許教授講故事 STORY

◎許志農／國立台灣師範大學數學系

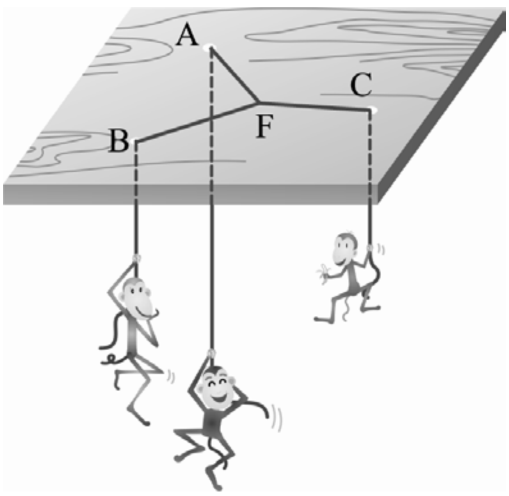
在數學教學中，有這樣一道數學應用問題：在哪裡建學校，可使附近的三個村子 $A,\ B$ 與 C 的三位學生到學校所走路程的和最小？此問題實質為：給平面上 $A,\ B,\ C$ 三點，試尋求一點 F ，使距離和

$$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$$

達到最小。這在歷史上被稱作的費馬點問題，所求的點 F 稱為費馬點，就是建學校的位置。問題是：費馬點該如何構造或作圖呢？我們想透過物理的概念來解決這個問題。

在物理學上，力是一種向量，諸力作用在一個點，當達到平衡時，這些力的向量總和剛好是零向量，例如：拔河比賽當雙方勢均力敵（處於平衡狀態）時，代表兩邊力量一樣大，但方向卻相反，即他們所施力量的向量和為零。

現在取一個平滑的木板，在上面依比例畫出 $A,\ B$ 與 C 三個點，並在 $A,\ B,\ C$ 處各挖一個小洞，取三條繩子紮結於一點 F ，穿過洞各吊掛一隻猴子，如下圖所示。



1 如果掛在 C 點下方的小猴子重 3 公斤，掛在 B 點下方的中猴子重 5 公斤，掛在 A 點下方的大猴子重 7 公斤，那麼當三股力量達到平衡時，求小猴子與中猴子拉線夾角 $\angle BFC$ 的值。

〔解〕

把猴子的重量想成拉力，即向量；得到這三個向量的絕對值為

$$\left|\overrightarrow{FA}\right|=7,\ \left|\overrightarrow{FB}\right|=5,\ \left|\overrightarrow{FC}\right|=3.$$

當這些力量平衡時，拉力的向量總和剛好是零向量，即

$$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{0}\ \Rightarrow\ -\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}.$$

將兩邊取絕對值，再平方，得

$$\begin{aligned}\left|-\overrightarrow{FA}\right|^2&=\left|\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{FB}\right|^2+2\,\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}+\left|\overrightarrow{FC}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{FB}\right|^2+2\left|\overrightarrow{FB}\right|\left|\overrightarrow{FC}\right|\cos\angle BFC+\left|\overrightarrow{FC}\right|^2.\end{aligned}$$

將向量的長度代入，得

$$7^2=5^2+2\cdot5\cdot3\cos\angle BFC+3^2\ \Rightarrow\ \cos\angle BFC=\frac{1}{2}$$

解得 $\angle BFC=60^\circ$。故小猴子與中猴子拉線的夾角為 60° 。

事實上，物理學上還有一個最小位能原理，大意是說，系統會處在總位能最小的狀態，例如：河流裡的水會往低處流，原因是越低的位置，水的總位能越小。如果將掛猴子的模型調整為三隻猴子重量都一樣，那麼這樣的模型會有怎樣的意義呢？

研究1

在上述物理模型中（三隻猴子的重量都一樣），考慮底下四個問題：

(1) 當三股力量處於平衡狀態，而且 F 點處於 $\triangle ABC$ 的內部時，利用力的向量和為零的觀念，求角度 $\angle AFB,\ \angle BFC,\ \angle CFA$ 的大小。

(2) 當三股力量處於平衡狀態，而且 F 點處於 $\triangle ABC$ 的內部時，利用最小位能原理解釋：此時的 F 點會讓

$$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$$

最小。

(3) 如何以尺規作圖求出上述平衡點 F ？或者說，作出讓到三頂點 $A,\ B,\ C$ 之和

$$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$$

為最小的費馬點 F 。

(4) 何時 F 點會落在 $\triangle ABC$ 的邊上。

〔解〕

(1) 根據前一個例題的計算可以得到：當三股力量的大小相等時

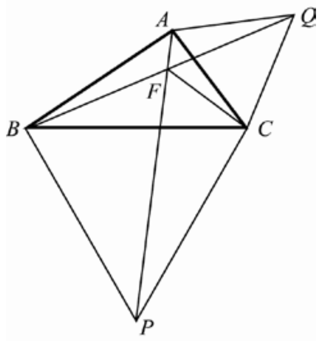
$$\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA=120^\circ$$

(2) 因為猴子的位置越低時，牠的位能就越小，所以三隻猴子下垂的繩子總長越長，代表這系統的位能越小。根據最小位能原理，當木板上面的三段繩子和

$$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$$

達到最小時（此時三隻猴子下垂的繩子總長最長），整個系統才會平衡。

(3) 如圖所示，以 $\overline{BC}$ 及 $\overline{AC}$ 為邊，分別向外作正 $\triangle BCP$ 與正 $\triangle CAQ$ ，連接線段 $\overline{AP}$ 與 $\overline{BQ}$ ，令其交點為 F ：



現在證明：所構成的 F 點會讓線段和

$$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$$

為最小。因為 $\angle BFC=120^\circ$ ，又 $\angle BPC=60^\circ$，所以 $B,\ P,\ C,\ F$ 四點共圓。利用托勒密定理，得

$$\overline{FB}\cdot\overline{CP}+\overline{FC}\cdot\overline{BP}=\overline{FP}\cdot\overline{BC}.$$

又由 $\overline{CP}=\overline{BP}=\overline{BC}$ ，得

$$\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{FP},$$

即

$$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{AP}.$$

當 F' 是 $\triangle ABC$ 內的任一點時，同樣利用托勒密定理，得

$$\overline{F'B}\cdot\overline{CP}+\overline{F'C}\cdot\overline{BP}\ge\overline{F'P}\cdot\overline{BC},$$

即

$$\overline{F'B}+\overline{F'C}\ge\overline{F'P}.$$

利用三角不等式，得

$$\overline{F'A}+\overline{F'B}+\overline{F'C}\ge\overline{AP}=\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}.$$

因此，所做的點 F 滿足所要求的條件。

(4) 當三角形三內角 $\angle ABC,\ \angle BCA,\ \angle CAB$ 有一超過 120° 時， F 點會落在 $\triangle ABC$ 的邊上。

〔註〕

托勒密定理是兩千多年前古希臘時期就知道的一個漂亮定理，不熟悉的讀者不妨找找它的證明，拜讀一番。

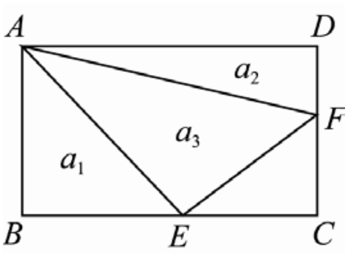
天馬行空的解題經驗

◎ 李維昌／國立宜蘭高中

龍騰出版社發行《數學新天地》的徵答題目，一向是我解題素材的精神糧食。所以，一如往昔一拿到贈閱的《數學新天地》雜誌，便飛快地翻閱該期的徵答題目，一睹許志農教授所精心挑選、設計的徵答題目。往往拿到該期雜誌時已是出刊後的幾天，由於要爭取時效性，若非有突發奇想的解法，很難獲得許教授的青睞而推薦刊登在下一期的解答篇。

因此看到以下的精采題目時，

如下圖所示：$ABCD$ 是面積為 S 的矩形，a_1，a_2，a_3 分別代表所在三角區域的面積：



試證：$S^2-2a_3S-4a_1a_2=0$

便企圖想找出一針見血的解法，期待此解法能言簡意賅，猶如無字證明般的神奇功效，來詮釋此問題核心的所在。讓看到此解法的人能會心一笑，心中默想竟會有如此突兀的想法，以簡短的三行內容，成為疑似此題的最佳解。猶如孔子作春秋，一字定褒貶，能恰如其分。最後皇天不負苦心人，眾裡尋他千百度，那人卻在燈火闌珊處，我竟然得到此題的妙解，這個結果是可遇不可求的。以下是我追尋此法的心路歷程，提供讀者來奇想共賞析，不吝指教。

首先靈光乍現，追溯到高中時期，物理課本所提到的概念「因次分析」，由於 S^2，a_3S，a_1a_2 皆可表為長度的四次方。因此，我大膽地猜測，欲證明的方程式，可能由題目的圖形上某特定的四個線段，經由重排的概念列等式，使左式與右式四線段的乘積相等。

