



龍騰數亦優

因為知識的傳播與分享才造就出人類的偉大
龍騰邀請您 分享寶貴的知識與經驗
共同為數學教育開展出優質的交流園地

投稿議題

1. 高中職教育政策，國內外教育新知
2. 教材探討、教案分享、資訊融入教學分享
3. 教學生活趣聞、教學甘苦談

投稿注意事項

1. 請註明主題、投稿科目、作者簡歷、聯絡電話與地址
2. 本刊有權刪改稿件，若不接受刪修，請務必註明
3. 每篇文章以1000~2000字為限

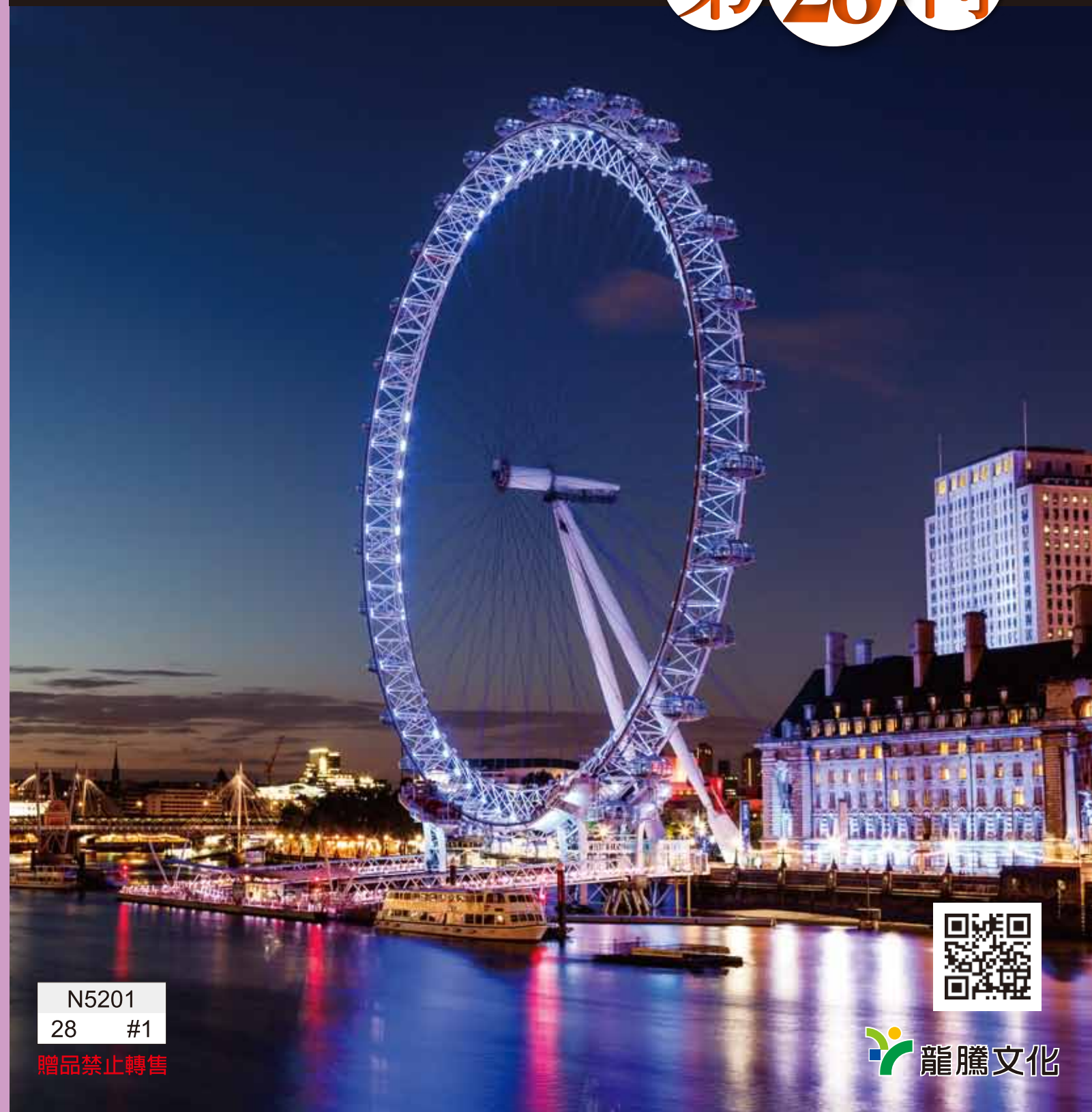
來稿請寄

248 新北市五股區五權七路1號 數學編輯小組
電話：(02)2299-9063 分機 325
傳真：(02)2299-5311
e-mail：albert.liao@lungteng.com.tw

龍騰數亦優

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

第28刊



N5201

28 #1

贈品禁止轉售



龍騰文化

編輯室墨記

我們普遍相信：數學是大自然的語言，亦是一種研究模式的科學。舉凡車庫尺寸、成本估算、平面設計甚至是點滴速率，生活中有許許多多的事物、規律，可以用數學來描述，延續上期的 PISA 試題，讓我們看看更多有趣的新試題吧！

人們時常過於相信並依賴自己的直覺，〈模式：一個美麗的錯誤〉一文，點出在尋找模式時，我們「大膽假設」之後，千萬別忘了「小心求證」。

拜現代科技之賜，「翻轉教室」如今蔚為風潮，然而，誘發學生主動學習的動機，讓他們在課堂前願意花些時間預習，是科技外殼內，「翻轉」真正的核心，〈翻轉教室教案分享〉以一位教師給予學生的學習單為例，分享其對教學方式的改進，編輯室希望能拋玉引玉，激發更多精彩的設計！

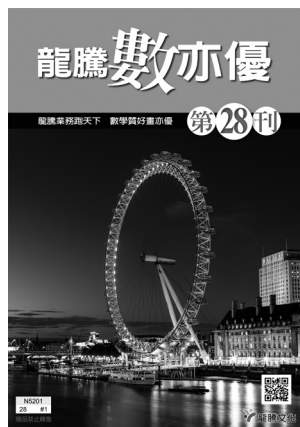
事物之間的巧妙連結，往往令人讚嘆不已，在〈巧思求范德蒙方陣的反方陣與偶遇拉格朗日插值多項式〉裡，述說兩者在數學小鎮漫步，於巷弄轉角的一場邂逅。

許教授精挑細選一篇〈2015 IMO 數學試題〉，快來看看有怎麼樣的新題目吧！

在希爾伯特迷宮裡，究竟白球與黑球要如何相遇呢？翻開動手玩數學，跟著許教授一起來解密吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的内容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 albert.liao@lungteng.com.tw。



發行人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總編輯：陳韻嵐
執行編輯：李彥宜
美術編輯：林佳瑩

發行所：龍騰文化事業股份有限公司
地址：248新北市五股區五權七路1號
電話：(02) 2299-9063
傳真：(02) 2298-9755
創刊日：2006/11/30
出刊日：2015/11/15
網址：<http://www.lungteng.com.tw>

龍騰數亦優

2015. 11 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

許志農 臺灣師大數學系

3

》》 PISA 2012 試題(下)

江慶昱 衛道中學退休教師

15

》》 模式：一個美麗的錯誤

林世偉 臺北市成功高中

25

》》 翻轉教室教案分享

李維昌 國立宜蘭高中

29

》》 巧思求范德蒙方陣的反方陣與偶遇拉格朗日插值多項式

許志農 臺灣師大數學系

33

》》 2015 IMO 數學試題

許志農 臺灣師大數學系

35

》》 動手玩數學專欄

》》 動手玩數學《第 27 期》破解秘笈

PISA 2012試題（下）

許志農／臺灣師大數學系

點滴速率

點滴注射（或靜脈點滴注射）是用來將液體和藥物輸送給病人。

護士需要計算點滴速率 D ，即每分鐘輸入液體的滴數。

他們使用的公式是： $D = \frac{dv}{60n}$ ，其中

d 是點滴係數，即每毫升（mL）液體的滴數

v 是點滴注射液的體積，以毫升為單位

n 是輸完液體所需要的時間，以小時為單位

問題 1：

護士想把點滴注射的時間變成原來的兩倍。請準確描述出：當 n 變成原來的兩倍，且 d 和 v 保持不變的條件之下， D 將會發生怎樣的變化。

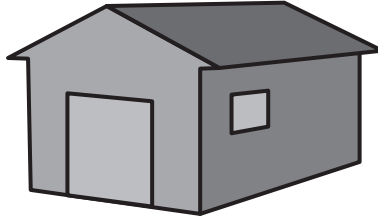
問題 2：

護士還需要根據點滴速率 D 來計算點滴注射液的體積 v 。

給病人注射一瓶點滴速率為每分鐘 50 滴的點滴注射需要 3 小時，這瓶點滴注射液的點滴係數是每毫升 25 滴。點滴注射液的體積是多少毫升（mL）？

車庫

車庫製造商在「基本系列」中，設計一個窗戶搭配一道門的車庫款式。宇喬從「基本系列」中選擇了以下款式，其窗戶和門的位置如下圖。

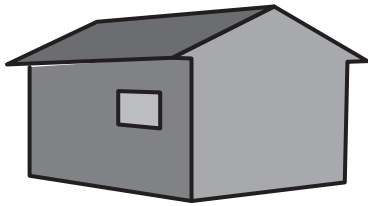


問題 1：

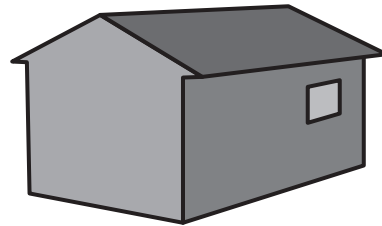
下列顯示了「基本系列」中的四種款式的車庫後方示意圖，其中只有一個圖符合宇喬所選擇的款式。

