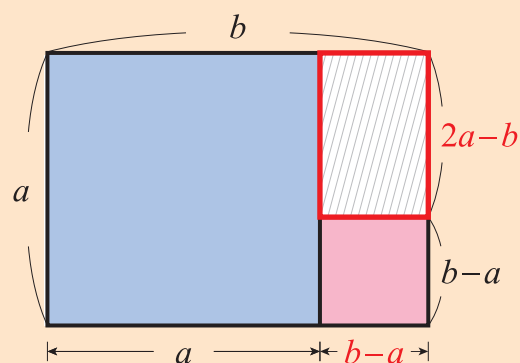
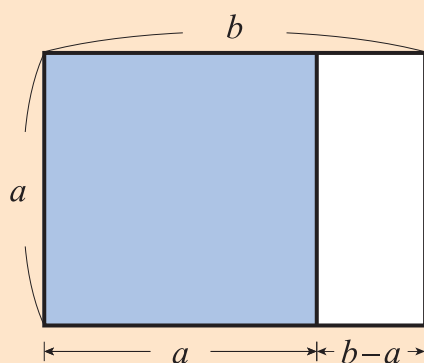
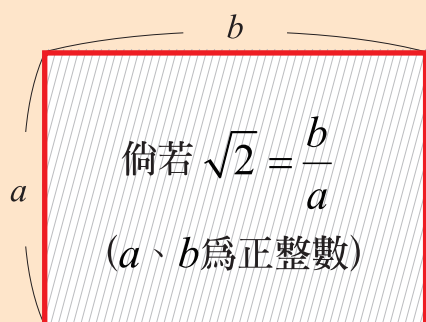


龍騰數亦優

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

第38刊



$$\frac{2a-b}{b-a} = \frac{2-\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$$



贈品禁止轉售

#8



55201N/H/0000000



龍騰文化

編輯室墨記

本期收錄 107 學年度全國高中數學科能力競賽決賽試題，包含筆試及獨立研究試題，讓學生們嘗試不同的題型，更深入的思考，怎麼能錯過這篇練習的好機會呢？其後附上試題詳解，讓您參考。

前一期李維昌老師帶來〈利用遞迴關係式求連續正整數奇次方和的公式解〉，有沒有很好奇若換成在偶次方的條件下，公式解又如何呈現？李維昌老師這一期獻上〈利用遞迴關係式求連續正整數偶次方和的公式解〉，依然精采萬分，一同跟隨李老師的思緒，來體會美麗的數學領域吧！

在高中數學的課程中談到了矩陣的次方計算，但總是以特殊矩陣或特化後的矩陣為討論對象，葉善雲老師透過〈二階方陣的冪次方公式〉，針對一般二階方陣的冪次方進行深入的探究，究竟在矩陣的世界裡，有多少知識等著我們去挖掘呢？讓葉善雲老師帶我們理解二階方陣的奧秘。

明朝《算法統宗》將等比數列與《孟子》連結在一起，究竟其中存在著甚麼樣的關聯，翻開動手玩數學，跟著許教授一起來解密吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的内容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 yenfu.chou@lungteng.com.tw。



發行人：李枝昌

編輯顧問：許志農

總編輯：陳慧芬

執行編輯：周衍甫

美術編輯：羅晨心

發行所：龍騰文化事業股份有限公司

地址：248新北市五股區五工六路30號

電話：(02) 2299-9063

傳真：(02) 2298-9755

創刊日：2006/11/30

出刊日：2019/4/15

網址：<http://www.lungteng.com.tw>

龍騰數亦優

2019.4 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

許志農 臺灣師大數學系

3

》》 107 學年度全國高中數學科能力競賽決賽筆試試題

許志農 臺灣師大數學系

11

》》 107 學年度全國高中數學科能力競賽決賽獨立研究試題

李維昌 宜蘭高中退休教師

18

》》 利用遞迴關係式求連續正整數偶次方和的公式解

葉善雲 東山高中數學科教師

28

》》 二階方陣的冪次方公式

許志農 臺灣師大數學系

40

》》 動手玩數學專欄

》》 動手玩數學《第 37 期》破解祕笈

107學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）（考試時間：2 小時）

- 設 n 為大於 1 的正整數，對於數列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，我們定義 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|$ 為此數列的「絕對長度」。今給定 $2n$ 個兩兩相異的實數，將此 $2n$ 個實數任意排成一列，共有 $(2n)!$ 個可能的數列：
 - 證明：若 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 是其中絕對長度最大的數列，則
 - $a_{2i-1} < a_{2i}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ； $a_{2i} > a_{2i+1}$ ， $i = 1, 2, \dots, n-1$
或
 - $a_{2i-1} > a_{2i}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ； $a_{2i} < a_{2i+1}$ ， $i = 1, 2, \dots, n-1$ 。
 - 將 $1, 2, \dots, 2n$ 任意排成一數列，求所有可能的數列之絕對長度的最大值。
- 設 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 的重心為 G ，三邊的中點為 M_1, M_2, M_3 ， M_1 在 $\overline{A_2 A_3}$ 上，其餘類推。設有一點 P ，它與 A_1 在直線 $A_3 M_3$ 的同一側，且滿足 $\overline{PA_3} \parallel \overline{A_1 M_1}$ 及 $\triangle PA_3 M_3 \sim \triangle A_1 A_2 A_3$ 。已知 $\angle A_1 G A_2$ 與 $\angle A_3$ 互補，證明： $\triangle A_1 A_2 A_3$ 是正三角形。
- 設有理數數列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 滿足 $a_n = 2018a_{n-1}(1 - a_{n-1})$ ， $n \geq 1$ 。已知存在相異兩正整數 i, j ，使得 $a_i = a_j$ ，求 a_0 。

參考答案

1.(1)	1.(2)	2.	3.
見解答	$2n^2 - 1$	見解答	$0, 1, \frac{1}{2018}$ 及 $\frac{2017}{2018}$

參考解答

1. (1) 設 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 是其中絕對長度最大的數列，以下將證明「 $a_i < a_{i+1} < a_{i+2}$ 」和「 $a_i > a_{i+1} > a_{i+2}$ 」不可能發生，因此只可能是(i)或(ii)。

若 $a_i < a_{i+1} < a_{i+2}$ ，則考慮新數列 $b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ 如下：

$$b_j = a_j, \quad 1 \leq j \leq i$$

$$b_j = a_{j+1}, \quad i+1 \leq j \leq 2n-1$$

$$b_{2n} = a_{i+1}$$

於是 $b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ 的絕對長度為

$$\begin{aligned} & \{|b_1 - b_2| + \dots + |b_{i-1} - b_i|\} + \{|b_i - b_{i+1}| + \dots + |b_{2n-2} - b_{2n-1}|\} + |b_{2n-1} - b_{2n}| \\ &= \{|a_1 - a_2| + \dots + |a_{i-1} - a_i|\} + \{|a_i - a_{i+2}| + |a_{i+2} - a_{i+3}| + |a_{i+3} - a_{i+4}| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}|\} \\ & \quad + |a_{2n} - a_{i+1}| \\ &= \{|a_1 - a_2| + \dots + |a_{i-1} - a_i|\} + \{|a_i - a_{i+1}| + |a_{i+1} - a_{i+2}| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}|\} + |a_{2n} - a_{i+1}| \end{aligned}$$

這裡用到（因為 $a_i < a_{i+1} < a_{i+2}$ ）

$$|a_i - a_{i+2}| = |a_i - a_{i+1}| + |a_{i+1} - a_{i+2}|$$

因此新數列 $b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ 比原數列 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 的絕對長度大，所以「 $a_i < a_{i+1} < a_{i+2}$ 」不可能發生。同理，可證「 $a_i > a_{i+1} > a_{i+2}$ 」不可能發生。

- (2) 設此 $2n$ 個數為 $e_1 < e_2 < \dots < e_{2n}$ 。由(1)可知，僅須考慮(i)或(ii)的情形。若(i)發生，則

$a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 的絕對長度為

$$\begin{aligned} & |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}| \\ &= a_2 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots + a_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n-1} \\ &= \{2(a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2}) + a_{2n}\} - \{a_1 + 2(a_3 + \dots + a_{2n-1})\} \end{aligned}$$

此種情形的最大值顯然是當

$$\begin{aligned} \{a_2, a_4, \dots, a_{2n-2}\} &= \{e_{2n}, e_{2n-1}, \dots, e_{n+2}\}, \quad a_{2n} = e_{n+1}, \\ a_1 &= e_n, \quad \{a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}\} = \{e_{n-1}, e_{n-2}, \dots, e_1\} \end{aligned}$$

此時的絕對長度為

$$2(e_{n+2} + e_{n+3} + \dots + e_{2n}) + e_{n+1} - e_n - 2(e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1})$$

類似的，當(ii)發生時，絕對長度的最大值亦為上值，且發生在

$$\begin{aligned} a_1 &= e_{n+1}, \quad \{a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}\} = \{e_{2n}, e_{2n-1}, \dots, e_{n+2}\}, \\ a_{2n} &= e_n, \quad \{a_2, a_4, \dots, a_{2n-2}\} = \{e_{n-1}, e_{n-2}, \dots, e_1\} \end{aligned}$$

今有 $e_i = i$ ， $i = 1, 2, \dots, 2n$ 。所以絕對長度的最大值為

$$2[(n+2) + (n+3) + \dots + 2n] + (n+1) - 2[1 + 2 + \dots + (n-1)] - n = 2n^2 - 1$$

2. 如右圖，設 $\triangle A_1A_2A_3$ ，三邊長為 a_1, a_2, a_3 ，中線長為 m_1, m_2, m_3 。

(1) 因 $\triangle PA_3M_3 \sim \triangle A_1A_2A_3$ ， $\angle M_3PA_3 = \angle A_3A_1A_2$ ，

由此知 P, A_1, A_3, M_3 共圓。因此

$$\begin{aligned}\angle M_3A_3A_2 + \angle A_1PM_3 &= \angle M_3A_3A_2 + \angle A_1A_3M_3 \\ &= \angle A_1A_3A_2 = \angle PM_3A_3.\end{aligned}$$

得 $\overline{A_1P} \parallel \overline{A_2A_3}$ 。又因 $\overline{PA_3} \parallel \overline{A_1M_1}$ ， $\overline{A_1P} = \overline{M_1A_3} = \overline{M_2M_3}$ ，所以知 $A_1PM_2M_3$ 為平行四邊形，其對角線 $\overline{M_3P}$ 及 $\overline{A_1M_2}$ 互相平分。故 $\overline{M_3P} \parallel \overline{A_2M_2}$ 。由此得

$$\overline{PA_3} = \overline{A_1M_1} = m_1, \quad \overline{PM_3} = \overline{A_2M_2} = m_2。$$

(2) 觀察 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle PM_3A_3$ （中線三角形）的面積比為 4 : 3：

$$\triangle PM_2M_3 = \triangle A_1M_2M_3, \quad \triangle A_3M_2M_3 = \triangle M_1M_2M_3, \quad \triangle PM_2A_3 = \triangle A_3M_1M_2。$$

由 $\triangle PA_3M_3 \sim \triangle A_1A_2A_3$ 得 $\frac{m_1^2}{a_3^2} = \frac{m_2^2}{a_2^2} = \frac{m_3^2}{a_1^2} = \frac{3}{4}$ 。記 $\triangle A_1A_2A_3$ 的面積 $\triangle A_1A_2A_3$ 為 Δ 。

易知 $\triangle GA_1A_2 = \frac{1}{3}\Delta = \frac{1}{6}a_2a_3 \sin \angle A_1$ ，而

$$\begin{aligned}\triangle GA_1A_2 &= \frac{1}{2}GA_1 \times GA_2 \times \sin \angle A_1GA_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}m_1 \times \frac{2}{3}m_2 \sin \angle A_3 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a_3 \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 \times \sin \angle A_3 = \frac{1}{6}a_2a_3 \sin \angle A_3.\end{aligned}$$

比較得 $\angle A_1 = \angle A_3$ 。所以 $a_1 = a_3$ 。但由 $m_2^2 = \frac{1}{4}(2a_1^2 + 2a_3^2 - a_2^2)$ 得 $2a_2^2 = a_1^2 + a_3^2$ （另兩中線長公式所得亦是此等式），故 $\triangle A_1A_2A_3$ 必為正三角形。

3. 設 $j > i$ 。首先可注意到此數列為有理數列，而由於 $a_i = a_j$ ，此數列最後會形成循環數列，且對所有自然數 $m \geq i$ ，均有 $a_m = a_{m+(j-i)}$ 。我們有以下三種可能情況：

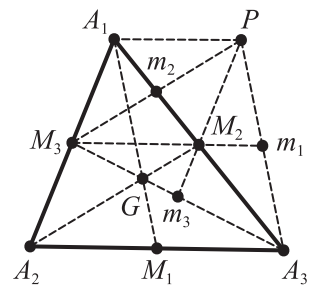
[Case 1] 若存在 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，使得 $a_n < 0$ ，則 $2018(1 - a_n) > 2018 > 1$ ，可得

$2018a_n(1 - a_n) < a_n$ ，即 $a_{n+1} < a_n$ 。因此，數列中若有一項小於 0，則此數列最終必不成循環，也必不滿足條件。

[Case 2] 若存在 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，使得 $a_n > 1$ ，則 $a_{n+1} < 0$ ，承上討論可知，此數列亦不滿足條件。因此我們只需考慮 a_n 恆在 $[0, 1]$ 的情況。