觀察圖形，由於 $\overline{BC}\cdot\overline{CD}=S$ 且 $\overline{EC}\cdot\overline{CF}=2(S-a_1-a_2-a_3)$，因此便選取心目中理想的四線段 $\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{EC}$，$\overline{CF}$ 成為最佳的主角。此四線段的乘積組成為等號的左式，另一方面此四線段的乘積經由重排，兵分二路，分配成 $(\overline{CD}\cdot\overline{EC})$ 與 $(\overline{BC}\cdot\overline{CF})$ 的乘積成為等號的右式。

是不是上天的刻意安排？恰好配合得天衣無縫，$(\overline{CD}\cdot\overline{EC}=S-2a_1)$ 與 $(\overline{BC}\cdot\overline{CF}=S-2a_2)$，

達到我滿心期待、小心求證的目標。

由上面的論述，整理成三行內容的解法：

$$\because\ (\overline{BC}\cdot\overline{CD})\cdot(\overline{EC}\cdot\overline{CF})=(\overline{CD}\cdot\overline{EC})\cdot(\overline{BC}\cdot\overline{CF})$$

$$\therefore\ S\cdot 2(S-a_1-a_2-a_3)=(S-2a_1)\cdot(S-2a_2)$$

整理得

$$S^2-2a_3S-4a_1a_2=0.$$

孔子曾言：「學而不思則罔，思而不學則殆。」我期待每次解題時，皆能直搗黃龍，一眼看穿堂奧之妙，事後「大膽假設，小心求證」。檢驗過程和結果，是否達到最佳化？藉由在夙昔的典範，亦步亦趨，臻於真、善、美的解題境界。

餘弦定律可以怎麼教？How teaching?

◎ 蘇俊鴻／市立北一女中

一、前言

本文之作，緣起於筆者參加由財團法人思源科技教育基金會主辦之「思源 E-Teaching：金獅獎 2006 高中優良科學教案」徵選活動時，所提出的一個有關餘弦定律的教案設計。幸運的，它得到評審們的青睞，而榮獲此次數學科的金牌獎。事實上，筆者是將參與洪萬生教授國科會計畫與團體成員討論互動所獲致之相關的材料與心得，運用在自身教學活動後的反思，再加以設計、編排完成。因此，筆者能夠得獎，可說是數學史融入數學教學（HPM）所得到的具體肯定。以下，筆者便針對此一教案設計之理念、內容及特色作進一步說明。

二、教案之內容、特色及教學時的注意事項

這一「餘弦定律」的簡報教案，其設計之理念，主要強調餘弦定律的發現脈絡，並且在連結畢氏定理時，能更加深入與自然。其目的是希望幫助學生對餘弦定律的了解，能更為深入且多元，不至於讓教學流於單調的公式推導或計算。當然，對於同為教學工作者的教師們，筆者也期望能提供另一個教學活動的參考。

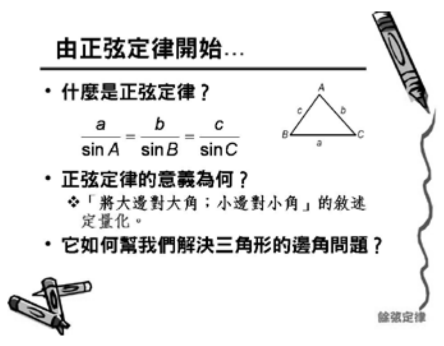
整個教案共有 29 張投影片，可分為三個部分：

（一）餘弦定律的發現

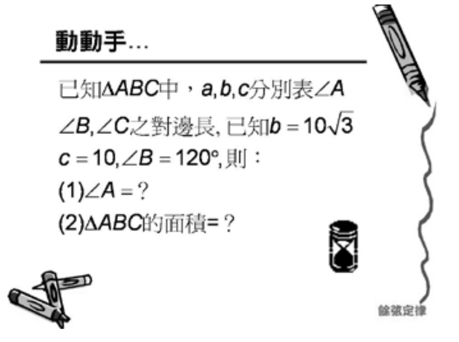
（投影片檔案第 2~10 張投影片。不過，限於篇幅，筆者僅列出主要的投影片，請見圖(1)至圖(6)。請注意：有些投影片布置了有動作效果，以致看來有圖形重疊的現象。）

首先，呼應現行教學章節的安排，由複習正弦定律開始，並用來解決三角形之邊角問題，進而讓學生察覺其侷限性。接著，利用條件的改變（由具體數字變成文字符號），引導學生發現餘弦定律的形式。此一部分適合讓學生分組討論進行，合作將餘弦定律的形式導出。不妨參閱下列投影片，更能了解筆者所使用的例題。

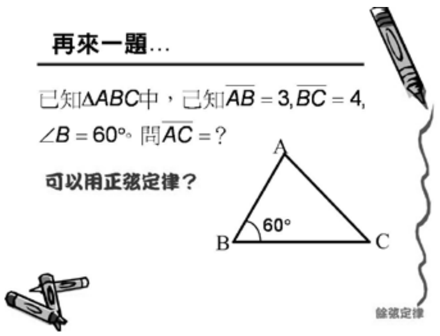
(1)



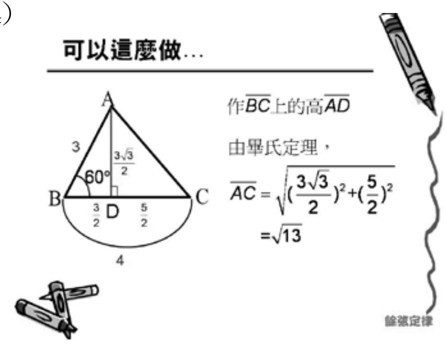
(2)



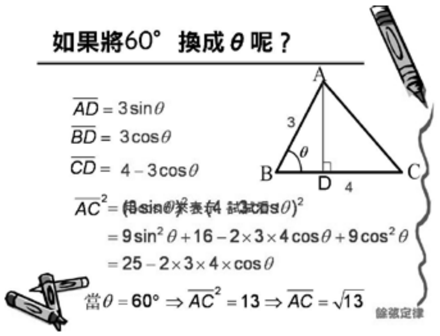
(3)



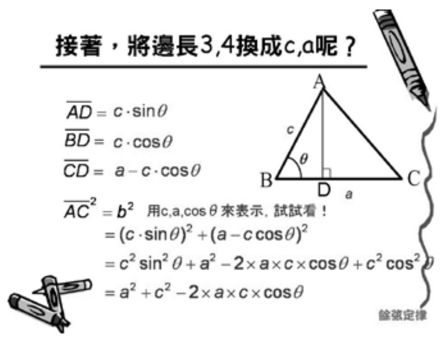
(4)



(5)



(6)



由上面的投影片中，可以看見筆者並非直接告知學生有關餘弦定律的形式。而是利用一個常見的銳角三角形之邊角問題，經由問題條件的逐漸一般化（見圖(3)至圖(6)），透過小組討論的安排，讓學生共同參與餘弦定律的形式之發現。事實上，這樣的教學方式，在筆者參與洪教授國科會「中學教師 HPM 素養指標研究」的問卷中曾見老師提及。它的好處是利用相同的程序（畢氏定理），由特例到一般化，營造出可以讓學生參與的發現脈絡。但是，若直接回到題目的常規練習中，就不免讓學生流於單調的計算。對於這個定律的理解，就失去深入的可能性。因此，筆者利用下面三個問題，提供學生觀察餘弦定律的性質，並為探索餘弦定律的幾何面向而鋪陳。

（二）餘弦定律的相關問題

（投影片檔案第 11~14 張投影片，請見圖(7)至圖(9)。）

問題 *1*：若△ *ABC* 是鈍角三角形，上述的推導過程會依然成立嗎？

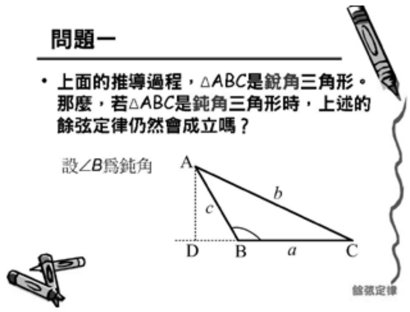
這個問題的提問，是為了讓學生了解性質討論的完整性（$\cos\theta$ 分別為正或負）。此外，筆者更希望藉此讓學生看見：無論是銳角或是鈍角三角形，其邊長的「形式」表現相同。因此，餘弦定律依然成立，這正是代數對「形式」的威力之所在。

