

龍騰數亦優

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

第34刊



贈品禁止轉售

#4



55201N/D/0000000

 龍騰文化

編輯室墨記

外積與右手法則之間有何關聯呢？我們來看看沈源培老師的〈外積與右手法則〉怎麼說。

學生在高二學習三角函數的半角公式，高三學習棣美弗定理，但是在高一上學期，卻會被要求去解複數的平方根，看看李維昌老師的〈拼湊複數平方根的公式及其應用〉如何利用 $i^2 = -1$ 的單一概念去拼湊出複數平方根的公式，向高一學生介紹複數平方根的公式。

拜電腦繪圖軟體日漸普及之賜，許多複雜的函數圖形都可輕易繪出，就讓葉善雲老師的〈指數函數與對數函數的相交情形〉來為您探討指、對數函數的相交情形吧。

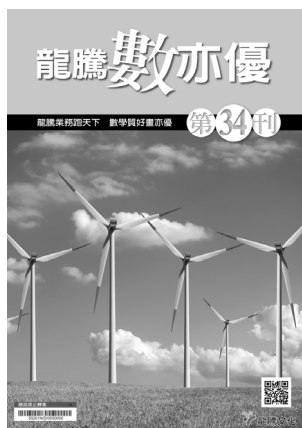
熱騰騰的〈105學年度臺北市普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽數學科試題〉出爐囉！快來看看這次到底考了些什麼題目吧。

「華羅庚金盃國際少年數學精英邀請賽」明年即將在臺舉行，我們先來複習一下今年的考題吧，〈第六屆兩岸四地華羅庚金盃少年數學菁英邀請賽〉為您揭曉今年到底考了什麼試題。

數學是現代人的專利嗎？我們來看看公元855年唐朝考官的加賽題到底是否過時了？翻開動手玩數學，跟著許教授一起來解密吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的内容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 lien_chang@lungteng.com.tw。



發行人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總編輯：陳韻嵐
執行編輯：潘善興
美術編輯：林佳瑩

發行所：龍騰文化事業股份有限公司
地址：248新北市五股區五工六路30號
電話：(02) 2299-9063
傳真：(02) 2298-9755
創刊日：2006/11/30
出刊日：2017/11/14
網址：<http://www.lungteng.com.tw>

龍騰數亦優

2017. 11 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

沈源培 北一女中退休教師

3

》》 外積與右手法則

李維昌 宜蘭高中退休教師

7

》》 拼湊複數平方根的公式及其應用

葉善雲 臺北市東山高中

12

》》 指數函數與對數函數的相交情形

許志農 臺灣師大數學系

20

》》 105 學年度臺北市普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽數學科試題

許志農 臺灣師大數學系

28

》》 第六屆華羅庚金盃國際少年數學精英邀請賽

許志農 臺灣師大數學系

42

》》 動手玩數學專欄

》》 動手玩數學《第 33 期》破解祕笈

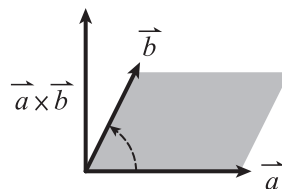
外積與右手法則

沈源培／北一女中退休教師

當介紹「外積」的概念時，我們定義 $\vec{a} \times \vec{b}$ 為滿足條件：

- (1) 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 均垂直。
- (2) 長度與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積等值。
- (3) 方向與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合右手法則的向量，以坐標表示，

若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，則 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 a_3 - a_3 a_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ b_2 a_1 - a_1 b_2 \end{pmatrix}$ 。

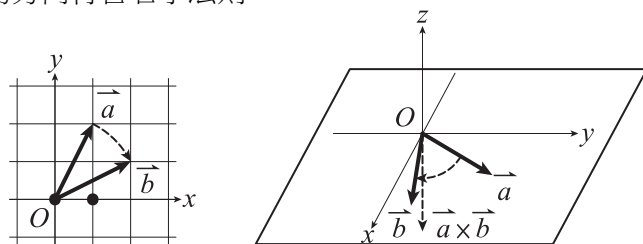


對於以 $\begin{pmatrix} a_2 a_3 - a_3 a_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ b_2 a_1 - a_1 b_2 \end{pmatrix}$ 表示的向量，不難檢驗它滿足 $\vec{a} \times \vec{b}$ 定義的(1)、(2)項條件，但它是否滿足(3)項條件倒是同學提出的質疑，為此嘗試以雖欠嚴謹卻較易理解的論述供同學參考。

首先考察 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 均落在同一坐標平面上的例子：

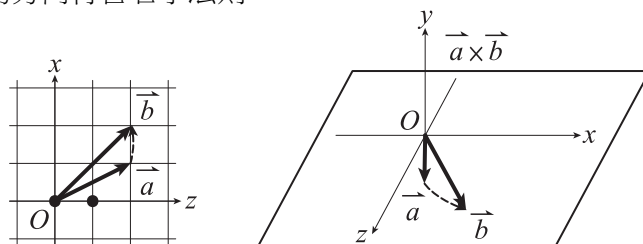
例 1》 已知 xy 平面上的向量 $\vec{a} = (1, 2, 0)$ ， $\vec{b} = (2, 1, 0)$ ，則 $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, -3)$ 。

考量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夾角由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向，如圖所示，呈順時針方向旋轉（與由 x 軸正向旋轉至 y 軸正向的轉向相同），而 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向為 z 軸負向，知： $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合右手法則。



例 2》 已知 zx 平面上的兩向量 $\vec{a} = (1, 0, 2)$ ， $\vec{b} = (2, 0, 2)$ ，則 $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 2, 0)$ 。

考量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夾角由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向，如圖所示，呈逆時針方向旋轉（與由 z 軸正向旋轉至 x 軸正向的轉向相同），而 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向為 y 軸正向，知： $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合右手法則。



其實上述的釋例並非特例，由底下的命題即可得知其邏輯的必然性：

「 xy 平面上，由 $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$ 的方向旋轉至 $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$ 的方向為逆時針旋轉（與由 x 軸正向旋轉至 y 軸正向的轉向相同）的充要條件為 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$ 。」

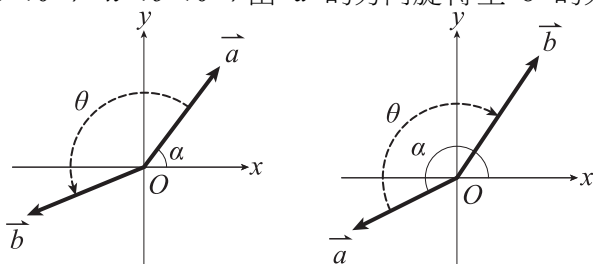
證明 設 $\vec{a} = |\vec{a}|(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ （ α 為 $\vec{a}$ 與 x 軸正向的夾角），而 θ 為以 $\vec{a}$ 為始邊， $\vec{b}$

為終邊的有向角（ $0 < \theta < \pi$ 或 $-\pi < \theta < 0$ ），則 $\vec{b} = |\vec{b}|(\cos(\alpha + \theta), \sin(\alpha + \theta), 0)$ ，

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = |\vec{a}| |\vec{b}| (\cos\alpha \cdot \sin(\alpha + \theta) - \sin\alpha \cdot \cos(\alpha + \theta)) = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta。$$

(1) $\Delta > 0 \Rightarrow \sin\theta > 0 \Rightarrow 0 < \theta < \pi \Rightarrow$ 由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向為逆時針旋轉。

(2) $\Delta < 0 \Rightarrow \sin\theta < 0 \Rightarrow -\pi < \theta < 0 \Rightarrow$ 由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向為順時針旋轉。



由上述命題進而推論： xy 平面上， $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$ ，若由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向為逆時針旋轉，則 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$ ， $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$ 的方向為 z 軸正向；

若由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向為順時針旋轉，則 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} < 0$ ， $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$

的方向為 z 軸負向，知：若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為 xy 平面上的向量，則 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合右手法則。

同理可證：

「 zx 平面上，由 $\vec{a} = (a_1, 0, a_3)$ 的方向旋轉至 $\vec{b} = (b_1, 0, b_3)$ 的方向為逆時針旋轉（與由 z 軸正向旋轉至 x 軸正向的方向相同）的充要條件為 $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} > 0$ 」，

「 yz 平面上，由 $\vec{a} = (0, a_2, a_3)$ 的方向旋轉至 $\vec{b} = (0, b_2, b_3)$ 的方向為逆時針旋轉（與由 y 軸正向旋轉至 z 軸正向的方向相同）的充要條件為 $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} > 0$ 」。

更進一步得到以下的結論：

「若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為 zx 平面上的向量，則 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合右手法則」，

「若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為 yz 平面上的向量，則 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合右手法則」。

例 3 已知 $\vec{a} = (1, 2, 2)$ ， $\vec{b} = (2, 1, 1)$ ，則 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (0, 3, -3)$ 。

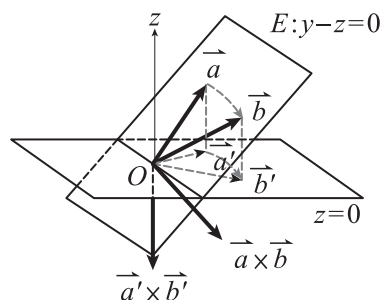
考量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 於 xy 平面上的正射影 $\vec{a}' = (1, 2, 0)$ 、 $\vec{b}' = (2, 1, 0)$ ，則 $\vec{a}' \times \vec{b}' = (0, 0, -3)$ ，

而由 $\vec{a}'$ 的方向旋轉至 $\vec{b}'$ 的方向為順時針旋轉。

(1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a}' \times \vec{b}') > 0$ ，知： $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}' \times \vec{b}'$ 的夾角為銳角，而 $\vec{a}' \times \vec{b}'$ 的方向指向 z 軸負向。

註：其實 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}' \times \vec{b}'$ 的夾角為平面 $E: y-z=0$

($\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 所在平面) 與 $z=0$ 平面的(銳角)交角。



(2) 平面 E 上，由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向與 xy 平

面上，由 $\vec{a}'$ 的方向旋轉至 $\vec{b}'$ 的方向之旋轉方向一致。

由(1)、(2)確認由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向之旋轉方向及 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向，如圖所示，知： $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合右手法則。

我們循例 3 的思路論述 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合右手法則的理由：

設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 為空間中不同向不反向的向量，即 $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 或 $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$

或 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ；以下可假定 $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$ ，至於 $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ 或 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 的情形同理可證。

考量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 於 xy 平面的正射影 $\vec{a}' = (a_1, a_2, 0)$ ， $\vec{b}' = (b_1, b_2, 0)$ ，則 $\vec{a}' \times \vec{b}' = (0, 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$ 。

若由 $\vec{a}'$ 的方向旋轉至 $\vec{b}'$ 的方向為逆時針旋轉，則 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$ ， $\vec{a} \times \vec{b}$ 指向 z 軸正向；

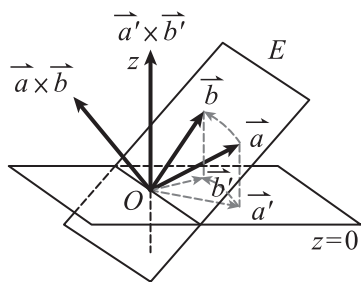
若由 $\vec{a}'$ 的方向旋轉至 $\vec{b}'$ 的方向為順時針旋轉，則 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} < 0$ ， $\vec{a} \times \vec{b}$ 指向 z 軸負向。

(1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a}' \times \vec{b}') = \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)^2 > 0$ ，知： $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}' \times \vec{b}'$ 的夾角為銳角。

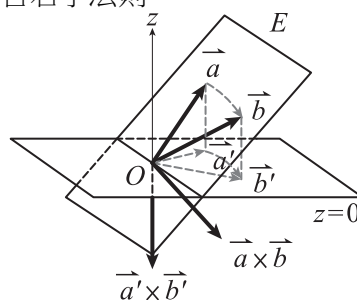
註：其實 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}' \times \vec{b}'$ 的夾角為平面 $E: \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} z = 0$ ($\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 所在平面) 與 $z=0$ 平面的(銳角)交角。

(2) 平面 E 上，由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向與 xy 平面上，由 $\vec{a}'$ 的方向旋轉至 $\vec{b}'$ 的方向之旋轉方向一致。

由(1)、(2)確認「由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向之旋轉方向」與「 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向」的關連，如圖(1)、(2)所示，知： $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合右手法則。

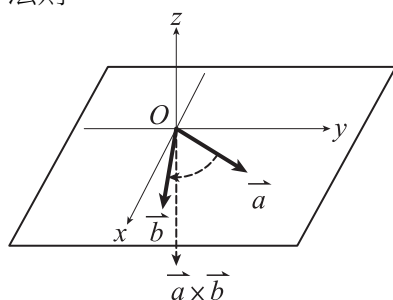


圖(1)

