,5)$。

因此，要作二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形，先將函數化成 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的形式，再取 $x=h$ 及其左右各若干組函數對應值，將這些點描繪在坐標平面上，並以平滑曲線連接起來，即得二次函數的圖形。

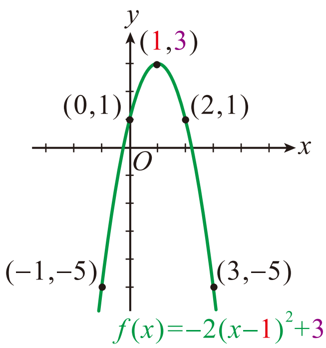
例題 3

試作函數 $f(x)=-2(x-1)^2+3$ 的圖形。

解 將 x 和 $f(x)$ 的對應值列表如下：

x	$\cdots$	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	-5	1	3	1	-5	$\cdots$

再將各 $(x,f(x))$ 點描繪在坐標平面上，並以平滑曲線連接起來，即得函數 $f(x)=-2(x-1)^2+3$ 的圖形如下：



隨堂練習

試作函數 $f(x)=\dfrac{1}{4}(x+3)^2-1$ 的圖形。

例題 4

試作函數 $f(x)=x^2+4x+2$ 的圖形。

解 $f(x)=x^2+4x+2=(x^2+4x+4)+2-4=(x+2)^2-2$

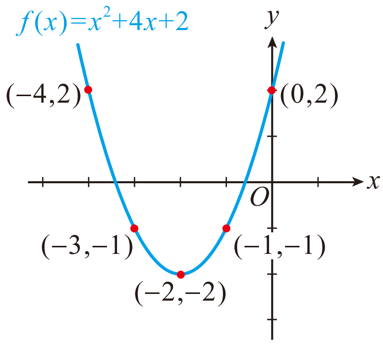
最低點為 $(-2,-2)$

將 x 和 $f(x)$ 的對應值列表如下：

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	2	-1	-2	-1	2	$\cdots$

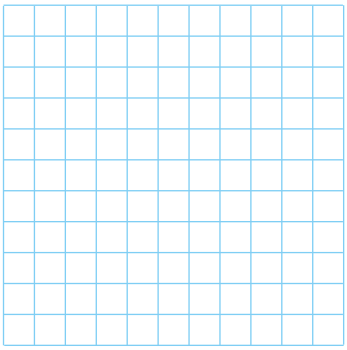
再將各 $(x, f(x))$ 點描繪在坐標平面上，並以平滑曲線連接起來，

即得函數 $f(x)=x^2+4x+2$ 的圖形如下：

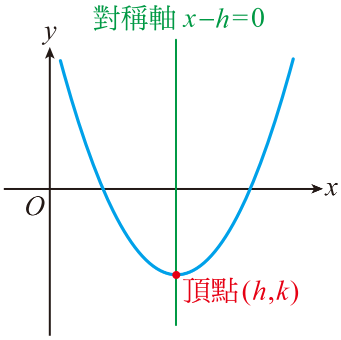


隨堂練習

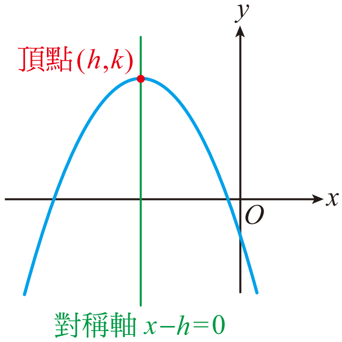
試作函數 $f(x)=-x^2+2x+2$ 的圖形。



在 $f(x)=a(x-h)^2+k$（$a\neq 0$）的二次函數圖形中，其最高點或最低點 (h,k) 為此拋物線的頂點，直線 $x-h=0$ 為此拋物線的對稱軸。



$a>0$



$a<0$

圖 1-21

重 點

(1) 當 $a>0$ 時：

拋物線的開口向上，此時拋物線的頂點 (h,k) 為整個圖形的最低點。從另一方面說，因為 $a(x-h)^2\geq 0$，所以函數的值大於或等於 k，只有當 $x=h$ 時，函數值為 k，因此函數 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的最小值為 k。