請問宇喬選擇了哪個款式？圈選 A、B、C 或 D。

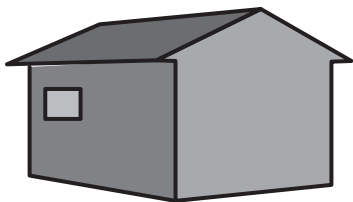
A



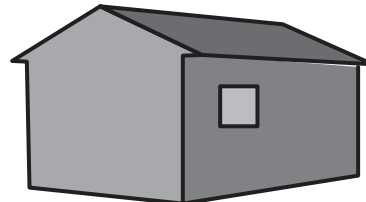
B



C

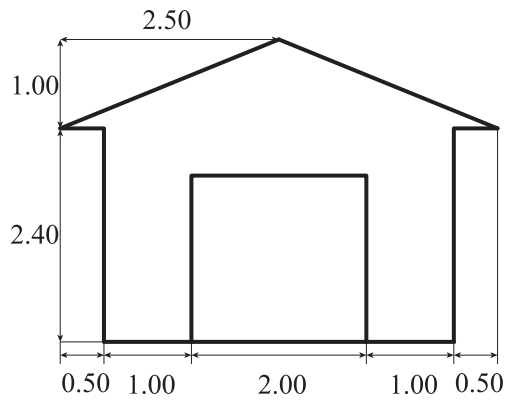


D

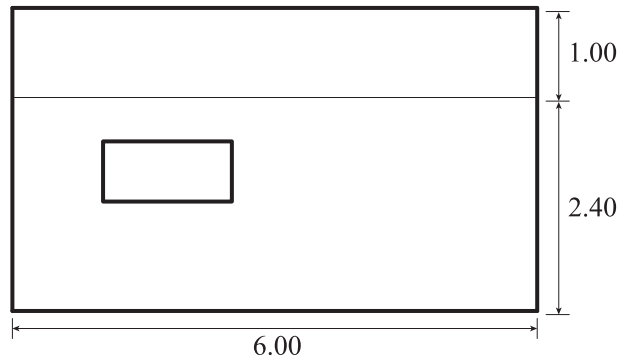


問題 2：

以下兩個平面圖顯示宇喬選擇的車庫的尺寸。以公尺為單位。



正面圖



側面圖

註：圖形未按比例繪製

屋頂由兩個完全相同的長方形部分組成。請計算屋頂的總面積，並寫出你的計算過程。

風力發電



西德蘭鎮正在考慮建造風力發電塔。

西德蘭鎮議會收集到以下型號的風力發電塔的資訊。

型號：	E-82
塔高：	138 公尺
扇葉的數量：	3
每片扇葉的長度：	40 公尺
旋轉的最大速度：	20 轉/分鐘
造價：	3,200,000 西德蘭元
收益：	0.10 西德蘭元/千瓦時
維修成本：	0.01 西德蘭元/千瓦時
使用效率：	每年 97% 的時間可運行
註：千瓦時 (kWh) 是用來度量電能的單位。	

問題 1：

判斷下列有關 E-82 風力發電塔的敘述，是否能夠從所提供的資訊中推論得到。

針對每一個敘述，圈選「是」或「否」。

敘述	是否能夠從所提供的資訊中推論得到？
建造三座風力發電塔總共需要超過 8,000,000 西德蘭元。	是 / 否
發電塔的維修成本約為收益的 5%。	是 / 否
風力發電塔的維修成本取決於 kWh 的生產量。	是 / 否
風力發電塔每年正好有 97 天不能運作。	是 / 否

問題 2：

西德蘭鎮想要估計建造風力發電塔所帶來的成本和利潤。

如果建造 E-82 型發電塔，西德蘭鎮長提出用下面的公式估計財務營收，其中 F 為財務營收（西德蘭元）， y 為時間（年）。

$$F = \underbrace{4000000y}_{\text{每年發電所得的利潤}} - \underbrace{3200000}_{\text{建造風力發電塔的成本}}$$

根據鎮長的公式，至少需要幾年才能收回建造風力發電塔的成本？

- (A) 6
- (B) 8
- (C) 10
- (D) 12

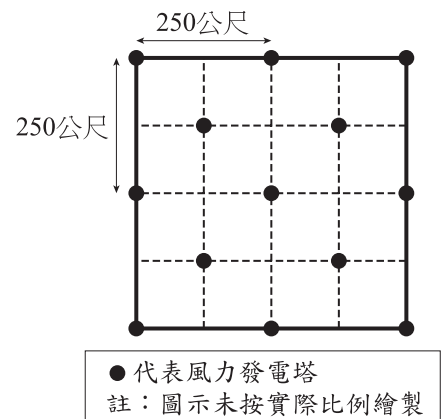
問題 3：

西德蘭鎮決定在一個正方形區域（邊長 = 500m）建造幾座 E-82 型風力發電塔。

根據建造規定，兩座該型號的風力發電塔的塔柱之間的最小距離為扇葉長度的五倍。

如右圖所示，鎮長提出了一個如何安排這些風力發電塔位置的建議。

請解釋為什麼鎮長的建議不符合建造規定，並利用計算來論證你的想法。

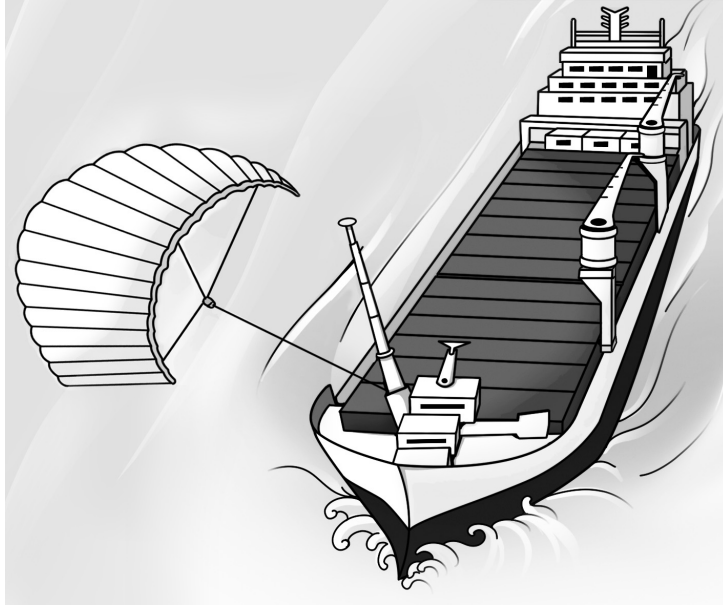


問題 4：

風力發電塔上扇葉尾端的最大速度是多少公里/小時（km/h）？請參照 E-82 型的資料，寫出你的計算過程。

航行

百分之九十五的全球貿易是通過大約 50,000 艘油輪、貨輪和貨櫃船，經由海路運輸推動的，且大多數船隻都使用柴油做為燃料。工程師們正打算研發供這些船隻使用的風力能源，他們提議在船上裝上風箏帆，借助風能來降低柴油消耗和燃料對環境的影響。