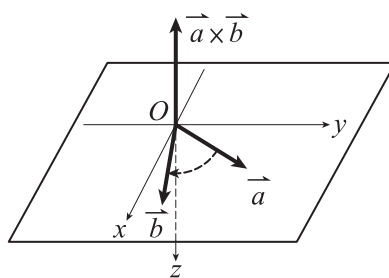


圖(2)

其實我們檢視上述論述即可查覺坐標系的 z 軸方向是論述的關鍵。若採用左手系空間坐標取代右手系空間坐標，則對於 xy 平面上的向量而言，「若由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向呈逆時針旋轉，則 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向為 z 軸正向；若由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向為順時針旋轉，則 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向為 z 軸負向。」的命題仍然成立，只不過左手系空間坐標的 z 軸正向與右手系空間坐標的 z 軸正向倒反，知：若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為 xy 平面上的向量，則 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合左手法則。

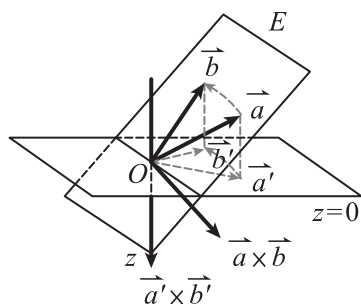


右手系空間坐標

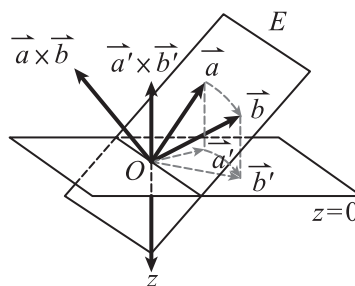


左手系空間坐標

又對於任意空間向量而言，命題(1)：「 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}' \times \vec{b}'$ 的夾角為銳角」及命題(2)：「由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向與由 $\vec{a}'$ 的方向旋轉至 $\vec{b}'$ 的方向之旋轉方向一致」仍然成立，但「由 $\vec{a}$ 的方向旋轉至 $\vec{b}$ 的方向之旋轉方向」與「 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向」的關係圖(1)、(2)將改為圖(3)、(4)，知： $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合左手法則。



圖(3)



圖(4)

換句話說，以坐標表示為 $(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$ 的 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向符合右手法則只不過是我們採用右手系空間坐標的必然結果罷了！

拼湊複數平方根的公式及其應用

李維昌／宜蘭高中退休教師

一、研究目的》

現行高中數學課程，分別在高二學習三角函數的半角公式，高三學習棣美弗定理，然而高一上學期，學生會被要求去解複數的平方根，因此引發我只利用 $i^2 = -1$ 的單一概念去拼湊出複數平方根的公式，好讓我向高一學生介紹複數平方根的公式。並且我應用得來的公式，去分解 $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$ 為兩個實係數二次多項式的乘積。

二、研究過程》

求解 $z^2 = a + bi$ ， a, b 皆為實數， $z = ?$

1. 公式解法一：

解：分成兩種情況來討論：

(1)當 $a \geq 0$ 時：

設 $t \geq 0$ 且 $t+b \geq 0$ 且 $t-b \geq 0$ ， t 用 a, b 來拼湊，

$$\begin{aligned} z^2 = a + bi &= 4\left(\sqrt{\frac{a^2}{16}}\right) + 2\left(\frac{t+b}{4} - \frac{t-b}{4}\right)i \\ &= 4\left(\sqrt{\frac{t^2-b^2}{16}}\right) + 2\left(\frac{t+b}{4} - \frac{t-b}{4}\right)i \\ &= \left[\left(\sqrt{\frac{t+b}{4}} + \sqrt{\frac{t-b}{4}}\right) + \left(\sqrt{\frac{t+b}{4}} - \sqrt{\frac{t-b}{4}}\right)i\right]^2 \\ \Rightarrow t^2 - b^2 &= a^2 \Rightarrow t = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

因此兩根為

$$z = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - b}{4}}\right) + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{4}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - b}{4}}\right)i \text{ 或 } -z。$$

(2)當 $a < 0$ 時：

設 $t \geq 0$ 且 $t+b \geq 0$ 且 $t-b \geq 0$ ， t 用 a, b 來拼湊，

$$\begin{aligned} z^2 = a + bi &= -4\left(\sqrt{\frac{a^2}{16}}\right) + 2\left(\frac{t+b}{4} - \frac{t-b}{4}\right)i \\ &= -4\left(\sqrt{\frac{t^2-b^2}{16}}\right) + 2\left(\frac{t+b}{4} - \frac{t-b}{4}\right)i \\ &= \left[\left(\sqrt{\frac{t+b}{4}} - \sqrt{\frac{t-b}{4}}\right) + \left(\sqrt{\frac{t+b}{4}} + \sqrt{\frac{t-b}{4}}\right)i\right]^2 \\ \Rightarrow t^2 - b^2 &= a^2 \Rightarrow t = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

因此兩根為

$$z = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{4}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{4}} \right) + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{4}} \right) i \text{ 或 } -z。$$

2. 公式解法二：

解：分成兩種情況來討論：

(1) 當 $b \geq 0$ 時：

設 $t \geq 0$ 且 $t+a \geq 0$ 且 $t-a \geq 0$ ， t 用 a 、 b 來拼湊，

$$\begin{aligned} z^2 = a + bi &= \frac{t+a}{2} - \frac{t-a}{2} + 2\sqrt{\frac{b^2}{4}}i \\ &= \frac{t+a}{2} - \frac{t-a}{2} + 2\sqrt{\frac{t^2-a^2}{4}}i \\ &= \left(\sqrt{\frac{t+a}{2}} + \sqrt{\frac{t-a}{2}} i \right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t^2 - a^2 = b^2 \Rightarrow t = \sqrt{a^2 + b^2}，$$

$$\text{因此兩根為 } z = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} i \text{ 或 } -z。$$

(2) 當 $b < 0$ 時：

設 $t \geq 0$ 且 $t+a \geq 0$ 且 $t-a \geq 0$ ， t 用 a 、 b 來拼湊，

$$\begin{aligned} z^2 = a + bi &= \frac{t+a}{2} - \frac{t-a}{2} - 2\sqrt{\frac{b^2}{4}}i \\ &= \frac{t+a}{2} - \frac{t-a}{2} - 2\sqrt{\frac{t^2-a^2}{4}}i \\ &= \left(\sqrt{\frac{t+a}{2}} - \sqrt{\frac{t-a}{2}} i \right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t^2 - a^2 = b^2 \Rightarrow t = \sqrt{a^2 + b^2}，$$

$$\text{因此兩根為 } z = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} i \text{ 或 } -z。$$

3. 結論： $z^2 = a + bi$ ， a 、 b 皆為實數，

(1) $a \geq 0$ ，兩根為

$$z = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{4}} \right) + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{4}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{4}} \right) i \text{ 或 } -z。$$

(2) $a < 0$ ，兩根為

$$z = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{4}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{4}} \right) + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{4}} \right) i \text{ 或 } -z。$$

(3) $b \geq 0$ ，兩根為

$$z = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \right) + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right) i \text{ 或 } -z。$$

(4) $b < 0$ ，兩根為

$$z = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \right) - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right) i \text{ 或 } -z。$$

範例 1：求解 $z^2 = 7 - 24i$ ， $z = ?$

解：利用結論(1)所得公式可得兩根

$$\begin{aligned} z &= \left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + (-24)^2} + (-24)}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + (-24)^2} - (-24)}{4}} \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + (-24)^2} + (-24)}{4}} - \sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + (-24)^2} - (-24)}{4}} \right) i \\ &= \left(\sqrt{\frac{25 + (-24)}{4}} + \sqrt{\frac{25 - (-24)}{4}} \right) + \left(\sqrt{\frac{25 + (-24)}{4}} - \sqrt{\frac{25 - (-24)}{4}} \right) i \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2} \right) i = 4 - 3i， \end{aligned}$$

$$-z = -4 + 3i，$$

因此所求兩根為 $4 - 3i$ 與 $-4 + 3i$ 。

利用結論(4)所得公式可得兩根

$$z = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + (-24)^2} + 7}{2}} \right) - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + (-24)^2} - 7}{2}} \right) i = \left(\sqrt{\frac{25 + 7}{2}} \right) - \left(\sqrt{\frac{25 - 7}{2}} \right) i = 4 - 3i，$$

$$-z = -4 + 3i，$$

因此所求兩根為 $4 - 3i$ 與 $-4 + 3i$ 。

範例 2：求解 $z^2 = 7 + 24i$ ， $z = ?$

解：利用結論(1)所得公式可得兩根

$$\begin{aligned} z &= \left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 24^2} + 24}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 24^2} - 24}{4}} \right) + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 24^2} + 24}{4}} - \sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 24^2} - 24}{4}} \right) i \\ &= \left(\sqrt{\frac{25 + 24}{4}} + \sqrt{\frac{25 - 24}{4}} \right) + \left(\sqrt{\frac{25 + 24}{4}} - \sqrt{\frac{25 - 24}{4}} \right) i = \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2} \right) i = 4 + 3i， \end{aligned}$$

$$-z = -4 - 3i，$$

因此所求兩根為 $4 + 3i$ 與 $-4 - 3i$ 。

利用結論(3)所得公式可得兩根

$$z = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 24^2} + 7}{2}} \right) + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 24^2} - 7}{2}} \right) i = \left(\sqrt{\frac{25 + 7}{2}} \right) + \left(\sqrt{\frac{25 - 7}{2}} \right) i = 4 + 3i，$$

$$-z = -4 - 3i，$$

因此所求兩根為 $4 + 3i$ 與 $-4 - 3i$ 。

範例 3：求解 $z^2 = -7 - 24i$ ， $z = ?$

解：利用結論(2)所得公式可得兩根

$$\begin{aligned} z &= \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} + (-24)}{4}} - \sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} - (-24)}{4}} \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} + (-24)}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} - (-24)}{4}} \right) i \\ &= \left(\sqrt{\frac{25 + (-24)}{4}} - \sqrt{\frac{25 - (-24)}{4}} \right) + \left(\sqrt{\frac{25 + (-24)}{4}} + \sqrt{\frac{25 - (-24)}{4}} \right) i \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2} \right) i = -3 + 4i, \end{aligned}$$

$$-z = 3 - 4i,$$

因此所求兩根為 $-3 + 4i$ 與 $3 - 4i$ 。

利用結論(4)所得公式可得兩根

$$\begin{aligned} z &= \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} + (-7)}{2}} \right) - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} - (-7)}{2}} \right) i \\ &= \left(\sqrt{\frac{25 - 7}{2}} \right) - \left(\sqrt{\frac{25 + 7}{2}} \right) i = 3 - 4i, \end{aligned}$$

$$-z = -3 + 4i,$$

因此所求兩根為 $3 - 4i$ 與 $-3 + 4i$ 。

範例 4：求解 $z^2 = -7 + 24i$ ， $z = ?$

解：利用結論(2)所得公式可得兩根

$$\begin{aligned} z &= \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + 24^2} + 24}{4}} - \sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + 24^2} - 24}{4}} \right) + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + 24^2} + 24}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + 24^2} - 24}{4}} \right) i \\ &= \left(\sqrt{\frac{25 + 24}{4}} - \sqrt{\frac{25 - 24}{4}} \right) + \left(\sqrt{\frac{25 + 24}{4}} + \sqrt{\frac{25 - 24}{4}} \right) i \\ &= \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2} \right) i = 3 + 4i, \end{aligned}$$

$$-z = -3 - 4i,$$

因此所求兩根為 $3 + 4i$ 與 $-3 - 4i$ 。

利用結論(3)所得公式可得兩根

$$\begin{aligned} z &= \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + 24^2} + (-7)}{2}} \right) + \sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + 24^2} - (-7)}{2}} i \\ &= \left(\sqrt{\frac{25 - 7}{2}} \right) + \left(\sqrt{\frac{25 + 7}{2}} \right) i = 3 + 4i, \end{aligned}$$

$$-z = -3 - 4i,$$

因此所求兩根為 $3 + 4i$ 與 $-3 - 4i$ 。

在介紹範例 5 之前，先提下列一段典故：

「數學家白努利曾舉一個精確的例子說『四次多項式 $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$ 不可能分解成兩個實係數二次多項式的乘積』，但是代數大師尤拉在公元 1724 年時，將白努利所舉的四次多項式 $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$ 分解為二次多項式 $x^2 - (2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}})x + (1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{7})$ 與另一個二次多項式 $x^2 - (2 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}})x + (1 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{7})$ 的乘積」。

我們不知道代數大師尤拉是用哪一種方法去分解 $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$ 為兩個實係數二次多項式的乘積。所以在範例 5，我嘗試利用複數平方根的公式去找到一種分解的方法。