問題 *2*：餘弦定律與畢氏定理有何關係？餘弦定律有什麼幾何意義呢？

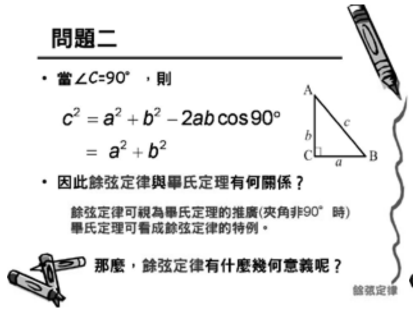
問題 *3*：餘弦定律中的修正項的意義為何？

這兩個問題其實是一貫的，強調的是數（代數）形（幾何）互譯的重要性。利用畢氏定理與餘弦定律之間特例與通例的關係，我們可以由幾何面向再一次安排餘弦定律形式的再發現，這正是本教案的第三部分。

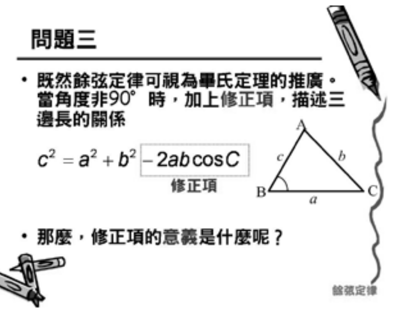
(7)



(8)



(9)



(三) 由畢氏定理出發，呈現餘弦定律的幾何意義

（投影片檔案第 15~29 張，請見圖(10)至圖(20)。）

此部分設計的重點，是由「畢氏定理是餘弦定律的特例；餘弦定律是畢氏定理的推廣」的推論出發，探索餘弦定律 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 的幾何意義，以及修正項 $2ab\cos C$ 的意義。因此，筆者由畢氏定理的歐幾里得證法開始談起。由於現行國中課程的幾何證明的分量減少，對於畢氏定理的歐氏證明也略去不提。所以，老師教學中要多加停留，觀察學生們是否可以接受。說明上也需花費精神鋪陳一番，對於畢氏定理的幾何意義一面積和，以及證明中主要的想法一面積變換，多加強調解說。當學生對於畢氏定理的歐氏證明掌握後，再來將討論的問題由直角三角形轉向非直角三角形，就顯得是自然而然了。先由銳角三角形看起，三邊長之關係的考慮，就能仿照畢氏定理的證明架構，餘弦定律的形式也就自然浮現。最後，將鈍角的情形當成回家作業，讓學生嘗試看看（參照圖(21)）。至此，完成餘弦定律的教學。

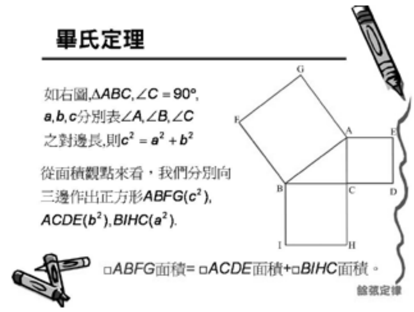
三、隱藏在教案背後的想法—「縱深」與「HPM」

透過上述對於教案設計及教學的說明，細心的讀者或許會懷疑：數學史融入數學教學（HPM）在哪裡呢？教學中談及畢氏定理的歐氏證明就是 HPM 嗎？仔細想想，不提及「歐氏證明」這個名字並不影響我們對此一證明的教學，也不會造成學生理解上的困難（譬如改成畢氏定理的「幾何證法」也是可行）。那麼 HPM 在哪裡？

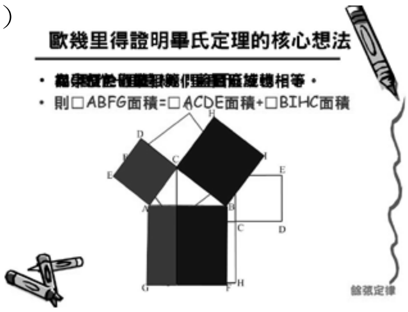
事實上，安排使用在餘弦定律幾何發現脈絡中的材料，讀者或許會覺得似曾相識。例如，一開始是個國中常見的證明（見圖(12)）；由銳角三角形看出餘弦定律的幾何解釋，也曾出現在高中數學教科書的教師手冊中（例如：南一版）。筆者不過是將這些散落於各處的珍珠串成美麗動人的項鍊，透過數學史的關照，讓這些材料的連結得以重現。更進一步，也讓這些因應階段教學的需求而被切割的材料，重新融為一體。

然而，筆者這樣的體察，得自於參與洪萬生教授國科會縱深計畫的討論。在與國小、國中教師的交流中，發現數學概念或主題會因應教學階段不同的需求而有必要的切割，可惜，長此將導致原有風貌的失落，或是教學上的不察。以致數學的教學與學習，總是停留於水平面上發展，而失去了垂直面的整合，這正是洪教授倡導縱深交流的初衷。事實上，筆者從中獲得不少啟發，這份教案設計構想的提出，正是最好的例證。在這餘弦定律的教學中，也希望能讓學生感受到數學知識的發展是積累的，有其脈絡可尋的，這也是 HPM 的真義之所在。

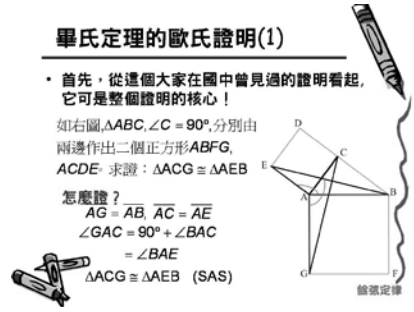
(10)



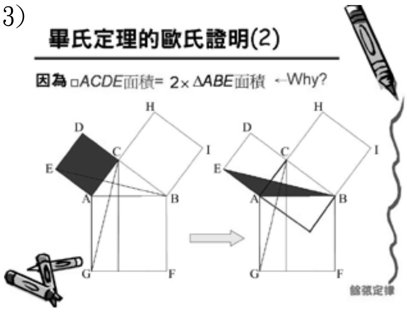
(11)



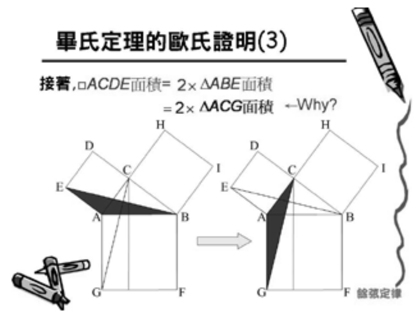
(12)



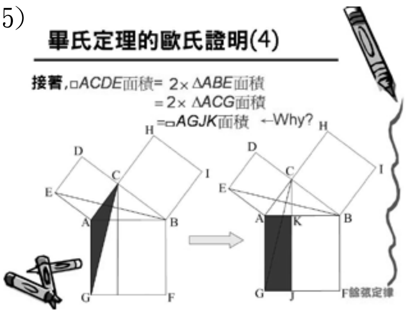
(13)



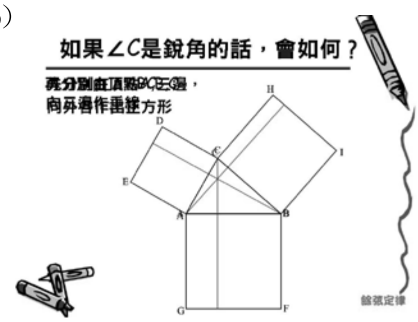
(14)



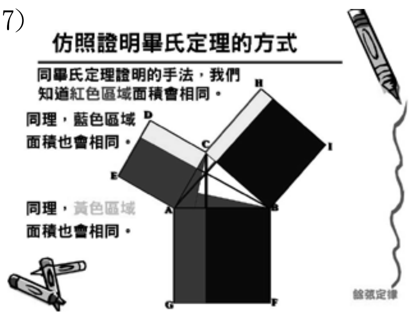
(15)



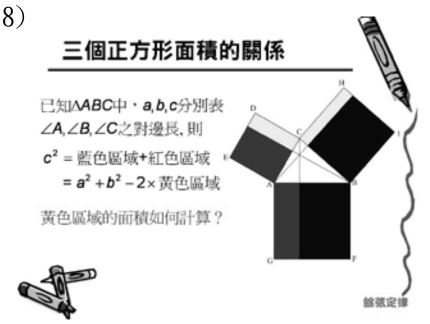
(16)



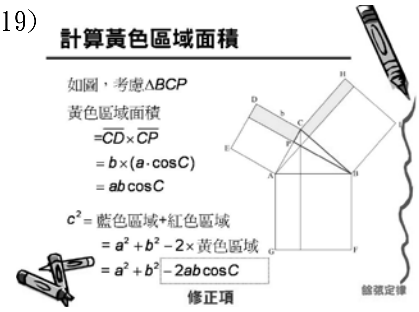
(17)