© by skysails

問題 1：

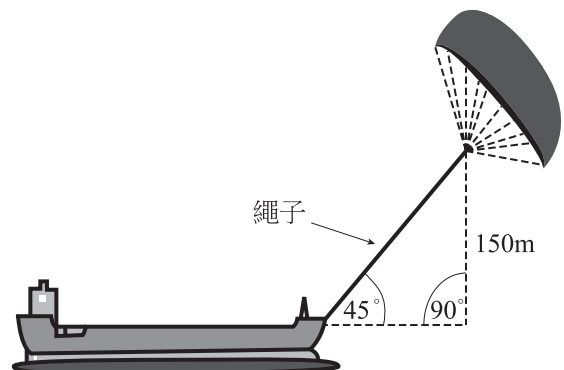
使用風箏帆航行的一個好處是，它的飛行高度是 150m 時，風速比在船甲板上大約高 25%。如果在貨櫃船的甲板上測得風速是 24 km/h，那麼吹向風箏帆的風速大約是多少？

- (A) 6 km/h
- (B) 18 km/h
- (C) 25 km/h
- (D) 30 km/h

問題 2：

如下圖所示，要使拉住風箏帆的繩子與船面成 45° 角，並且它的垂直高度為 150 m，大約需要用多長的繩子？

- (A) 173 m
- (B) 212 m
- (C) 285 m
- (D) 300 m



註：圖示未按實際比例繪製

© by skysails

問題 3：

由於柴油的價格高達每公升 0.42 西德蘭元，新浪號船長正考慮在船上裝設一具風箏帆。
據估計，裝設一具風箏帆可以減少約 20% 的柴油消耗。

名稱：新浪號

類型：貨輪

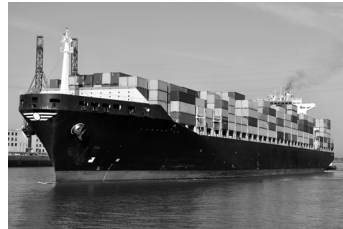
長度：117 公尺

寬度：18 公尺

載重：12,000 噸

最大航速：19 節

無風箏帆時柴油的年消耗量：約 3500000 公升

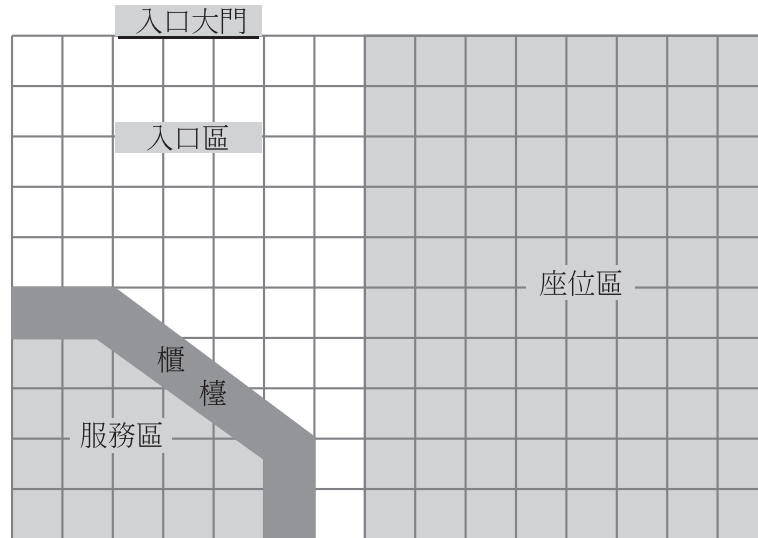


新浪號裝設風箏帆的成本是 2500000 西德蘭元。

大約需要多少年，省下來的柴油費用就可以抵銷裝設風箏帆的成本？寫出計算過程來支持你的答案。

冰淇淋店

下圖為雯雯冰淇淋店的平面圖，她正在裝修店鋪，服務區的周圍是櫃檯。



註：格線中的每個正方形代表 0.5 公尺 $\times$ 0.5 公尺。

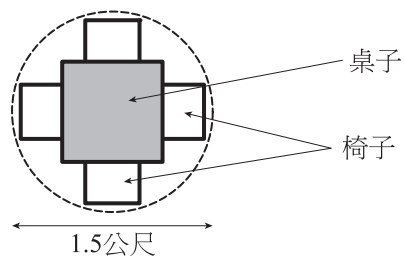
問題 1：

雯雯想沿著櫃檯外緣加裝新的邊飾。她一共需多長的邊飾？寫出你的計算過程。

問題 2：

雯雯也會在店裡鋪設新地板。除了服務區和櫃檯外，店裡的地板總面積是多少？寫出你的計算過程。

問題 3：



雯雯想在店裡添購如上圖所示桌子和四張椅子的組合。圓圈代表每組桌椅所占的地板面積。

為了使顧客有足夠的空間就座，每組桌椅（以圓圈表示）須依照下列的條件來擺放：

- 每組桌椅離牆壁至少 0.5 公尺。
- 每組桌椅離另一組桌椅至少 0.5 公尺。

在冰淇淋店的深色座位區內，雯雯最多可以擺設多少組桌椅？

桌椅組數量： _____ 組

疊骰子

下圖是用七顆相同骰子疊成的造型，骰子的六面分別標示 1 至 6 點。

↓ 俯視



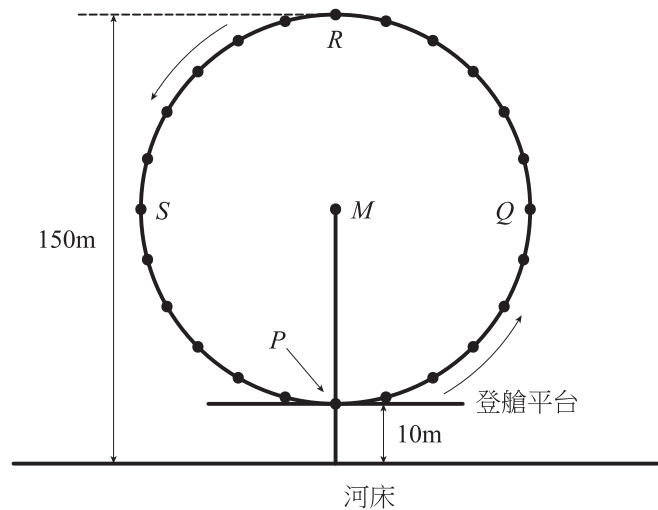
從正上方向下俯視時，只能看到五顆骰子。

問題 1：

從正上方向下俯視時，一共看到的點數和是多少點？

摩天輪

河畔有一個巨大的摩天輪，請看下面的照片和簡圖。



摩天輪的外部直徑為 140 公尺，從最高點到河床的距離是 150 公尺。摩天輪的轉動方向為逆時針運轉。

問題 1：

圖中 M 點為摩天輪的中心。

M 點比河床高出多少公尺 (m)？

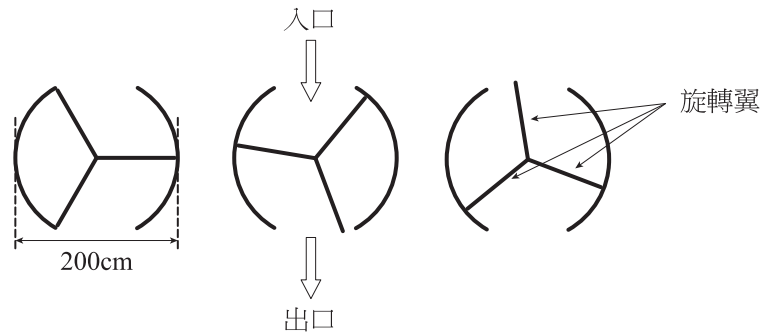
問題 2：

摩天輪以固定的速度轉動，轉一圈恰好是 40 分鐘。約翰從登艙點 P 點進入摩天輪，半小時後約翰會在哪個位置？

- (A) 在點 R 處
- (B) 在點 R 和點 S 之間
- (C) 在點 S 處
- (D) 在點 S 和點 P 之間

旋轉門

三翼式旋轉門在圓形的空間內旋轉，圓形的空間直徑是 2 公尺（200 公分），旋轉門的三片旋轉翼把空間等分成三個部分。下面的俯視圖顯示旋轉翼三個不同的位置。



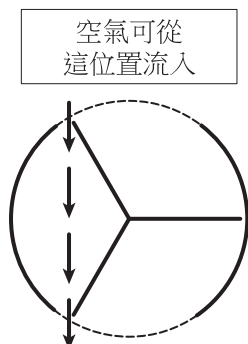
問題 1：

兩片旋轉翼之間的角是多少度？

問題 2：

旋轉門的兩個門口（如右圖中的弧形虛線）的大小相同。如果門口太寬，正在旋轉的旋轉翼便無法形成緊閉的空間，空氣便能在出口和入口之間自由流動，造成不必要的熱量增減。情況如右圖所示。