範例 5：試分解 $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$ 為兩個實係數二次多項式的乘積。

解： $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$

$$= (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + (-4x^2 + 8x - 4) + 7$$

$$= (x-1)^4 - 4(x-1)^2 + 7$$

$$= [(x-1)^2 - 2 - \sqrt{3}i] \cdot [(x-1)^2 - 2 + \sqrt{3}i]$$

$$= \left\{ \left[(x-1) - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{2}} i \right) \right] \cdot \left[(x-1) - \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{2}} i \right) \right] \right\} \cdot$$

$$\left\{ \left[(x-1) - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{2}} i \right) \right] \cdot \left[(x-1) - \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{2}} i \right) \right] \right\}$$

$$= \left\{ \left[x - \left(1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2} i \right) \right] \cdot \left[x - \left(1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2} i \right) \right] \right\} \cdot$$

$$\left\{ \left[x - \left(1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2} i \right) \right] \cdot \left[x - \left(1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2} i \right) \right] \right\}$$

$$= \left\{ \left[x - \left(1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2} i \right) \right] \cdot \left[x - \left(1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2} i \right) \right] \right\} \cdot$$

$$\left\{ \left[x - \left(1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2} i \right) \right] \cdot \left[x - \left(1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2} i \right) \right] \right\}$$

$$= [x^2 + (-2 - \sqrt{2\sqrt{7}+4})x + (1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2})^2] \cdot$$

$$[x^2 + (-2 + \sqrt{2\sqrt{7}+4})x + (1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2})^2]$$

$$= [x^2 + (-2 - \sqrt{2\sqrt{7}+4})x + (1 + \sqrt{2\sqrt{7}+4} + \sqrt{7})] \cdot$$

$$[x^2 + (-2 + \sqrt{2\sqrt{7}+4})x + (1 - \sqrt{2\sqrt{7}+4} + \sqrt{7})] \quad \circ$$

指數函數與對數函數的相交情形

葉善雲／臺北市東山高中

一、前言》

高中數學第一冊介紹指數函數 $y = a^x$ 與對數函數 $y = \log_a x$ ，其中底數 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，上述兩函數圖形有幾個交點呢？由於 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 對稱於直線 $y = x$ ，因此探討 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 相交情形與討論指數函數 $y = a^x$ 與直線 $y = x$ 相交情形密切相關。筆者在中學時期對此問題毫無印象，近年來，由於電腦繪圖軟體普遍，我們可以清楚看到此兩函數圖形相交的情形，高中數學教科書與教師手冊都略有描述¹，網路上也有一些文章或影片²。底下，筆者嘗試用「直觀」的方法探討此主題，希望中學生能對指數函數與對數函數圖形相交的情形更了解。

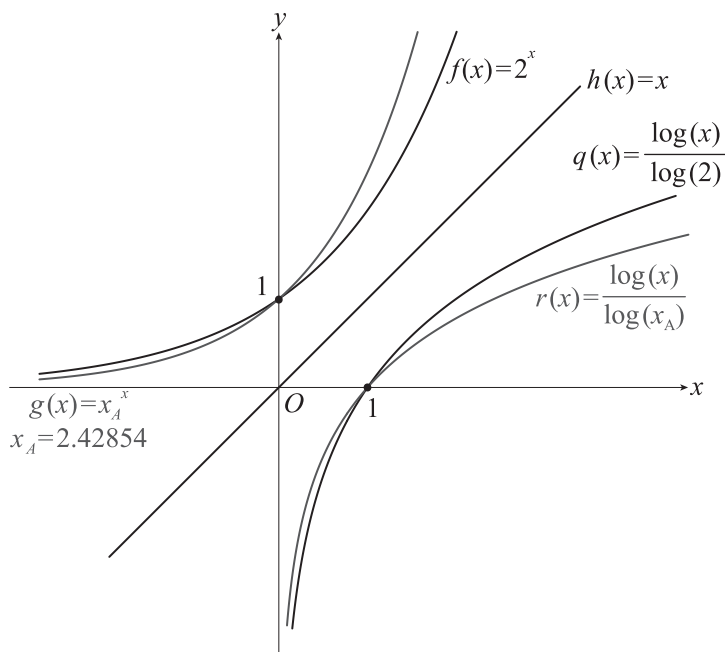
二、內文》

甲、底數大於 1 時的情形

首先，回顧高中教材的一些練習與結果。

1. 當底數 $a \geq 2$ 時：

- (1) 函數 $y = 2^x$ 圖形與直線 $y = x$ 不相交。
- (2) 函數 $y = 2^x$ 圖形與函數 $y = \log_2 x$ 圖形不相交。
- (3) 當 $a \geq 2$ 時，函數 $y = a^x$ 圖形與函數 $y = \log_a x$ 圖形不相交。



¹ 全華高中數學第一冊第 221 頁附錄四，龍騰高中數學第一冊教師手冊第 54~55 頁。

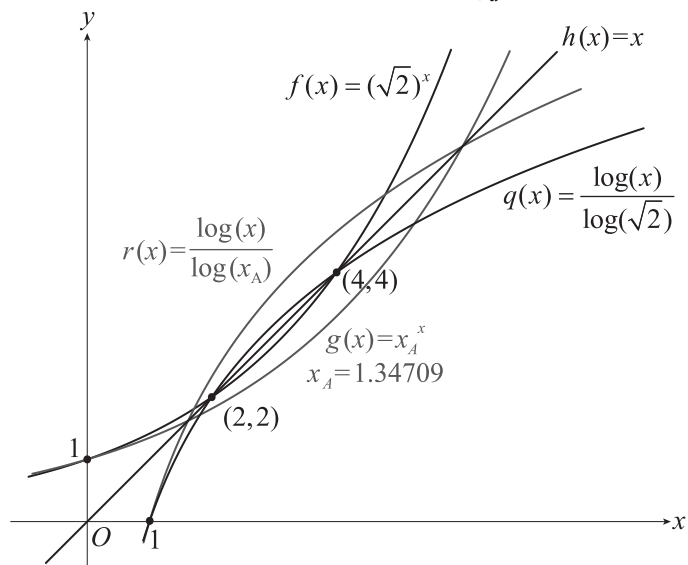
² 參考資料[1] 數學傳播第 112 期，參考資料[2] 竹南高中數學網頁，影片參考資料[6]。

2. 當底數 $1 < a \leq \sqrt{2}$ 時：

(1) 函數 $y = (\sqrt{2})^x$ 圖形與直線 $y = x$ 相交於 $(2,2)$ 與 $(4,4)$ 兩點。

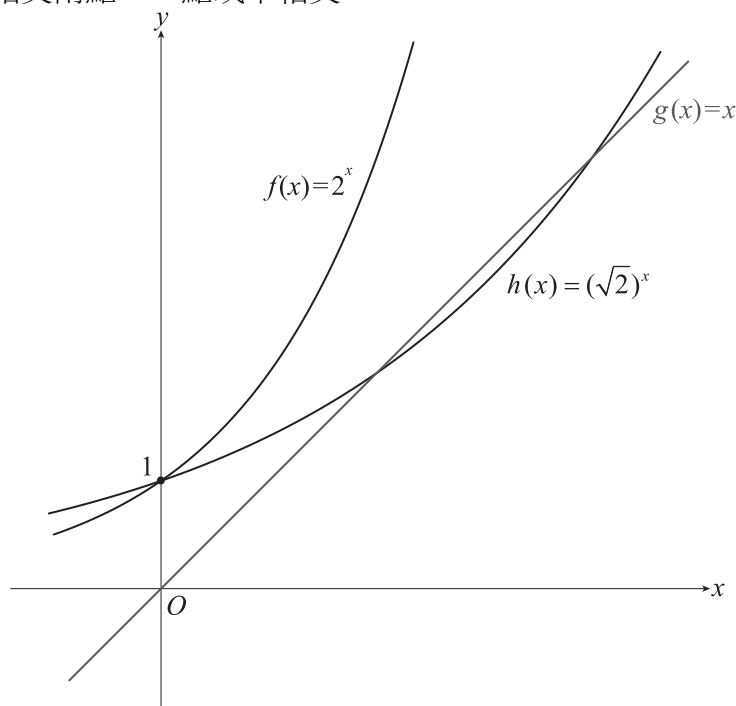
(2) 函數 $y = (\sqrt{2})^x$ 圖形與函數 $y = \log_{\sqrt{2}} x$ 圖形相交於 $(2,2)$ 與 $(4,4)$ 兩點。

(3) 當 $1 < a \leq \sqrt{2}$ 時，函數 $y = a^x$ 圖形與函數 $y = \log_a x$ 圖形相交兩點。



3. 當底數 $\sqrt{2} < a < 2$ 時：

當底數 a 在 $\sqrt{2}$ 與 2 之間變動時，函數 $y = a^x$ 圖形與直線 $y = x$ 交點個數在 $0 \sim 2$ 間變動，即可能相交兩點、一點或不相交。



定理一： 當底數 $a = e^{\frac{1}{e}}$ (約為 1.445) 時，函數 $y = a^x$ 與直線 $y = x$ 相切於點 (e, e) 。

說明：設切點為 (k, k) ，因函數 $f(x) = a^x$ 的導函數為 $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ ，且切線斜率為 1，得

$$\begin{cases} a^k \cdot \ln a = 1 \\ a^k = k \end{cases}, \text{此時} \begin{cases} k \cdot \ln a = 1 \\ k \cdot \ln a = \ln k \end{cases}, \text{得} \ln k = 1, \text{此時} k = e \text{ 且 } a = e^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{e}}.$$

所以當 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 時，函數 $y = a^x$ 與直線 $y = x$ 相切於點 (e, e) 。

推論：(1) 函數 $y = (e^{\frac{1}{e}})^x$ 圖形與直線 $y = x$ 相切於 (e, e) 。

(2) 函數 $y = (e^{\frac{1}{e}})^x$ 圖形與函數 $y = \log_{\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}} x$ 圖形相交於 (e, e) 。

結論：(1) 當底數 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 時，函數 $y = a^x$ 圖形與函數 $y = \log_a x$ 圖形不相交。

(2) 當 $a = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$ 時，函數 $y = a^x$ 圖形與函數 $y = \log_a x$ 圖形相交一點。

(3) 當 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ 時，函數 $y = a^x$ 圖形與函數 $y = \log_a x$ 圖形相交兩點。

乙、底數介於 0 與 1 時的情形

當底數 $0 < a < 1$ 時，顯然函數 $y = a^x$ 圖形與直線 $y = x$ 恰有一個交點，指數函數 $y = a^x$ 與對數函數 $y = \log_a x$ 圖形相交情形，無法只由函數 $y = a^x$ 圖形與直線 $y = x$ 相交情形得知。此時，我們考慮：直線 $y = x$ 為函數 $y = a^x$ 的法線（與函數在交點的切線 L 垂直）的情形。

定理二： 當底數 $a = e^{-e}$ （約為 0.066）時，直線 $y = x$ 為函數 $y = a^x$ 的法線，

且直線 $x + y = \frac{2}{e}$ 與函數 $y = a^x$ 相切於點 $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ 。

說明：設切點為 (k, k) ，因函數 $f(x) = a^x$ 的導函數為 $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ ，

且切線斜率為 -1 ，得

$$\begin{cases} a^k \cdot \ln a = -1 \\ a^k = k \end{cases}, \text{此時} \begin{cases} k \cdot \ln a = -1 \\ k \cdot \ln a = \ln k \end{cases}, \text{得} \ln k = -1, \text{此時} k = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

且 $a = e^{\frac{1}{k}} = e^{-e}$ ，切線為 $x + y = \frac{2}{e}$ 。

所以當 $a = e^{-e}$ 時，函數 $y = a^x$ 與直線 $x + y = \frac{2}{e}$ 相切於點 $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ 。

推論：(1) 函數 $y = (e^{-e})^x$ 圖形與直線 $x + y = \frac{2}{e}$ 相切於點 $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ ，

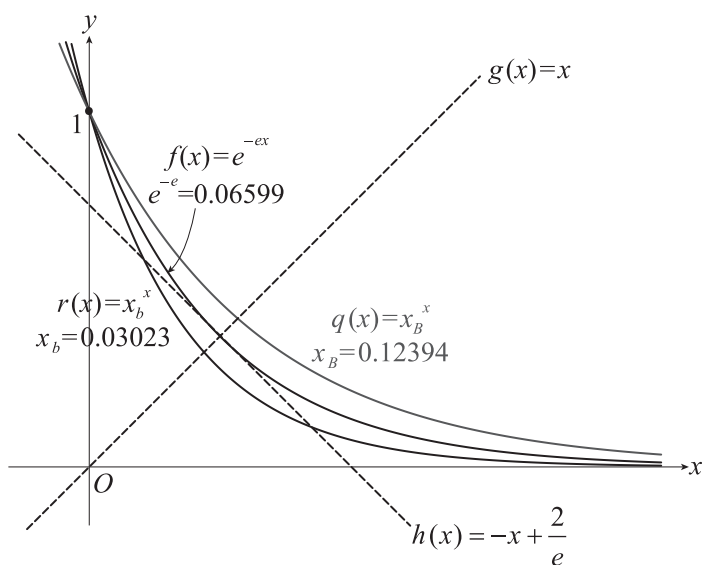
且與直線 $y=x$ 相交於點 $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ 。