(2) 當 $a<0$ 時：

拋物線的開口向下，此時拋物線的頂點 (h,k) 為整個圖形的最高點。從另一方面說，因為 $a(x-h)^2\leq 0$，所以函數的值小於或等於 k，只有當 $x=h$ 時，函數值為 k，因此函數 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的最大值為 k。

小考箱

（　）11. 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），當 $a>0$ 時，$f(x)$ 有最小值；當 $a<0$ 時，$f(x)$ 有最大值。

例題 5

試求下列二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x)=-x^2+6x-1$

(2) $f(x)=2x^2-4x+3$

解 (1) $f(x)=-x^2+6x-1=-(x^2-6x)-1$

$=-(x^2-6x+9)-1+9$

$=-(x-3)^2+8\leq 8$

所以當 $x=3$ 時，函數 $f(x)=-x^2+6x-1$ 有最大值 8

(2) $f(x)=2x^2-4x+3=2(x^2-2x)+3$

$=2(x^2-2x+1)+3-2$

$=2(x-1)^2+1\geq 1$

所以當 $x=1$ 時，函數 $f(x)=2x^2-4x+3$ 有最小值 1

隨堂練習

試求下列二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x)=2x^2-8x-1$

(2) $f(x)=-3x^2-6x+5$

例題 6

試求二次函數 $y=x^2+6x+8$ 的圖形與 x 軸、y 軸的交點坐標。

解 $y=x^2+6x+8$

令 $y=0$ 代入，得 $x^2+6x+8=0$

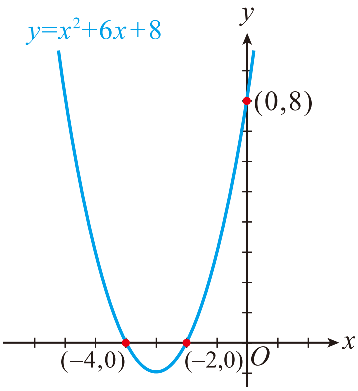
亦即 $(x+4)(x+2)=0$

故得 $x=-4,-2$

又令 $x=0$ 代入，得 $y=8$

所以，二次函數 $y=x^2+6x+8$ 的圖形與 x 軸的交點為 $(-4,0)$ 與 $(-2,0)$

與 y 軸的交點為 $(0,8)$



隨堂練習

試求二次函數 $y = -x^2 + 2x + 3$ 的圖形與 x 軸、y 軸的交點坐標。

例題 7

已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + 2$ 圖形的最高點坐標為 $(1, 5)$，試求 a、b 的值。