[Case 3] a_n 恆在 $[0, 1]$ 。

(i) 很明顯的 $a_0 = 0$ 或 $a_0 = 1$ ，均滿足題目條件。



(ii) 設 $a_0 = \frac{q_0}{p_0}$ ，其中 $p_0, q_0 \in \mathbb{N}$ ， $p_0 \geq 2$ ， $p_0 > q_0$ ，且 p_0, q_0 互質。則

$$a_1 = \frac{2018 \cdot q_0 (p_0 - q_0)}{p_0^2}, \text{ 令 } p_1 = p_0^2, q_1 = 2018q_0(p_0 - q_0), \text{ 則 } a_1 = \frac{q_1}{p_1}。 \text{ 利用歸納}$$

法，可得 $a_k = \frac{q_k}{p_k}$ ， $k \in \mathbb{N}$ ，其中 $p_k = (p_{k-1})^2 = p_0^{2^k}$ 、 $q_k = 2018 \times q_{k-1} (p_{k-1} - q_{k-1})$ 。

我們先證明 p_0 與 2018 不互質。若 $(p_0, 2018) = 1$ ，由於 p_0 與 q_0 互質，很明顯的 p_0 與 $2018q_0(p_0 - q_0)$ 也互質，因此 $(p_1, q_1) = 1$ 且 $(p_1, 2018) = (p_0^2, 2018) = 1$ 。再次利用歸納法可知，對所有自然數 k ，均有 $(p_k, q_k) = 1$ ，且 $(p_k, 2018) = 1$ ，即 $\frac{q_k}{p_k}$ 均為最簡分數，然而此時分母 $\{p_k\}$ 為嚴格遞增數列，此與此數列最終必循環的性質相矛盾。因此 $(p_0, 2018) > 1$ 。

接著我們證明 $p_0 \leq 2018$ 。設 $d = (p_0, 2018) > 1$ ，可注意到由於 $2018 = 2 \times 1009$ 且 $(p_0, q_0) = 1$ ，因此 $(p_1, q_1) = (p_0^2, 2018q_0(p_0 - q_0)) = (p_0^2, 2018) = (p_0, 2018) = d$ 。若 $p_0 > 2018$ ，則 $\frac{p_1}{d} = \frac{p_0^2}{d} > \frac{2018p_0}{d} \geq p_0$ ，設 a_n 化為最簡分數可表為 $\frac{\tilde{q}_n}{\tilde{p}_n}$ ，則 $\tilde{p}_1 = \frac{p_1}{d}$ ， $\tilde{p}_0 = p_0$ ，且 $\tilde{p}_1 > \tilde{p}_0 > 2018$ 。利用歸納法可知，若 $p_0 > 2018$ ，且 a_n 化為最簡分數可表為 $\frac{\tilde{q}_n}{\tilde{p}_n}$ ，則 $\tilde{p}_n$ 為嚴格遞增數列且 $\tilde{p}_n > 2018$ ，此與此數列最終必循環的性質相矛盾。因此 $p_0 \leq 2018$ 。

由前兩段討論可知， $(p_0, 2018) > 1$ 且 $2 \leq p_0 \leq 2018$ ，即 $a_0 = \frac{2k-1}{2^l}$ ， $\frac{m}{1009}$ 或 $\frac{2m+1}{2018}$ ，其中 $l = 1, 2, \dots, 10$ ， $k = 1, 2, \dots, 2^{l-1}$ ， $m = 1, 2, \dots, 1008$ ， $m \neq 504$ 。由函數 $f(x) = 2018x(1-x)$ 的對稱性及遞增性可看出，由於 $f\left(\frac{1}{1009}\right) > 1$ 且 $f\left(\frac{1}{2^{10}}\right) > 1$ ，只有 $a_0 = \frac{1}{2018}$ 及 $\frac{2017}{2018}$ 時， a_1 才會在 $[0, 1]$ 內。

當 $a_0 = \frac{1}{2018}$ 時， $a_n = \frac{2017}{2018}$ ， $n \in \mathbb{N}$ 。

而當 $a_0 = \frac{2017}{2018}$ 時， $a_n = \frac{2017}{2018}$ ， $n \in \mathbb{N}$ 。

兩者均可使數列滿足題目要求之條件。

綜上討論，可知可能的 a_0 為 0，1， $\frac{1}{2018}$ 及 $\frac{2017}{2018}$ 。

筆試試題（二）（考試時間：2 小時）

1. 設 P 為 $\triangle ABC$ 的內部一點，滿足 $\angle BAC + \angle BPC = 180^\circ$ 且 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ 。

試證： $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$ 。

2. 已知 a, b, c 都大於 -1 ，試證： $\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2$ 。

3. 試確認所有正整數 n ，使得方程式

$$x + y + z = n\sqrt{xyz}$$

有正整數解 x, y, z 。

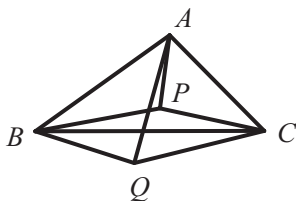
參考答案

1.	2.	3.
見解答	見解答	1, 2, 3

參考解答

1. 注意：外角關係 $\angle APB = \angle ACB + \angle PAC + \angle PBC$ 且 $\angle APC = \angle ABC + \angle PAB + \angle PCB$ 。

因此，欲證明的等式等價於 $\angle PAC + \angle PBC = \angle PAB + \angle PCB$ 。



作一平行四邊形 $PBQC$ ，則 $\angle BAC + \angle BQC = \angle BAC + \angle BPC = 180^\circ$ ；由此可知：四點 A, B, Q, C 共圓。因此，由已知： $\overline{BA} \times \overline{PC} = \overline{CA} \times \overline{BP}$ ，可得：

$$\begin{aligned}\Delta ABQ &= \frac{1}{2} \overline{BA} \times \overline{BQ} \times \sin \angle ABQ = \frac{1}{2} \overline{BA} \times \overline{PC} \times \sin \angle ACQ \\ &= \frac{1}{2} \overline{CA} \times \overline{BP} \times \sin \angle ACQ = \frac{1}{2} \overline{CA} \times \overline{CQ} \times \sin \angle ACQ = \Delta ACQ.\end{aligned}$$

因此，若 $\overline{AQ}$ 與 $\overline{BC}$ 的交點為 D ，則 D 必為 $\overline{BC}$ 的中點，故 $\overline{BD} = \overline{CD}$ ，即 $\overline{AD}$ 為 $\triangle ABC$ 的一條中線。又 $PBQC$ 為平行四邊形，兩對角線互相平分，故 D 也是 $\overline{PQ}$ 的中點。由此可知：四點 A, P, D, Q 共線。因此， $\angle PBC = \angle QCB = \angle QAB = \angle PAB$ 且 $\angle PCB = \angle QBC = \angle QAC = \angle PAC$ 。

以上兩式相加，即可得到 $\angle PAC + \angle PBC = \angle PAB + \angle PCB$ 。

2. 令 $x = 1 + a^2$ ， $y = 1 + b^2$ ， $z = 1 + c^2 \Rightarrow x \geq 1$ ， $y \geq 1$ ， $z \geq 1$

- (1) 先證 $\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1$ ，因為

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y+2z}} + \sqrt{\frac{y}{z+2x}} + \sqrt{\frac{z}{x+2y}} \right) \left[\sqrt{x(y+2z)} + \sqrt{y(z+2x)} + \sqrt{z(x+2y)} \right] \geq (x+y+z)^2$$

$$\left(\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \right) [3(xy+yz+zx)] \geq (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}$$

又

$$\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} - 1 = \frac{(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)}{3(xy+yz+zx)} = \frac{1}{2} \frac{[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]}{3(xy+yz+zx)} \geq 0$$

$$\text{所以 } \frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1$$

$$(2) 1+b^2 \geq 2b \Rightarrow b \leq \frac{y}{2} \Rightarrow 0 < z+b \leq z+\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{z+b} \geq \frac{x}{z+\frac{y}{2}}$$

$$\text{同理 } \frac{y}{x+c} \geq \frac{y}{x+\frac{z}{2}}, \quad \frac{z}{y+a} \geq \frac{z}{y+\frac{x}{2}}$$

$$\text{所以 } \frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} = \frac{x}{z+b} + \frac{y}{x+c} + \frac{z}{y+a}$$

$$\geq \frac{x}{z+\frac{y}{2}} + \frac{y}{x+\frac{z}{2}} + \frac{z}{y+\frac{x}{2}} = \frac{2x}{y+2z} + \frac{2y}{z+2x} + \frac{2z}{x+2y} = 2 \left(\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \right) \geq 2$$

$$\text{故 } \frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2, \text{ 得證}$$

3. 設正整數 n 可讓方程式

$$x+y+z=n\sqrt{xyz}$$

有正整數解 x, y, z ，且 $x=a, y=b, z=c$ 是所有正整數解中，和 $x+y+z$ 最小的一組，並令 $a \geq b \geq c \geq 1$ 。此時代表 $x=a$ 是整係數（首項係數為1）二次函數

$$f(x) = x^2 + (2(b+c) - n^2 bc)x + (b+c)^2$$

的一個正整數解。由根與係數關係知道：此二次函數的另一個正整數解為

$$a_1 = \frac{(b+c)^2}{a},$$

即 $x=a_1, y=b, z=c$ 是方程式 $x+y+z=n\sqrt{xyz}$ 的另一組正整數解，根據「和最小」假設，得

$$a_1 \geq a \geq b \geq c \geq 1。$$

因為開口向上拋物線 $f(x) = x^2 + (2(b+c) - n^2 bc)x + (b+c)^2$ 的兩個根為 a_1, a 且

$a_1 \geq a \geq b \geq c \geq 1$ ，所以

$$f(b) = b^2 + (2(b+c) - n^2 bc)b + (b+c)^2 \geq 0，$$

整理得

$$n^2 c \leq \left(2 + \frac{c}{b}\right)^2。$$

因為 $b \geq c \geq 1$ ，所以

$$n^2 \leq (2+1)^2，$$

即正整數 $1 \leq n \leq 3$ 。

- (1) 當 $n=1$ 時， $x=9$ ， $y=9$ ， $z=9$ 為 $x+y+z=\sqrt{xyz}$ 的一組解。
- (2) 當 $n=2$ 時， $x=4$ ， $y=2$ ， $z=2$ 為 $x+y+z=2\sqrt{xyz}$ 的一組解。
- (3) 當 $n=3$ 時， $x=1$ ， $y=1$ ， $z=1$ 為 $x+y+z=3\sqrt{xyz}$ 的一組解。

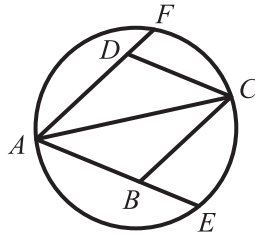
綜合得知

$$n=1, 2, 3。$$

107學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（一）（考試時間：2 小時）

1. 試求滿足方程式 $a^b = ab + 2$ 的所有可能整數解 (a, b) 。
2. 試證：對任何自然數 n ，坐標平面上必存在點集合 X_n 滿足： $|X_n| = 2^n$ ，且對 X_n 中任意一點 A ，都存在 X_n 中的 n 個點 $B_1, B_2, \dots, B_n$ ，使得對每一個 $k = 1, 2, \dots, n$ ， $\overline{AB_k} = k$ 都成立。
3. 設 $ABCD$ 為平行四邊形，連接較長的對角線 $\overline{AC}$ ，通過 A, C 兩點作一圓使得平行四邊形 $ABCD$ 完全落在圓的內部。分別將 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AD}$ 延長使其延長線分別與圓交於 E 與 F 。試證： $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AE} + \overline{AD} \times \overline{AF}$ 。



參考答案

1.	2.	3.
$(a, b) = (2, 3), (1, -1), (-1, 3)$	見解答	見解答

參考解答

1. (1) 如果 $b < 0$ ，因 $a \neq 0$ ，

當 $|a| > 1$ ，則 a^b 不是整數值，此時原方程式無整數解 (a, b) 。

當 $a = 1$ 時，原方程式為 $1 = b + 2 \Rightarrow b = -1$ ，所以 $(a, b) = (1, -1)$ 。

當 $a = -1$ 時，原方程式為 $(-1)^b = -b + 2$ ，因為 $b < 0$ ，所以 $(-1)^b = -b + 2 \geq 2$ ，但 $(-1)^b = \pm 1$ ，此時沒有整數解 (a, b) 。

(2) 如果 $b = 0$ ，顯而易見 $a^b = 1$ ，此時沒有整數解 (a, b) 。

(3) 如果 $b > 0$ ，因為 $a | a^b \Rightarrow a | ab + 2 \Rightarrow a | 2 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 2$ ，

當 $a = -2$ 時，原方程式為 $(-2)^b = -2b + 2 \Rightarrow (-2)^{b-1} = b - 1$ ，因此 b 為奇數，

令 $b = 2k + 1 \Rightarrow 4^k = 2k$ ，此時沒有整數解 (a, b) 。

當 $a = -1$ 時，原方程式為 $(-1)^b = -b + 2 \Rightarrow |(-1)^b| = |-b + 2| = 1 \Rightarrow b = 1, 3$ （但 $b = 1$ 不合），此時整數解 $(a, b) = (-1, 3)$ 。

當 $a = 1$ 時，原方程式為 $1 = b + 2 \Rightarrow b = -1$ （與 $b > 0$ 不合），此時沒有整數解 (a, b) 。

當 $a = 2$ 時，原方程式為 $2^b = 2b + 2 \Rightarrow 2^{b-1} = b + 1$ ，我們要證只有 $b = 3$ 滿足式子。