(2) 當底數 $e^{-e} < a < 1$ 時，函數 $y = a^x$ 圖形與直線 $x + y = \frac{2}{e}$ 不相交，

但與直線 $y=x$ 相交於點 (s, s) ，其中 $s > \frac{1}{e}$ 。

(3) 當底數 $0 < a < e^{-e}$ 時，函數 $y = a^x$ 圖形與直線 $x + y = \frac{2}{e}$ 相交兩點，

且與直線 $y=x$ 相交於點 (s, s) ，其中 $s < \frac{1}{e}$ 。



由上面的討論可知，討論指數函數 $y = a^x$ 與對數函數 $y = \log_a x$ 圖形相交情形，當底數 $0 < a < 1$ 時，應一併考量函數 $y = a^x$ 圖形、直線 $y=x$ 與直線 $x + y = \frac{2}{e}$ 相交情形。底下，我們就底數的範圍分別討論：底數 $e^{-e} \leq a < 1$ ，此時函數 $y = a^x$ 圖形與直線 $y=x$ 及與直線 $x + y = \frac{2}{e}$ 總共只有一個交點；與底數 $0 < a < e^{-e}$ ，此時函數 $y = a^x$ 圖形與直線 $y=x$ 及與直線 $x + y = \frac{2}{e}$ 總共有三個交點。

初步結論：當底數 $e^{-e} \leq a < 1$ 時，

(1) 函數 $y = (e^{-e})^x$ 圖形與函數 $y = \log_{(e^{-e})} x$ 圖形只相交於 $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ 。

(2) 當底數 $e^{-e} < a < 1$ 時，函數 $y = a^x$ 圖形與函數 $y = \log_a x$ 圖形只相交一點 (s, s) ，

其中 $s > \frac{1}{e}$ 。

說明：設 $y = a^x$ 與 $y=x$ 的唯一交點為 (s, s) ，此時 $a^s = s < 1$ 且 $s \cdot \ln a = \ln s$ 。

令函數 $f(x) = a^x - \log_a x$ ，則

$$f(s) = 0 \text{ 且導函數 } f'(x) = a^x \cdot \ln a - \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{x \cdot a^x \cdot (\ln a)^2 - 1}{x \cdot \ln a},$$

今考慮分子部分 $g(x) = x \cdot a^x \cdot (\ln a)^2 - 1$ ，則 $g(s) = s^2 \cdot (\ln a)^2 - 1 = (\ln s)^2 - 1$ ，

且導函數 $g'(x) = (\ln a)^2 \cdot (a^x + x \cdot a^x \cdot \ln a) = (\ln a)^2 \cdot a^x \cdot (1 + x \cdot \ln a)$ 。

由於對稱性，探討函數 $y = a^x$ 圖形與函數 $y = \log_a x$ 圖形相交情形，

只需考慮「當 $0 < x < s$ 時」的情形即足夠。

當底數 $\underline{e^{-e} \leq a < 1}$ 時，此時 $\frac{1}{e} \leq s < 1$ ，若 $0 < x < s$ （即在 $y = x$ 左側的圖形），

則 $a^x > a^s = s$ 且 $x \cdot \ln a > \ln s \geq \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ ，得 $1 + x \cdot \ln a > 0$ 。

所以 $g'(x) > 0$ ，且 $g(x)$ 在範圍 $0 < x < s$ 為遞增，於是

當 $0 < x < s$ 時， $g(x) < g(s) = (\ln s)^2 - 1 \leq 0$ ，因為 $0 > \ln s \geq -1$ 且 $(\ln s)^2 \leq 1$ ，

且 $f'(x) > 0$ （分子與分母皆小於 0），此時 $f(x)$ 在範圍 $0 < x < s$ 為遞增，

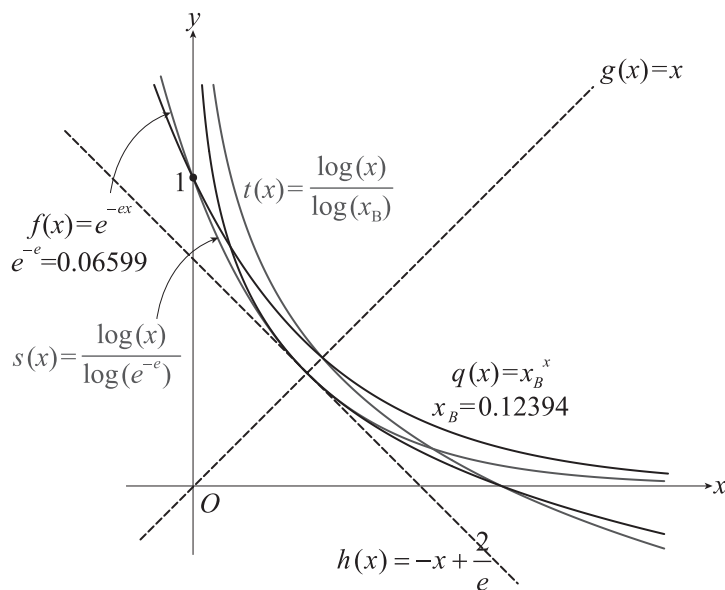
於是 $f(x) < f(s) = 0$ ，即當 $0 < x < s$ 時 $a^x < \log_a x$ ，也就是說，

在 $y = x$ 左側部分，函數 $y = \log_a x$ 圖形總是在函數 $y = a^x$ 圖形的上方，

自然地在 $y = x$ 左側部分 $y = a^x$ 圖形與 $y = \log_a x$ 圖形不相交，

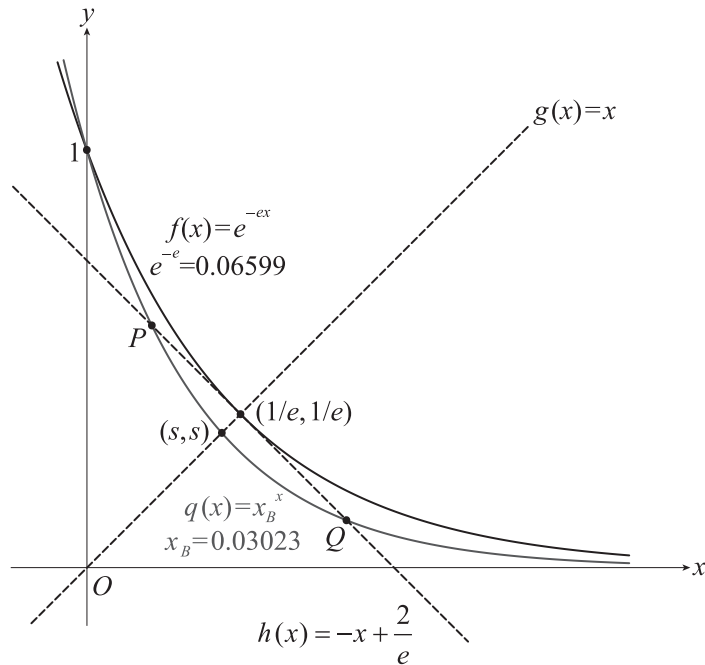
並由對稱性知在 $y = x$ 右側部分 $y = a^x$ 圖形與 $y = \log_a x$ 圖形也不相交。

所以當底數 $e^{-e} \leq a < 1$ 時， $y = a^x$ 圖形與 $y = \log_a x$ 圖形只相交一點。



另一方面，當底數 $0 < a < e^{-e} \approx 0.066$ 時，函數 $y = a^x$ 圖形與直線 $L: y = x$ 相交於點 (s, s) ，其中 $s < \frac{1}{e}$ ，且與直線 $x + y = \frac{2}{e}$ 相交於 P 、 Q 兩點，底下，我們要指出：

$d(P, L) < d(Q, L)$ ，即弦長 $\overline{PQ}$ 被直線 $L: y = x$ 截成左短右長兩段。



引理：已知底數 $0 < a < e^{-e}$ ，令函數 $f(x) = a^x - \log_a x$ ，設函數 $y = a^x$ 與直線 $y = x$ 相交於點 (s, s) ，則 $f'(s) < 0$ ，即 $f(x) = a^x - \log_a x$ 在 $x = s$ 附近為遞減函數。

（此時，在 $x = s$ 的左側附近 $a^x > \log_a x$ ，在 $x = s$ 的右側附近 $a^x < \log_a x$ ）

說明：因函數 $f(x) = a^x - \log_a x$ 的導函數為 $f'(x) = a^x \cdot \ln a - \frac{1}{x \cdot \ln a}$ ，

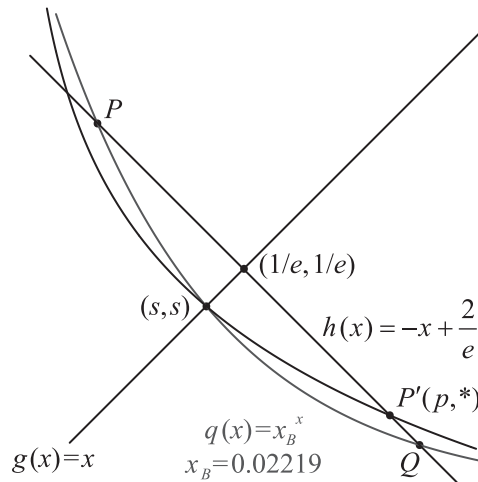
且由 $a^s = s$ 取對數 $s \cdot \ln a = \ln s$ ，

得 $f'(s) = a^s \cdot \ln a - \frac{1}{s \cdot \ln a} = s \cdot \ln a - \frac{1}{s \cdot \ln a} = \ln s - \frac{1}{\ln s}$ 。

再由 $s < \frac{1}{e}$ ，得 $\ln s < \ln \frac{1}{e} = -1 < 0$ 且 $\ln s \cdot \frac{-1}{\ln s} = -1 < -1 \cdot \frac{-1}{\ln s} = \frac{1}{\ln s}$ ，

所以 $f'(s) = \ln s - \frac{1}{\ln s} < 0$ ，知 $f(x) = a^x - \log_a x$ 在 $x = s$ 附近為遞減函數。

根據上述引理，當底數 $0 < a < e^{-e} \approx 0.066$ ，我們將函數 $y = a^x$ 圖形與直線 $y = x$ 、直線 $x + y = \frac{2}{e}$ 相交的局部圖形放大檢視如下：



說明： $y = a^x$ 與 $x + y = \frac{2}{e}$ 的左交點 P ，

右交點 Q ，在 $y = a^x$ 與 $y = x$ 交點 (s, s) 的右側附近，

$y = \log_a x$ 圖形在 $y = a^x$ 圖形的上方，

知左交點 P 關於 $y = x$ 的對稱點 $P'(p, *)$ 在右交點 Q 的左側。

定理三：當底數 $0 < a < e^{-e} \approx 0.066$ 時，函數 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 圖形相交三點。

說明：設 $y = a^x$ 與 $x + y = \frac{2}{e}$ 的左交點為 P ，右交點為 Q ，且左交點 P 關於直線 $y = x$ 的對稱點

$P'(p, *)$ ，則 $\frac{1}{e} < p < 1$ 且 $a^p < \log_a p$ 。

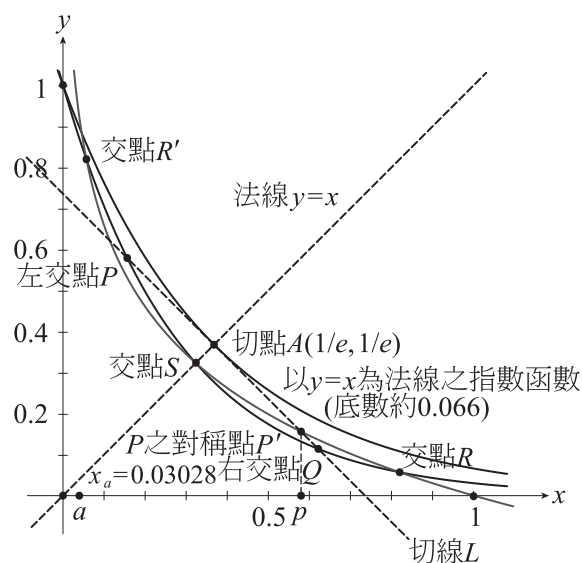
令函數 $f(x) = a^x - \log_a x$ ，則 $f(p) \cdot f(1) = (a^p - \log_a p) \cdot a < 0$ ，

由勘根定理知 $f(x) = a^x - \log_a x = 0$ 在區間 $(p, 1)$ 有實根 r 。

另外，上述實根 r 所對應的點 $R(r, a^r)$ 關於直線 $y = x$ 的對稱點 R' 也是函數 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 圖形的交點。