要使空氣無法在出口和入口之間自由流動，每個門口的最大弧長是多少公分？



問題 3：

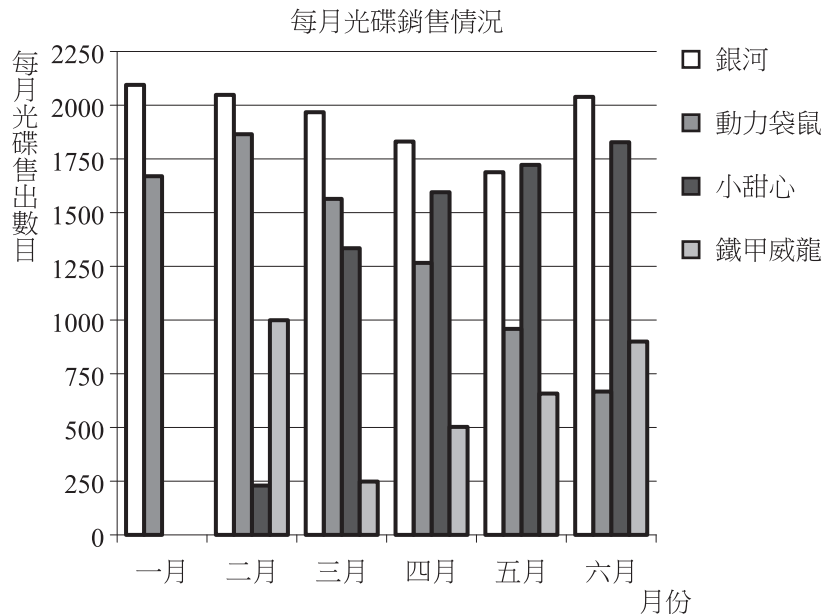
旋轉門每分鐘旋轉 4 圈。門的三個部分每個最多可容納兩個人。

在 30 分鐘內，通過旋轉門進入建築物的最多人數是多少？

(A) 60 (B) 180 (C) 240 (D) 720

唱片排行榜

一月份，銀河樂團和動力袋鼠樂團發行了新光碟。二月份，小甜心樂團和鐵甲威龍樂團也發行了新光碟。下圖顯示這些樂團由一月至六月的光碟銷售量。



問題 1：

四月份鐵甲威龍樂團賣出多少張光碟？

- (A) 250 (B) 500 (C) 1000 (D) 1270

問題 2：

在哪一個月份，小甜心樂團的光碟銷售量首次超過動力袋鼠樂團？

- (A) 沒有任何月份 (B) 三月 (C) 四月 (D) 五月

問題 3：

動力袋鼠樂團的經理感到擔心，因為他們二月到六月的光碟銷售量下降。

如果這個下降趨勢持續，他們七月份的銷售量估計是多少張？

- (A) 70 (B) 370 (C) 670 (D) 1340

播放器故障率

伊雷克公司製造兩種電子設備：影片播放器和音樂播放器。在每天生產結束後，要對產品進行檢測，故障的播放器會被移除並進行修復。

下表顯示各播放器每天製造的平均數量以及平均故障率。

產品類型	播放器每天平均產量（個）	播放器每天平均故障率（%）
影片播放器	2000	5%
音樂播放器	6000	3%

問題 1：

下面是三個關於伊雷克公司每天生產量的敘述，這些敘述正確嗎？

請針對每個敘述，圈選「是」或「否」。

敘述	這個敘述是否正確？
每天生產的播放器有三分之一是影片播放器。	是 / 否
在任何一批數量為 100 的影片播放器中，恰好有 5 個會是故障的。	是 / 否
如果從每天生產的音樂播放器中隨機選取一個進行檢測，此產品需要進行修復的機率是 0.03。	是 / 否

問題 2：

有一位檢測員提出以下看法：

「平均而言，每天送修的影片播放器數量要比每天送修的音樂播放器數量多。」

請判斷檢測員的看法是否正確，並提出一個數學論點來支持你的答案。

問題 3：

創尼斯公司也生產影片和音樂播放器。在每天生產結束後，創尼斯公司也會對產品進行檢測，故障的產品會被移除並進行修復。

下表為這二間公司在影片播放器和音樂播放器每天的平均製造數量與平均故障率的比較。

公司	影片播放器每天平均產量（個）	播放器每天平均故障率（%）
伊雷克公司	2000	5
創尼斯公司	7000	4

公司	音樂播放器每天平均產量（個）	播放器每天平均故障率（%）
伊雷克公司	6000	3
創尼斯公司	1000	2

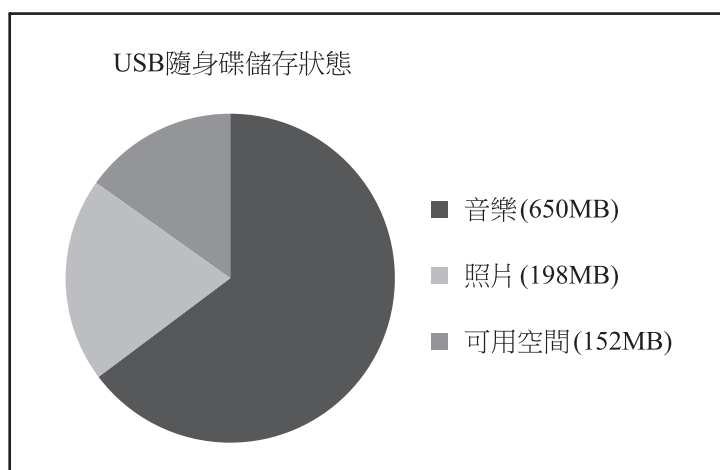
在伊雷克公司和創尼斯公司這兩間公司中，哪一間公司整體的播放器故障率較低？

利用上表的數據，寫出計算過程。

USB 隨身碟

USB 隨身碟是一種體積小、攜帶方便的電腦儲存裝置。

冠達有一個容量為 1 GB (1000 MB) 的 USB 隨身碟，存有音樂和照片。下圖為他的 USB 隨身碟目前的儲存狀態。



問題 1：

冠達想要把 350 MB 的照片集轉存到他的 USB 隨身碟中，但 USB 隨身碟沒有足夠的可用空間。他不想刪除 USB 隨身碟裡的任何照片，但他可以刪除 USB 隨身碟中某兩張音樂專輯。

冠達的 USB 隨身碟中存有下列不同容量大小的音樂專輯。

專輯	容量大小
專輯 1	100 MB
專輯 2	75 MB
專輯 3	80 MB
專輯 4	55 MB
專輯 5	60 MB
專輯 6	80 MB
專輯 7	75 MB
專輯 8	125 MB

如果最多只刪除兩個音樂專輯，冠達的 USB 隨身碟是否就有足夠的空間可以儲存新的照片集？請圈選「是」或「否」，並列出計算過程來支持你的答案。

答案：是／否。請寫下你的過程：

問題 2：

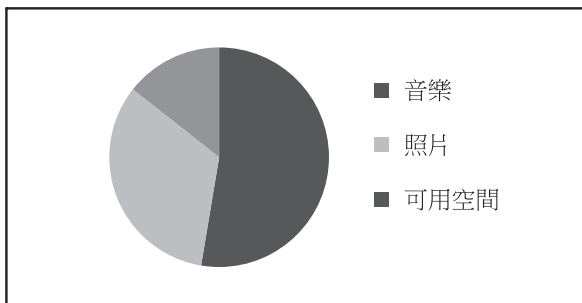
在接下來的幾週裡，冠達刪除了一些照片和音樂、也增加了一些新的照片和音樂。下表是 USB 隨身碟的最新儲存狀態：

音樂	550 MB
照片	338 MB
可用空間	112 MB

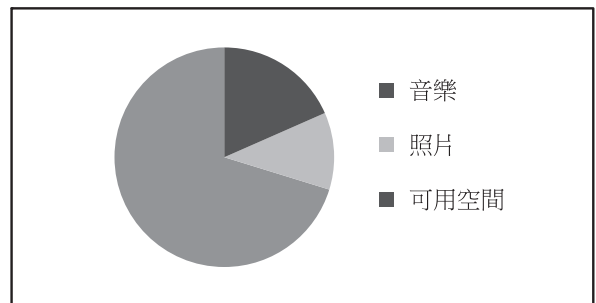
冠達的哥哥給他一個新的 USB 隨身碟，此隨身碟的容量為 2GB（2000MB）且沒有儲存任何資料。冠達把他舊 USB 隨身碟的所有資料轉存到新 USB 隨身碟中。