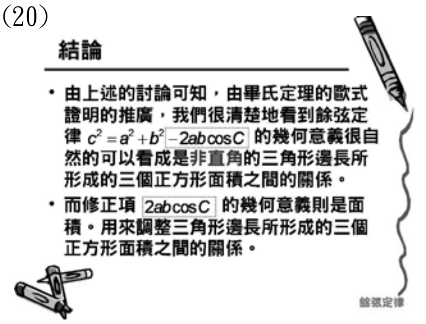
(18)



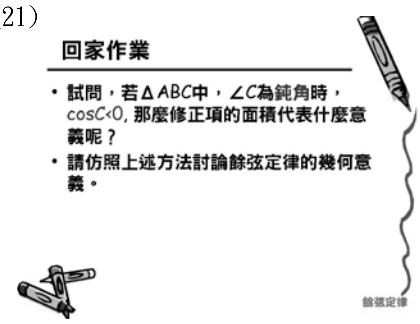
(19)



(20)



(21)



四、結論

透過上述的說明，希望能引起您使用此份教案的興趣。在本教案中，筆者安排兩種發現餘弦定律的不同脈絡。在歷史的映照下，我們了解餘弦定律的提出與（最後）形式，並非憑空冒出。我們也期望能將這樣的感受蘊含在教學之中，傳遞給學生察知數學在理性的形式之外，也是有血有肉的實體。最後，容筆者對思源科技教育基金會為提升高中科學教學的努力表示敬意。教案徵選活動的舉辦，不僅鼓勵高中教師將其教學想法提出，也建置了一個讓教師可以分享交流的資訊平台。

（活動網址：http://www.seed.org.tw，關於本文所使用的教案投影片可於此處下載）

師父中的師父講堂第五講

指數與對數……人體六根的影武者

◎ 許志農／國立台灣師範大學數學系

數學經文

人人都有的六根，眼、耳、鼻、舌、身、意，透過人體的六根，我們得以和外界溝通、接觸，產生感受、經驗…等。

造物者必須創造出在任何惡劣環境之下，仍然靈敏可用、不會嚴重受損的六根。然而，指數與對數卻是讓人體六根進化完美的影武者，也是不二人選。

唯有對指、對數深刻的了解及抱以崇高的敬意，才能掌握人體六根的最後一塊拼圖，達到六根清淨的境界，也才能充分享受六根帶給人類的便利與幸福。

問題

（芮氏地震規模與釋放能量的關係）地震規模的觀念是由芮氏在 1935 年所提出的，稱為芮式地震規模，用符號 s 表示。地震能量是地震所釋放的能量，用符號 w 表示。芮氏地震規模越大，所釋放的地震能量也越大。貝氏根據經驗法則，於 1966 年提出芮氏地震規模 s 與地震能量 w 的參考關係式為

$$\log_{10} w = 5.24 + 1.44s .$$

如果芮氏地震規模增加1，那麼釋放的能量增加約為原能量的幾倍（取整數部分）？

【對數參考值：

$\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771,\ \log_{10} 7 = 0.8451$】

人類的五種感覺─視、聽、嗅、味、觸覺都和對數扯上關係。德國生理學家韋伯在1825年作出一個數學定律，用來度量人對各種身體刺激的反應。後來，德國的科學家費克納就發現這種關係，他宣布了一條定律（稱為韋伯-費克納定律）說：「人類對任何刺激的反應與這些刺激的對數成比例。」韋伯-費克納定律可以用數學式子表示為

$$s = a\log_{10} w + b ,$$

其中 s 代表人體器官對刺激的感受強度，w 代表刺激量的大小，而常數 $a,\ b$ 跟環境與刺激物的種類有關。

幾何圖形的欣賞—眼睛

早在兩千年前，古希臘的天文學家、數學家托勒密以他的眼睛感受到的發光強弱程度，將天上的星星分成1, 2, 3, 4, 5, 6等（現在稱為「目視星等」）。直到十九世紀發明了光學儀器，才確認托勒密所認定的1等星其發光光度事實上是2等星發光光度的2.512倍（同樣的2等星的發光光度事實上是3等星發光光度的2.512倍，……，依此類推）。有了光學儀器之後，就能測出更多的星等，下表是幾顆常見星球的目視星等表：

星　球	太　陽	天狼星	織女星	牛郎星	北極星
目視星等	–26.7	–1.45	0	0.8	2.0

顯然發光光度較強大的星星其目視星等是負值。如果將光學儀器調整成0等星的發光強度為1，那麼依「視覺」的韋伯–費克納方程式，可以將目視星等 s 與儀器測量到的發光強度 w 的關係式寫成

$$\begin{aligned} s &= -\log_{2.512} w \\ &= -\frac{\log_{10} w}{\log_{10} 2.512} \\ &\approx -\frac{\log_{10} w}{0.4} \\ &= -2.5\log_{10} w, \end{aligned}$$

其中 $\log_{10} 2.512$ 的近似值0.4可查閱常用對數表。

例題 1

星空中，有一群會改變亮度的星，叫做變星。天文學家發現一顆變星，最亮時的目視星等1.6；最暗時的目視星等4.1。求此變星在最亮時的發光強度是最暗時的幾倍？

〔解〕

令光學儀器測得最亮與最暗時的發光強度分別為 w_1 與 w_2。由關係式得到

$$1.6 = -2.5\log_{10} w_1, \quad 4.1 = -2.5\log_{10} w_2 .$$

將兩式相減得到

$$1.6-4.1 = -2.5\left(\log_{10} w_1 - \log_{10} w_2\right) = -2.5\log_{10}\frac{w_1}{w_2} .$$

因此

$$\log_{10}\frac{w_1}{w_2} = 1 \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = 10 .$$

故此變星在最亮時的發光強度是最暗時的10倍。

練習 1 天文學家經常透過數學式子

$$m - M = 5\log_{10}\frac{d}{32.6} .$$

來估計恆星與地球的距離，這裡的符號 M 是該恆星的絕對星等，m 是該恆星的目視星等，d（光年）是恆星與地球的距離。

北極星被稱為夜歸人的燈塔，因為它始終在天空的北方。已知北極星的絕對星等 -3.0，目視星等2.0，求北極星與地球的距離（以光年表示）。

眼睛不僅將光的強度弱化，也會將所看到的面積變小，所以「睜眼說瞎話」不足為奇。統計學家克利夫蘭就研究過人體眼睛對面積的感應程度。

例題 2

統計學家克利夫蘭對人體的眼睛詳細研究後發現，我們的眼睛看到圖形面積的大小與此圖形實際面積的 0.7 次方成正比。例如大圖形是小圖形的 4 倍，眼睛感覺到的卻只有 $4^{0.7} \approx 2.6$ 倍。

書本上並列兩個國家的地圖，它們的縮小比例都一樣。如果從地圖上看起來，大國是小國面積的128 倍，那麼實際上大國面積是小國面積的幾倍？

〔 解 〕

設大國面積是小國面積的 x 倍，由說明知道

$$x^{0.7} = 128 = 2^{7}$$
$$\Rightarrow\ x = 2^{10} = 1024.$$

故大國面積是小國面積的1024 倍.

2 天籟之音的聆聽—耳朵

聆聽天籟之音是造物者創造耳朵的用意，可惜的是，我們聽到的常常是噪音而不是什麼天籟之音。就讓我們研究一下噪音與耳朵的關係：

例題 3

噪音監測器量度的噪音大小 dB（分貝）是根據當地聲音總能量 w（瓦特）透過數學式子

$$\mathrm{dB} = 120 + 10\log_{10} w$$

來計算。

臺北市政府規定球場內噪音不得超過 65 分貝，而氣笛製造商製造一款低噪音氣笛，一支氣笛只會產生 45 分貝噪音。欲符合市政府噪音規定，球場內至多能同時響起幾支氣笛呢？

〔 解 〕

令至多能同時響起 x 支氣笛，且一支氣笛會產生 w 瓦特。由於一支氣笛會產生 45 分貝噪音，得到下列等式

$$45 = 120 + 10\log_{10} w \ \Rightarrow\ w = 10^{-7.5}.$$

因此 x 支氣笛產生能量 $x \times 10^{-7.5}$ 瓦特。因為球場內噪音不能超過 65 分貝，所以得到下列不等式

$$120 + 10\log_{10}\left(x \times 10^{-7.5}\right) \le 65$$
$$\Rightarrow\ \log_{10}\left(x \times 10^{-7.5}\right) \le -5.5,$$
$$\Rightarrow\ \log_{10} x - 7.5 \le -5.5,$$
$$\Rightarrow\ \log_{10} x \le 2,$$
$$\Rightarrow\ x \le 100.$$