加上函數 $y = a^x$ 圖形與直線 $y = x$ 的交點 $S(s, s)$ ，

得 S, R, R' 為函數 $y = a^x$ 圖形與 $y = \log_a x$ 圖形的 3 個交點。



丙、總結

函數 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 圖形相交情形如下：

1. 當底數 $a > e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$ 時，函數 $y = a^x$ 與函數 $y = \log_a x$ 圖形不相交。
2. 當 $a = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$ 時，函數 $y = a^x$ 與函數 $y = \log_a x$ 圖形相交於點 (e, e) 。
3. 當 $1 < a < e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$ 時，函數 $y = a^x$ 與函數 $y = \log_a x$ 圖形相交兩點。
4. 當底數 $0.066 \approx e^{-e} < a < 1$ 時，函數 $y = a^x$ 與函數 $y = \log_a x$ 圖形相交一點。
5. 當 $a = e^{-e} \approx 0.066$ 時，函數 $y = a^x$ 與函數 $y = \log_a x$ 圖形相交於點 $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ 。
6. 當 $0 < a < e^{-e} \approx 0.066$ 時，函數 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 圖形相交三點。

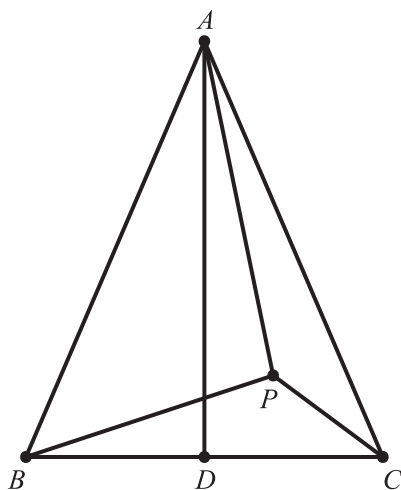
參考資料》

1. 李政豐、顏貽隆、蔡敏娟、陳明君，函數 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形交點個數的探索，數學傳播第 28 卷第 4 期，2004 年。
2. 吳明宗，指數函數與對數函數兩個反函數的交點問題，竹南高中數學科網站，2007 年。
3. 羅驥韓，指數與對數的交會情形，陽明高中數學科網站，2011 年。
4. 高中理科數學上冊，第四章其他初等函數，國立編譯館，1999 年 14 版。
5. GSP 繪圖軟體。
6. 莊佩錚，利用 Geogebra 展示相同底數之指數函數與對數函數圖形關係，YouTube 影片，2016 年。

105學年度臺北市 普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽 數學科試題

筆試一：計算證明題（考試時間：2 小時，滿分：49 分）

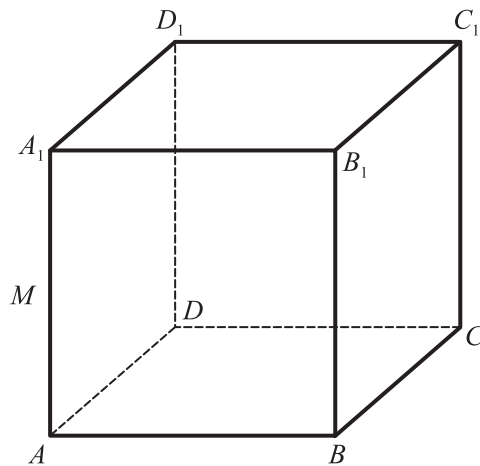
1. 設 a, b, c 為三相異正數，且滿足 $abc = 1000$ ， $ab + bc + ca = 1110$ 。
試證：若 $a < 1$ ，則 $10 < b < 100$ 且 $10 < c < 100$ 。（12 分）
2. 試求所有可能的實數 t 使得方程式 $5x^3 - 5(t+1)x^2 + (71t-1)x + 1 - 66t = 0$ 的三個根均為正整數。（12 分）
3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD}$ 是 $\triangle ABC$ 的中線，點 P 是 $\triangle ABC$ 的內部一點，
 $\angle ACP = 30^\circ$ ，且 $\angle PCB = 2\angle PBC$ 。試證： $\overline{AP}$ 是 $\angle CAD$ 的角平分線。



4. 在坐標平面上，已知有 20 個相異點 $P_1, P_2, \dots, P_{15}, Q_1, Q_2, \dots, Q_5$ ，它們同時滿足以下兩個條件：
(1) 任兩相異點 P_i, P_j 所連成的直線 P_iP_j 必通過另一點 P_k ，但都不通過任一點 Q_ℓ ；
(2) $Q_1, Q_2, \dots, Q_5$ 五點共圓，且任兩相異點 Q_i, Q_j 所連成的直線 Q_iQ_j 必通過某一點 P_k 。
試問從這 20 個點中任取兩點所連成的相異直線有多少條？（13 分）

筆試二：填充題（考試時間：1 小時，滿分：21 分）

- 試求 $\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8} - \sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}$ 之值為_____。
- 計算 $\sum_{k=1}^{2016} \frac{2^{-k} + 1}{2^{-2k} - 2^{-k+1} + 2^{k+1} - 1} =$ _____。
- 若數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_0 = \frac{1}{4}$ 且 $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}}$ ($n \geq 0$)，則 $a_{105} =$ _____。
- 將 $1, 2, 3, \dots, 12$ 這 12 個數分成三組，每一組至少兩個數，且同一組中任兩數的差都不能等於 1，則有_____種不同的分法。
- 如圖， $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 為邊長 1 的正立方體。若 M 為 $\overline{AA_1}$ 邊的中點，則點 A_1 到平面 MBD 的距離為_____。



6. 函數

$$f(x) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right] \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

的最大值為_____。

- 下圖中，第一列恰由 3 個 1 排成，而第 k 列 ($k = 2, 3, 4, \dots$) 恰由 $2k+1$ 個數排成，最左邊有 k 個 1，之後的每一個數是此數的前 k 個數之和。

			1	1	1					← 第 1 列
			1	1	2	3	5			← 第 2 列
		1	1	1	3	5	9	17		← 第 3 列
	1	1	1	1	4	7	13	25	49	← 第 4 列
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

例如：第 3 列中從左起第 6 個數為 $1+3+5=9$ 。依照這個規則，第 k 列中從左起第 i 個數（其中 $k+1 \leq i \leq 2k+1$ ）為_____。（以 k, i 的數學式表示）

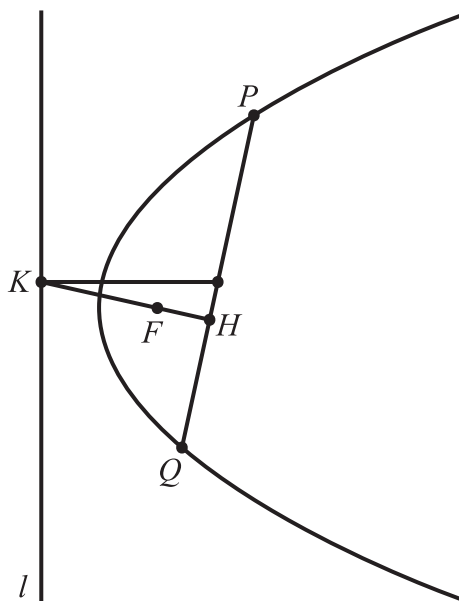
口試（考試時間：思考及作答時間 15 分鐘，答辯時間 15 分鐘）

1. 設函數 f 定義在實數集合上，且對任意的實數 x, y, z 恆有

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}。$$

試求所有可能的函數 $f(x)$ 。

2. 設 Γ 為一拋物線而 P 與 Q 為 Γ 上二相異點。過拋物線 Γ 的焦點 F 作一直線 FK 與 $\overline{PQ}$ 垂直，且與 Γ 的準線 l 交於點 K 。試證：過 K 而與準線 l 垂直的直線必通過 $\overline{PQ}$ 的中點。



答案與解析

筆試一：計算證明題

1. 依根與係數關係， a, b, c 是方程式

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - dx^2 + 1110x - 1000 = 0$$

的三個 0 根，其中 $d = a + b + c > 0$ 。

考慮多項式

$$g(x) = (x-1)(x-10)(x-100) = x^3 - 111x + 1110x - 1000。$$

因為 $a < 1$ ，所以 $g(a) < 0$ 。由 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之定義，可得 $g(x) - f(x) = (d-111)x^2$ 。

由於 $g(a) = g(a) - f(a) < 0$ ，所以 $d < 111$ ，因而對所有的實數 x ， $g(x) - f(x) < 0$ 。

因此， $g(b) = g(b) - f(b) < 0$ 且 $g(c) = g(c) - f(c) < 0$ 。

由此可知： b 與 c 均在 $(0, 1) \cup (10, 100)$ 內。

因為 $abc = 1000$ ， $a < 1$ ，所以 $bc > 1000$ ，因而 b 與 c 均在 $(10, 100)$ 內。

2. 首先，觀察到 $x=1$ 是方程式的根，所以可將方程式分解為

$$5x^3 - 5(t+1)x^2 + (71t-1)x + 1 = 66t \Leftrightarrow (x-1)(5x^2 - 5tx + 66t - 1) = 0，$$

故原問題變成求所有可能的實數 t 使得方程式 $5x^2 - 5tx + 66t - 1 = 0$ 的兩個根均為正整數。設方程式 $5x^2 - 5tx + 66t - 1 = 0$ 的兩個根為 α, β ，其中 $\alpha \leq \beta$ ，則

$$\begin{cases} \alpha + \beta = t \\ \alpha\beta = \frac{1}{5}(66t - 1) \end{cases} \Rightarrow 5\alpha\beta = 66(\alpha + \beta) - 1，$$

由此可知 2, 3, 11 不能整除 α, β 。

又因為 $\beta = \frac{66\alpha - 1}{5\alpha - 66}$ 且 α, β 為正整數，所以 $5\alpha - 66 \geq 1$ ，得到 $\alpha > \frac{66}{5}$ ，於是， $\alpha \geq 14$ 。但是

α 不能為 2, 3 的倍數，則進一步有 $\alpha \geq 17$ 。利用此式與 $\beta \geq \alpha$ 可推得

$$\frac{66\alpha - 1}{5\alpha - 66} \geq \alpha \Rightarrow 5\alpha^2 - 132\alpha + 1 \leq 0，$$

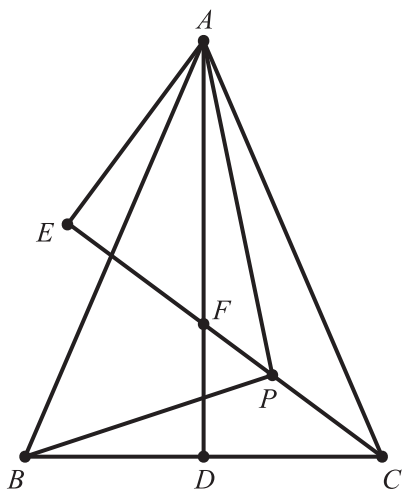
由此解得

$$\alpha \leq \frac{66 + \sqrt{66^2 - 5}}{5} < \frac{132}{5} \Rightarrow 17 \leq \alpha \leq 26，$$

將可能的 $\alpha = 17, 19, 23, 25$ 代入 $\beta = \frac{66\alpha - 1}{5\alpha - 66}$ 可得到 $\alpha = 17$ 、 $\beta = 59$ 為正整數，

故只有 $t = 76$ 時方程式 $5x^3 - 5(t+1)x^2 + (71t-1)x + 1 = 66t$ 三個根均為正整數。

3.



過 A 作直線 CP 的垂直線，設垂足為 E 。

設 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CE}$ 交於點 F ，在直角三角形 $\triangle AEF$ 與 $\triangle CDF$ 中，
因為 $\angle AFE = \angle CFD$ ，所以， $\angle EAF = \angle DCF$ 。

因為 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 且 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 垂直，所以， $\overline{FB} = \overline{FC}$ ， $\angle DCF = \angle DBF$ 。

由此可得 $\angle EAF = \angle DBF$ 。於是， $\triangle AEF$ 與 $\triangle BDF$ 相似，因而得

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}。$$

因為 $\angle FBC = \angle PCB = 2\angle PBC$ ，所以， $\overrightarrow{BP}$ 平分 $\angle CBF$ 。由此得

$$\frac{2\overline{BD}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PF}}。$$

在直角三角形 $\triangle ACE$ 中，因為 $\angle ECA = 30^\circ$ ，所以， $\overline{AC} = 2\overline{AE}$ 。由此得

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{2\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{2\overline{BD}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PF}}。$$

於是， $\overrightarrow{AP}$ 平分 $\angle FAC$ 。

4. 首先證明：這 15 個點 $P_1, P_2, \dots, P_{15}$ 共線（Gallai-Sylvester 定理）。

假設 $P_1, P_2, \dots, P_{15}$ 不共線，並令這 15 個點可決定的直線為 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ ，

其中 $2 \leq m \leq 105$ 。

由最小數原理，可設序對 (P_i, ℓ_j) 滿足：點 P_i 不在 ℓ_j 上，且使得點 P_i 到 ℓ_j 的距離 $d(P_i, \ell_j)$ 為最小；即

$$d(P_i, \ell_j) = \min\{d(P_s, \ell_t) \mid s = 1, 2, 3, \dots, 15; t = 1, 2, 3, \dots, m\}。$$