當 $b > 3$ 時，如果 $b = 4$ ，原方程式為 $8 = 5$ （不合），

利用數學歸納法，假設 $2^{k-1} = k + 1$ 成立，

$\Rightarrow 2^{(k+1)-1} = 2 \times 2^{k-1} > 2(k + 1) = 2k + 2 > (k + 1) + 2$ ，故沒有整數解 (a, b) 。

2. 利用數學歸納法證明：對任意的正整數 n ，存在滿足條件的點集合 X_n ，且 $|X_n| = 2^n$ 。

(1) 對 $n = 1$ ，命題顯然成立，我們可以取 $X_1 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ 。

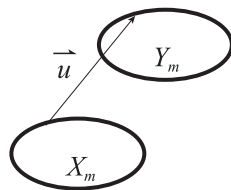
(2) 對 $n = 2$ ，可以取 $X_2 = \{(0, 0), (1, 0), (1, 2), (0, 2)\}$ ，故命題也成立。

假設 $n = m$ 時，命題成立，亦即存在一個點集合 X_m 滿足： $|X_m| = 2^m$ ，且對 X_m 中任意一點 A ，都存在 X_m 中的 m 個點 $B_1, B_2, \dots, B_m$ ，使得 $\overline{AB_k} = k$ 對每一個 $k = 1, 2, \dots, m$ 都成立。

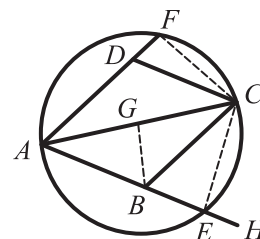
因為 X_m 為有限集合，存在平面上的一向量 $\vec{u}$ 使得 $|\vec{u}| = m + 1$ ，且 $\vec{u}$ 與 X_m 中任意兩點 P, Q 所決定的向量 $\overrightarrow{PQ}$ 都不平行。令點集合 X_m 經平移向量 $\vec{u}$ 後的點集合為 Y_m ，則點集合 $X_{m+1} := X_m \cup Y_m$ 滿足： $|X_{m+1}| = 2^{m+1}$ ，且對 X_{m+1} 中任意一點 A ，都存在 X_{m+1} 中的 $m + 1$ 個點 $B_1, B_2, \dots, B_{m+1}$ ，使得 $\overline{AB_k} = k$ 對每一個 $k = 1, 2, \dots, m + 1$ 都成立。

即 $n = m + 1$ 時，命題也成立。

因此，由數學歸納法得知：對任意的正整數 n ，命題都成立。



3. 如圖所示，連接 $\overline{CE}$ 與 $\overline{CF}$ ，再作線段 $\overline{BG}$ 使得 $\angle ABG = \angle ACE$ ，而線段 $\overline{BG}$ 交 $\overline{AC}$ 於 G 。



(a) 觀察 $\triangle ABG$ 與 $\triangle ACE$ ，因為 $\angle BAG = \angle CAE$ 且 $\angle ABG = \angle ACE$ ，

所以 $\triangle ABG \sim \triangle ACE$ ，因此

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{AC} \times \overline{AG} = \overline{AB} \times \overline{AE} \dots (1)$$

(b) 觀察 B, E, C, G ，因為 $\angle GBE + \angle GCE = \angle GBE + \angle ABG = 180^\circ$ ，所以 B, E, C, G 四點共圓，得到 $\angle BGC = \angle HEC = \angle CFA$ 。

(c) 觀察 $\triangle BCG$ 與 $\triangle CAF$ ，因為 $\angle BGC = \angle CFA$ ，且 $\angle BCG = \angle CAF$ （平行四邊形），

所以 $\triangle BCG \sim \triangle CAF$ ，因此

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AF}} \Rightarrow \overline{AC} \times \overline{CG} = \overline{BC} \times \overline{AF} \dots (2)$$

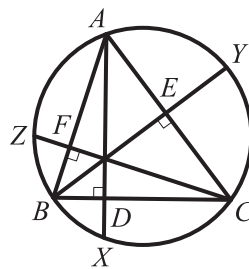
(d) 將(1)與(2)相加，以及 $\overline{BC} = \overline{AD}$ ，得到

$$\overline{AC}(\overline{AG} + \overline{CG}) = \overline{AB} \times \overline{AE} + \overline{BC} \times \overline{AF} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AE} + \overline{AD} \times \overline{AF}。$$

獨立研究試題（二）（考試時間：2 小時）

1. 如右圖，圓上的點 A, B, C 使得 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形，而圓上的點 X, Y, Z 使得 $\overline{AX}$ 和 $\overline{BC}$ 垂直相交於 D 點， $\overline{BY}$ 和 $\overline{AC}$ 垂直相交於 E 點， $\overline{CZ}$ 和 $\overline{AB}$ 垂直相交於 F 點。證明：

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BY}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CZ}}{\overline{CF}} = 4$$



2. 試確認所有可能的正整數 n ，同時滿足以下兩個條件：

(1) $1 \leq n \leq 107$ ；

- (2) 存在某整數 m 使得連續 n 個平方數的算術平均數 $\frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} k^2$ 仍為一完全平方數。例如：當

$$n=7 \text{ 時，取 } m=-3 \text{，得到 } \frac{1}{7}((-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2) = 2^2 \text{。}$$

3. 令 $f(x) = x^4 - x - 1$ 是一個整係數多項式，已知相異兩數 a 與 b 滿足 $f(a) = f(b) = 0$ ，試找出一個非零的整係數多項式 $g(x)$ ，使得 $g\left(\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}\right) = 0$ 。

參考答案

1.	見解答
2.	$n = 1, 7, 17, 23, 25, 31, 41, 47, 49, 55, 65, 71, 73, 79, 89, 95, 97, 103$
3.	$g(x) = (x^3 + 4x^2 + 3x + 1)^2 - 16x^5 - 8x^4 - 25x^3 - 6x^2 - 9x$

參考解答

1. 解法一：

令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心。

首先，因為 $\angle BDH = \angle BEC$ ，且 $\triangle BHD$ 和 $\triangle BCE$ 有共同角 $\angle HBD$ ，由 AA 性質可知 $\triangle BHD \sim \triangle BCE$ ，因此 $\angle BCE = \angle BHD$ 。此外，由圓周角可知 $\angle BXA = \angle BCA$ ，所以 $\angle BXD = \angle BHD$ ，又 $\angle BDH = \angle BDH$ ，且 $\triangle BHD$ 和 $\triangle BXD$ 有共同邊 $\overline{BD}$ ，由 AAS 性質可知 $\triangle BDH \cong \triangle BDH$ ，因此 $\overline{HD} = \overline{DX}$ 。同理，可得知 $\overline{HE} = \overline{EY}$ 。所以

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BY}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CZ}}{\overline{CF}} &= \frac{\overline{AD} + \overline{DX}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BE} + \overline{EY}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CF} + \overline{FZ}}{\overline{CF}} \\ &= 1 + \frac{\overline{DX}}{\overline{AD}} + 1 + \frac{\overline{EY}}{\overline{BE}} + 1 + \frac{\overline{FZ}}{\overline{CF}} \\ &= 3 + \frac{\overline{DX}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{EY}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{FZ}}{\overline{CF}}\end{aligned}$$

上式分數部分皆為兩個同底三角形中高的比值，因此可將其改寫成

$$3 + \frac{\overline{DX}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{EY}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{FZ}}{\overline{CF}} = 3 + \frac{[HBC]}{[ABC]} + \frac{[HCA]}{[ABC]} + \frac{[HAB]}{[ABC]} = 3 + \frac{[ABC]}{[ABC]} = 4, \text{ 其中 } [ABC] \text{ 代表由 } A, B, C$$

所構成三角形的面積。

解法二：

由點幕定理 (Power of a point theorem) 可得 $\overline{AD} \times \overline{DX} = \overline{BD} \times \overline{CD}$ ，因此

$$\frac{\overline{DX}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \times \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \cot B \cot C$$

同理可得

$$\frac{\overline{EY}}{\overline{BE}} = \cot C \cot A, \quad \frac{\overline{FZ}}{\overline{CF}} = \cot A \cot B,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BY}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CZ}}{\overline{CF}} &= \frac{\overline{AD} + \overline{DX}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BE} + \overline{EY}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CF} + \overline{FZ}}{\overline{CF}} \\ &= 3 + \frac{\overline{DX}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{EY}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{FZ}}{\overline{CF}} \\ &= 3 + \cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B \\ &= 3 + \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \tan B \tan C}\end{aligned}$$

宣稱對於所有銳角三角形 $\triangle ABC$ ，下式皆成立

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \cdots (1)$$

因銳角三角形使得 $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 皆存在, 所以(1)式兩邊皆有定義。另外

$$\tan C = \tan(\pi - A - B) = \tan(-A - B) = -\tan(A + B)$$

又

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

所以

$$\tan C = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

等同於(1)式。因此所求

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BY}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CZ}}{\overline{CF}} = 3 + 1 = 4$$

2. 令 $a^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} k^2$, 其中 a 為正整數。

由平方和公式 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, 可得:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} k^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{m+n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{(m+n-1)(m+n)(2m+2n-1)}{6} - \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6} (2n^2 + (6m-3)n + 6m^2 - 6m + 1) \\ &= m^2 + (n-1)m + \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

因為 a 為整數, $\frac{(n-1)(2n-1)}{6}$ 也必為整數, 故 $n = 6p \pm 1$ 。

(1) 當 $n = 6p + 1$ 時,

$$a^2 = m^2 + 6pm + p(12p+1) = (m+3p)^2 + 3p^2 + p \text{。因此,}$$

$$3p^2 + p = a^2 - (m+3p)^2 = (a+m+3p)(a-m-3p) \text{。}$$

又 $3p^2 + p$ 必為偶數, 且 $a+m+3p$ 與 $a-m-3p$ 的奇偶性相同, 故兩者均為偶數;

因此, $3p^2 + p$ 必為4的倍數。令 $3p^2 + p = 4k$, 即 $\frac{n^2-1}{12} = 4k$, 即 $n^2 = 48k + 1$ 。

由此可得: $n = 24q + 1$ 或 $n = 24q + 7$ 。

(2) 當 $n = 6p - 1$ 時,

$$a^2 = m^2 + (6p-2)m + (3p-1)(4p-1) = (m+3p-1)^2 + 3p^2 - p \text{。}$$

因此, $3p^2 - p = a^2 - (m+3p-1)^2 = (a+m+3p-1)(a-m-3p+1)$ 。

又 $3p^2 - p$ 必為偶數，且 $a + m + 3p - 1$ 與 $a - m - 3p + 1$ 的奇偶性相同，故兩者均為偶數；

因此， $3p^2 - p$ 必為 4 的倍數。令 $3p^2 - p = 4k$ ，即 $\frac{n^2 - 1}{12} = 4k$ ，即 $n^2 = 48k + 1$ 。

同樣可得： $n = 24q \pm 1$ 或 $n = 24q \pm 7$ 。

反之，當 $n = 24q - 1$ 或 $n = 24q - 7$ 時， $\frac{n^2 - 1}{12}$ 都是 4 的倍數。

可令 $\frac{n^2 - 1}{12} = (2\alpha)(2\beta)$ ，其中 α, β 為非負整數。取 $m = \alpha - \beta - \frac{n-1}{2}$ ，則

(1) 當 $n = 24q + 1$ 或 $n = 24q + 7$ 時， $n = 6p + 1$ ，得

$$a^2 = (m + 3p)^2 + 3p^2 + p = (\alpha + \beta)^2 \text{ 為一完全平方數。}$$

(2) 當 $n = 24q - 1$ 或 $n = 24q - 7$ 時， $n = 6p - 1$ ，得

$$a^2 = (m + 3p - 1)^2 + 3p^2 - p = (\alpha + \beta)^2 \text{ 為一完全平方數。}$$

因此，型如 $n = 24q \pm 1$ 或 $n = 24q \pm 7$ 的正整數均滿足所求條件；

又 $1 \leq n \leq 107$ ，故可能的正整數 n 有以下 18 個數：

$$n = \underline{1, 7, 17, 23, 25, 31, 41, 47, 49, 55, 65, 71, 73, 79, 89, 95, 97, 103}。$$

3. 令 a, b, c, d 是 $f(x) = x^4 - x - 1$ 的四個根，則

$$a' = \frac{1}{a}, b' = \frac{1}{b}, c' = \frac{1}{c}, d' = \frac{1}{d} \text{ 是 } h(x) = x^4 + x^3 - 1 \text{ 的四個根，由根與係數得}$$

$$a' + b' + c' + d' = -1, a'b' + a'c' + a'd' + b'c' + b'd' + c'd' = 0,$$

$$a'b'c' + a'b'd' + a'c'd' + b'c'd' = 0, a'b'c'd' = -1,$$

令 $\alpha = a' + b', \beta = c' + d', \gamma = a'b', \delta = c'd'$ ，則上式化簡成

$$\alpha + \beta = -1, \gamma + \delta + \alpha\beta = 0, \gamma\beta + \alpha\delta = 0, \gamma\delta = -1,$$

利用上式消去 β, γ, δ ，得 $\alpha^6 + 3\alpha^5 + 3\alpha^4 + \alpha^3 + 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0$ ，

所以 $k(x) = x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 1$ 且 $k(\alpha) = 0$ ，

因此 $l(x) = x^6 + 4x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 且 $l\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ ，

$$\text{令 } u = \frac{1}{\alpha} = \frac{ab}{a+b}, \text{ 則 } u^6 + 4u^5 + 4u^4 + u^3 + 3u^2 + 3u + 1 = 0,$$

$$\text{所以 } (u^6 + 4u^4 + 3u^2 + 1)^2 = (-4u^5 - u^3 - 3u)^2 = 16u^{10} + 8u^8 + 25u^6 + 6u^4 + 9u^2,$$

$$\text{令 } v = u^2 = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 \text{ 且 } g(x) = (x^3 + 4x^2 + 3x + 1)^2 - 16x^5 - 8x^4 - 25x^3 - 6x^2 - 9x, \text{ 則 } g(v) = 0。$$