故球場內至多能同時響起100 支氣笛。

耳朵除了聆聽天籟之音外，聽八卦消息是它的另一最愛。人們不僅喜歡用耳朵聽八卦消息，更喜歡用嘴巴傳播聽來的八卦新聞，這傳播速度有多快呢？讓我們研究一下吧！

八卦新聞的擴散模型：有一八卦新聞在一個城市裡散播著，剛開始時，每$1+a$人，就有一人知道此新聞，經過t天渲染後，知道這八卦新聞的比例$I(t)$定義為

$$I(t)=\frac{\text{經過}t\text{天渲染後，知道這八卦新聞的人數}}{\text{城市總人數}}.$$

若此城市每人每天平均接觸的人數為b人，則$I(t)$可以用數學式子表示為

$$I(t)=\frac{1}{1+a\cdot 7^{-\frac{b}{20}t}}.$$

根據經驗得知，當$I(t)=\frac{1}{2}$的時間t是該八卦新聞傳播最嚴重的時刻。

例題 4

有一人口1000人的山地鄉，根據調查，該鄉每人每天平均僅接觸8人。在一次選舉裡，某候選人想藉著散播謠言來中傷另一候選人。此候選人想在選前幾天，利用他的20人競選團隊出去造謠，並希望在投票當天達到傳播最嚴重的時刻，好讓另一候選人落選。你知道此候選人應該在投票日前幾天散播此謠言嗎？

〔解〕

剛開始有20人在散播謠言，由$\frac{20}{1000}=\frac{1}{50}$知道：每50=1+49人，就有一人知道此謠言。因此$a=49,\ b=8$，即

$$I(t)=\frac{1}{1+49\cdot 7^{-\frac{8}{20}t}}.$$

由$I(t)=\frac{1}{2}$解得

$$7^{\frac{8}{20}t}=7^2\ \Rightarrow\ t=5.$$

故在投票日前5天散播此謠言最好。

3 美食美味的感測器—舌頭

老張牛肉麵的招牌是它的小辣椒，味道好吃又夠辣，舌頭對這款小辣椒的韋伯–費克納定律是：當一碗牛肉麵放 w 個小辣椒時，舌頭感覺到的辣度 s 會滿足

$$s=\log_{10} w.$$

正常一碗牛肉麵放 5 個小辣椒。如果你是一個超愛嚐辣的人，要求老闆將牛肉麵的辣度提高 3 倍，那麼應該放幾個小辣椒呢？讓我們來算算吧！

設放 5 個小辣椒的辣度為 s ，所以

$$s=\log_{10} 5 \ \Rightarrow\ 3s=3\log_{10} 5=\log_{10} 5^3=\log_{10} 125.$$

除非老闆腦筋秀逗，否則老闆不會在一碗牛肉麵放 125 個小辣椒（可能也放不下），可以解決的方法是：去種植更辣的超辣小辣椒。這就像果農不斷地接枝改良水果的甜度，來滿足大眾舌頭對甜度的要求。

同樣的情況也發生在老師的上課裡，女老師用盡力氣地認真上課，坐在後頭的同學要求老師提高音量 3 倍。如果你懂韋伯–費克納定律的話，你就不會做這種「不合乎數學原理」的要求。因為音量提高 3 倍，老師所費的能量可能是剛剛的百餘倍，老師大概上個三分鐘就能量耗盡，身體虛脫了。但是，該如何解決呢？這就要感謝麥克風的功能了，老師只要對著麥克風講話，透過電流驅動擴大機將音量提高，就搞定了。家裡如果有音響的話，你可以摸摸看擴大機熱不熱，一定很熱，就是這個能量將音響的聲音擴大的。

4 天搖地動的感受—身體

如果將芮氏地震規模 s 當成身體所感受的程度，地震所釋放的能量 w 當刺激量的大小，那麼地震對身體的韋伯–費克納定律為

$$s=\frac{1}{1.44}\log_{10} w-\frac{5.24}{1.44}.$$

現在讓我們來解決本章一開始的題目：設芮氏地震規模為 s 與 $s+1$ 時，地震所釋放的能量分別為 w_1 與 w_2 。代入公式得到

$$\log_{10} w_1=5.24+1.44s,\ \log_{10} w_2=5.24+1.44(s+1).$$

將兩式相減得到

$$\log_{10} w_2-\log_{10} w_1=1.44 \ \Rightarrow\ \log_{10}\frac{w_2}{w_1}=1.44.$$

由對數參考值知道：

$$\log_{10} 27=1.4313,\ \log_{10} 28=1.4471.$$

所以

$$\frac{w_2}{w_1}=27.\cdots$$

的整數部分為 27 。答案為 27 倍。

牛頓冷卻規律描述一個物體在常溫 a °C 環境下的溫度變化。如果物體的初始溫度是 b °C，那麼經過 t 小時後的溫度 $f(t)$ °C 將滿足

$$f(t)-a=(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{kt},$$

這裡的常數 k 與物體的性質有關。

例題 5

某冬晨，警局接到報案，在街頭發現一流浪漢的屍體，早上六點半時測量其體溫為 13 ℃，到早上七點半時，其體溫已降到 11 ℃，若假設室外溫度約維持在10 ℃，且人體正常體溫為 37 ℃。

問：流浪漢死亡的時間。

〔解〕

設早上六點半時，流浪漢已死亡 t 小時。由題意知道：$f(t)=13,\ f(t+1)=11$。代入牛頓冷卻公式得到

$$3=f(t)-10=(37-10)\left(\frac{1}{2}\right)^{kt}$$

$$\Rightarrow\ 1=9\left(\frac{1}{2}\right)^{kt}$$

及

$$1=f(t+1)-10=(37-10)\left(\frac{1}{2}\right)^{kt}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{1}{3}$$

將 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{1}{3}$ 代入第一式得到

$$3=f(t)-10=(37-10)\left(\frac{1}{2}\right)^{kt}$$

$$=27\left(\frac{1}{3}\right)^{t}$$

$$\Rightarrow\ t=2$$

流浪漢死亡的時間是早上四點半。

練習 2

牛奶保鮮時間因儲藏時的溫度不同而不同。若牛奶放在 0 ℃的冰箱中，保鮮時間是 200 小時，而在 24 ℃的廚房中是 25 小時。假設保鮮時間 y（小時）與儲藏溫度 x（℃）的函數關係是 $y=a\cdot b^{x}$（$a,\ b$ 是常數）。

(1) 寫 保鮮時間 y 關於儲藏溫度 x 的關係式。

(2) 利用(1)的結果，指出溫度在 32 ℃與16 ℃時的保鮮時間。

5 頭腦的學習成效—意識

為了區分棋力的好壞，業餘圍棋採用30級數的等級區分，最低30級，等於你是一點概念都沒有，或是稍微懂一點點；28級大概可以和別人下完一整盤棋了。對圍棋有興趣的人來說，不可能只練習或下過幾十盤棋而已，起碼有上百盤或上千盤。如果要用數學式子描述一個人的圍棋級數，將他下過的圍棋盤數取對數可能是不錯的選擇。

這樣的情況也反映在運動員身上，體操選手的分數滿分是10分，但是為了達到九點多分，他必須日以繼夜地苦練，除了天賦外，將練習的時數取對數多少也可以反映他的得分。

因此舉一反三用在頭腦的學習成效上是不確實的，想要得到好成績，必須不斷的練習，舉十反一可能比較實際，至少韋伯−費克納方程式是這樣說的。除了取對數外，指數也可以用來描述頭腦的學習成效：

例題 6

心理學家常用對數模式 $L(t)=a\left(1-10^{-bt}\right)$

來描述學生經過 t 時間的學習之後所得到的學習量（或成果），這裡的常數 a 與 b 跟學生及學習的科目相關。

有一學生一天可以背熟75個單字，兩天可以背熟135個單字。試問：這學生三天可以背熟幾個生字。

〔解〕

由題意知道

$$\begin{cases} L(1)=75=a\left(1-10^{-b}\right) \\ L(2)=135=a\left(1-10^{-2b}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{75}{135}=\frac{1-10^{-b}}{1-10^{-2b}}$$

$$\Rightarrow 5\left(10^{-b}\right)^2-9\left(10^{-b}\right)+4=0$$

$$\Rightarrow 10^{-b}=\frac{4}{5} \text{ 或 } 1 \text{（不合）。}$$

將 $10^{-b}=\dfrac{4}{5}$ 代回原方程組得到

$$75=a\left(1-\frac{4}{5}\right) \Rightarrow a=375.$$

這學生三天能背熟

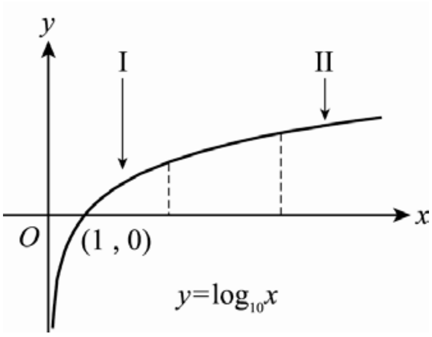
$$L(3)=a\left(1-10^{-3b}\right)=375\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^3\right)=183$$