若點 P_i 到直線 ℓ_j 的垂足為 P ，而直線 ℓ_j 通過點 P_k ，則線段 $\overline{PP_k}$ 內不會含有其

他的點 P_q 。事實上，若存在一點 $P_q \neq P_k$ 使得 $P_q \in \overline{PP_k}$ ，則

$$d(P_q, \overline{PP_k}) < d(P, \overline{PP_k}) < \overline{PP_i} = d(P_i, \ell_j), \text{ 矛盾!}$$

由上述的結果可以推得：直線 ℓ_j 上至多只通過 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 中的三個點。

假設直線 ℓ_j 通過三個點 P_1, P_2, P_3 ，且 P_2 位於 P_1 與 P_3 之間，

則點 P_2 必為垂足點 P ，亦即 $P_2 = P$ 。由 $d(P_i, \ell_j)$ 的定義可知：

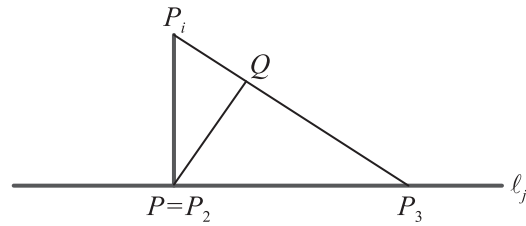
$$d(P_i, \ell_j) \leq d(P_i, \overline{PP_3})。$$

另一方面，若點 P_2 到直線 $\overline{PP_3}$ 的垂足為 Q ，則 $\overline{P_2Q} < \overline{P_2P_i}$ ；

因而 $d(P_i, \ell_j) = \overline{P_2P_i} > \overline{P_2Q} = d(P_2, \overline{PP_3})$ ，矛盾！

由此可知：直線 ℓ_j 至多只通過 $P_1, P_2, \dots, P_{15}$ 中的兩個點。

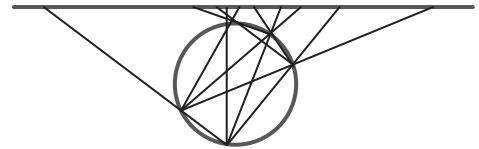
因此，這 15 個點 $P_1, P_2, \dots, P_{15}$ 共線。



再由條件(2)得知：任兩點 Q_i, Q_j 所連成的直線 Q_iQ_j 恰通過某一點 P_k ；

故所求直線共有 $1 + 5 \times 15 - C_2^5 = 66$ 條。

※另一計算式： $C_2^{20} - C_2^{15} + 1 - C_2^5 \times 2 = 66$ 。



筆試二：填充題

1.	2.	3.	4.
-1	$\frac{2^{2017}-2}{2^{2017}-1}$	$\frac{1}{11}$	1001
5.	6.	7.	
$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$1+(k-1)2^{i-k-1}$	

口試：

1. (i) 令 $x = y = z = 1$ 代入不等式得到

$$f(1) - [f(1)]^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[f(1) - \frac{1}{2} \right]^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}。$$

- (ii) 令 $y = z = 1$ 與 $f(1) = \frac{1}{2}$ 代入不等式得到

$$f(x) - \frac{1}{2}f(x) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}。$$

- (iii) 令 $x = y = z = 0$ 代入不等式得到

$$f(0) - [f(0)]^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[f(0) - \frac{1}{2} \right]^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{2}。$$

- (iv) 令 $x = 0$ 與 $f(0) = \frac{1}{2}$ 代入不等式得到

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}f(yz) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(yz) \leq \frac{1}{2}。$$

因為 x, y, z 為任意的實數時均成立，所以有 $f(x) \leq \frac{1}{2}$ （亦即取 $yz = x$ ）。

根據(ii)及(iv)的結論可推得 $f(x) = \frac{1}{2}$ 。

2. 證 1：分別以 P 與 Q 為圓心作兩圓都通過焦點 F ，設兩圓的另一交點為 G 。

依拋物線的定義，此兩圓都與準線 l 相切。

設圓心為 P 的圓與準線 l 相切於 M 、圓心為 Q 的圓與準線 l 相切於 N 。

對兩圓引用切割線定理，可知

$$\overline{KM}^2 = \overline{KF} \times \overline{KG}, \quad \overline{KN}^2 = \overline{KF} \times \overline{KG}。$$

由此得 $\overline{KM} = \overline{KN}$ ，亦即： K 是 $\overline{MN}$ 的中點。

在梯形 $PMNQ$ 中，過腰 $\overline{MN}$ 的中點 K 而與底 $\overline{PM}$ 平行的直線必通過另一腰 $\overline{PQ}$ 的中點。

證 2：設直線 FK 與直線 PQ 垂直於點 H 。依商高定理，可知

$$\begin{aligned}\overline{PF}^2 + \overline{QK}^2 &= (\overline{PH}^2 + \overline{FH}^2) + (\overline{QH}^2 + \overline{KH}^2) \\ &= (\overline{PH}^2 + \overline{KH}^2) + (\overline{QH}^2 + \overline{FH}^2) = \overline{PK}^2 + \overline{QF}^2,\end{aligned}$$

$$\overline{PK}^2 - \overline{PF}^2 = \overline{QK}^2 - \overline{QF}^2。$$

因為 $\overline{PM} = \overline{PF}$ 且 $\overline{QN} = \overline{QF}$ ，所以，可得

$$\overline{KM}^2 = \overline{PK}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{QK}^2 - \overline{QN}^2 = \overline{KN}^2。$$

由此得 $\overline{KM} = \overline{KN}$ ，亦即： K 是 $\overline{MN}$ 的中點。

在梯形 $PMNQ$ 中，過腰 $\overline{MN}$ 的中點 K 而與底 $\overline{PM}$ 平行的直線必通過另一腰 $\overline{PQ}$ 的中點。

證 3：在坐標平面上，設拋物線 Γ 的方程式為 $y^2 = 4cx$ ，而 P 與 Q 的坐標分別為

$P(x_1, y_1)$ 與 $Q(x_2, y_2)$ 。因為 P 與 Q 都在 Γ 上，所以， $y_1^2 = 4cx_1$ 且 $y_2^2 = 4cx_2$ 。

過焦點 $F(c, 0)$ 而與 $\overline{PQ}$ 垂直的直線方程式為

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y - c(x_1 - x_2) = 0。$$

此垂直線與準線 l 的交點坐標為 $K(-c, \frac{2c(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2})$ ，其 y 坐標可改寫如下：

$$\frac{2c(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2} = \frac{2c(\frac{y_1^2}{4c} - \frac{y_2^2}{4c})}{y_1 - y_2} = \frac{y_1 + y_2}{2}，$$

此 y 坐標與 $\overline{PQ}$ 的中點的 y 坐標相同。

由此可知：過 K 而與 y 軸垂直（也因此與準線垂直）的直線必通過 $\overline{PQ}$ 的中點。

第六屆華羅庚金盃國際少年數學精英邀請賽

◎第一、二屆請見龍騰數亦優第 24 刊、第三屆請見第 13 刊、第四屆請見第 25 刊、第五屆請見第 26 刊。

初一年級組 筆試一試卷（考試時間：60 分鐘）

1. 計算 $\frac{(\frac{-3}{2})^2 - (\frac{-4}{3})^2}{(1 - \frac{1}{2})^2}$ 。

2. 已知 $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ ，求 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 37^2 - 38^2 + 39^2$ 。

3. 解方程 $(a+2b+1)^2 + 4b^2 - 4b + 1 = 0$ 。

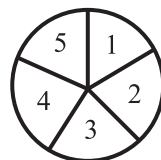
4. 已知 $3a = 4b$ ， $5b = 2c$ ，求 $\frac{2a+b-c}{2a-b+c}$ 。

5. 求 $(23^{32} + 32^{23})$ 除以 11 的餘數。

6. 化簡 $\frac{3}{x(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{3}{(x+6)(x+9)} + \frac{3}{(x+9)(x+12)}$ 。

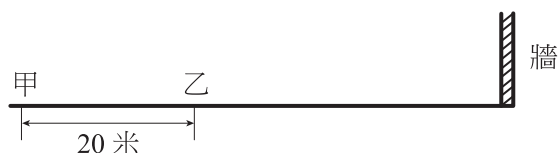
7. 已知 $-2 < x < 2$ ，化簡 $-|3x+9| - |7x-14|$ 。

8. 考官在一張圓桌上安排了五個座位，並將座位順序由 1 號至 5 號編上號碼，見右圖。現在 1 號至 5 號這五名考生進入考場，他們按考官的指示就坐，巧合地每位考生的編號與其座位的號碼加起來恰好是一個質數。那麼誰坐在 3 號考生的右方？

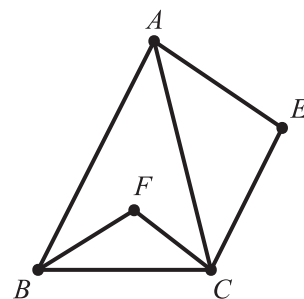


9. 小奧利用量角器量度一個凸多邊形的內角和，他漏了一個角沒有量度，而他量出來的和是 1650° ，求漏了的一個角的度數。

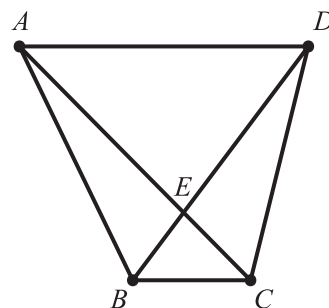
10. 如下圖所示，甲、乙兩人站在一道牆的前面，這時甲、乙兩人相距 20 米。他們一同向著這道牆的方向跑，甲和乙的速度分別是每秒 4 米和每秒 3 米，當乙碰到這道牆後立即轉身向後跑，甲、乙兩人在距離這道牆 5 米的地方相遇，問起跑時甲與這道牆距離多少米？



11. 在右圖中， $AB \parallel CE$ ， BF 和 CF 分別是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的角平分線。已知 $\angle BFC = 110^\circ$ 及 $AE = CE$ ，求 $\angle AEC$ 。



12. 在右圖中，梯形 $ABCD$ 的面積是 9cm^2 ， $\triangle BCE$ 的面積是 1cm^2 ，求 $\triangle ABE$ 的面積。



參考答案

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$\frac{17}{9}$ 或 $1\frac{8}{9}$	780	$a = -2$, $b = \frac{1}{2}$	$\frac{7}{25}$	0	$\frac{12}{x(x+12)}$
7.	8.	9.	10.	11.	12.
$4x - 23$	4 號	150°	45 米	100°	2cm^2

初二年級組 筆試一試卷（考試時間：60 分鐘）

1. 化簡 $\frac{\frac{-4y-4x}{x+y} - \frac{2y-x}{3x-6y}}{\frac{(2x+3y)(2x-3y)}{4x^2-9y^2} + \frac{4(x+2y)(x-y)}{(2x+y)^2-9y^2}}$ 。

2. 已知 $c < b < a < 0$ ，化簡 $|c+a| + |c-b| - |a-b| + |-a-b|$ 。

3. 已知 a, b 和 c 滿足 $\begin{cases} 2a+3b=5c \\ 2b-3c=2a \end{cases}$ ，求 $\frac{a+2b+3c}{3a+2b+c}$ 。

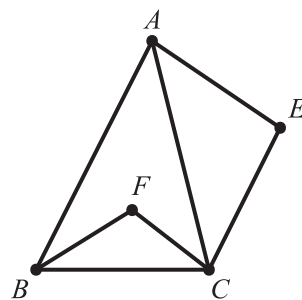
4. 解方程 $\sqrt{a^2-6a+9} - a + 7 = 0$ 。

5. 已知 $(n+2)^2 - n^2 = 4n+4$ ，計算 $1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2 + \cdots + 21^2 + 22^2$ 。

6. 計算 $\frac{1}{8^2-3^2} + \frac{1}{14^2-3^2} + \frac{1}{20^2-3^2} + \cdots + \frac{1}{56^2-3^2} + \frac{1}{62^2-3^2}$ 。

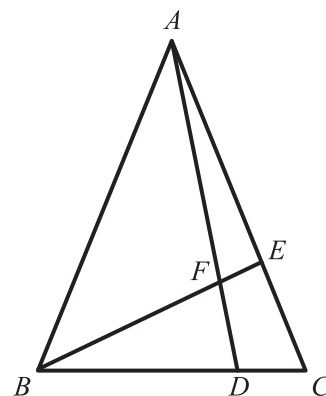
7. 未知數 x 和 y 滿足以下方程組， $\begin{cases} 40x+40y-3xy=20 \\ 7x+7y-xy=13 \end{cases}$ ，求 x^2+y^2 。

8. 在右圖中， $AB \parallel CE$ ， BF 和 CF 分別是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的角平分線。
已知 $\angle BFC = 110^\circ$ 及 $AE = CE$ ，求 $\angle AEC$ 。