利用遞迴關係式求連續正整數偶次方和的公式解

李維昌／國立宜蘭高中退休教師

一、研究目的》

本文以遞迴關係式求 $\sum_{k=1}^n k^r$ 的公式解，其中 r 為正偶數，解題的靈感偶然從腦海中閃過，我即刻把握當下，振筆疾書，記錄這美好的尋求過程，請看下文的剖析。

二、研究過程》

1. 定義： $\sum_{k=1}^n k^r = S_r(n)$ ，本文探討 r 為正偶數的情形。

2. $n^2 = n(n-1) + n$

$$\begin{aligned} &= n(n-1) \cdot \left[\frac{(n+1)-(n-2)}{3} \right] + n \cdot \left[\frac{(n+1)-(n-1)}{2} \right] = \left[\frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} \right] \\ &\quad - \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \right] \\ &= S_2(n) - S_2(n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{我們可以推得 } S_2(n) &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{(n+1)n}{6} [2(n-1) + 3] \\ &= \frac{(n+1)n(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \end{aligned}$$

3. $n^2(n+1)^2(2n+1) - n^2(n-1)^2(2n-1) = n^2(8n^2 + 2n^2 + 2)$

移項整理得

$$\begin{aligned} n^4 &= \frac{n^2(n+1)^2(2n+1) - n^2(n-1)^2(2n-1)}{10} - \frac{S_2(n) - S_2(n-1)}{5} \\ &= \left[\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{10} - \frac{S_2(n)}{5} \right] - \left[\frac{n^2(n-1)^2(2n-1)}{10} - \frac{S_2(n-1)}{5} \right] \\ &= S_4(n) - S_4(n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{我們可以推得 } S_4(n) &= \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{10} - \frac{S_2(n)}{5} \\ &= \frac{n^2}{10} (2n^3 + 5n^2 + 4n + 1) - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

4. 尋求遞迴關係式：

(1) 當 $k \geq 3$ 且 k 為奇數時，

$$\begin{aligned} & n^k(n+1)^k(2n+1) - n^k(n-1)^k(2n-1) \\ &= 2n^{k+1}[(\sum_{i=0}^k C_i^k n^{k-i}) - (\sum_{i=0}^k (-1)^i C_i^k n^{k-i})] + n^k[(\sum_{i=0}^k C_i^k n^{k-i}) + (\sum_{i=0}^k (-1)^i C_i^k n^{k-i})] \\ &= 4n^{k+1}[C_1^k n^{k-1} + \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} C_{2i+1}^k n^{k-(2i+1)}] + 2n^k[C_0^k n^k + (\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} C_{2i}^k n^{k-2i})] \\ &= (2C_0^k + 4C_1^k)n^{2k} + [\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (2C_{2i}^k + 4C_{2i+1}^k)n^{2k-2i}] \end{aligned}$$

等式兩邊同除以 $(2C_0^k + 4C_1^k)$ 並移項，整理可得

$$\begin{aligned} n^{2k} &= \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k(n+1)^k(2n+1) - n^k(n-1)^k(2n-1)] \\ &\quad - \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} \left\{ \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (2C_{2i}^k + 4C_{2i+1}^k) [S_{2k-2i}(n) - S_{2k-2i}(n-1)] \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k(n+1)^k(2n+1)] - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (C_{2i}^k + 2C_{2i+1}^k) \cdot S_{2k-2i}(n) \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k(n-1)^k(2n-1)] - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (C_{2i}^k + 2C_{2i+1}^k) \cdot S_{2k-2i}(n-1) \right\} \\ &= [S_{2k}(n)] - [S_{2k}(n-1)] \end{aligned}$$

因此我們可以推得

$$S_{2k}(n) = \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k(n+1)^k(2n+1)] - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (C_{2i}^k + 2C_{2i+1}^k) \cdot S_{2k-2i}(n)$$

(2) 當 $k \geq 4$ 且 k 為偶數時，

$$\begin{aligned} & n^k(n+1)^k(2n+1) - n^k(n-1)^k(2n-1) \\ &= 2n^{k+1}[(\sum_{i=0}^k C_i^k n^{k-i}) - (\sum_{i=0}^k (-1)^i C_i^k n^{k-i})] + n^k[(\sum_{i=0}^k C_i^k n^{k-i}) + (\sum_{i=0}^k (-1)^i C_i^k n^{k-i})] \\ &= 4n^{k+1}[C_1^k n^{k-1} + (\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} C_{2i+1}^k n^{k-(2i+1)})] + 2n^k[C_0^k n^k + (\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} C_{2i}^k n^{k-2i})] \end{aligned}$$

$$= (2C_0^k + 4C_1^k)n^{2k} + \left[\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} (2C_{2i}^k + 4C_{2i+1}^k)n^{2k-2i} \right] + 2C_k^k n^k$$

等式兩邊同除以 $(2C_0^k + 4C_1^k)$ 並移項，整理可得

$$\begin{aligned} n^{2k} &= \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k (n+1)^k (2n+1) - n^k (n-1)^k (2n-1)] \\ &\quad - \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} \left\{ \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} (2C_{2i}^k + 4C_{2i+1}^k) \cdot [S_{2k-2i}(n) - S_{2k-2i}(n-1)] \right\} \\ &\quad - \frac{2C_k^k}{2C_0^k + 4C_1^k} \cdot [S_k(n) - S_k(n-1)] \\ &= \left\{ \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k (n+1)^k (2n+1)] - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} (C_{2i}^k + 2C_{2i+1}^k) \cdot S_{2k-2i}(n) - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \cdot S_k(n) \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k (n-1)^k (2n-1)] - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} (C_{2i}^k + 2C_{2i+1}^k) \cdot S_{2k-2i}(n-1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \cdot S_k(n-1) \right\} \\ &= [S_{2k}(n)] - [S_{2k}(n-1)] \end{aligned}$$

因此我們可以推得

$$S_{2k}(n) = \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k (n+1)^k (2n+1)] - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} (C_{2i}^k + 2C_{2i+1}^k) \cdot S_{2k-2i}(n) - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \cdot S_k(n)$$

到此遞迴關係式已尋得。

5. 利用遞迴關係式進而求得 $S_{2k}(n)$ 的公式解，其中 k 為正整數， $3 \leq k \leq 14$ ：

遞迴關係式：

(一)當 $k \geq 3$ 且 k 為奇數時，

$$S_{2k}(n) = \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k (n+1)^k (2n+1)] - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} (C_{2i}^k + 2C_{2i+1}^k) \cdot S_{2k-2i}(n)$$

(二)當 $k \geq 4$ 且 k 為偶數時，

$$S_{2k}(n) = \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k (n+1)^k (2n+1)] - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} (C_{2i}^k + 2C_{2i+1}^k) \cdot S_{2k-2i}(n) - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \cdot S_k(n)$$

(1) 將 $k=3$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$S_6(n) = \frac{1}{14} n^3 (n+1)^3 (2n+1) - \frac{5}{7} S_4(n)$$

數亦優 20

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^3}{14}(2n^4 + 7n^3 + 9n^2 + 5n + 1) - \frac{5}{7}\left(\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n\right) \\
&= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n
\end{aligned}$$

(2) 將 $k=4$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_8(n) &= \frac{n^4(n+1)^4(2n+1)}{18} - \frac{14}{9} \cdot S_6(n) - \frac{1}{9} \cdot S_4(n) \\
&= \frac{n^4}{18}(2n^5 + 9n^4 + 16n^3 + 14n^2 + 6n + 1) - \frac{14}{9}\left(\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n\right) \\
&\quad - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n\right) \\
&= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n
\end{aligned}$$

(3) 將 $k=5$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{10}(n) &= \frac{1}{22}n^5(n+1)^5(2n+1) - \frac{30}{11}S_8(n) - \frac{7}{11}S_6(n) \\
&= \frac{1}{22}(2n^{11} + 11n^{10} + 25n^9 + 30n^8 + 20n^7 + 7n^6 + n^5) \\
&\quad - \frac{30}{11}\left(\frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n\right) \\
&\quad - \frac{7}{11}\left(\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n\right) \\
&= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n
\end{aligned}$$

(4) 將 $k=6$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{12}(n) &= \frac{1}{26}n^6(n+1)^6(2n+1) - \frac{55}{13}S_{10}(n) - \frac{27}{13}S_8(n) - \frac{1}{13}S_6(n) \\
&= \frac{1}{26}(2n^{13} + 13n^{12} + 36n^{11} + 55n^{10} + 50n^9 + 27n^8 + 8n^7 + n^6) \\
&\quad - \frac{55}{13}\left(\frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n\right) \\
&\quad - \frac{27}{13}\left(\frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n\right) \\
&\quad - \frac{1}{13}\left(\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n\right) \\
&= \frac{1}{13}n^{13} + \frac{1}{2}n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6}n^9 + \frac{22}{7}n^7 - \frac{33}{10}n^5 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{691}{2730}n
\end{aligned}$$

(5) 將 $k=7$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{14}(n) &= \frac{1}{30}n^7(n+1)^7(2n+1) - \frac{91}{15}S_{12}(n) - \frac{77}{15}S_{10}(n) - \frac{3}{5}S_8(n) \\
&= \frac{1}{30}(2n^{15} + 15n^{14} + 49n^{13} + 91n^{12} + 105n^{11} + 77n^{10} + 35n^9 + 9n^8 + n^7) \\
&\quad - \frac{91}{15}\left(\frac{1}{13}n^{13} + \frac{1}{2}n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6}n^9 + \frac{22}{7}n^7 - \frac{33}{10}n^5 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{691}{2730}n\right) \\
&\quad - \frac{77}{15}\left(\frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n\right) \\
&\quad - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n\right) \\
&= \frac{1}{15}n^{15} + \frac{1}{2}n^{14} + \frac{7}{6}n^{13} - \frac{91}{30}n^{11} + \frac{143}{18}n^9 - \frac{143}{10}n^7 + \frac{91}{6}n^5 - \frac{691}{90}n^3 + \frac{7}{6}n
\end{aligned}$$

(6) 將 $k=8$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{16}(n) &= \frac{1}{34}n^8(n+1)^8(2n+1) - \frac{140}{17}S_{14}(n) - \frac{182}{17}S_{12}(n) - \frac{44}{17}S_{10}(n) - \frac{1}{17}S_8(n) \\
&= \frac{1}{34}(2n^{17} + 17n^{16} + 64n^{15} + 140n^{14} + 196n^{13} + 182n^{12} + 112n^{11} + 44n^{10} + 10n^9 + n^8) \\
&\quad - \frac{140}{17}\left(\frac{1}{15}n^{15} + \frac{1}{2}n^{14} + \frac{7}{6}n^{13} - \frac{91}{30}n^{11} + \frac{143}{18}n^9 - \frac{143}{10}n^7 + \frac{91}{6}n^5 - \frac{691}{90}n^3 + \frac{7}{6}n\right) \\
&\quad - \frac{182}{17}\left(\frac{1}{13}n^{13} + \frac{1}{2}n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6}n^9 + \frac{22}{7}n^7 - \frac{33}{10}n^5 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{691}{2730}n\right) \\
&\quad - \frac{44}{17}\left(\frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n\right) \\
&\quad - \frac{1}{17}\left(\frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n\right) \\
&= \frac{1}{17}n^{17} + \frac{1}{2}n^{16} + \frac{4}{3}n^{15} - \frac{14}{3}n^{13} + \frac{52}{3}n^{11} - \frac{143}{3}n^9 + \frac{260}{3}n^7 - \frac{1382}{15}n^5 + \frac{140}{3}n^3 - \frac{3617}{510}n
\end{aligned}$$

(7) 將 $k=9$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{18}(n) &= \frac{1}{38}n^9(n+1)^9(2n+1) - \frac{204}{19}S_{16}(n) - \frac{378}{19}S_{14}(n) - \frac{156}{19}S_{12}(n) - \frac{11}{19}S_{10}(n) \\
&= \frac{1}{19}n^{19} + \frac{1}{2}n^{18} + \frac{3}{2}n^{17} - \frac{34}{5}n^{15} + 34n^{13} - \frac{663}{5}n^{11} + \frac{1105}{3}n^9 \\
&\quad - \frac{23494}{35}n^7 + 714n^5 - \frac{3617}{10}n^3 + \frac{43867}{798}n
\end{aligned}$$

(8) 將 $k=10$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned} S_{20}(n) &= \frac{1}{42}n^{10}(n+1)^{10}(2n+1) - \frac{95}{7}S_{18}(n) - 34S_{16}(n) - \frac{150}{7}S_{14}(n) - \frac{65}{21}S_{12}(n) - \frac{1}{21}S_{10}(n) \\ &= \frac{1}{21}n^{21} + \frac{1}{2}n^{20} + \frac{5}{3}n^{19} - \frac{19}{2}n^{17} + \frac{1292}{21}n^{15} - 323n^{13} + \frac{41990}{33}n^{11} - \frac{223193}{63}n^9 \\ &\quad + 6460n^7 - \frac{68723}{10}n^5 + \frac{219335}{63}n^3 - \frac{174611}{330}n \end{aligned}$$