個生字。

6 對數函數圖形的奧秘─

人體六根的最後一塊拼圖

下圖是對數函數 $y=\log_{10}x$ 的概略圖形：這裡的 x 代表光線的強度；y 代表眼睛對光的感受強度。



對數函數被雀屏中選主宰人體各種器官的奧秘是什麼呢？為何被選中的不是直線、二次函數、高次多項式函數或像 $y=\sqrt{x}$ 之類的函數圖形呢？讓我們列舉對數函數圖形的一些特性：

① 對數函數是遞增函數，也就是說，x 的值越大，其函數值 $\log_{10}x$ 也越大。當 $0<x<1$ 時，函數值為負，且越靠近 0 時，下降的速度越快；當 $x>1$ 時，函數值為正，但上升的速度趨緩。

② 當 $x>1$ 且 x 不是很大的時候，由圖中曲線 I 部分得知：其函數值不會過於貼近 0；當 x 很大的時候，由圖中的曲線 II 部分得知：其函數值增加的速度很平緩。

③ 以眼睛為例，晚上時，眼睛接收微弱的光，但白天時，眼睛必須適應強光的照射。因此，在晚上讓眼睛可以依然看清楚周遭環境，而白天讓眼睛不要受強光的傷害，是造物者創造眼睛的優先法則。而對數函數的圖形剛好符合這個原則，曲線 I 部分代表晚上的情形，光微弱， 但眼睛還是有一定的辨識程度（因為曲線 I 部分與 0 有一段距離）；曲線 II 部分代表白天的情形，光線雖強，但眼睛受到一定程度的保護（因為曲線 II 部分以很平緩的速度上升）。

④ 無論是直線、二次函數、高次多項式函數或像 $y=\sqrt{x}$ 之類的函數圖形，它們都沒有像對數函數般，既可在晚上有一定的能見度，白天又可以保護眼睛的雙重好處。例如根號函數 $y=\sqrt{x}$ 的圖形在 x 很小時，其圖形跟對數函數的圖形很像，但當 x 很大時，其圖形爬升過快，容易造成眼睛的傷害。

⑤ 人體六根的其他器官的作用跟眼睛是相似的，所以對數函數是保護六根的不二人選，也是完美的人選。

「床前明月光，疑是地上霜，…」意味著，在暗夜裡，只要有些許的月光，眼睛就能感受到像霜一樣亮；「月明星稀」訴說著，月圓時的亮光足以蓋過多數星星的餘光；白天裡，光線那樣強，眼睛依然可以適應，不會受損，這都要感謝對數函數的傑作。不僅在黑暗裡，眼睛給人們帶來安全感；甚至在白天時，眼睛也能舒服的運作，不造成器官的痛苦。

在享受六根帶來的便利與幸福之餘，更應對指、對數抱以崇高的敬意及深刻的了解。

7 常用對數表—昏睡的傳統

在第 1 節中，用到近似值 $\log_{10} 2.512 \approx 0.4$，這個近似值可由常用對數表及其表尾差（如下表）得到

$$\log_{10} 2.512 \approx 0.3997 + 0.0003 = 0.4 .$$

常用對數表 $y=\log_{10}x$ 表尾差

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15

要注意的是，我們的常用對數表及表尾差僅正確到前四位數，所以利用對數表得到的數據僅準確到前四位數。相較於電腦可以準確到十來位數，顯得遜色許多。

在沒有電腦的時代，常用對數表是計算的利器，甚至可以利用內差法求得更精準的近似值（表尾差是內差法的一個特例）。但是，電腦出現之後，再怎麼精確的對數表、表尾差或內差法的使用都無法超越電腦計算得到的近似值。所以常用對數表的教學應將重點放在內差法的數學層面，也就是，對數函數圖形在很近的兩個點間之曲線可以想成直線的概念；而不是看中查表的過程，這些過程都可以由電腦代勞。因此，常用對數表的表尾差可以不用放在附錄上，一則它是內差法得到的結果，另一則是不需要查到這樣精細（勞神，浪費時間），再怎樣精細也不如電腦計算的快速與準確。或許是擺脫不了傳統的束縛，直到今天，教科書所附的常用對數表都還是包含表尾差，也要求學生同時會表尾差與內差法兩種方法。不知道何時，這種昏睡的傳統才會甦醒過來。

最後引用一則奧修在《解金剛經》中講的古代印度故事，供各位體悟：有一個人在做傳統的「斯拉達」儀式來榮耀他剛過世的父親。「斯拉達」是當一個人的父親過世，為他的旅程祈禱的一種儀式。在儀式進行當中，他家養的狗跑進了祈禱房，因為害怕牠玷汙了那個情況，所以那個人就趕快起來將那隻狗綁在走廊的柱子上。

幾年之後，當他過世，他的兒子為他執行「斯拉達」儀式。他很小心地去遵循每一個細節，所以他就從鄰居抓來一隻狗，因為就他的記憶，他認為那一定非常重要。「我父親在祈禱當中特別爬起來去做它，當他把那隻狗拴在柱子上之後，他覺得很高興，然後就繼續祈禱。」他不想錯過任何事情，那個儀式必須很完美。在這個時候，他家裡沒有養狗，他必須跑到鄰近地區去找一隻迷路的狗，結果他抓到了一隻，然後就很小心地將牠拴在走廊的柱子上，問心無愧地完成了整個儀式。在那戶人家，多少世紀以來，那個儀式仍然被遵循著。事實上，神聖的狗的儀式已經變成了那個典禮最重要的項目。

事情就是這樣在進行，有時人們生活在無意識之中。遵循父親做了些什麼，將那些父親或祖先曾經為之的行為視為神聖的部份沿承下來，而忘了去關心它真正的意義是什麼。

test 國立台灣大學數學系 *95 學年度* 學士班甄選入學

第二階段筆試試題

2006/4/1　下午 2：00~4：00

1. 設 $f(x)=x^3+2x^2-3x-1,\ \ g(x)=x^4+3x^3-x^2-5x+2$，且 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 為 $f(x)=0$ 之三根。

 (1) 試求 $g(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot g(\gamma)$ 之值。

 (2) 試求 $\frac{1}{g(\alpha)}+\frac{1}{g(\beta)}+\frac{1}{g(\gamma)}$ 之值。

2. 設 $E_1,\ E_2,\ E_3$ 為空間中三個平面，且都通過原點 O。已知 E_1 和 E_2 互相垂直，E_1 和 E_3 夾角 $60°$，E_2 和 E_3 夾角也是 $60°$。設 L 為過原點之直線；若 L 和 E_1 之夾角為 $30°$，而 L 和 E_2 之夾角也是 $30°$，試求 L 與 E_3 之夾角為何？

3. 用 7 種顏色塗在正六面體的 6 個面上，不同面用不同顏色。

 (1) 試問可塗成幾種正六面體？

 (2) 若每個面用此 7 種顏色再畫上字母 O，字母 O 所用顏色與底色不同，且不同面的 O 用不同顏色，試問有幾種正六面體？

4. 設 N_0 表示所有非負整數的集合。假設對所有 $m,\ n\in N_0$，函數 $f:N_0\to N_0$ 滿足 $f(m+n)-f(m)-f(n)=0$ 或 1，且 $f(8888)=2222$。

 (1) 試證

$$k-1\geq f\left(\sum_{i=1}^{k}n_i\right)-\sum_{i=1}^{k}f(n_i)\geq 0.$$

 (2) 求 $f(4)$。

 (3) 求 $f(2006)$。

國立台灣大學數學系 95 學年度 學士班甄選入學

第二階段筆試試題

1. 將 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 得

$$g(x)=(x+1)f(x)+(-x+3).$$

將 x 以 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 代入，得

$$g(\alpha)=3-\alpha,\quad g(\beta)=3-\beta,\quad g(\gamma)=3-\gamma.$$

又由根與係數的關係，得

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-2\,;\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=-3\,;\\ \alpha\beta\gamma=1.\end{cases}$$

(1) 利用上述公式，得

$$\begin{aligned}g(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot g(\gamma)&=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)\\&=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)-\alpha\beta\gamma\\&=27-9(-2)+3(-3)-1\\&=35.\end{aligned}$$

(2) 利用上述公式，得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{g(\beta)g(\gamma)+g(\alpha)g(\gamma)+g(\alpha)g(\beta)}{g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)}\\&=\frac{(3-\beta)(3-\gamma)+(3-\alpha)(3-\gamma)+(3-\alpha)(3-\beta)}{35}\\&=\frac{27-6(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)}{35}\\&=\frac{27-6(-2)+(-3)}{35}\\&=\frac{36}{35}.\end{aligned}$$

2. 設 $\overrightarrow{n_i}$ 是平面 E_i 的單位法向量，$\overrightarrow{l}$ 是直線 L 的單位方向向量，即

$$\left|\overrightarrow{n_i}\right|=1(i=1,\ 2,\ 3),\ \left|\overrightarrow{l}\right|=1.$$