解 因為二次函數 $f(x)$ 圖形的最高點坐標為 $(1, 5)$，

且二次項係數為 a，故得

$f(x) = a(x-1)^2 + 5$（其中 $a < 0$）

$\quad = ax^2 - 2ax + (a+5)$

與 $f(x) = ax^2 + bx + 2$ 比較得

$a + 5 = 2$ 且 $b = -2a$

所以 $a = -3$，$b = 6$

隨堂練習

已知二次函數 $f(x) = ax^2 - 16x + c$ 圖形的最低點坐標為 $(2, -9)$，試求 a、c 的值。

習題 1-3

1. 試作下列各線型函數的圖形：

(1) $f(x)=2x-5$

(2) $f(x)=-3$

2. 已知函數 $f(x)=ax+b$ 的圖形通過 $(2,4)$ 及 $(-1,-5)$ 兩點，試求 a、b 的值。

3. 設 x 為任意實數，試作下列各函數的圖形：

(1) $f(x)=x^2-4x+1$

(2) $f(x)=-x^2+6x-4$

4. 試求二次函數 $f(x)=-2x^2+12x+15$ 的對稱軸方程式及頂點坐標。

5. 試求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x)=-x^2+8x+11$

(2) $f(x)=3x^2+6x-5$

6. 試求二次函數 $y=2x^2-5x-3$ 的圖形與 x 軸、y 軸的交點坐標。

7. 已知二次函數 $f(x)$ 圖形的最高點為 $(-1,7)$，又 $f(-2)$ 的函數值為 4，試求此二次函數 $f(x)$。

《提示》若二次函數 $f(x)$ 圖形之頂點為 (h,k)，則 $f(x)=a(x-h)^2+k$。

本章彙總

1-1 重點

1. 直角坐標平面，兩條坐標軸將坐標平面分成四個象限，而坐標軸上的點不屬於任一象限。

2. 在直角坐標系中
   (1) 若 $x>0$，$y>0$，則點 (x , y) 在第一象限。
   (2) 若 $x<0$，$y>0$，則點 (x , y) 在第二象限。
   (3) 若 $x<0$，$y<0$，則點 (x , y) 在第三象限。
   (4) 若 $x>0$，$y<0$，則點 (x , y) 在第四象限。

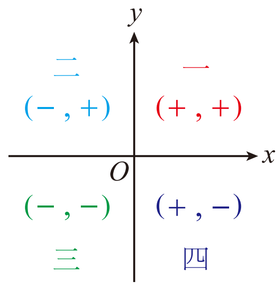
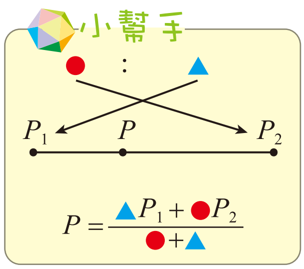


圖 1-22

3. 設 $P(x_1 , y_1)$、$Q(x_2 , y_2)$ 為坐標平面上相異兩點，則
   (1) $\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
   (2) $\overline{PQ}$ 的中點 M 坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2} , \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$。

4. 設 $P_1(x_1 , y_1)$、$P_2(x_2 , y_2)$、$P(x , y)$ 為同一直線相異三點，且 P 為 $\overline{P_1P_2}$的內分點，若 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=m:n$，則

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n} , y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$$



5. 設 $A(x_1 , y_1)$、$B(x_2 , y_2)$、$C(x_3 , y_3)$，則 $\triangle ABC$ 的重心 G 坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} , \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

1-2 重點

1. 設 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 為直線 L 上的相異兩點

   (1) 若 L 不垂直 x 軸，則 L 的斜率 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$。

   (2) 若 L 垂直 x 軸，即 $x_1 = x_2$，則 L 的斜率不存在。

2. 設相異直線 L_1、L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，則

   (1) $L_1 // L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2$

   (2) $L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \times m_2 = -1$

   《註》當一直線斜率不存在（即此直線垂直 x 軸），另一直線斜率為 0（即此直線平行 x 軸），則此兩直線亦互相垂直。

3. 點斜式：

   過點 (x_1, y_1) 且斜率為 m 的直線方程式為 $y - y_1 = m(x - x_1)$。

4. 斜截式：

   斜率為 m 且 y 截距為 b 的直線方程式為 $y = mx + b$。

   《註》斜率為 m 且 x 截距為 a 的直線方程式為 $y = m(x - a)$。

5. 兩點式：

   過相異兩點 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線方程式

   (1) 若 $x_1 \neq x_2$，直線方程式為 $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$。

   (2) 若 $x_1 = x_2$，直線垂直 x 軸，方程式為 $x - x_1 = 0$。

6. 截距式：

   x 截距為 a，y 截距為 b（$ab \neq 0$）的直線方程式為 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$。

本章彙總

7. 設直線 L：$ax+by+c=0$

　(1) 當 $b\neq 0$ 時：直線 L 的斜率為 $-\dfrac{a}{b}$。

　(2) 當 $b=0$ 時：直線 L 垂直 x 軸，且斜率不存在。

8. 設直線 L：$ax+by+c=0$

　(1) 若 $L_1 \parallel L$，則 L_1 可設為 $ax+by+k=0$，而常數 k 可由 L_1 上任一點決定。

　(2) 若 $L_2 \perp L$，則 L_2 可設為 $bx-ay+n=0$，而常數 n 可由 L_2 上任一點決定。

9. 點到直線的距離公式：

　設點 $P(x_1,y_1)$，直線 L：$ax+by+c=0$，則點 P 到直線 L 的距離為

　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

10. 兩平行線間的距離公式：

　設兩平行線 L_1：$ax+by+c_1=0$ 與 L_2：$ax+by+c_2=0$，則 L_1、L_2 的距離為 $d=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