(9) 將 $k=11$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned} S_{22}(n) &= \frac{1}{46}n^{11}(n+1)^{11}(2n+1) - \frac{385}{23}S_{20}(n) - \frac{1254}{23}S_{18}(n) - \frac{1122}{23}S_{16}(n) - \frac{275}{23}S_{14}(n) - \frac{13}{23}S_{12}(n) \\ &= \frac{1}{23}n^{23} + \frac{1}{2}n^{22} + \frac{11}{6}n^{21} - \frac{77}{6}n^{19} + \frac{209}{2}n^{17} - \frac{3553}{5}n^{15} + \frac{11305}{3}n^{13} - \frac{223193}{15}n^{11} \\ &\quad + \frac{124355}{3}n^9 - \frac{755953}{10}n^7 + \frac{482537}{6}n^5 - \frac{1222277}{30}n^3 + \frac{854513}{138}n \end{aligned}$$

(10) 將 $k=12$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned} S_{24}(n) &= \frac{1}{50}n^{12}(n+1)^{12}(2n+1) - \frac{506}{25}S_{22}(n) - \frac{2079}{25}S_{20}(n) - \frac{2508}{25}S_{18}(n) - \frac{935}{25}S_{16}(n) \\ &\quad - \frac{90}{25}S_{14}(n) - \frac{1}{25}S_{12}(n) \\ &= \frac{1}{25}n^{25} + \frac{1}{2}n^{24} + 2n^{23} - \frac{253}{15}n^{21} + \frac{506}{3}n^{19} - \frac{14421}{10}n^{17} + \frac{29716}{3}n^{15} \\ &\quad - \frac{10266878}{195}n^{13} + 208012n^{11} - \frac{17386919}{30}n^9 + \frac{22196702}{21}n^7 \\ &\quad - \frac{28112371}{25}n^5 + \frac{1709026}{3}n^3 - \frac{236364091}{2730}n \end{aligned}$$

(11) 將 $k=13$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned} S_{26}(n) &= \frac{1}{54}n^{13}(n+1)^{13}(2n+1) - \frac{650}{27}S_{24}(n) - \frac{3289}{27}S_{22}(n) - \frac{5148}{27}S_{20}(n) - \frac{2717}{27}S_{18}(n) \\ &\quad - \frac{442}{27}S_{16}(n) - \frac{15}{27}S_{14}(n) \\ &= \frac{1}{27}n^{27} + \frac{1}{2}n^{26} + \frac{13}{6}n^{25} - \frac{65}{3}n^{23} + \frac{32890}{126}n^{21} - \frac{16445}{6}n^{19} + \frac{142025}{6}n^{17} \\ &\quad - \frac{10266878}{63}n^{15} + \frac{2600150}{3}n^{13} - \frac{20548177}{6}n^{11} + \frac{7213928150}{756}n^9 \\ &\quad - \frac{52208689}{3}n^7 + \frac{55543345}{3}n^5 - \frac{1181820455}{126}n^3 + \frac{8553103}{6}n \end{aligned}$$

(12) 將 $k = 14$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{28}(n) &= \frac{1}{58}n^{14}(n+1)^{14}(2n+1) - \frac{819}{29}S_{26}(n) - \frac{5005}{29}S_{24}(n) - \frac{9867}{29}S_{22}(n) - \frac{7007}{29}S_{20}(n) \\
&\quad - \frac{1729}{29}S_{18}(n) - \frac{119}{29}S_{16}(n) - \frac{1}{29}S_{14}(n) \\
&= \frac{1}{29}n^{29} + \frac{1}{2}n^{28} + \frac{7}{3}n^{27} - \frac{273}{10}n^{25} + 390n^{23} - \frac{9867}{2}n^{21} + 52325n^{19} - \frac{905901}{2}n^{17} \\
&\quad + 3120180n^{15} - \frac{33193209}{2}n^{13} + 65581165n^{11} - \frac{365460823}{2}n^9 + 333260070n^7 \\
&\quad - \frac{709092273}{2}n^5 + 179615163n^3 - \frac{23749461029}{870}n
\end{aligned}$$

(13) 將 $k = 15$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{30}(n) &= \frac{1}{62}n^{15}(n+1)^{15}(2n+1) - \frac{1015}{31}S_{28}(n) - \frac{7371}{31}S_{26}(n) - \frac{17875}{31}S_{24}(n) - \frac{16445}{31}S_{22}(n) \\
&\quad - \frac{5733}{31}S_{20}(n) - \frac{665}{31}S_{18}(n) - \frac{17}{31}S_{16}(n) \\
&= \frac{1}{31}n^{31} + \frac{1}{2}n^{30} + \frac{5}{2}n^{29} - \frac{203}{6}n^{27} + \frac{1131}{2}n^{25} - \frac{16965}{2}n^{23} + \frac{216775}{2}n^{21} - \frac{2304485}{2}n^{19} \\
&\quad + \frac{19959975}{2}n^{17} - \frac{137514723}{2}n^{15} + \frac{731482225}{2}n^{13} - \frac{31795091601}{22}n^{11} + \frac{8053785025}{2}n^9 \\
&\quad - \frac{28069417626705}{3822}n^7 + \frac{15626519181}{2}n^5 - \frac{23749461029}{6}n^3 + \frac{8615841276005}{14322}n
\end{aligned}$$

(14) 將 $k = 16$ 代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{32}(n) &= \frac{1}{66}n^{16}(n+1)^{16}(2n+1) - \frac{1240}{33}S_{30}(n) - \frac{10556}{33}S_{28}(n) - \frac{30888}{33}S_{26}(n) - \frac{35750}{33}S_{24}(n) \\
&\quad - \frac{16744}{33}S_{22}(n) - \frac{2940}{33}S_{20}(n) - \frac{152}{33}S_{18}(n) - \frac{1}{33}S_{16}(n) \\
&= \frac{1}{33}n^{33} + \frac{1}{2}n^{32} + \frac{8}{3}n^{31} - \frac{124}{3}n^{29} + \frac{7192}{9}n^{27} - \frac{70122}{5}n^{25} + \frac{2337400}{11}n^{23} - \frac{57151228}{21}n^{21} \\
&\quad + 28947800n^{19} - \frac{4262956413}{17}n^{17} + \frac{36281518360}{21}n^{15} - \frac{101092086116}{11}n^{13} \\
&\quad + 36315248840n^{11} - \frac{2124913178090}{21}n^9 + 184541750328n^7 - \frac{2944933167596}{15}n^5 \\
&\quad + \frac{68926730208040}{693}n^3 - \frac{7709321041217}{510}n
\end{aligned}$$

6. 結論：

(1) 我們已經獲得以下偶次方和公式解：

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$S_8(n) = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$S_{10}(n) = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

$$S_{12}(n) = \frac{1}{13}n^{13} + \frac{1}{2}n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6}n^9 + \frac{22}{7}n^7 - \frac{33}{10}n^5 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{691}{2730}n$$

$$S_{14}(n) = \frac{1}{15}n^{15} + \frac{1}{2}n^{14} + \frac{7}{6}n^{13} - \frac{91}{30}n^{11} + \frac{143}{18}n^9 - \frac{143}{10}n^7 + \frac{91}{6}n^5 - \frac{691}{90}n^3 + \frac{7}{6}n$$

$$S_{16}(n) = \frac{1}{17}n^{17} + \frac{1}{2}n^{16} + \frac{4}{3}n^{15} - \frac{14}{3}n^{13} + \frac{52}{3}n^{11} - \frac{143}{3}n^9 + \frac{260}{3}n^7 - \frac{1382}{15}n^5 + \frac{140}{3}n^3 - \frac{3617}{510}n$$

$$S_{18}(n) = \frac{1}{19}n^{19} + \frac{1}{2}n^{18} + \frac{3}{2}n^{17} - \frac{34}{5}n^{15} + 34n^{13} - \frac{663}{5}n^{11} + \frac{1105}{3}n^9 - \frac{23494}{35}n^7 + 714n^5 - \frac{3617}{10}n^3 + \frac{43867}{798}n$$

$$S_{20}(n) = \frac{1}{21}n^{21} + \frac{1}{2}n^{20} + \frac{5}{3}n^{19} - \frac{19}{2}n^{17} + \frac{1292}{21}n^{15} - 323n^{13} + \frac{41990}{33}n^{11} - \frac{223193}{63}n^9 + 6460n^7 - \frac{68723}{10}n^5 + \frac{219335}{63}n^3 - \frac{174611}{330}n$$

$$S_{22}(n) = \frac{1}{23}n^{23} + \frac{1}{2}n^{22} + \frac{11}{6}n^{21} - \frac{77}{6}n^{19} + \frac{209}{2}n^{17} - \frac{3553}{5}n^{15} + \frac{11305}{3}n^{13} - \frac{223193}{15}n^{11} + \frac{124355}{3}n^9 - \frac{755953}{10}n^7 + \frac{482537}{6}n^5 - \frac{1222277}{30}n^3 + \frac{854513}{138}n$$

$$S_{24}(n) = \frac{1}{25}n^{25} + \frac{1}{2}n^{24} + 2n^{23} - \frac{253}{15}n^{21} + \frac{506}{3}n^{19} - \frac{14421}{10}n^{17} + \frac{29716}{3}n^{15} - \frac{10266878}{195}n^{13} + 208012n^{11} - \frac{17386919}{30}n^9 + \frac{22196702}{21}n^7 - \frac{28112371}{25}n^5 + \frac{1709026}{3}n^3 - \frac{236364091}{2730}n$$

$$S_{26}(n) = \frac{1}{27}n^{27} + \frac{1}{2}n^{26} + \frac{13}{6}n^{25} - \frac{65}{3}n^{23} + \frac{32890}{126}n^{21} - \frac{16445}{6}n^{19} + \frac{142025}{6}n^{17} - \frac{10266878}{63}n^{15} + \frac{2600150}{3}n^{13} - \frac{20548177}{6}n^{11} + \frac{7213928150}{756}n^9 - \frac{52208689}{3}n^7 + \frac{55543345}{3}n^5$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1181820455}{126}n^3 + \frac{8553103}{6}n \\
S_{28}(n) = & \frac{1}{29}n^{29} + \frac{1}{2}n^{28} + \frac{7}{3}n^{27} - \frac{273}{10}n^{25} + 390n^{23} - \frac{9867}{2}n^{21} + 52325n^{19} - \frac{905901}{2}n^{17} \\
& + 3120180n^{15} - \frac{33193209}{2}n^{13} + 65581165n^{11} - \frac{365460823}{2}n^9 + 333260070n^7 \\
& - \frac{709092273}{2}n^5 + 179615163n^3 - \frac{23749461029}{870}n \\
S_{30}(n) = & \frac{1}{31}n^{31} + \frac{1}{2}n^{30} + \frac{5}{2}n^{29} - \frac{203}{6}n^{27} + \frac{1131}{2}n^{25} - \frac{16965}{2}n^{23} + \frac{216775}{2}n^{21} - \frac{2304485}{2}n^{19} \\
& + \frac{19959975}{2}n^{17} - \frac{137514723}{2}n^{15} + \frac{731482225}{2}n^{13} - \frac{31795091601}{22}n^{11} + \frac{8053785025}{2}n^9 \\
& - \frac{28069417626705}{3822}n^7 + \frac{15626519181}{2}n^5 - \frac{23749461029}{6}n^3 + \frac{8615841276005}{14322}n \\
S_{32}(n) = & \frac{1}{33}n^{33} + \frac{1}{2}n^{32} + \frac{8}{3}n^{31} - \frac{124}{3}n^{29} + \frac{7192}{9}n^{27} - \frac{70122}{5}n^{25} + \frac{2337400}{11}n^{23} - \frac{57151228}{21}n^{21} \\
& + 28947800n^{19} - \frac{4262956413}{17}n^{17} + \frac{36281518360}{21}n^{15} - \frac{101092086116}{11}n^{13} \\
& + 36315248840n^{11} - \frac{2124913178090}{21}n^9 + 184541750328n^7 - \frac{2944933167596}{15}n^5 \\
& + \frac{68926730208040}{693}n^3 - \frac{7709321041217}{510}n
\end{aligned}$$