下面哪一個圖代表新 USB 隨身碟的儲存狀態？請圈選 A、B、C 或 D。

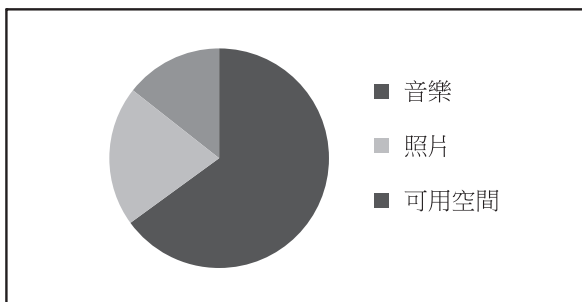
A



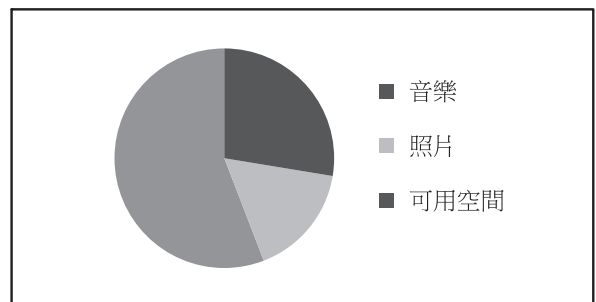
B



C



D



度假公寓

娜娜在網路上發現有一棟度假公寓標價待售。她考慮買下來出租給度假的遊客。

該度假公寓的資訊如下：

房間數目：	1 ×客廳和餐廳 1 ×臥室 1 ×浴室	價格：200000 西德蘭元 
大小：	60 平方公尺 (m ²)	
停車位：	有	
到市中心時間：	10 分鐘	
距離海灘：	直線距離 350 公尺 (m)	
過去 10 年，度假遊客平均使用天數：	每年 315 天	

問題 1：

為了評估度假公寓價格，娜娜請了專家估價。專家以下面的準則來估價：

每平方公尺價格	底價：	每平方公尺 2500 西德蘭元			
附加價格標準	到市中心時間：	超過 15 分鐘： +0 西德蘭元	5 分鐘到 15 分鐘： +10000 西德蘭元	不足 5 分鐘： +20000 西德蘭元	
	距離海灘（直線距離）：	超過 2 km： +0 西德蘭元	1 km 到 2 km： +5000 西德蘭元	0.5 km 到 1 km： +10000 西德蘭元	不足 0.5 km： +15000 西德蘭元
	停車位：	無： +0 西德蘭元	有： +35000 西德蘭元		

假如專家估價比廣告上的售價高，娜娜這位潛在買家就會認為售價「非常理想」。

根據專家的準則，請具體說明這個售價對娜娜是「非常理想」的。

問題 2：

在過去十年，度假的遊客租用度假公寓的平均使用率為每年 315 天。

判斷下列敘述是否可以從這個資訊推論出來。

針對每一個敘述，圈選「是」或「否」。

敘述	敘述是否可以從已知資訊推論出來？
可以確定地說，在過去十年中至少有一年度假公寓被遊客租用的天數剛好是 315 天。	是 / 否
理論上來說，度假公寓有可能在過去十年中，每年被遊客租用的天數都超過 315 天。	是 / 否
理論上來說，度假公寓在過去十年中有可能有一年完全沒有遊客租用。	是 / 否

註： 假設一年有 365 天。

模式：一個美麗的錯誤

江慶昱／衛道中學退休教師

數學是研究模式的科學。史都華（Ian Stewart）在「大自然的數學遊戲」一書中傳達這樣的信念。（模式 pattern，或翻成「胚騰」。）

一、楔子》

1998 年 8 月，清大校園，炎熱的午後。

40 學分進修班每週例行的數學教育演講會將要進行，學員陸續進場，有的興高采烈，有的睡眼惺忪。許多人穿著短褲，連教授也不例外，雖然校園不乏大樹，但陽光太過毒辣。今天演講者是張海潮先生。

「各位同學有什麼問題？」

以前的演講者就直接鋪陳了，甚至於投影片都來了。今天演講有點另類。

二、疑問終於釋懷》

陳之藩先生（1925~2012）在 1992 年 7 月份聯合報副刊發表〈黃金分割為什麼美〉一文（註 1），表示「黃金分割所以美，美在對稱上，如果你用二進位來表示這個神祕數字，就會看得出來……」。

不久，又在同年 12 月份二十一世紀雜誌上發表〈黃金分割也是對稱？〉一文，把聯合報副刊中，「太極生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦，……」的文字刪掉了。

二十一世紀雜誌在臺灣發行的時間很短，剛好我有訂閱，因此一直存疑。於是，我就這個疑問舉手發問。

張教授的回答就如同下列所述：（註 2）

回音壁・再談黃金分割／張海潮（臺大數學系教授）

陳之藩先生七月十二日在聯副發表〈黃金分割為什麼美〉一文，文中的計算和論點卻引起臺大數學系同仁的興趣，幾位同仁討論之後囑我務必寫一短文借聯副向讀者說明。……至於平移對稱：「陳文」指的是 0.618 的表式中一個 1 之後接著兩個 0 繼之以四個 1 而以八個 0 收尾，「陳文」說：「很好記：這是太極生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦的次序。」遺憾的是陳先生計算錯了，這八個零絕不會連續出現，正確的答案是……

【1992-09-01/聯合報/39 版/聯合副刊】

三、如何用二進位法表示黃金比例》

取 0.618 為例，因為 $0.618 < 1$ ，

$$0.618 = a_1 \times \frac{1}{2} + a_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots, \text{ 其中 } a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0,1\},$$

如右圖，每一個步驟乘以 2，如果個位數=1，則把 1 移除再乘以 2，方框中的數字就是 0.618 的二進位表示。

$$\begin{array}{l} 0.618 \times 2 = 1.236 \\ 0.236 \times 2 = 0.472 \\ 0.472 \times 2 = 0.944 \\ 0.944 \times 2 = 1.888 \\ 0.888 \times 2 = 1.776 \\ 0.776 \times 2 = 1.552 \\ 0.552 \times 2 = 1.104 \\ 0.104 \times 2 = 0.208 \end{array}$$

即 $0.618=[1.0011110001\dots]_2$

因為以 0.618 估計 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，誤差太大，所以「八卦」沒多久就消失了。

應該很容易設計一個程式算出黃金比例的二進位法表示。

四、一個無效的模式》

在克卜勒的時代，人們所知道的行星只有水星、金星、地球、火星、木星、土星等六個。

克卜勒 (Johannes Kepler 1571~1630) 在提出令他永垂不朽的行星運動三大定律之前，一直思考一個問題：「為什麼太陽系有六個行星？而不是五個或七個、八個？」，他也一直好奇這些行星和太陽之間的距離為什麼是那樣？到底是遵循什麼規律呢？

有一天，他忽然間得到了靈感。

他想到了柏拉圖的多面體，克卜勒在 1596 年出版的《宇宙的奧秘》書中以柏拉圖多面體以及球的內接和外切 5 種正多面體來描述各行星與太陽距離的關係：

土星與木星間為正方體，木星與火星間是正四面體，火星與地球間是正十二面體，地球與金星間是正二十面體，金星與水星間是正八面體，每一正面體內接於外面那個行星所在的天球，而外切於裡面那個行星所在天球。

更巧的是，能夠滿足這樣內接外切特性的多面體，剛好就是六個，也就回答了太陽系為什麼剛好有六個行星這個困擾他很久的問題。

數術 (numerology) 是尋找模式最簡單的方法，因此也是最危險的。說它簡單是因為任何人都會，說它危險也是基於相同的理由。(大自然的數學遊戲 p.13)