1-3 重點

1. 兩個變數 x、y，當變數 y 依照某種規則隨著 x 的變化而確定時，我們稱 y 是 x 的函數，記作 $y=f(x)$，x 稱為自變數，y 稱為應變數。

2. 函數 $y=f(x)$，對於每一個 x 值，恰有一個對應的函數值 $f(x)$，在坐標平面上所有 $(x,f(x))$ 的點描繪出的圖形，即為函數 $y=f(x)$ 的圖形。

3. 線型函數：（函數圖形為一直線）

   $f(x)=ax+b$　（a、b 為常數）

   ⑴ 當 $a\neq 0$ 時：$f(x)=ax+b$ 稱為一次函數。

   ⑵ 當 $a=0$ 時：$f(x)=b$ 稱為常數函數。

4. 二次函數：

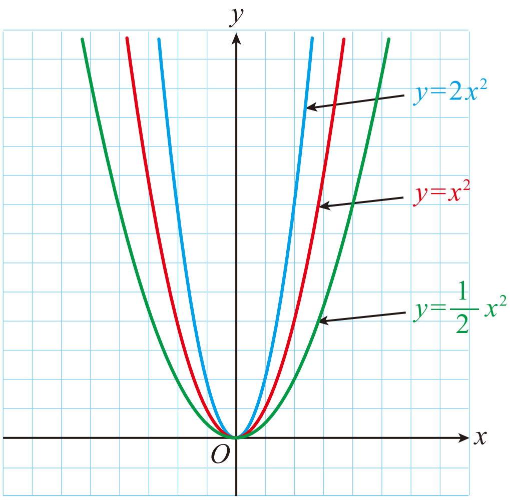
   $f(x)=ax^2+bx+c$（a、b、c 為常數，$a\neq 0$）

5. $f(x)=ax^2$（$a\neq 0$）的圖形：

   以原點為頂點，y 軸為對稱軸的拋物線。

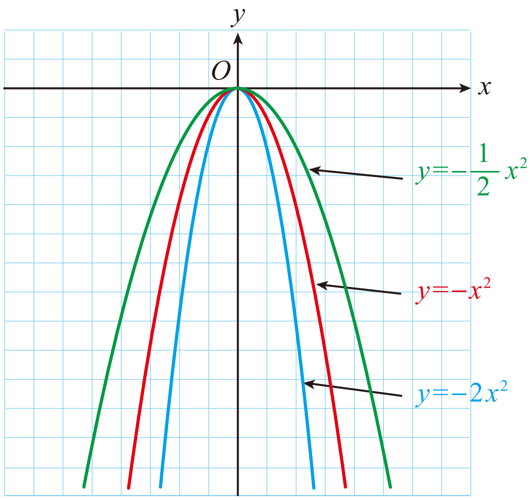
   ⑴ 當 $a>0$ 時，圖形開口向上，頂點為最低點，a 的值愈大，圖形開口愈小；a 的值愈小，圖形開口愈大。

   ⑵ 當 $a<0$ 時，圖形開口向下，頂點為最高點，a 的絕對值愈大，圖形開口愈小；a 的絕對值愈小，圖形開口愈大。



$y=f(x)=ax^2$

$a>0$



$y=f(x)=ax^2$

$a<0$

圖 1-23

本章彙總

6. $f(x)=a(x-h)^2+k$（$a\neq 0$）的圖形：

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 經配方可得 $f(x)=a(x-h)^2+k$，圖形是以 (h,k) 為頂點，$x-h=0$ 為對稱軸的拋物線。