(2) 當 $3 \leq k \leq 16$ 時，偶次方和公式解可簡潔表示成下列形式：

$$S_{2k}(n) = \frac{1}{2k+1} \cdot n^{2k+1} + \frac{1}{2} \cdot n^{2k} + \sum_{i=1}^k [(c_{2k,2k-2i+1}) \cdot n^{2k-2i+1}], 3 \leq k \leq 16$$

$$c_{32,1} = -\frac{7709321041217}{510}$$

$$c_{30,1} = \frac{8615841276005}{14322}, c_{2k,2k-29} = \frac{k}{k-15} \cdot \frac{2k-1}{2k-29} \cdot c_{2k-2,2k-31}, k=16$$

$$c_{28,1} = -\frac{23749461029}{870}, c_{2k,2k-27} = \frac{k}{k-14} \cdot \frac{2k-1}{2k-27} \cdot c_{2k-2,2k-29}, k=15,16$$

$$c_{26,1} = \frac{8553103}{6}, c_{2k,2k-25} = \frac{k}{k-13} \cdot \frac{2k-1}{2k-25} \cdot c_{2k-2,2k-27}, k=14,15,16$$

$$c_{24,1} = -\frac{236364091}{2730}, c_{2k,2k-23} = \frac{k}{k-12} \cdot \frac{2k-1}{2k-23} \cdot c_{2k-2,2k-25}, k=13,14,15,16$$

$$c_{22,1} = \frac{854513}{138}, c_{2k,2k-21} = \frac{k}{k-11} \cdot \frac{2k-1}{2k-21} \cdot c_{2k-2,2k-23}, k=12,13,14,15,16$$

$$c_{20,1} = -\frac{174611}{330}, c_{2k,2k-19} = \frac{k}{k-10} \cdot \frac{2k-1}{2k-19} \cdot c_{2k-2,2k-21}, k = 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

$$c_{18,1} = \frac{43867}{798}, c_{2k,2k-17} = \frac{k}{k-9} \cdot \frac{2k-1}{2k-17} \cdot c_{2k-2,2k-19}, k = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

$$c_{16,1} = -\frac{3617}{510}, c_{2k,2k-15} = \frac{k}{k-8} \cdot \frac{2k-1}{2k-15} \cdot c_{2k-2,2k-17}, k = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

$$c_{14,1} = \frac{7}{6}, c_{2k,2k-13} = \frac{k}{k-7} \cdot \frac{2k-1}{2k-13} \cdot c_{2k-2,2k-15}, k = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

$$c_{12,1} = -\frac{691}{2730}, c_{2k,2k-11} = \frac{k}{k-6} \cdot \frac{2k-1}{2k-11} \cdot c_{2k-2,2k-13}, k = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

$$c_{10,1} = \frac{5}{66}, c_{2k,2k-9} = \frac{k}{k-5} \cdot \frac{2k-1}{2k-9} \cdot c_{2k-2,2k-11}, k = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

$$c_{8,1} = -\frac{1}{30}, c_{2k,2k-7} = \frac{k}{k-4} \cdot \frac{2k-1}{2k-7} \cdot c_{2k-2,2k-9}, k = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

$$c_{6,1} = \frac{1}{42}, c_{2k,2k-5} = \frac{k}{k-3} \cdot \frac{2k-1}{2k-5} \cdot c_{2k-2,2k-7}, k = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

$$c_{4,1} = -\frac{1}{30}, c_{2k,2k-3} = \frac{k}{k-2} \cdot \frac{2k-1}{2k-3} \cdot c_{2k-2,2k-5}, k = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

$$c_{2,1} = \frac{1}{6}, c_{2k,2k-1} = \frac{k}{k-1} \cdot c_{2k-2,2k-3}, k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

(3) 可利用遞迴關係式：

(一)當 $k \geq 3$ 且 k 為奇數時，

$$S_{2k}(n) = \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k (n+1)^k (2n+1)] - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (C_{2i}^k + 2C_{2i+1}^k) \cdot S_{2k-2i}(n)$$

(二)當 $k \geq 4$ 且 k 為偶數時，

$$S_{2k}(n) = \frac{1}{2C_0^k + 4C_1^k} [n^k (n+1)^k (2n+1)] - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} (C_{2i}^k + 2C_{2i+1}^k) \cdot S_{2k-2i}(n) - \frac{1}{C_0^k + 2C_1^k} \cdot S_k(n)$$

去求 $S_{2k}(n)$ 的公式解， $k \geq 17$ ， k 為正整數。

二階方陣的幕次方公式

葉善雲／東山高中數學教師

一、前言

計算方陣的幕次方不是件容易的事，高中數學談及二階方陣的反方陣，本文將針對二階方陣，探討二階方陣的幕次方計算。高中教材除了計算特殊矩陣（例如對角化矩陣、旋轉矩陣等）的次方，也談及其它矩陣的次方計算，例如：給矩陣 P ，先求出特殊矩陣 $P^{-1}AP$ ，然後再求 A^n 。在高中教學現場，令筆者納悶的是：不是要求方陣 A 的次方 A^n 嗎？為何要先給定矩陣 P ？如果沒給矩陣 P ，該如何計算 A^n 呢？

二、內文

甲、首先，回顧高中教材的一些練習與結果。

1. 特殊矩陣的次方

(1) 對角化矩陣 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{bmatrix}$ 。

(2) 三角化矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $\begin{bmatrix} s & h \\ 0 & s \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} s^n & nhs^{n-1} \\ 0 & s^n \end{bmatrix}$ 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ nk & 1 \end{bmatrix} \text{ 且 } \begin{bmatrix} s & 0 \\ h & s \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} s^n & 0 \\ nhs^{n-1} & s^n \end{bmatrix}。$$

(3) 旋轉矩陣 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ 。

2. 可逆矩陣的反矩陣

當矩陣 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式值不為 0 時，即 $\det(M) = ad - bc \neq 0$ ，

矩陣 M 有反矩陣 $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ，滿足 $MM^{-1} = M^{-1}M = I$ 。

3. 矩陣的合併

若 $M \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 且 $M \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$ ，則 $M \begin{bmatrix} s & u \\ t & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ 。

4. 矩陣的拆解

$$\begin{bmatrix} \alpha \times x & \beta \times z \\ \alpha \times y & \beta \times w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \text{ 且 } \begin{bmatrix} \alpha \times x & x \\ \alpha \times y & y + \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}。$$

5. 矩陣次方的轉換

若 $G = P^{-1}AP$ ，則 $G^n = P^{-1}A^nP$ 且 $A^n = PG^nP^{-1}$ 。

乙、特殊矩陣的轉換

為了減輕矩陣次方的計算，對任意二階方陣 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，我們想要先找一個可逆矩陣 P ，使 $MP = P \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ 或 $MP = P \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ 。

情形 I：

找可逆矩陣 $P = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ 滿足 $MP = P \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ ，

如此一來， $M = P \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} P^{-1}$ 且 $M^n = P \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix} P^{-1}$ 。

在這種情況下， $M \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \times x & \beta \times z \\ \alpha \times y & \beta \times w \end{bmatrix}$ ，

此時 $M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \times x \\ \alpha \times y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 且 $M \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \times z \\ \beta \times w \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$ ，

也就是說，找 P ，就是要找 α 與非零矩陣 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，滿足 $M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 。

於是 $(M - \alpha I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，亦即嘗試解出 $\det(M - \alpha I) = 0$ 。

所以，要解方程式 $\begin{vmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\alpha \end{vmatrix} = 0$ ，即 $\alpha^2 - (a+d)\alpha + \det M = 0$ 。¹

為了簡便起見，我們稱方程式 $x^2 - (a+d)x + \det M = 0$ 為矩陣 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的特徵方程式，

且 $f(x) = x^2 - (a+d)x + \det M$ 為矩陣 M 的特徵多項式，而方程式 $f(x) = 0$ 的根稱為 M 的特徵值 (eigenvalue)。

此時值得注意的是：當特徵方程式 $x^2 - (a+d)x + \det M = 0$ 為重根狀態時，

我們往往無法找出可逆矩陣 $P = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ 。

¹ 上述為行列式觀點，也可以用底下方程組的觀點處理，即解方程組 $\begin{cases} ax+by=\alpha x \\ cx+dy=\alpha y \end{cases}$ ，有異於

$(0,0)$ 的解，得 $\frac{a-\alpha}{c} = \frac{b}{d-\alpha}$ ，等同解特徵方程式 $\alpha^2 - (a+d)\alpha + \det M = 0$ ，解出 α 後代回方程組，可取得一組異於 $(0,0)$ 的解 (x,y) 。

情形 II：

找可逆矩陣 $P = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ 滿足 $MP = P \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ ，

如此一來， $M = P \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} P^{-1}$ 且 $M^n = P \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix} P^{-1}$ 。

在這種情況下， $M \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \times x & x \\ \alpha \times y & y + \alpha \end{bmatrix}$ ，

如同前面情形 I，需解特徵方程式 $\alpha^2 - (a+d)\alpha + \det M = 0$ ，找出一個根 α 與一組異於 $(0,0)$ 的解 (x,y) ，此時應是重根狀態（否則就用情形 I 的方式處理了），即

$(a-d)^2 + 4bc = 0$ 且重根為 $\alpha = \frac{a+d}{2}$ ，並由 $\left(\frac{a-d}{2}\right)x + by = 0$ ，可取一組解

$(x,y) = \left(b, \frac{d-a}{2}\right)$ 。所以，當我們取 $P = \begin{bmatrix} b & 0 \\ \frac{d-a}{2} & 1 \end{bmatrix}$ 後²，

$$\begin{aligned} MP &= \begin{bmatrix} ab + b \times \frac{d-a}{2} & b \\ cb + d \times \frac{d-a}{2} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} \times b & b \\ \frac{(a-d)^2}{-4} + d \times \frac{d-a}{2} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} \times b & b \\ \frac{d-a}{2} \times \frac{a-d+2d}{2} & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} \times b & b \\ \frac{a+d}{2} \times \frac{d-a}{2} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ \frac{d-a}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} & 1 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}。 \end{aligned}$$

丙、二階方陣的冪次方公式推導

底下，我們延續尋找可逆矩陣 P 的方法，將二階方陣 M 表示為 $M = PGP^{-1}$ ，其中 G 為對角矩陣或三角矩陣，進而推導方陣 M 的冪次方 M^n 。

定理：設 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為實係數二階矩陣， $f(x) = x^2 - (a+d)x + \det(M)$ 為其特徵多項式且 α ，

β 為 $f(x) = 0$ 的根。令單項式 x^n 除以 $f(x)$ 的餘式為 $A_n x + B_n$ ，則對所有正整數 n ，我們有

$$(1) A_{n+2} = (a+d)A_{n+1} - \det(M)A_n。$$

² 此處，當 $b \neq 0$ 時， $P = \begin{bmatrix} b & 0 \\ \frac{d-a}{2} & 1 \end{bmatrix}$ 方為可逆矩陣；但當 $b = 0$ 時，由 $(a-d)^2 + 4bc = 0$ 知

$a = d$ ，此時 $M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$ 為特殊三角化矩陣，其冪次方可直接求得，不必如此大費周章。

$$(2) M^n = \begin{bmatrix} A_{n+1} - dA_n & bA_n \\ cA_n & A_{n+1} - aA_n \end{bmatrix} \circ^3$$

再則，我們也有

$$(3) \text{若 } \alpha \neq \beta, \text{ 則 } A_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \circ \text{此時}$$

$$M^n = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - d \times \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} & b \times \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ c \times \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} & \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - a \times \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \end{bmatrix} \circ$$

$$(4) \text{若 } \alpha = \beta, \text{ 即 } (a-d)^2 + 4bc = 0, \text{ 則}$$

$$M^n = \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1} \times \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} + \frac{n(a-d)}{2} & nb \\ nc & \frac{a+d}{2} - \frac{n(a-d)}{2} \end{bmatrix} \circ$$

說明：

(1) 由單項式 x^n 除以 $f(x) = x^2 - (a+d)x + \det(M)$ 的餘式為 $A_n x + B_n$ ，及餘式定理可得

$$\begin{cases} \alpha^n = \alpha \times A_n + B_n \\ \beta^n = \beta \times A_n + B_n \end{cases}, \text{此時 } \alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)A_n, \text{對所有正整數 } n \text{ 均成立。}$$

$$\text{當 } \alpha \neq \beta \text{ 時, } A_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ 且 } A_1 = 1 \circ$$

$$\text{根據恆等式 } \alpha^{n+2} - \beta^{n+2} = (\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n),$$

$$\text{當 } \alpha \neq \beta \text{ 時, 我們有 } A_{n+2} = (\alpha + \beta)A_{n+1} - \alpha\beta A_n, \text{ 即 } A_{n+2} = (a+d)A_{n+1} - \det(M)A_n \circ$$

當 $\alpha = \beta$ 時，由 x^n 除以 $f(x) = (x - \alpha)^2$ 的餘式為 $A_n x + B_n$ ，及餘式定理可得 $A_n = n\alpha^{n-1}$ ，對所有正整數 n 均成立。⁴

$$\text{此時 } (n+2)\alpha^{n+1} = 2\alpha \times (n+1)\alpha^n - \alpha^2 \times n\alpha^{n-1}, \text{ 即 } A_{n+2} = (a+d)A_{n+1} - \det(M)A_n \circ$$

(2) 就 $f(x) = x^2 - (a+d)x + \det(M) = 0$ 的兩根 α, β 是否相等分別討論。

$$\text{此處, 我們不妨先設定 } M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ 滿足 } bc \neq 0, \text{ 即 } b, c \text{ 不同時為 } 0, \text{ 否則, } M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$\text{為對角矩陣, 其幕次方 } M^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{bmatrix} \circ$$

³ 我們也可以應用 Cayley-Hamilton 定理推導此結果：因為二階方陣 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足特徵方程式，即 $M^2 - (a+d)M + \det(M) \times I = O$ ，可將 M^n 的計算簡化成計算 $A_n M + B_n I$ 。

⁴ 當 $\alpha = \beta$ 時，設 $x^n = (x - \alpha)^2 q(x) + A_n x + B_n$ ，兩端取導函數（即微分），並將 $x = \alpha$ 代入，即得 $A_n = n\alpha^{n-1}$ ，對所有正整數 n 均成立。

情形 I：當 $\alpha \neq \beta$ 時，考慮關係式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & b \\ \alpha - a & \beta - a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \times b & \beta \times b \\ \alpha \times (\alpha - a) & \beta \times (\beta - a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b \\ \alpha - a & \beta - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},^5$$

或

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - d & \beta - d \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \times (\alpha - d) & \beta \times (\beta - d) \\ \alpha \times c & \beta \times c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - d & \beta - d \\ c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$