由

$$\begin{cases}E_1\text{ 和 }E_2\text{ 互相垂直}\\ E_3\text{ 和 }E_1\text{ 夾角}60^\circ\\ E_3\text{ 和 }E_2\text{ 夾角}60^\circ\\ \text{直線 }L\text{ 和 }E_1\text{ 夾角}30^\circ\\ \text{直線 }L\text{ 和 }E_2\text{ 夾角}30^\circ\end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0 \\ \overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_1}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2} \\ \overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_2}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2} \\ \overrightarrow{l}\cdot\overrightarrow{n_1}=\cos\left(90^\circ-30^\circ\right)=\frac{1}{2} \\ \overrightarrow{l}\cdot\overrightarrow{n_2}=\cos\left(90^\circ-30^\circ\right)=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

利用上述等式，可令

$$\overrightarrow{n_1}=\left(1,\ 0,\ 0\right),\ \overrightarrow{n_2}=\left(0,\ 1,\ 0\right).$$

由 $\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_2}=\frac{1}{2}$ 及 $\left|\overrightarrow{n_3}\right|=1$ 可令

$$\overrightarrow{n_3}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

同理可得

$$\overrightarrow{l}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

①當 $\overrightarrow{n_3}$ 與 $\overrightarrow{l}$ 同號時，$\overrightarrow{n_3}=\overrightarrow{l}$，代表 L 與 E_3 的夾角為 90°。

②當 $\overrightarrow{n_3}$ 與 $\overrightarrow{l}$ 異號時，$\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{l}=0$，代表 L 與 E_3 平行，其夾角為 0°。

3. (1) 從 7 種不同的顏色中挑選出 6 種顏色的方法有

$$C_6^7=7$$

種，再將這 6 種不同顏色塗在正六面體上的方法數有

$$\frac{6!}{4\times 6}=30$$

種，因此總共有

$$7\times 30=210$$

種不同的塗法。

(2) 先將六個面著色，讓六個面皆不同顏色，塗法有 210 種。此時六面體的六個面皆不同，因此可依某一順序編號，並假設集合 $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ 分別為在該面的文字 O 著上與該面底色相同的顏色的情形，因此六個 O 顏色皆與底色不同的集合為

$$A'\cap B'\cap C'\cap D'\cap E'\cap F'.$$

利用排容原理可得

$$\begin{aligned} &n(A'\cap B'\cap C'\cap D'\cap E'\cap F') \\ &=P_6^7-C_1^6P_5^6+C_2^6P_4^5-C_3^6P_3^4+C_4^6P_2^3-C_5^6P_1^2+C_0^6P_0^1 \\ &=7!-6\cdot 6!+15\cdot 5!-20\cdot 4!+15\cdot 3!-6\cdot 2!+1 \\ &=5040-4320+1800-480+90-12+1 \\ &=2119. \end{aligned}$$

因此總共有 $210\cdot 2119$ 種塗法。

4. (1) 利用$1 \ge f(m+n) - f(m) - f(n) \ge 0$將下列$k-1$個式子累加

$$
\begin{aligned}
&1 \ge \cancel{f(n_1+n_2)} - f(n_1) - f(n_2) \ge 0 \\
&1 \ge \cancel{f(n_1+n_2+n_3)} - \cancel{f(n_1+n_2)} - f(n_3) \ge 0 \\
&1 \ge \cancel{f(n_1+n_2+n_3+n_4)} - \cancel{f(n_1+n_2+n_3)} - f(n_4) \ge 0 \\
&\ \vdots \\
&1 \ge f(n_1+n_2+\cdots+n_k) - \cancel{f(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1})} - f(n_k) \ge 0
\end{aligned}
$$

得

$$k-1 \ge f\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right) - \sum_{i=1}^{k} f(n_i) \ge 0 .$$

(2) 利用 $2222 = f(8888) = f(2222\times 4)$ 及(1)，得

$$2222-1 \ge f(2222\times 4) - 2222 f(4) \ge 0 ,$$

即

$$2221 \ge 2222 - 2222 f(4) \ge 0 .$$

移項整理，得

$$1 \ge f(4) \ge \frac{1}{2222},$$

又 $f(4)$ 是整數，故 $f(4)=1$.

(3)(a) 利用$1 = f(4) = f(2\times 2)$ 及(1)，得

$$2-1 \ge f(2\times 2) - 2 f(2) \ge 0 ,$$

即

$$\frac{1}{2} \ge f(2) \ge 0 .$$

又 $f(2)$ 是整數，故 $f(2)=0$.

(b) 利用 $2222 = f(8888) = f(4\times 2006 + 216\times 4)$ 及(1)，得

$$(4+216)-1 \ge f(4\times 2006+216\times 4) - 4 f(2006) - 216 f(4) \ge 0 .$$

代入 $f(8888)=2222$ 及 $f(4)=1$得

$$219 \ge 2222 - 4 f(2006) - 216 \ge 0 ,$$

即

$$471\frac{3}{4} \le f(2006) \le 501\frac{1}{2} .$$

(c) 利用 $f(2006) = f(501\times 4 + 1\times 2)$ 及(1)，得

$$(501+1)-1 \ge f(2006) - 501 f(4) - f(2) \ge 0 .$$

代入 $f(2)=0$ 及 $f(4)=1$得

$$501 \ge f(2006) - 501 \ge 0 ,$$

即

$$501 \le f(2006) \le 1002 .$$

綜合(b)及(c)的不等式及 $f(2006)$ 為整數，得

$$f(2006) = 501 .$$

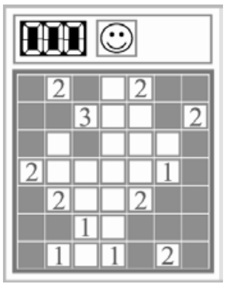
專欄 動手玩數學

◎許志農／國立台灣師範大學數學系

遊戲 1

☆☆

微軟電腦軟體的遊樂場有一種叫「踩地雷」的遊戲，相信大部分的人都玩過。如下圖所示，白色區域是已探勘沒有地雷的區域，數字代表該區域的四周灰色地帶所佈的地雷數，而且每塊灰色區域至多佈一顆地雷。



(1) 總共佈幾顆地雷？

(2) 可以精確地確認每顆地雷所佈的位置嗎？

〔玩鎖・玩索〕

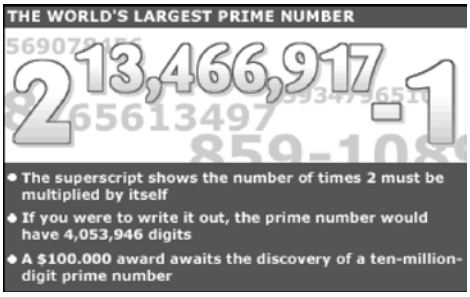
每個年齡層有不同的數學觀念要學習，甚至有些人會額外的補強一些學校不教的課程。例如有些國小的學生會學習心算，增強計算的速度與能力；上了年紀的人，為了怕頭腦退化，會做一種叫「數獨」的填數字遊戲。這些額外的學習經常印證《金剛經》所說的「一切有為法，如夢幻泡影」，大都船過水無痕，沒辦法在數學的學習之旅上起大作用。所以慎選有為法（可以起作用的學習方法）是相當重要的。

這道「踩地雷」遊戲就是為國、高中數學能力的銜接而設計的。國中升高中的學生需要加強哪些數學能力呢？邏輯推理可能是首選，「踩地雷」遊戲就屬於這種訓練的一環。

遊戲 2

☆☆

網際網路梅森質數搜索組織集合了相當多電腦的計算能力，主要任務就是不斷的篩選與尋找更大的質數。每位擁有電腦的個人都可以下載計算軟體並認養疑似質數的數字進行計算的工作。例如 2001 年 12 月 7 日出爐的最大質數 $2^{13466917}-1$，它是由一位 20 歲的加拿大學生發現的。BBC 還特別做成底下的紀念看板：



Electronic Frontier 基金會提供十萬元的獎金給發現超過 1000 萬位數字質數的人或團體。西元 2005 年 12 月 15 日美國密蘇里州立大學的兩位教授所帶領的一個團隊利用 700 多臺電腦通過分散式運算發現了迄今為止（2006 年 3 月之前）最大的質數

$$2^{30402457}-1$$

這兩位教授獲得電子前鋒基金會提供的十萬美元獎金了嗎？

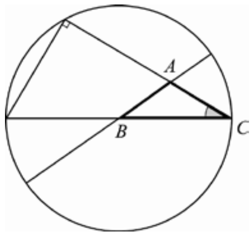
〔**玩鎖・玩索**〕

西元前 350 年，希臘數學家歐基里德證明質數是無限的。此後，許多數學家曾對這種質數進行研究。而後在十七世紀，法國神父馬丁・梅森提出一個可能含有無限質數的數列$\langle 2^p-1\rangle$。因此後人將2^p-1形式的質數稱為梅森質數。想要找到最大的質數，從指數函數2^p-1下手是比較快速的，網際網路梅森質數搜索組織就是專找這類質數。下圖是網際網路梅森質數搜索組織網頁的首圖