道法自然。把數學跟宇宙聯結一直是人類的夢想，也許陳之藩先生只是跟克卜勒一樣犯了美麗的錯誤。

五、模式的迷思》

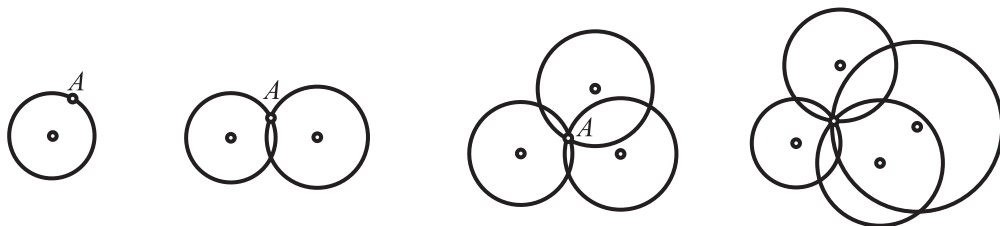
在中學任教，我們常看到類似這樣的考題：

2、3、5、7、□，則□=？

或者以下比較深刻的題目。

(甲) 通過定點 A 的圓，最多把平面分成幾個區域？

這是一個遞迴求解的問題，也可以說是一個歸納的問題，通常我們是這樣解答的：



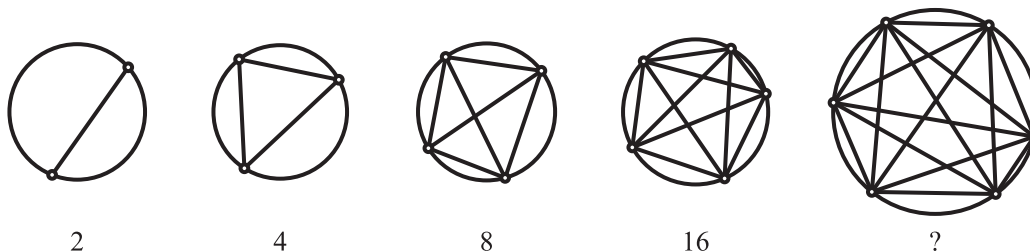
假設 a_n 表示 n 個通過 A 的圓所分割平面的最多區域數，

則 $a_1 = 2$ ， $a_2 = a_1 + 2$ ， $a_3 = a_2 + 3$ ， $a_4 = a_3 + 4$ ， $\dots$ ， $a_n = a_{n-1} + n$ ，

$$\text{所以 } a_n = 2 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}。$$

我們來看一個題目：

（乙）圓上有 n 個點，連接任兩點，如果任三條弦不共點，則這些弦把圓分成幾個區域？



由 $a_2 = 2$ ， $a_3 = 4$ ， $a_4 = 8$ ， $a_5 = 16$ ，似乎 $a_6 = 32$ ，但事實不然， $a_6 = 31$ ，事實上

$$a_n = C_0^n + C_2^n + C_4^n = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)，$$

例如： $n = 6$

(1) 先擺一個圓，內部有一個區域（ $C_0^6 = 1$ ）。

(2) 每加入一條弦多一個區域，6 點任兩點決定一條弦，有 C_2^6 條弦。

(3) 弦的交點，每多一個點就多一個區域，6 點任 4 點決定一個弦交點，有 C_4^6 個點。

所以最大區域數 $= C_0^6 + C_2^6 + C_4^6$ 。請看參考資料 12。

換句話說，（甲）題中 $a_n = a_{n-1} + n$ 可能只是「猜想」的部分，我們認定它有如此遞迴定義的模式也許是一種迷思！

中學生的考題不強調嚴密，無可厚非。但是類似「五行、對稱與黃金分割」這樣的命題就要很謹慎了。科學與偽科學有一條畫不清的界線，任何跨越界線的企圖都會受到嚴格的檢視。

六、後記》

1994 年二十一世紀雜誌第 26 期，蕭昌建先生〈評〈黃金分割也是對稱？〉〉一文對陳之藩先生有很嚴厲的批判。因此，陳之藩先生在 1995 年二十一世紀雜誌第 27 期〈再談黃金分割〉。把黃金分割與五行、節氣扯上了關係。

二十一世紀雜誌 2013 年 2 月號（135 期）王汝發先生發表〈陳之藩：散文家與科學家〉一文，極為推崇陳先生「左手數學右手散文」的能力。

陳之藩先生已於 2012 年 2 月過世，關於黃金分割的論戰也結束了。

也許王汝發先生一文是紀念陳先生逝世週年。且也讓我興起寫這篇文章的念頭，如此因緣，也算了我多年來的一件心事。

七、註與參考資料》

1. 註 1：<http://math1.ck.tp.edu.tw/石厚高/index.htm> 大家談數學篇。
2. 註 2：張教授說聯合報沒有回應他們的「回音壁」，其實副刊是有發表刊誤的。（聯合報 1994/4/6 陳之藩：令人失眠的數。）
3. <http://www.cuhk.edu.hk/ics/21c/> 二十一世紀雜誌 1992 年 12 月號。陳之藩
4. 大自然的數學遊戲（天下文化 Ian Stewart 著 葉李華譯）
5. 黃金比例 http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
6. <http://en.wikipedia.org/wiki/Phidias>
7. http://blog.sina.com.cn/s/blog_6779f7920100hkwu.html 評〈黃金分割也是對稱？〉
8. <http://shs.ntu.edu.tw/shs/?p=5722> 科學的語言、人文的語言、生活的語言。
9. <http://web2.nmns.edu.tw/PubLib/NewsLetter/90/169/10.htm> 克卜勒與正多面體。
10. 一條畫不清的界線 李國偉 <http://www.ios.sinica.edu.tw/ios/publish/3rd/lihkw.htm>
11. <http://math.pro/db/viewthread.php?tid=661&page=2#pid5274>
12. <http://w3.math.sinica.edu.tw/media/media.jsp?voln=163> 數學傳播季刊第 16 卷第 3 期 王子俠。

翻轉教室教案分享

林世偉／臺北市成功高中

相信各位教師對於「翻轉教室（Flipped classroom）」這個名詞不陌生。翻轉教室是要將傳統的教學模式中大多是「教師在課堂中教授課程內容，同學上完課後再做作業或練習」，翻轉成「學生預先看教師準備好的課程內容，而後再到課堂上做更高層次的討論或學習」的教學模式。至於學生如何預習呢？一般來說，通常都是由教師先錄製簡短約 5 到 7 分鐘的影片上傳，學生透過網路及科技產品下載影片進行預習，所以這樣的學習模式是很需要學生在課前願意花一點點時間進行主動的學習。

拜現代科技之賜，很多課程內容都可以放在網路上讓學生查詢和學習。但是想要進行翻轉的教師仍需考慮到家中沒網路或下載設備的學生，並提供預習資料的替代方案。另外要注意的是翻轉教室只是眾多教學模式之一，教師一開始時可以嘗試對一兩堂課進行翻轉，相信對教師來說壓力不會太大，學生也會感覺新奇而提高學習動機。至於哪些課程需要翻轉，還是需要第一線教師針對自己班級的學生設計並編寫適合且有意義的教材。

我就先拋磚引玉的提供自己設計讓學生可以討論的學習單，當然剛剛講過翻轉教室依賴學生的事前預習，為了顧及學生可能沒有科技產品，使用我這份學習單時建議教師可以要求學生先讀課本的內容或是使用學習單的第一頁。我設計的課程是針對一次因式檢驗法，設計的原因為學生常常在這邊的觀念上出現問題，會使用這個方法但不知道為什麼。透過我設計的教案，希望學生能真正了解一次因式檢驗法而且可以知道數學語句和文字使用的精確與必要性，也透過這段教學讓學生在未來的高中課程中看定理或思考數學問題有更深一層的體會。

參考資料》

深耕教與學電子報第三十一期 教學新思維－翻轉課堂（Flipped classroom）廖怡慧著
高中數學龍騰版第一冊
高中數學南一版第一冊

前言》

國中時期我們對於整係數的二次多項式學過了十字交乘法，譬如對於

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 19x + 6 \\ &= (3x + 1)(x + 6) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3x \quad +1 \\ x \quad +6 \\ \hline 18x+1x=19x \end{array}$$

對於二次多項式 $f(x)$ 使用十字交乘法就可以找到 $f(x)$ 的一次因式。如果多項式的次數變多呢？會不會也有什麼方法可以找到一次因式呢？

下面提供一些三次多項式分解因式的例子，但是其中有些因式的部分係數有缺。請先把○填入適合的數，接著試試看能不能發現這些因式有什麼規律。您又是如何找到○內的數字？

$$(1) \quad f(x) = x^3 - 7x - 6 = (x^2 + 3x + 2)(\bigcirc x + \bigcirc)$$

$$(2) \quad f(x) = -x^3 + 3x^2 + x + 12 = (x^2 + x + \bigcirc)(\bigcirc x + \bigcirc)$$

(3) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 16x - 5 = (x^2 - x + \bigcirc)(\bigcirc x + \bigcirc)$

(4) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 5x + 6 = (x^2 + x + \bigcirc)(\bigcirc x + \bigcirc)(\bigcirc x + \bigcirc)$

對於如何分解 $f(x)$ 的一次因式，你有什麼發現？請將你的發現，用文字寫下來。

本頁學習單的目的：複習或確認學生對因式分解有沒有一定的了解。建議教師可將本頁發給學生和要求學生閱讀課本當預習的作業或是上課使用。教師最後可以要求一位學生將自己的發現寫在黑板上，提問其他學生這樣的發現是否是對的，還有沒有其他發現。