不失一般性，可假設 $b \neq 0$ ，於是我們有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b & b \\ \alpha - a & \beta - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & b \\ \alpha - a & \beta - a \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} b & b \\ \alpha - a & \beta - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta - a & -b \\ -(\alpha - a) & b \end{bmatrix} \times \frac{1}{b(\beta - \alpha)}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n &= \frac{-1}{b(\alpha - \beta)} \begin{bmatrix} b & b \\ \alpha - a & \beta - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta - a & -b \\ -(\alpha - a) & b \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{b(\alpha - \beta)} \begin{bmatrix} b\alpha^n & b\beta^n \\ (\alpha - a)\alpha^n & (\beta - a)\beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta - a & -b \\ -(\alpha - a) & b \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{b(\alpha - \beta)} \begin{bmatrix} b(\beta\alpha^n - a\alpha^n + a\beta^n - \alpha\beta^n) & -b^2(\alpha^n - \beta^n) \\ (\beta - a)(\alpha - a)(\alpha^n - \beta^n) & -b(\alpha^{n+1} - a\alpha^n - \beta^{n+1} + a\beta^n) \end{bmatrix}^6 \\ &= \frac{-1}{b(\alpha - \beta)} \begin{bmatrix} -ab(\alpha^n - \beta^n) + b\alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) & -b^2(\alpha^n - \beta^n) \\ -bc(\alpha^n - \beta^n) & -b(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} - a(\alpha^n - \beta^n)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \times \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - \det(M) \times \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} & b \times \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ c \times \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} & \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - a \times \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \times A_n - \det(M) \times A_{n-1} & b \times A_n \\ c \times A_n & A_{n+1} - a \times A_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{n+1} - d \times A_n & b \times A_n \\ c \times A_n & A_{n+1} - a \times A_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

⁵ 由 $\alpha^2 - (a+d)\alpha + ad - bc = 0$ ，得 $bc + d\alpha - ad = d\alpha + \alpha^2 - a\alpha - d\alpha = \alpha(\alpha - a)$ 。

⁶ 由 $x^2 - (a+d)x + ad - bc = (x - \alpha)(x - \beta)$ ，將 $x = a$ 代入得 $(a - \alpha)(a - \beta) = -bc$ 。

情形 II：當 $\alpha = \beta$ 時（此時 $\alpha = \beta = \frac{d+a}{2}$ 且 $(a-d)^2 + 4bc = 0$ ），考慮關係式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ \frac{d-a}{2} & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{d+a}{2} \times b & b \\ \frac{d+a}{2} \times \frac{d-a}{2} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ \frac{d-a}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d+a}{2} & 1 \\ 0 & \frac{d+a}{2} \end{bmatrix}, \\ \text{或} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a-d}{2} & 1 \\ c & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} \times \frac{a-d}{2} & a \\ \frac{a+d}{2} \times c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-d}{2} & 1 \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} & 1 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{bmatrix},^7 \end{aligned}$$

不失一般性，可假設 $b \neq 0$ ，於是我們有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b & 0 \\ \frac{d-a}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d+a}{2} & 1 \\ 0 & \frac{d+a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ \frac{d-a}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} b & 0 \\ \frac{d-a}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \frac{d+a}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{d+a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a-d}{2} & b \end{bmatrix} \times \frac{1}{b}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n &= \frac{1}{b} \times \left(\frac{d+a}{2} \right)^n \times \begin{bmatrix} b & 0 \\ \frac{d-a}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2n}{d+a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a-d}{2} & b \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{b} \times \left(\frac{d+a}{2} \right)^n \times \begin{bmatrix} b & b \times \frac{2n}{d+a} \\ \frac{d-a}{2} & n \times \frac{d-a}{d+a} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a-d}{2} & b \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{b} \times \left(\frac{d+a}{2} \right)^n \times \begin{bmatrix} b \times \left(1 + n \times \frac{a-d}{d+a} \right) & b^2 \times \frac{2n}{d+a} \\ -n \times \frac{(d-a)^2}{2(d+a)} & b \times \left(1 + n \times \frac{d-a}{d+a} \right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{b} \times \left(\frac{d+a}{2} \right)^n \times \begin{bmatrix} b \times \left(1 + n \times \frac{a-d}{d+a} \right) & b^2 \times \frac{2n}{d+a} \\ -n \times \frac{-4bc}{2(d+a)} & b \times \left(1 + n \times \frac{d-a}{d+a} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

⁷ 此處 $\frac{a(a-d)}{2} + bc = \frac{a(a-d)}{2} - \frac{(a-d)^2}{4} = \frac{(a-d)}{2} \times \frac{2a-a+d}{2} = \frac{a+d}{2} \times \frac{a-d}{2}$ 。

$$= \left(\frac{d+a}{2} \right)^n \times \begin{bmatrix} 1+n \times \frac{a-d}{d+a} & b \times \frac{2n}{d+a} \\ c \times \frac{2n}{d+a} & 1+n \times \frac{d-a}{d+a} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1} \times \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} + n \times \frac{a-d}{2} & nb \\ nc & \frac{a+d}{2} - n \times \frac{a-d}{2} \end{bmatrix}$$

當 $\alpha = \beta = \frac{a+d}{2}$ 時， $A_n = n\alpha^{n-1}$ 對所有正整數 n 均成立。由於，

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a+d}{2} \right)^n \pm \frac{a-d}{2} \times n \times \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1} \\ &= (n+1) \times \left(\frac{a+d}{2} \right)^n - n \times \frac{a+d}{2} \times \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1} \pm \frac{a-d}{2} \times n \times \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1} \\ &= (n+1) \times \left(\frac{a+d}{2} \right)^n - \left(\frac{a+d}{2} \mp \frac{a-d}{2} \right) \times n \times \left(\frac{a+d}{2} \right)^{n-1} \\ &= A_{n+1} - dA_n \text{ 或 } A_{n+1} - aA_n。 \end{aligned}$$

上式 $M^n = \begin{bmatrix} \alpha^n + \frac{a-d}{2} \times n\alpha^{n-1} & b \times n\alpha^{n-1} \\ c \times n\alpha^{n-1} & \alpha^n - \frac{a-d}{2} \times n\alpha^{n-1} \end{bmatrix}$ ，亦可寫成

$$M^n = \begin{bmatrix} A_{n+1} - dA_n & bA_n \\ cA_n & A_{n+1} - aA_n \end{bmatrix} \text{ 或 } M^n = \begin{bmatrix} aA_n - \det(M)A_{n-1} & bA_n \\ cA_n & dA_n - \det(M)A_{n-1} \end{bmatrix}。$$

推論：設 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為實係數二階方陣，且 $f(x) = x^2 - (a+d)x + \det(M)$ 為其特徵多項式。令

單項式 x^n 除以 $f(x)$ 的餘式為 $A_n x + B_n$ ，則我們有

(1) ① 當 $b=0$ 時， $M^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ c \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} d^i & d^n \end{bmatrix}$ ，對所有正整數 n 均成立。

② 當 $c=0$ 時， $M^n = \begin{bmatrix} a^n & b \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} d^i \\ 0 & d^n \end{bmatrix}$ ，對所有正整數 n 均成立。

(2) 當 $\det(M) = 0$ 時， $M^n = (a+d)^{n-1} M$ 。

(3) 若存在正整數 k 使 $A_k = 0$ ，則 $M^k = A_{k+1} I$ 。

說明：

(1) 當 $b=0$ 或 $c=0$ 時， $\det(M) = ad$ 且 $f(x) = 0$ 的兩根為 a ， d ，此時 $A_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} d^i$ ，對所有

正整數 n 均成立。

數亦優 34

於是 $A_{n+1} - dA_n = \sum_{i=0}^n a^{n-i} d^i - \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} d^{i+1} = a^n$ 且 $A_{n+1} - aA_n = d^n$,

$$\text{所以 } M^n = \begin{bmatrix} A_{n+1} - dA_n & bA_n \\ cA_n & A_{n+1} - aA_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^n & b \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} d^i \\ 0 & d^n \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ c \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} d^i & d^n \end{bmatrix} .$$

(2) 當 $\det(M) = 0$ 時, 透過除法可得 $A_n = (a+d)^{n-1}$, 對所有正整數 n 均成立。

於是 $A_{n+1} - dA_n = aA_n = a \times (a+d)^{n-1}$ 且 $A_{n+1} - aA_n = dA_n = d \times (a+d)^{n-1}$,

$$\text{所以 } M^n = \begin{bmatrix} A_{n+1} - dA_n & bA_n \\ cA_n & A_{n+1} - aA_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(a+d)^{n-1} & b(a+d)^{n-1} \\ c(a+d)^{n-1} & d(a+d)^{n-1} \end{bmatrix} = (a+d)^{n-1} M .$$

(3) 若存在正整數 k 使 $A_k = 0$, 則

$$M^k = \begin{bmatrix} A_{k+1} - dA_k & bA_k \\ cA_k & A_{k+1} - aA_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k+1} & 0 \\ 0 & A_{k+1} \end{bmatrix} = A_{k+1} I .$$

丁、二階方陣的幕次方實例

計算二階方陣的幕次方, 應採取怎樣的策略? 我們嘗試用下列流程來描述:

1. 是否為特殊矩陣?

對角矩陣、三角矩陣、旋轉矩陣、...等矩陣, 幕次方可直接寫出。

2. 矩陣的行列式值是否為 0 ?

行列式值為 0 的矩陣, 如前所述:

$$\text{設 } M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ 且 } \det(M) = 0 , \text{ 則 } M^n = (a+d)^{n-1} M .$$

3. 當矩陣的行列式值不為 0 時, 寫出矩陣的特徵方程式。

$$\text{設 } M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ 且 } \det(M) \neq 0 , \text{ 則其特徵方程式為 } x^2 - (a+d)x + \det(M) = 0 ,$$

然後求出特徵值 α , β , 套用幕次方公式。

(1) 若 $\alpha = \beta$, 則 $A_n = n\alpha^{n-1}$ 。

(2) 若 $\alpha \neq \beta$, 則 $A_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ 。

①當 α , β 為相異實根時, 直接套用幕次方公式。

②當 α , β 為共軛虛根時, 雖可套用幕次方公式, 但有時可再化簡。

設 $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 且 $\beta = r(\cos \theta - i \sin \theta)$, 則由棣美弗定理 ,

若 $z = r(\cos \theta \pm i \sin \theta)$, 則 $z^n = r^n(\cos n\theta \pm i \sin n\theta)$,

我們有

$$A_n = \frac{r^n[(\cos \theta + i \sin \theta)^n - (\cos \theta - i \sin \theta)^n]}{r[(\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta - i \sin \theta)]} = \frac{2i \times r^n \sin n\theta}{2i \times r \sin \theta} = \frac{r^{n-1} \sin n\theta}{\sin \theta} .$$

底下, 我們舉一些實例來說明幕次方公式的運用。

例 1：求旋轉矩陣 $M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 的幕次方 M^n 。

說明：

矩陣 M 的特徵多項式為 $f(x) = x^2 - 2\cos \theta \times x + 1$ ，單項式 x^n 除以 $f(x)$ 的餘式為 $A_n x + B_n$ ， $f(x) = 0$ 的兩根為 $\cos \theta \pm i \sin \theta$ ，所以

$$A_n = \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^n - (\cos \theta - i \sin \theta)^n}{(\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta - i \sin \theta)} = \frac{2i \times \sin n\theta}{2i \times \sin \theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$$

$$\text{且 } A_{n+1} - \cos \theta \times A_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} - \cos \theta \times \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta \times \cos n\theta}{\sin \theta} = \cos n\theta,$$

$$\text{所以 } M^n = \begin{bmatrix} A_{n+1} - \cos \theta \times A_n & -\sin \theta \times A_n \\ \sin \theta \times A_n & A_{n+1} - \cos \theta \times A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}。$$

例 2：計算矩陣 $M = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ 的幕次方 M^n 。

說明：

矩陣 M 的特徵多項式為 $f(x) = x^2 - 4x + 4$ ，特徵值 $\alpha = 2$ （重根），

此時 $A_n = n\alpha^{n-1} = n \times 2^{n-1}$ ，根據幕次方公式

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{bmatrix} A_{n+1} - 4 \times A_n & 4 \times A_n \\ -1 \times A_n & A_{n+1} - 0 \times A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n+1) \times 2^n - n \times 2^{n+1} & n \times 2^{n+1} \\ -n \times 2^{n-1} & (n+1) \times 2^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-n) \times 2^n & n \times 2^{n+1} \\ -n \times 2^{n-1} & (n+1) \times 2^n \end{bmatrix}。 \end{aligned}$$

例 3：求費氏數列 $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$ 的一般項 a_n 。

說明：

我們從矩陣的觀點著手，費氏數列的矩陣形式為 $\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}$ 。

令 $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 且特徵方程式為 $f(x) = x^2 - x - 1$ ，特徵值為 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ，

根據幕次方公式： $A_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ 且 $M^n = \begin{bmatrix} A_{n+1} - 0 \times A_n & 1 \times A_n \\ 1 \times A_n & A_{n+1} - 1 \times A_n \end{bmatrix}$ ，

$$\text{得 } \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = M^{n-2} \times \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-2} \\ A_{n-2} & A_{n-1} - A_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}，$$

$$\text{所以 } a_n = A_{n-1} + A_{n-2} = (1+0)A_{n-1} - (-1) \times A_{n-2} = A_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}。$$

例 4：計算矩陣 $M = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$ 的幕次方 M^n 。

說明：

矩陣 M 的特徵多項式為 $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{3}$ ，特徵值 $\frac{3 \pm \sqrt{3}i}{6}$ （虛數根）。

將特徵值 $\frac{3 \pm \sqrt{3}i}{6}$ 寫成極式 $\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos 30^\circ \pm i \sin 30^\circ)$ ，此時

$$A_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1} \sin(n \times 30^\circ)}{\sin 30^\circ} \text{ 且 } A_6 = 0 \text{ 且 } A_7 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^6 = -\frac{1}{27}。$$