9. 求不定方程 $4a^2 + 4a = c^2$ 的整數解。

10. 在右圖中 $AE = 2EC$ ， $BD = 3DC$ ，已知 $EFDC$ 的面積為 17cm^2 ，求 $\triangle ABC$ 的面積。



11. 求 3^{333} 的最後兩位數字。

12. 一群學生分成男女兩組，共 160 人。男生比女生多，但少於女生的兩倍。男生可以再平分成 n 組（ $n > 1$ ）或 $(n+1)$ 組，也可以平分為 m 組（ $m > n+1$ ）或 $(m+1)$ 組，也可以平分為 p 組（ $p > m+1$ ）或 $(p+1)$ 組。那麼男生和女生相差多少人？

參考答案

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$-\frac{11}{6}$	$-3a + b - 2c$	$\frac{7}{5}$	無解	505	$\frac{2}{65}$
7.	8.	9.	10.	11.	12.
41	100°	$(a, c) = (0, 0)$ 或 $(-1, 0)$	132cm^2	23	20 人

一、填充題

1. 在右圖的數軸中，有理數 a, b 的位置在原點 O 的右側，有理數 c, d 的位置在原點 O 的左側。那麼在下述四個結論中：



(1) 如果 $ad > bc$ 則必定有 $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$

(2) 如果 $ad > bc$ 則必定有 $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$

(3) 如果 $ad < bc$ 則必定有 $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$

(4) 如果 $ad < bc$ 則必定有 $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$ 。

正確結論有_____（可以多選）。

2. 兩個關於 x 的多項式各有 4 項。將它們相乘然後合併同類項，最終得到的積最多有_____項，最少有_____項。

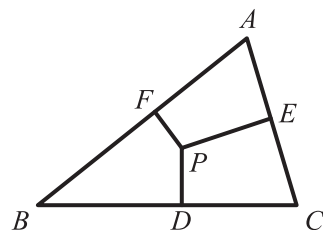
3. 在一個正方體的上、下底面上分別有寫 14, 15，在其它 4 個面各寫有一個正整數。對於每個頂點，將包含該頂點的三個面上寫有的數相乘，得到 8 個乘積。當這 8 個乘積的和是 1653 時，6 個面上寫的 6 個數的和可能是_____。

二、解答題

4. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 內一點，過 P 分別作 BC, CA 和 AB 的垂線，垂足分別是 D, E, F 。問 P 處於 $\triangle ABC$ 內什麼位置時才能使

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

的值最小？



5. 排成一行的 70 個數，除了兩頭的兩個數以外，每個數的 8 倍都恰好等於它兩邊數的和。這一行數最左邊的幾個數是這樣的：

0, 1, 8, 63, ...。

問：這 70 個數中有沒有滿足如下條件的數，它能被質數 3 和質數 5 整除，而且僅能被 3 和 5 的質數整除？

6. 一條東西向的地鐵線共有 15 個站，地鐵列車在兩個相鄰站間要運行 1 分 30 秒，在每個站（除東面第 1 個站和西面第 15 個站外）要停 20 秒。由於兩個不同方向的列車走兩個不同的隧道，它們只能在車站相遇而不能在行進中相遇。每隔 4 分 50 秒從第 15 站向東開出一列列車，每隔 4 分 50 秒從第 1 站向西開出一列列車。問一列從第 1 站向西開出的列車，在途中至多能遇到幾列相反方向開來的列車？（第 1 站與第 15 站遇到的不算）

答案》

一、填充題

1. (1)(3) 2. 16 ; 2 3. 51

二、解答題

4. P 為三角形 ABC 的內心 5. 沒有 6. 4

解析》

二、解答題

4. 注意

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot PD + \frac{1}{2}CA \cdot PE + \frac{1}{2}AB \cdot PF ,$$

可知

$$BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF = 2S_{\triangle ABC} .$$

由柯西不等式有

$$\begin{aligned} & \left((\sqrt{BC \cdot PD})^2 + (\sqrt{CA \cdot PE})^2 + (\sqrt{AB \cdot PF})^2 \right) \times \left(\left(\sqrt{\frac{BC}{PD}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{CA}{PE}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{AB}{PF}} \right)^2 \right) \\ & \geq (BC + CA + AB)^2 . \end{aligned}$$

記 $S = S_{\triangle ABC}$, $M = (BC + CA + AB)^2$, 則

$$2S \times \left[\left(\sqrt{\frac{BC}{PD}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{CA}{PE}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{AB}{PF}} \right)^2 \right] \geq M ,$$

所以 ,

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \geq \frac{M}{2S} .$$

由柯西不等式等號成立的條件可知

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

最小為 $\frac{M}{2S}$,

且此時有

$$\frac{\sqrt{BC \cdot PD}}{\sqrt{\frac{BC}{PD}}} = \frac{\sqrt{CA \cdot PE}}{\sqrt{\frac{CA}{PE}}} = \frac{\sqrt{AB \cdot PF}}{\sqrt{\frac{AB}{PF}}} ,$$

即 $PD = PE = PF$, P 為三角形 ABC 的內心。

5. 考察一下這 70 個數被 3, 5, 7 除後餘數的變化情況：

3 : 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 ... , 3 個一迴圈；

5 : 0 1 3 3 1 0 4 2 2 4 0 1 3 3 1 ... , 10 個一迴圈；

7 : 0 1 1 0 6 6 0 1 1 0 6 6 0 1 1 ... , 6 個一迴圈。

前兩行說明，確有既能被 3 也能被 5 整除的數。第一、三行說明凡是能被 3 整除的數必能被 7 整除。進而「僅能被 3 和 5 的質數整除」的條件無法滿足了。

所以 70 個數中沒有符合要求的數存在。

另解：

記這列數為 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_{70}$ 。

由題意， $\{a_n\}$

$$\text{滿足 } a_{k+2} = 8a_{k+1} - a_k, \quad k = 1, 2, \dots, 69,$$

且 $a_1 = 0, a_2 = 1$ 。注意

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k \pmod{3},$$

把 $a_1 = 0, a_2 = 1$ 代入，mod 3 後得到

$$0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 2 \dots; \quad (*)$$

類似地，

$$a_{k+2} = 3a_{k+1} - a_k \pmod{5},$$

把 $a_1 = 0, a_2 = 1$ 代入，mod 5 後得到

$$0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \ 0 \ 4 \ 2 \ 2 \ 4 \ 0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \dots; \quad (**)$$

$$a_{k+2} = a_{k+1} - a_k \pmod{7},$$

把 $a_1 = 0, a_2 = 1$ 代入，mod 7 後得到

$$0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 6 \ 6 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 6 \ 6 \ 0 \ 1 \ 1 \dots \quad (***)$$

由 $a_{k+2} = 8a_{k+1} - a_k$ 和 $a_1 = 0, a_2 = 1$ 可以看出 $a_k > 0, k > 1$ 。

由(*)和(**)看出，確有既能被 3 也能被 5 整除的數。而(*)和(***)說明凡是能被 3 整除的數必能被 7 整除。進而無法滿足「僅能被 3 和 5 的質數整除」的條件的數。

6. 為了方便起見，以秒為單位記時間，這樣列車在兩個相鄰站間運行 90 秒，在每個站停 20 秒，每 290 秒從第 15 站開出一列列車，因此在每個站每隔 290 秒就有一列向東開的列車到站。兩列列車在一個站相遇的條件是它們到達這個站的時間相差不到 20 秒。另外，將一列從第 1 站開出的列車記作 A。

要解決的問題是 A 車在哪幾個站能與對面開來的車相遇。對任一指定的站，任取一列向東開到這個指定站的車，將它到達這個站的時間減去 A 到達這個站的時間差，稱作這個指定站的「到達時間差」（注意，在一個到達時間差上任意加上一個 290 的倍數就是另外某列的到達時間差）。不難斷定 A 在這個指定站是否遇到對面開來的車：如果到達時間差與 290 的一個倍數相差不超過 20，則 A 在這個指定站遇到對面開來的車；否則就遇不到。

這樣只要算出各站的到達時間差就行了。注意 A 車到達某個指定站（如第 5 站）後，再過 $90 + 20 = 110$ 秒到達下一站（第 6 站）；另一方面，在一列向東開的列車到達指定站（如第 5 站）後，下一列向東開的列車再過 $290 - 110 = 180$ 秒到達下一站（第 6 站），所以第 6 站的到達時間差等於第 5 站到達時間差加上 $180 - 110 = 70$ 秒。這樣，若第 2 站的到達時間差

是 T 秒，則第 3，第 4， $\dots$ ，第 14 站的到達時間差分別是

$$T+70, T+140, T+210, \dots, T+840 \text{ 秒。}$$

只要看這一系列數中有哪幾個與 290 的倍數相差不超過 20 就行了。

記 $S = T + 70k$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, 12$ ，則對某個 i ，

$$|S - 290i| \leq 20$$

時，A 車與某車在 $k+2$ 站相遇。求

$$|T + 70k - 290i| \leq 20$$

的 k 的個數。把上式中的 $70k - 290i$ 的值計算到 0 與 290 之間，則有 13 個值為

$$T, T+70, T+140, T+210, T+280, T+60, T+130, T+200, T+270, T+50, \\ T+120, T+190, T+260。$$

任意相鄰的四個數的兩兩之差的絕對值不小於 70 不大於 220，所以不可能有兩個滿足

$|T + 70k - 290i| \leq 20$ 式子。從前往後共有 13 個數，由抽屜原則，最多可以有 4 個滿足

$|T + 70k - 290i| \leq 20$ ，並且當 $T=15$ 時，A 車可以與對面開來的車在第 2，6，10，14 站相遇。

一、填空题

1. 已知正整數 m, n 互不相同，並且

$$\begin{cases} m^4 = -25n^2 + 481 \\ n^4 = -25m^2 + 481 \end{cases},$$

那麼 $m^4 + n^4 =$ _____。

2. 平面幾何中有平面上的點、直線的概念及許多相關的性質。現在考慮球面，可以把球面想像成地球的表面，或者西瓜的表面，籃球的表面。可以將過球面上的兩點的直線定義成過這兩點的球大圓，也就是這兩點和球心確定的平面與球面的交線，它是一個圓周。可以想像將一個西瓜平均切成兩半，不要將它們分開，西瓜皮上的切痕就是一個圓周，即為球的大圓。

(1) 平面幾何中有一個公理：直線上的任意三點，有且僅有一個點在其它兩點之間。如果按照上述球面直線的定義，則在同一球面直線上的三點之間的順序關係可以描述為_____。

(2) 平面幾何中有一個熟知的定理：在平面上，給定一直線，過該直線外一點有且僅有一條直線與給定的直線永不相交。而平面上兩條不重合的直線不平行必定相交。那麼，定義在球面上的兩條不重合球面直線的位置關係可以描述為_____。

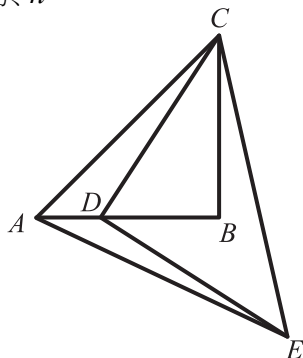
3. 設 $x = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ， $y = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ ，且 $5x^2 + 406xy + 5y^2 = 2016$ ，

那麼 $n =$ _____。

二、解答题

4. 證明：如果 $x + y + z = n$ ， $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$ ，則 x, y, z 中至少有一個等於 n 。

5. 如右圖，三角形 ABC 與三角形 CDE 均為等腰直角三角形， D 在邊 AB 上， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle CDE = 90^\circ$ 。如果三角形 ABC 的面積為 8，三角形 CDE 的面積為 12.5，則三角形 AED 的面積為多少？



6. 設 a 是實數，

(1) 如果關於 x, y 的方程組

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + ay = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (*)$$