在沒有計算器以前，對數表是用來估計比較大的數字的一種有效的計算武器，特別是天文與物理或數學上所產生的複雜數字，銀行的複利也需要藉助對數表。就利用對數表來估計$2^{30402457}-1$這個數字吧！

遊戲 3
☆☆

給定三角形 ABC，邊長 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 與 $\overline{CA}$ 習慣以符號 c, a 與 b 表示，而角度 $\angle ACB$ 以符號 C 表示。在下圖中，以 B 為圓心，$\overline{BC}=a$ 為半徑畫一個圓，並將三角形 ABC 的三邊延長與此圓相交：



(1) 請將圖中所有的線段以符號 a, b, c 及 C 表示。

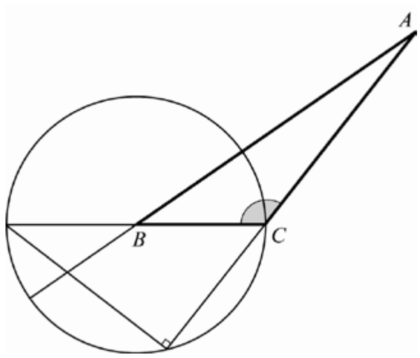
(2) 利用(1)的結果證明三角形 ABC 的餘弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

〔**玩鎖・玩索**〕

這是餘弦定理的眾多無字證明模型之一，需用到圓內冪性質。

當 C 是鈍角時，可以用下圖的模型證明餘弦定理，不妨試試看：



遊戲 4

☆☆

段考後，為了統計班上及格與不及格的人數，最簡單的方法就是在黑板上畫如下圖的圓圈。如果是統計英文與數學兩科，那麼只需畫兩個圓，並標上英、數兩個字，圓圈內代表及格的人，圈外代表不及格的人。兩個圓圈剛好將黑板分成四個區域，它們分別代表英、數都不及格（兩個圓圈的外部），英、數都及格（兩個圓圈的重疊部分），英文及格但數學不及格，數學及格但英文不及格等四種情形：

當統計的是國、英、數三科的 8 種情形時，也可以畫三個圓圈來區別，上圖的右圖就是三個圓圈將黑板分成八塊區域的方式。

當統計的是國、英、數、物理四個科目時，這時比較複雜，原因是四個科目會產生 16 種可能的情形。是否有可以在黑板上畫四個圓圈來區分這 16 種可能的情形呢？

其實圓只是比較美觀而已，我們也可以選擇其他的圖形來畫。若將圓改為橢圓，則可以在黑板上畫四個橢圓，讓它們產生 16 塊不同的區域嗎？

〔玩鎖・玩索〕

像這樣，利用圓或者其他圖形，在黑板或紙張上畫分區域的解題方式是文氏發明的，這類圖也稱為文氏圖。美國數學家菱克沙恩給文氏圖的定義，稱其為「一個集合的符號表示法，用平面的某個部分來表示所考慮的現象，用某條封閉曲線內部的點來表示一個集合」。

我們的問題是：四個圓可以將平面分割成最多幾個區域呢？如果答案小於 16，那麼就沒辦法利用四個圓來描述四個科目所產生的文氏圖了。如果令 a_n 代表 n 個圓將平面分割的最多區域數，那麼容易知道 $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8$。當你在紙張上畫四個圓時，會發現最多只能將紙張分割成 14 個區域，就是沒辦法分割成 16 個區域。 這是因為 a_n 與 a_{n-1} 滿足

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1),\ n \ge 2$$

的遞迴關係式，而這遞迴關係式告訴我們

$$a_4 = a_3 + 2(4-1) = 8 + 6 = 14 .$$

但是，將圓改成橢圓時，可能可以辦到，嘗試看看吧！

玩數學~ 破解秘笈 第1期

遊戲1

(1) 將右圖中對邊的兩個白色三角形拼在一起，就得到左圖的兩個白色四邊形。因此，左圖中的白色區域面積等於右圖中的白色區域面積。

(2) $ac+bd$ 。

(3) 因為灰色區域是個平行四邊形，所以面積為

$$2\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta\right)=$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta.$$

(4) 利用(1)(2)及(3)，得

$$\begin{aligned} ac+bd &= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta \\ &\le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}. \end{aligned}$$

將兩邊平方，得

$$(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

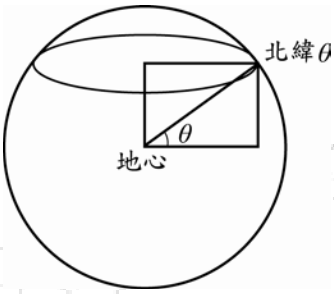
遊戲2

繞一大圈所走的距離就相當於四段經緯線段的長度和。因為兩段經線的弧線夾角都是

$86°+34°=120°=\dfrac{2\pi}{3}$，又經線所在的大圓半徑都是 6300 公里，所以兩段經線的弧長和為

$$2r\theta = 2\cdot 6300\cdot\frac{2\pi}{3}=8400\pi \text{（公里）。}$$

現在只需計算兩段緯線的弧長即可，但是緯線的半徑都不一樣，所以先求取（南、北）緯 θ 的半徑，再求相應的弧長。如下圖所示，（南、北）緯 θ 的半徑為 $6300\cos\theta$ 。



因此，東經 $10°$ ，北緯 $34°$ 到東經 $30°$ ，北緯 $34°$ 的弧長為

$$6300\cos 34°\cdot\frac{(30-10)\pi}{180}=700\pi\cos 34°;$$

而東經 $10°$ ，南緯 $86°$ 到東經 $30°$ ，南緯 $86°$ 的弧長為

$$6300\cos 86°\cdot\frac{(30-10)\pi}{180}=700\pi\cos 86°.$$

兩條緯線線段和為

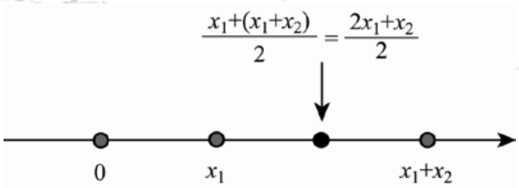
$$\begin{aligned} &700\pi\cos 34°+700\pi\cos 86° \\ &=700\pi(\cos 86°+\cos 34°) \\ &=700\pi\left(2\cos\frac{86°+34°}{2}\cos\frac{86°-34°}{2}\right) \\ &=700\pi\cdot 2\cos 60°\cos 26° \\ &=700\pi\cdot 0.9 \\ &=630\pi. \end{aligned}$$

故繞一大圈所走的距離為 $8400\pi+630\pi=9030\pi$ 公里。

遊戲3

(1) 將第二塊長方體放在第一塊長方體上，不發生倒塌的條件為 $0 \le x_1 \le 1$，即第二塊長方體的中心水平位置落在第一塊長方體上，同理第三塊長方體放在第二塊長方體上，第三塊長方體不發生倒塌的條件為 $0 \le x_2 \le 1$。

現在只需讓第二塊與第三塊長方體綁在一起的中心水平位置落在第一塊長方體上即可，為了這情況，令坐標如下：將長方體中心的水平坐標畫在同一條數線上，並令最下層木板中心水平坐標為原點 0，中間的長方體中心水平坐標為 x_1，最上層木板中心水平坐標為 x_1+x_2，如下圖所示：



從圖中可以算出，第二塊與第三塊長方體綁在一起的中心水平坐標為

$$\frac{x_1+(x_1+x_2)}{2}=\frac{2x_1+x_2}{2}.$$

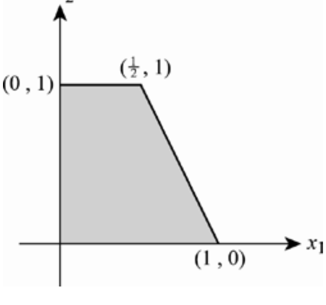
因為這中心水平位置必須落在第一塊長方體上，所以

$$\frac{2x_1+x_2}{2} \le 1 \Rightarrow 2x_1+x_2 \le 2.$$

綜合得知，讓三塊木板維持不倒塌，x_1 與 x_2 滿足的不等式組為

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 1 \\ 0 \le x_2 \le 1 \\ 2x_1+x_2 \le 2 \end{cases}$$

(2) 在坐標平面上，畫出上述不等式組區域如下：



遊戲4

設三根為 $a-d, a, a+d (d \ge 0)$，利用根與係數的關係，得

$$(a-d)+a+(a+d)=24 \Rightarrow a=8.$$

再用根與係數的關係與 $d \ge 0$，得

$$(8-d)(8+d)+8(8-d)+8(8+d)=183 \Rightarrow d=3.$$

故該三次方程式的三根為

$$5,\ 8,\ 11.$$