底下我們利用綜合除法來呈現 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ 的值：

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots \\ & & + & 1 & + & 1 & + & \frac{2}{3} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{9} & + & 0 & + & \cdots \\ & & & & + & \left(-\frac{1}{3}\right) & + & \left(-\frac{1}{3}\right) & + & \left(-\frac{2}{9}\right) & + & \left(-\frac{1}{9}\right) & + & \left(-\frac{1}{27}\right) & + & \cdots \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ \\ \left(-\frac{1}{3}\right) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 1 & + & \frac{2}{3} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{9} & + & 0 & + & \left(-\frac{1}{27}\right) & + & \cdots \\ A_1 & & A_2 & & A_3 & & A_4 & & A_5 & & A_6 & & A_7 & & \end{array}$$

由 $M = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$ 及幕次方公式 $M^n = \begin{bmatrix} A_{n+1} + A_n & -7 \times A_n \\ \frac{1}{3} \times A_n & A_{n+1} - 2 \times A_n \end{bmatrix}$ ，我們有

$$M^2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + 1 & -7 \times 1 \\ \frac{1}{3} \times 1 & \frac{2}{3} - 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -7 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} & -7 \times \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - 2 \times \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{14}{3} \\ \frac{2}{9} & -1 \end{bmatrix},$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} + \frac{1}{3} & -7 \times \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} & \frac{1}{9} - 2 \times \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{7}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{5}{9} \end{bmatrix}, \quad M^5 = \begin{bmatrix} 0 + \frac{1}{9} & -7 \times \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} & 0 - 2 \times \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{1}{27} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix},$$

$M^6 = A_7 I = -\frac{1}{27} I$ ，且 $M^{6k+i} = \left(-\frac{1}{27}\right)^k M^i$ ，其中 k 為正整數且 $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 。

例 5：求各行和是 1 之矩陣 $M = \begin{bmatrix} a & 1-d \\ 1-a & d \end{bmatrix}$ 的冪次方 M^n 。

說明：

矩陣 M 的特徵多項式為 $f(x) = x^2 - (a+d)x + (a+d-1)$ ，特徵值為 1 與 $a+d-1$ 。

(1) 當 $a+d=2$ 時， $A_n = n$ ，根據冪次方公式

$$M^n = \begin{bmatrix} A_{n+1} - dA_n & (1-d)A_n \\ (1-a)A_n & A_{n+1} - aA_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n+1) - nd & (1-d)n \\ (1-a)n & (n+1) - na \end{bmatrix}。$$

(2) 當 $a+d \neq 2$ 時， $A_n = \frac{1-(a+d-1)^n}{2-(a+d)}$ ，根據冪次方公式

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{bmatrix} A_{n+1} - dA_n & (1-d)A_n \\ (1-a)A_n & A_{n+1} - aA_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2-(a+d)} \begin{bmatrix} (1-d) + (1-a)(a+d-1)^n & (1-d)(1-(a+d-1)^n) \\ (1-a)(1-(a+d-1)^n) & (1-a) + (1-d)(a+d-1)^n \end{bmatrix}。 \end{aligned}$$

特別是，當 $M = \begin{bmatrix} a & 1-d \\ 1-a & d \end{bmatrix}$ 為轉移矩陣且 $|a+d-1| < 1$ 時⁸，此時 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a+d-1)^n = 0$ ，

得 $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \frac{1}{2-(a+d)} \begin{bmatrix} 1-d & 1-d \\ 1-a & 1-a \end{bmatrix}$ ，所以不論初始狀態為何，皆可得穩定狀態為

$$\begin{bmatrix} \frac{1-d}{2-(a+d)} \\ \frac{1-a}{2-(a+d)} \end{bmatrix}。^9$$

三、結語

有了前述冪次方公式，我們已可以處理二階方陣冪次方問題：

1. 特殊矩陣（例如對角矩陣、三角矩陣、旋轉矩陣等）的冪次方可直接寫出。
2. 行列式值為 0 的矩陣，如前所述：

設 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $\det(M) = 0$ ，則 $M^n = (a+d)^{n-1} M$ 。

⁸ 轉移矩陣之各行和是 1，且各元為非負實數。轉移矩陣所導致之馬可夫鏈的穩定狀態判別，請參閱參考資料[4]。

⁹ 穩定狀態方程式 $\begin{bmatrix} a & 1-d \\ 1-a & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的解就是 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-d}{2-(a+d)} \\ \frac{1-a}{2-(a+d)} \end{bmatrix}$ 。

3. 當矩陣 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式值不為 0 時，寫出矩陣的特徵方程式，並且求出特徵值 α ，

β ，然後套用冪次方公式 $M^n = \begin{bmatrix} A_{n+1} - dA_n & bA_n \\ cA_n & A_{n+1} - aA_n \end{bmatrix}$ ，其中

(1) 若 $\alpha = \beta$ ，則 $A_n = n\alpha^{n-1}$ 。

(2) 若 $\alpha \neq \beta$ ，則 $A_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ 。

再則，當 α, β 為共軛虛根，且 θ 為 α 或 β 的主幅角，則 $A_n = \frac{|\alpha|^{n-1} \sin n\theta}{\sin \theta}$ 。

本文以中學生的基礎觀點，來描述二階方陣的冪次方計算。至於三階方陣的冪次方計算，讀者請參閱參考資料[1]與[2]；一般的 Cayley-Hamilton 定理說明，請參閱參考資料[3]。至此，中學生對於方陣的冪次方就有了初步的了解。

筆者納悶：中學生既然學了矩陣，卻不知矩陣的特徵方程式為何？¹⁰ 是非常奇怪的事情！

殊不知：對二階方陣 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 而言，其特徵方程式就是二次方程式

$x^2 - (a+d)x + \det(M) = 0$ ，而 Cayley-Hamilton 定理指出方陣本身滿足其特徵方程式，即

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{此外，特徵方程式}$$

$x^2 - (a+d)x + \det(M) = 0$ 的根（即方陣的特徵值）是冪次方公式中最重要的角色。我們希望：藉由本文的介紹，大家對於二階方陣的冪次方公式之於一般方陣，就如一元二次方程式公式之於一般方程式一樣熟悉。

四、參考資料

[1]曾憲錠：和高中生談方陣的冪次方(上)，龍騰數學新天地第 7 期 p.20~p.24，2003 年 12 月。

[2]曾憲錠：和高中生談方陣的冪次方(下)，龍騰數學新天地第 8 期 p.33~p.35，2004 年 6 月。

[3]楊宗穎、陳名秀：如何跟高中生談 Cayley-Hamilton Theorem，高中數學學科中心電子報第 118 期，2017 年 1 月。

[4]林倉億：「轉移矩陣」二三事（3）馬可夫鏈穩定狀態的判別，HPM 通訊第 17 卷第 8 期，2014 年 8 月。

[5]高中數學教材：第四冊第三章矩陣。

¹⁰ 文中尋找可逆矩陣 P 的過程，原為尋找特徵向量，但本文對特徵向量並未多加著墨。

(1) 當 $\alpha \neq \beta$ 時， $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \times x \\ \alpha \times y \end{bmatrix}$ ，僅取 $x = b$ ，並解 $ab + by = \alpha b$ ，得 $y = \alpha - a$ 。

(2) 當 $\alpha = \beta = \frac{a+d}{2}$ 時， $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \times x \\ \alpha \times y \end{bmatrix}$ ，僅取 $x = b$ ，並取 $y = \frac{a+d}{2} - a$ 。

專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系



遊戲 149

☆

咳嗽是利用氣管收縮所產生的壓力差，加速氣體流動，進而將氣管中的氣體或異物排出體外。假設原來氣管的半徑為 1 單位，當氣管收縮後的半徑為 x 單位時，氣體流動的速度 $v(x)$ 可用函數

$$v(x) = c(1-x)x^4$$

來表示，其中 c 是一個固定的常數。

問：當氣管收縮後的半徑 x 為多少時，氣體流動的速度會最快。

〔玩鎖·玩索〕

在中學階段，有關極值問題，常用的處理方法有將二次函數配方求極值，利用算幾不等式求極值，使用柯西不等式求極值，利用導函數求極值等四種方法。但是有些題目既可以使用算幾不等式求極值，也可以使用導函數求極值。這裡的咳嗽問題就是這樣的一道問題。



遊戲 150

☆

《算法統宗》有一道數學題目是這樣說的：

有個學生心性巧，一部孟子三日了；每日增添整一倍，問君每日讀多少。

已知《孟子》共 34685 個字，求該學生第一日讀幾個字。

〔玩鎖·玩索〕

「每日增添整一倍」就是說「隔日讀今日的兩倍」，用數學的語言來說，每日所讀的字數呈公比為 2 的等比數列。



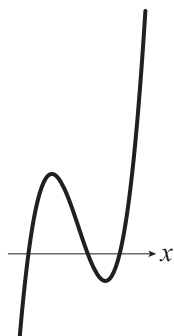
遊戲 151

☆☆☆

當 $0 < c < \frac{3}{2}$ 時，三次多項方程式

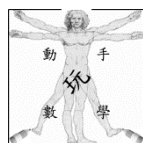
$$x^3 - 3cx + c^3 = 0$$

都會有三個相異實數根。



〔玩鎖·玩索〕

利用多項式的勘根定理勘勘看吧！這問題在 $0 < c < \sqrt[3]{4}$ 條件下，也是有三個實數根，有興趣的同學不妨挑戰看看。



遊戲 152

☆☆

下表是 A ， B ， C 三樣禮物的價錢：

A	B	C
988	1001	1045

如果購買此三種禮物15份，共計花費15214元，可以知道每一種各買幾份嗎？（每種禮物都是整數元）。

〔玩鎖·玩索〕

在求解跟整數有關的問題時，注意因數與倍數的關係是相當重要的一件事。例如，988，1001，1045三數中，後兩數是11的倍數，前兩數是13的倍數，前後兩數是19的倍數。這些倍數關係，你觀察到了嗎？

動手玩數學~破解祕笈

第37期

遊戲 145

設長方體的長、寬與高分別為 a ， b 與 c ，此時

$$\overline{OA} = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad \overline{OB} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$\overline{OC} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

又 α 是邊長為

$$\overline{OA} = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad \overline{OB} = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad \overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

的三角形中， $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$ 所對的內角。同理， β 是邊長為

$$\overline{OB} = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad \overline{OC} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \overline{BC} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

的三角形中， $\overline{BC} = \sqrt{b^2 + c^2}$ 所對的內角， γ 是邊長為

$$\overline{OC} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \overline{OA} = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad \overline{AC} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

的三角形中， $\overline{AC} = \sqrt{a^2 + c^2}$ 所對的內角。即

α ， β ， γ 是邊長為

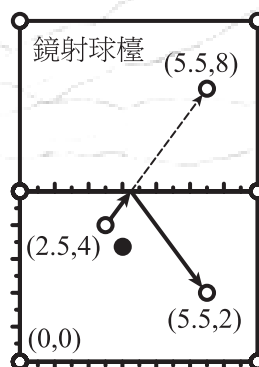
$$\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sqrt{b^2 + c^2}, \quad \sqrt{a^2 + c^2}$$

的三角形中，三邊所對應的內角，故

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

遊戲 146

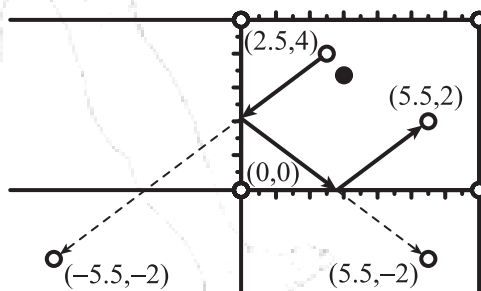
- (1) 如果將球檯的左下袋口定坐標為 $(0,0)$ ，右下袋口定坐標為 $(7,0)$ ，那麼兩顆白球的坐標分別為 $(2.5,4)$ 與 $(5.5,2)$ ，鏡射之後的白球坐標為 $(5.5,8)$ 。



利用坐標平面上兩點的距離公式，得欲求的路徑長度為

$$\sqrt{(5.5-2.5)^2 + (8-4)^2} = 5 \text{ (單位)}.$$

- (2) 同樣，利用入射角等於反射角的鏡射原理，將折線拉直，如下圖所示（想成將球檯往下及左作對稱）



如果將球檯的左下袋口定坐標為 $(0,0)$ ，右下袋口定坐標為 $(7,0)$ ，那麼兩顆白球的坐標分別為 $(2.5,4)$ 與 $(5.5,2)$ ，鏡射之後的白球坐標為 $(-5.5,-2)$ 。利用坐標平面上兩點的距離公式，得欲求的路徑長度為

$$\sqrt{(-5.5-2.5)^2 + (-2-4)^2} = 10 \text{ (單位)}.$$

遊戲 147

因為等差中項為 $\frac{1}{21}$ ，所以

$$\begin{aligned}\frac{2}{21} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow 2ab - 21a - 21b = 0 \\ &\Rightarrow a(2b - 21) - 21b = 0 \\ &\Rightarrow a(2b - 21) - \frac{21}{2}(2b - 21) = \frac{441}{2} \\ &\Rightarrow \left(a - \frac{21}{2}\right)(2b - 21) = \frac{441}{2} \\ &\Rightarrow (2a - 21)(2b - 21) = 3^2 \cdot 7^2.\end{aligned}$$

由最後的因數分解得到

$2a - 21$	1	3	7	9
$2b - 21$	441	147	63	49

a	11	12	14	15
b	231	84	42	35

所以數對 (a, b) 有四組為

$$(a, b) = (11, 231), (12, 84), (14, 42), (15, 35).$$

遊戲 148

方程式 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k$ 的非負整數解與 $(n-1) \times k$ 棋盤式街道的捷徑走法有一一對應的關係。又這棋盤式街道的捷徑走法有

$$C_k^{(n-1)+k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

種。因此，方程式 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k$ 的非負整數解有

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

組。