(1) 當 $a>0$ 時，圖形開口向上，頂點為最低點，且在 $x=h$ 時，函數 $f(x)$ 有最小值 $f(h)=k$。

(2) 當 $a<0$ 時，圖形開口向下，頂點為最高點，且在 $x=h$ 時，函數 $f(x)$ 有最大值 $f(h)=k$。

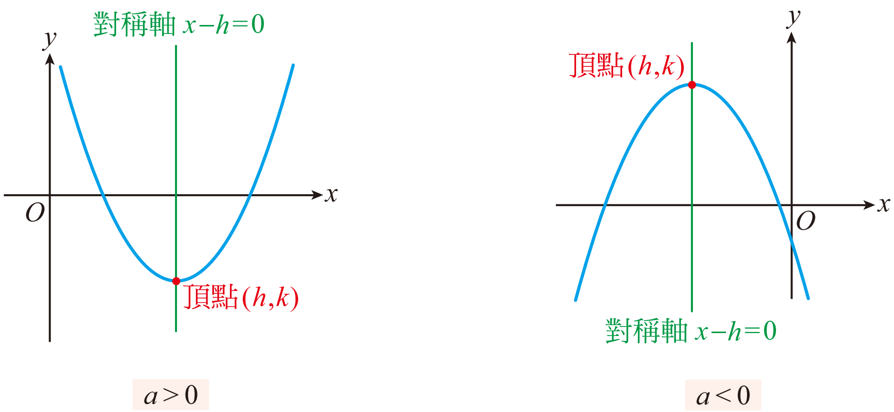


圖 1-24

自我評量

(　　) 1. 坐標平面上，點 $P(a, -b)$ 在第二象限，則點 $Q(ab, a+b)$ 在第
(A)一　(B)二　(C)三　(D)四　象限。【1-1】

(　　) 2. 設 $k>0$，平面上相異兩點 $A(k, 3)$、$B(2, k)$ 的距離為 5，則 k 值為
(A) 9　(B) 8　(C) 7　(D) 6。【1-1】

(　　) 3. 設 $A(-3, 5)$、$B(4, -2)$，P 為 $\overline{AB}$ 的一個內分點，若 $3\overline{AP}=4\overline{PB}$，則 P 點坐標為　(A) $(-2, 1)$　(B) $(0, 2)$　(C) $(1, 1)$　(D) $(3, 1)$。【1-1】

(　　) 4. 設 $A(7, -2)$、$M(3, 1)$，若 M 為 $\overline{AB}$ 中點，則 B 點坐標為
(A) $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$　(B) $(-1, 4)$　(C) $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$　(D) $\left(5, -\frac{1}{2}\right)$。【1-1】

(　　) 5. 設 $A(-1, 5)$、$B(3, 2)$、$C(-1, 2)$，則 $\triangle ABC$ 的周長為　(A) $8+\sqrt{10}$
(B) $10+2\sqrt{2}$　(C) 12　(D) 15。【1-1】

(　　) 6. $\triangle ABC$ 中，$A(0, 0)$、$B(2, 7)$、$C(7, -1)$，則 $\triangle ABC$ 的重心坐標為
(A) $(3, -2)$　(B) $(3, 2)$　(C) $(-2, 3)$　(D) $(2, -3)$。【1-1】

(　　) 7. 若 $A(0, 3)$、$B(-6, 5)$、$C(k, 2)$ 三點共線，則 $k=$　(A) 3　(B) $\frac{3}{2}$
(C) -2　(D) $\frac{5}{2}$。【1-2】

(　　) 8. 斜率為 $\frac{3}{2}$ 且通過原點的直線方程式為　(A) $3x-2y=0$
(B) $3x+2y=0$　(C) $2x-3y=0$　(D) $2x+3y=0$。【1-2】

(　　) 9. x 截距為 $\frac{1}{3}$，y 截距為 -2 的直線方程式為　(A) $x+6y-2=0$
(B) $6x+y-2=0$　(C) $6x-y-2=0$　(D) $x-6y+2=0$。【1-2】

(　　) 10. 直線 L：$2x-3y+6=0$ 與兩坐標軸所圍成的三角形面積為　(A) $\frac{3}{2}$
(B) 3　(C) 6　(D) 12。【1-2】