有解，求 a 的取值範圍。

(2) 記 x, y 為方程組(*)的解，如果對任意實數 b, c 都有

$$2x^2 + 2xy + ay^2 - 2x - y \leq 2b^2 + 2bc + ac^2 - 2b - c, \quad (**)$$

求 a 的取值範圍。

答案》

三、填充題

1. 337

2. (1) 在同一球面直線上的三點，任意一點必在其它兩點之間

(2) 定義在同一球面上的兩條不同球面直線必定相交

3. 4

四、解答題

4. 見解析 5. 1.5 6. (1) a 為任意實數；(2) $a \geq \frac{1}{2}$

解析》

二、解答題

4. 由 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$ 得到

$$\frac{xy + xz + yz}{xyz} = \frac{1}{n},$$

即

$$xyz - n(xy + xz + yz) = 0, \quad \text{①}$$

由 $x + y + z = n$ ，得到

$$(x + y + z)n^2 = n^3, \text{ 即 } (x + y + z)n^2 - n^3 = 0. \quad \text{②}$$

由①+②，得

$$xyz - n(xy + xz + yz) + (x + y + z)n^2 - n^3 = 0,$$

整理得：

$$xyz - nxy - nxz - nyz + n^2x + n^2y + n^2z - n^3 = 0.$$

對上式左邊進行因式分解：

$$xy(z - n) - nx(z - n) - ny(z - n) + n^2(z - n) = 0,$$

$$(z - n)(xy - nx - ny + n^2) = 0,$$

$$(x - n)(y - n)(z - n) = 0.$$

要使上式成立，至少要有一個因式為 0。即 x, y, z 中至少有一個為 n 。

5. 以 CD, DE 為相鄰邊作正方形 $CDEF$ ，並作正方形 $CDEF$ 的弦圖，

$FK \perp BC$ ， $EG \perp FK$ ，延長 AB 到 H ， $AH \perp EG$ 。

由三角形 ABC 的面積為 8，則 $BC = AB = 4$ 。

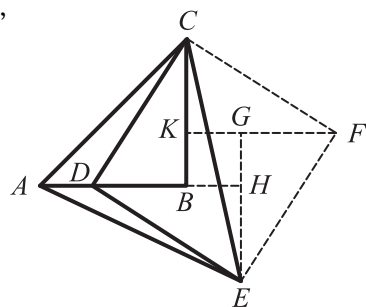
由三角形 CDE 的面積為 12.5，則 $CD = 5$ 。

由畢氏定理，則 $DB = 3$ ， $AD = 1$ 。

根據正方形 $CDEF$ 是弦圖的性質， $DB = HE = 3$ 。

三角形 ADE 的高為 3，

所以三角形 ADE 的面積為 $\frac{1}{2} \times 1 \times 3 = 1.5$ 。



6. (1) 當 $a \neq \frac{1}{2}$ 時，方程組(*)的解為 $x = \frac{1}{2}$ ， $y = 0$ 。

當 $a = \frac{1}{2}$ 時，方程組(*)的解為 $x = \frac{1}{2} - d$ ， $y = 2d$ ，其中， d 為任意實數。

(2) 對任意實數 b, c 都有

$$\begin{aligned} & 2b^2 + 2bc + ac^2 - 2b - c - (2x^2 + 2xy + ay^2 - 2x - y) \\ &= 2(b-x)^2 + 2(b-x)(c-y) + a(c-y)^2 + 2(2x+y-1)(b-x) + 2\left(x+ay-\frac{1}{2}\right)(c-y) \\ &= 2\left(b-x+\frac{1}{2}(c-y)\right)^2 + \left(a-\frac{1}{2}\right)(c-y)^2。 \end{aligned}$$

當 $a \geq \frac{1}{2}$ 時，對任意實數 b, c 都有

$$2\left(b-x+\frac{1}{2}(c-y)\right)^2 + \left(a-\frac{1}{2}\right)(c-y)^2 \geq 0，$$

所以式(**)成立。而當 $a < \frac{1}{2}$ 時，取 $c = y + 2$ ， $b = x - 1$ ，則

$$2\left(b-x+\frac{1}{2}(c-y)\right)^2 + \left(a-\frac{1}{2}\right)(c-y)^2 = 4\left(a-\frac{1}{2}\right) < 0，$$

式(**)不成立。

另解：

(1) 根據二元一次方程組解與係數的關係得到：

當 $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{a}$ ，方程組有唯一解。即方程組(*)的解為

$$x = \frac{1}{2}, y = 0。$$

當 $\frac{2}{1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$ 時，方程組(*)有無限多解。

對於任意的 x ，總有 $y = 1 - 2x$ 和它對應組成方程組(*)的一組解。

(2) 記 x, y 為方程組(*)的解，如果對任意實數 b, c 都有

$$2x^2 + 2xy + ay^2 - 2x - y \leq 2b^2 + 2bc + ac^2 - 2b - c \text{ 成立，}$$

$$\text{只須 } 2b^2 + 2bc + ac^2 - 2b - c - (2x^2 + 2xy + ay^2 - 2x - y) \geq 0$$

上式左邊可以變換成：

$$\begin{aligned} & 2b^2 + 2bc + ac^2 - 2b - c - (2x^2 + 2xy + ay^2 - 2x - y) \\ &= 2(b-x)^2 + 2(b-x)(c-y) + a(c-y)^2 + 2(2x+y-1)(b-x) + 2\left(x+ay-\frac{1}{2}\right)(c-y) \end{aligned}$$

$$= 2\left(b - x + \frac{1}{2}(c - y)\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)(c - y)^2 \text{。}$$

$\therefore$ 對於任何實數 b, c 都有 $\left(b - x + \frac{1}{2}(c - y)\right)^2 \geq 0$, $(c - y)^2 \geq 0$,

$\therefore$ 當 $a \geq \frac{1}{2}$ 時, $2\left(b - x + \frac{1}{2}(c - y)\right)^2 + (a - \frac{1}{2})(c - y)^2 \geq 0$,

而當 $a < \frac{1}{2}$ 時, 取 $c = y + 2$, $b = x - 1$, 則

$$2\left(b - x + \frac{1}{2}(c - y)\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)(c - y)^2 = 4\left(a - \frac{1}{2}\right) < 0 \text{ ,}$$

式(**)不成立。

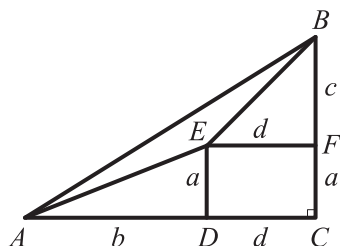
專欄 動手玩數學



遊戲 133

☆☆☆☆

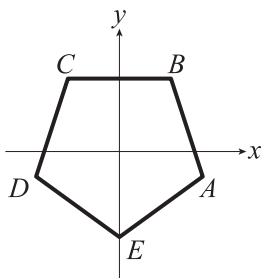
如下圖所示，在直角三角形 ABC 的直角 C 上往內做一個長方形 $CDEF$ ， a, b, c, d 分別為所示線段長度：



試比較 $m_1 = \frac{a}{b}$ ， $m_2 = \frac{c}{d}$ ， $m_3 = \frac{a+c}{b+d}$ 三數的大小關係。

〔玩鎖・玩索〕

正五邊形的五邊中，斜率最小的邊為何？



這是八十七學年度社會組考題的一題，算是概念題，不需計算，只需動筆擺一擺即可知曉答案。

斜率是個很有用的數學概念，試著用他來處理我們的比較大小問題吧！



遊戲 134

☆

許志農／臺灣師大數學系
一批強盜在林裡商議怎麼瓜分搶來的布匹：

當每人分 6 匹時，多出 5 匹；又每人分 7 匹，不足 8 匹。

問這幾個強盜？一共搶來多少匹布？

〔玩鎖・玩索〕

這是公元 855 年唐朝考官的加賽題。以前沒有假設未知數的方法，現在利用未知數解題，輕鬆許多。



遊戲 135

☆☆☆

某都市是一個長方形，劃分成八個行政區域，下圖是該都市的地圖，數字所在的區域剛好是八個行政區域。

1	8	7	4
2	3	6	5

現在想沿著格子線把地圖摺好，希望摺數次之後，讓長方形地圖變成看起來是一個正方形大小，但是厚度卻有八張紙張厚的形式。

你是否可以找到好的摺地圖方式，讓摺好之後的地圖，從上而下分別是

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

八個行政區域，也就是說，從上往下數，第 3 張的正面或背面是第 3 行政區域的地圖，... 等。

〔玩鎖・玩索〕

動手玩數學就是主張要親自動手來完成，不妨裁一張大小是 4×2 的紙摺摺看，紙張最好不要太小，否則不容易操作。只需操作幾回合，就會發現摺地圖的方法並不多，但總

是摺不出要求的順序來。此遊戲只有唯一的一種摺法，而且是一種很詭異的摺法。

如果你已經找到這道摺紙遊戲的竅門，那麼不妨試試更困難的情形：如下圖所描述的數字分配，一樣摺出

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

的次序來：

1	8	2	7
4	5	3	6

提示：領悟「小蛇吞尾巴」的意思。



設 a, b, c, d 是有理數， x 是無理數，其中 $c \neq 0$ 。當 a, b, c, d 滿足什麼條件時，實數

遊戲 136

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

☆☆☆

會是有理數，此有理數又為何（用 a, b, c, d 表示）？

〔玩鎖・玩索〕

在歐幾里德的《幾何原本》書裡，提到如下有關無理數的性質：

若 a, b, c, d 是有理數，而且

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}，則 a = c，b = d。$$

當我們把無理數 $\sqrt{2}$ 改成其它的無理數時，這個性質也照樣成立。原因是因為移項後，得

$$(a - c) = (b - d)\sqrt{2} \Rightarrow a - c = b - d = 0。$$

這最後的推論跟 $\sqrt{2}$ 的值無關，只要求它為無理數即可。

《幾何原本》的這個基本性質也成為中學處理無理數的準則。凡遇到有理數與無理數互相纏繞的問題，依據上述分項的手法處理八成不會錯。

動手玩數學~破解祕笈

第33期

遊戲 129

將遞迴關係式

$$a_n = a_{n-1} + 3n + 1, \quad n \geq 2$$

中的 n 值分別代入 $2, 3, \dots, n-1$ 及 n ，得

$$a_2 = a_1 + 3 \times 2 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 3 \times 3 + 1$$

$\vdots$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + 3 \times (n-1) + 1$$

$$a_n = a_{n-1} + 3 \times n + 1。$$

將上述 $n-1$ 個等式累加，並利用 $a_1 = 5$ ，得一般項 a_n 為

$$a_n = a_1 + 3 \times (2 + 3 + \dots + n) + (n-1)$$

$$= a_1 + 3 \times \frac{(n+2)(n-1)}{2} + (n-1)$$

$$= 5 + \frac{3n^2 + 5n - 8}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + 5n + 2}{2}。$$

〈累加的方法〉

$$\cancel{a_2} = a_1 + 3 \times 2 + 1$$

$$\cancel{a_3} = \cancel{a_2} + 3 \times 3 + 1$$

$\vdots$

$$\cancel{a_{n-1}} = \cancel{a_{n-2}} + 3 \times (n-1) + 1$$

$$+) \quad a_n = \cancel{a_{n-1}} + 3 \times n + 1$$

$$a_n = a_1 + 3 \times \frac{(n+2)(n-1)}{2} + (n-1)$$

故

$$a_n = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2}。$$

遊戲 130

將左式

$$(1+a)(1+b)(1+c)$$

乘開得

$$1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc。$$

數亦優 44

利用算幾不等式，得

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}；$$

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3\sqrt[3]{abc}^2；$$

$$abc = \sqrt[3]{abc}^3。$$

因此

$$(1+a)(1+b)(1+c)$$

$$= 1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc$$

$$\geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{abc}^2 + \sqrt[3]{abc}^3$$

$$= (1 + \sqrt[3]{abc})^3，$$

得證。

遊戲 131

(1) 因為 $\overline{EA} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ， $\overline{ED} = \sqrt{c^2 + d^2}$ ，所以

$$\overline{EA} \cdot \overline{ED} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}。$$

根據面積公式，得三角形 ADE 的面積

$$\leq \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}{2} \quad (\angle E = 90^\circ \text{ 時等號成立})，$$

因此得證。

(2) $\triangle ADE = \text{梯形 } ABCD - \triangle ABE - \triangle DCE$

$$= \frac{(a+d)(b+c)}{2} - \frac{ab}{2} - \frac{cd}{2}$$

$$= \frac{ac+bd}{2}。$$

(3) 由(1)得

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$\geq 4(\text{三角形 } ADE \text{ 的面積})^2。$$

再由(2)得

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2。$$

遊戲 132

- (1) 因為不超過 27 的質數為 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 九個，所以

$$\pi(27) = 9, \quad \frac{27}{\pi(27)} = \frac{27}{9} = 3。$$

- (2) $n = 96$ 。

- (3) 利用反證法，假設介於 100 與 1008 之間的

正整數 n 都讓分數 $\frac{n}{\pi(n)} \neq 5$ ，也就是說，分

$$\text{數 } \frac{100}{\pi(100)} = 4, \quad \frac{101}{\pi(101)}, \quad \frac{102}{\pi(102)}, \quad \dots,$$

$$\frac{k}{\pi(k)}, \quad \frac{k+1}{\pi(k+1)}, \quad \dots, \quad \frac{1008}{\pi(1008)} = 6 \text{ 不是小}$$

於 5 就是大於 5。令 $\frac{k+1}{\pi(k+1)}$ 是上述數列從

左邊數來第一個大於 5 的分數，即

$$\frac{k}{\pi(k)} < 5 < \frac{k+1}{\pi(k+1)}。$$

推得 $k < 5\pi(k)$ 及 $5\pi(k+1) < k+1$ 。又因為

$5\pi(k) \leq 5\pi(k+1)$ ，所以

$$k < 5\pi(k) \leq 5\pi(k+1) < k+1$$

$$\Rightarrow k < 5\pi(k+1) < k+1。$$

因為 $5\pi(k+1)$ 是正整數，又介於 k 與 $k+1$ 之

間，不合。所以假設不成立，即會有一個

介於 100 與 1008 的正整數 n 滿足

$$\frac{n}{\pi(n)} = 5。$$

【註】當 $n = 360$ 時，可以計算得

$$\pi(360) = 72，\text{即}$$

$$\frac{360}{\pi(360)} = \frac{360}{72} = 5。$$