牛頓定理（或稱整係數一次因式檢查法）：

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一個整係數 n 次多項式。若一次式 $ax - b$ 是 $f(x)$ 的

因式（其中 a 是正整數， b 是整數且 a, b 互質），則

(1) a 是 $f(x)$ 的最高次項係數 a_n 的因數。

(2) b 是 $f(x)$ 的常數項 a_0 的因數。

(1) 上述的說明在閱讀上，有哪些地方看不明白的？可以把不懂圈起來。

(2) 哪些文字或符號是你認為重要，請寫下來。

(3) 哪些文字或符號是你認為可以省略，請寫下來。

假如有興趣也有時間，同學可以上網查查有關一次因式檢驗法的數學證明喔！

本頁學習單的目的：希望學生可以自行閱讀定理，並可以討論和說明定理內文字和符號的意義。建議教師可以先解決學生看不懂的地方，也可將學生看不懂的地方去反問其他學生。接著票選前三名最重要和最不重要的文字或符號，在票選前可以讓學生提供文字或符號，和向全班解釋重要或不重要的原因。投完票後，教師先不要給任何意見。

下面是需要各位同學討論回答的問題

(1) 定理中為什麼需要整係數的多項式？

(2) 定理中為什麼需要 a 與 b 互質？如果不互質，定理會錯嗎？

(3) 請問定理中「 a 是正整數， b 是整數」，可不可以改成 a ， b 都是正整數？

(4) 請問定理中「(1) a 是 $f(x)$ 的最高次項係數 a_n 的因數，(2) b 是 $f(x)$ 的常數項 a_0 的因數」，(1)(2)中間要填入「且」還是「或」？為什麼？

(5) 請問將上述定理改寫成「整係數 n 次多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 。若 a 是最高次項係數 a_n 的正因數， b 是常數項 a_0 的因數，則 $ax - b$ 是 $f(x)$ 的一次因式」。改寫後的定理會成立嗎？

(6) 請找出 $f(x) = x^3 + x + 1$ 的所有一次因式 $ax - b$ （其中 a ， b 是整數）。

本頁學習單的目的：讓學生可以討論且思辨定理的內容，達到更高層次的學習。建議教師採異質性分組，分六組討論。討論完由教師隨機指定各組一人上臺報告一題，報告完由老師引導出正確答案，再回到前面投票的結果讓學生思考數學語句的精煉和內涵。

巧思求范德蒙方陣的反方陣與偶遇拉格朗日插值多項式

李維昌／國立宜蘭高中

研究目的：巧思求范德蒙方陣的反方陣並應用到求過 $(n+1)$ 個不同點的多項式，此多項式恰巧是拉格朗日插值多項式

研究過程：

一、巧思求范德蒙方陣的反方陣

1. 已知 $x_i, i=1, 2, \dots, n, n+1$ 為 $n+1$ 個相異實數

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \text{ 為范德蒙方陣。}$$

如何利用巧思求 A^{-1} 呢？請看底下的論述：

2. 給定 $i=1, 2, \dots, n, n+1$ ，

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \prod_{\substack{1 \leq j \leq n+1 \\ j \neq i}} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \\ &= b_{1i} + b_{2i}x + b_{3i}x^2 + b_{4i}x^3 + \cdots + b_{n-1,i}x^{n-2} + b_{n,i}x^{n-1} + b_{n+1,i}x^n \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} & x^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1i} & b_{2i} & b_{3i} & \cdots & b_{n-1,i} & b_{n,i} & b_{n+1,i} \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } f_i(x_k) = \begin{cases} 1, \dots, k=i \\ 0, \dots, k \neq i \end{cases} \quad k=1, 2, \dots, n, n+1。$$

3. 由 2. 的論述，可得 $AB = I_{n+1}$ ，其中

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1,n} & b_{1,n+1} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2,n} & b_{2,n+1} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3,n-1} & b_{3,n} & b_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} & b_{n-1,n+1} \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{n,n} & b_{n,n+1} \\ b_{n+1,1} & b_{n+1,2} & b_{n+1,3} & \cdots & b_{n+1,n-1} & b_{n+1,n} & b_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow B = A^{-1}$ 即為范德蒙方陣的反方陣。

二、偶遇拉格朗日插值多項式》

1. $f(x)$ 為 n 次多項函數，圖形過 $(n+1)$ 個不同的點， $(x_i, f(x_i)), i=1, 2, \dots, n+1$ ，

首先假設 $f(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ ， c_i 為特定常數， $i=0, 1, 2, \dots, n$ ，以矩陣表示，

$$A \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \\ f(x_{n+1}) \end{bmatrix}, \text{ 其中}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \text{ 為范德蒙方陣。}$$

2. 利用 B 為 A 的反方陣，

$$\text{可得} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \\ f(x_{n+1}) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^n c_i x^i \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} & x^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} & x^n \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \cdots & f(x_{n-1}) & f(x_n) & f(x_{n+1}) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & \cdots & f_{n-1}(x) & f_n(x) & f_{n+1}(x) \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \cdots & f(x_{n-1}) & f(x_n) & f(x_{n+1}) \end{bmatrix}^T \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \cdot f_i(x) \text{ 恰巧為拉格朗日插值 } n \text{ 次多項式。} \end{aligned}$$

三、範例》

已知 $f(x)$ 為 3 次多項函數，圖形過 4 個不同的點， $(x_i, f(x_i))$ ， $i=1,2,3,4$ ，試求 $f(x)=?$

1. 首先假設 $f(x) = \sum_{i=0}^3 c_i x^i$ ， c_i 為特定常數， $i=0,1,2,3$ ，以矩陣表示，

$$A \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{bmatrix}, \text{ 其中 } A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \text{ 為范德蒙方陣。}$$

2. 巧思求 A 的反方陣。

給定 $i=1,2,3,4$ ，

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \prod_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \\ &= b_{1i} + b_{2i}x + b_{3i}x^2 + b_{4i}x^3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1i} & b_{2i} & b_{3i} & b_{4i} \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\ &= \frac{-x_2x_3x_4 + (x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x - (x_2 + x_3 + x_4)x^2 + x^3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\ &= b_{11} + b_{21}x + b_{31}x^2 + b_{41}x^3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} \end{bmatrix}^T, \\ f_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\ &= \frac{-x_1x_3x_4 + (x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4)x - (x_1 + x_3 + x_4)x^2 + x^3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\ &= b_{12} + b_{22}x + b_{32}x^2 + b_{42}x^3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \\
&= \frac{-x_1x_2x_4 + (x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4)x - (x_1 + x_2 + x_4)x^2 + x^3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \\
&= b_{13} + b_{23}x + b_{33}x^2 + b_{43}x^3 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} \end{bmatrix}^T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \\
&= \frac{-x_1x_2x_3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + x^3}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \\
&= b_{14} + b_{24}x + b_{34}x^2 + b_{44}x^3 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} \end{bmatrix}^T,
\end{aligned}$$

因此 $i=1,2,3,4$,

$$f_i(x_k) = \begin{cases} 1, \dots, k=i \\ 0, \dots, k \neq i \end{cases} \quad k=1,2,3,4,$$

我們可以得到

$$B = \begin{bmatrix} \frac{-x_2x_3x_4}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} & \frac{-x_1x_3x_4}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} & \frac{-x_1x_2x_4}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} & \frac{-x_1x_2x_3}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \\ \frac{(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} & \frac{(x_1x_3+x_1x_4+x_3x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} & \frac{(x_1x_2+x_1x_4+x_2x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} & \frac{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \\ \frac{-(x_2+x_3+x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} & \frac{-(x_1+x_3+x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} & \frac{-(x_1+x_2+x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} & \frac{-(x_1+x_2+x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \\ \frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} & \frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} & \frac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} & \frac{1}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \end{bmatrix},$$

此時 $AB = I_4 \Rightarrow B = A^{-1}$ 即為 A 的反方陣。

3. 利用 B 為 A 的反方陣，

$$\text{可得} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^3 c_i x^i \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) \end{bmatrix}^T \\
&= \sum_{i=1}^4 f(x_i) \cdot f_i(x) \text{ 恰巧為拉格朗日插值 3 次多項式。}
\end{aligned}$$

2015 IMO數學試題

(Day : 1)