自我評量

(　　) 11. 設 $P(-9, 7)$、$Q(3, -5)$，則 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線方程式為

(A) $x-y+4=0$　(B) $x-y-4=0$　(C) $2x-y+7=0$

(D) $x-2y+5=0$。　【1-2】

(　　) 12. 直線 $L：3y-2x+5=0$ 的斜率 $m=$　(A) $\frac{3}{2}$　(B) $-\frac{3}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $-\frac{2}{3}$。

【1-2】

(　　) 13. 過點 $(-4, 3)$ 且平行 $2x-5y-7=0$ 的直線方程式為

(A) $5x-2y+26=0$　(B) $5x+2y+14=0$　(C) $2x-5y+23=0$

(D) $2x+5y-7=0$。　【1-2】

(　　) 14. 過點 $(1, -2)$ 且垂直 $3x+2y-5=0$ 的直線方程式為

(A) $3x+2y+1=0$　(B) $3x-2y+7=0$　(C) $2x+3y+4=0$

(D) $2x-3y-8=0$。　【1-2】

(　　) 15. 點 $P(0, -8)$ 到直線 $L：4x-3y+16=0$ 的距離為　(A) 6　(B) 7　(C) 8

(D) 10。　【1-2】

(　　) 16. 兩平行線 $L_1：3x-y=4$ 與 $L_2：-3x+y=6$ 的距離為　(A) $2\sqrt{10}$

(B) $\sqrt{10}$　(C) $\sqrt{5}$　(D) 2。　【1-2】

(　　) 17. 兩平行線 $L_1：2x-y+k=0$ 與 $L_2：2x-y-5=0$ 的距離為 $2\sqrt{5}$，則

$k=$　(A) 15 或 -5　(B) 5 或 -15　(C) 6 或 -14　(D) 14 或 -6。　【1-2】

(　　) 18. 線型函數 $f(x)=ax+1$ 與 $g(x)=2x+b$ 的圖形相交於點 $(-2, 7)$，則

$f(1)+g(2)$ 的值為　(A) 8　(B) 9　(C) 11　(D) 13。　【1-3】

《提示》由 $f(-2)=7$、$g(-2)=7$，先求出 a、b 的值。

(　　) 19. 二次函數 $f(x)=2x^2-6x+7$ 圖形的對稱軸方程式為　(A) $2x-3=0$ (B) $x-3=0$　(C) $2x+3=0$　(D) $x+3=0$。【1-3】

(　　) 20. x 為任意實數，二次函數 $f(x)=-5x^2+20x-13$ 的最大值為　(A) 10 (B) 9　(C) 8　(D) 7。【1-3】

(　　) 21. 已知二次函數 $f(x)=2x^2-bx+c$ 圖形的最低點為 $(-2,6)$，則 $f(-1)$ 的函數值為　(A) 10　(B) 9　(C) 8　(D) 7。【1-3】

(　　) 22. 若 $f(x)=2x^2-3x+1$ 在 $x=a$ 時有最小值 b，則 $a-2b=$　(A) 2 (B) 1　(C) -2　(D) -1。【1-3】

(　　) 23. 根據果農之種植經驗，若每畝種植 16 棵柿子樹時，則每棵樹平均可產 200 個柿子；但每畝增加種植 1 棵柿子樹，則每棵會減產 10 個柿子。問若欲達到最大收成的條件下，每畝應種植幾棵最佳？　(A) 16　(B) 17 (C) 18　(D) 19。【1-3】

《提示》設每畝增加種植 x 棵柿子樹，則總產量為

$$f(x)=(16+x)(200-10x)=-10x^2+40x+3200。$$

(　　) 24. 承上題，達到最大收成時，每畝產柿子多少個？　(A) 3240　(B) 3360 (C) 3480　(D) 3600。【1-3】

(　　) 25. 設 a 為實數，若函數 $f(x)=a(x-2)^2+a^2-4$ 在 $x=2$ 時有最大值 5，則 $a=$　(A) 2　(B) -2　(C) 3　(D) -3。【1-3】