考試時間：4 小時 30 分

每題 7 分

問題 1：

對於平面上的有限點集 S ，如果任給 S 中的兩個相異點 A, B ，都存在一點 $C \in S$ 滿足 $AC = BC$ ，就稱 S 是平衡的；如果任給 S 中的三個相異點 A, B, C ，皆不存在一點 $P \in S$ 滿足 $PA = PB = PC$ ，就稱 S 是無中心的。

(a) 證明：對所有的整數 $n \geq 3$ ，皆存在 n 個點的平衡點集。

(b) 找出所有的整數 $n \geq 3$ ，使得 n 個點的平衡且無中心的點集是存在的。

問題 2：

找出所有的三元正整數組 (a, b, c) ，使得

$$ab - c, bc - a, ca - b$$

三數中的每一個數都是 2 的乘幂。

(2 的乘幂指的是形如 2^n 的整數，其中 n 為非負整數。)

問題 3：

設 ABC 為銳角三角形，其中 $AB > AC$ ， Γ 是它的外接圓， H 是它的垂心，而 F 是過 A 的高的垂足。令 M 為 BC 邊的中點。設 Q 為 Γ 上的一點，滿足 $\angle HQA = 90^\circ$ ；而 K 為 Γ 上的另一點，滿足 $\angle HKQ = 90^\circ$ 。已知 A, B, C, K, Q 這些點皆不相同，且依此順序落在 Γ 上。

證明：三角形 KQH 的外接圓與三角形 FKM 的外接圓相切。

問題 4：

設三角形 ABC 的外接圓為 Ω ，外心為 O 。一個以 A 為圓心的圓 Γ 與線段 BC 交於 D ， E 兩點，其中 B ， D ， E ， C 皆相異，並依此順序落在直線 BC 上。令點 F ， G 為 Γ 與 Ω 的交點，使得 A ， F ， B ， C ， G 各點依此順序落在 Ω 上。令三角形 BDF 的外接圓與線段 AB 的另一個交點為 K ，而三角形的 CGE 的外接圓與線段 CA 的另一個交點為 L 。

設直線 FK 與直線 GL 相異，且兩線交於點 X 。證明： X 落在直線 AO 上。

問題 5：

令 $\mathbb{R}$ 代表所有實數所成的集合。找出所有函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得對任意實數 x 與 y ，

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

均成立。

問題 6：

整數數列 $a_1, a_2, \dots$ 滿足下列條件：

- (i) 對所有的 $j \geq 1$ ，均滿足 $1 \leq a_j \leq 2015$ ；
- (ii) 對所有的 $1 \leq k < \ell$ ，都有 $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ 。

證明：存在兩個正整數 b 與 N ，使得對所有滿足 $n > m \geq N$ 的整數 m 與 n ，

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

均成立。

來源說明：

來自許志農教授的個人科普網站《非想非非想 數學網》

<http://www.math.ntnu.edu.tw/museum/math-education/imo>

專欄 動手玩數學

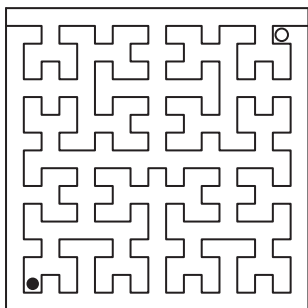
許志農／臺灣師大數學系



遊戲 109

☆☆

下圖是德國數學家希爾伯特在 1891 年提出的圖形，用它做為迷宮，稱為希爾伯特迷宮。在這希爾伯特的方形迷宮裡，白球與黑球要如何相遇呢？



〔玩鎖・玩索〕

處理迷宮問題可以用「摸著石頭過河」一語道破，這方法雖然笨拙，但卻有效，且萬無一失。所謂「摸著石頭過河」就是貼著某邊的牆壁一直前進，像小孩子一樣，扶著一邊牆壁走，走到最後肯定會得到答案。試試看，將白球沿著一邊前進，看看會有怎樣的事情發生！



遊戲 110

☆☆

找正整數 x ，使得 $1598 + x$ 及 $1766 + x$ 都是完全平方數。

〔玩鎖・玩索〕

這問題起源於尤拉時代，據說在當時想要找出四個正整數，使得這四個正整數中，任兩個的和都是完全平方數。尤拉先找出三個數 $a = 65570$ ， $b = 45986$ ， $c = 18530$ ，並發現這三個數的任兩個的和 $a + b$ ， $b + c$ ， $c + a$ 都是完全平方數。於是尤拉想擴充至四個，並令第四個數為 x ，也就是讓 a ， b ， c ， x 四數中，任兩數的和都是完全平方數，而此時 x 必須滿足

$$\begin{cases} 65570 + x = p^2 \\ 45986 + x = q^2 \\ 18530 + x = r^2 \end{cases}$$

當時沒人可以解此題，尤拉首先想到如下的妙法：因為

$$p = \sqrt{65570 + x} \geq \sqrt{65570} \approx 256.07,$$

$$q = \sqrt{45986 + x} \geq \sqrt{45986} \approx 214.44,$$

所以 $p + q \geq 256.07 + 214.44 = 470.51$ 。又由

$$19584 = (65570 + x) - (45986 + x)$$

$$= p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$$

$$\geq 470(p - q)$$

得

$$p - q \leq \frac{19584}{470} \approx 41.67.$$

故 $p = q + 1$ ， $q + 2$ ， $q + 3$ ， $\dots$ ， $q + 41$ ，再逐一討論，可解得 p ， q ， r 的值。

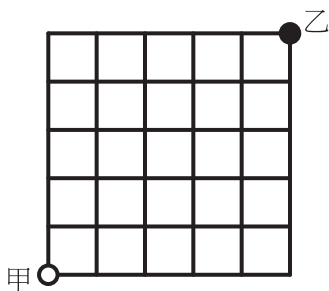
就讓我們來到尤拉的腳下，跟隨尤拉的步法，解決比較容易的這道遊戲。



遊戲 111

☆☆☆☆

在一張 5×5 的棋盤，甲持白子在左下角的位置，乙持黑子在右上角的位置。



隨後兩人輪流（甲先，乙後）移動自己的棋子，每一次可沿一條橫線或一條縱線之一至少走一格，即甲每次只能向右或往上移動白色棋子；而乙每次只能向左或往下移動黑色棋子，並遵守如下規則：

1. 不允許與對方的棋子在同一水平或鉛直線上。
 2. 不能越過對方棋子所在的水平或鉛直線。
- 勝負規則：輪到誰無路可走就算失敗。完成下列兩個問題：
- (1) 誰有取勝的策略。
 - (2) 如果棋盤大小改成 8×5 ，那麼結果又如何？

〔玩鎖・玩索〕

這是 2006 年在台北舉辦的〈兩岸數學競賽教育研討會…從華杯賽看數學資優人才的發掘與培養〉中，麥曦與楊建輝講稿中的題目，經過適當修題而成的一道遊戲。這道遊戲在廣州地區，是提供給小六或初一的資優生使用的。解題關鍵在於如何發現對稱的規律。



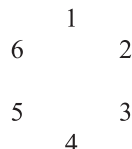
遊戲 112

☆☆

有一道稱為「留一人，殺一人」的遊戲是這樣玩的：將

1, 2, 3, 4, 5, 6

六個人依順時針圍一圓圈而站，其中編號 1 號的人是酋長，如下圖所示：



現在從 1 號的酋長開始，留一人，殺一人，也就是說，1 號留，2 號被殺，3 號留，4 號被殺，5 號留，6 號被殺；接下來又從留下的人中實施留一人，殺一人，1 號留，3 號被殺，5 號留。如果繼續的話，那麼下一個被殺的人是 1 號酋長。但是酋長不能被殺，所以遊戲停止於酋長被殺之前。當遊戲停止時，留下的人只剩酋長與 5 號兩人。

將 6 人推廣到一般的 n 人，當遊戲停止時，令留下的人數有 F_n 人，例如 $F_6 = 2$ ，數列 $\langle F_n \rangle$ 稱為碎形數列，可以列出如下：

1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 3, 6, 2, 7, 4, 8, 1, 9, 5, 10, 3, 11, 6, 12, 2, 13, 7, 14, 4, 15, 8, 16, 1, 17, 9, 18, 5, 19, 10, 20, 3, 21, 11, 22, 6, 23, 12, 24, 2, 25, 13, 26, 7, 27, 14, 28, 4, 29, 15, ...

- (1) 當 $2n+1$ 人玩此遊戲時，留下的人數有幾人？即求碎形數列的第 $2n+1$ 項 F_{2n+1} 的值。
- (2) 碎形數列是一種具有高度自我相似性的數列，將碎形數列的每一個第一次出現的數刪除，觀察剩下數列的規律，求碎形數列接下來五項的值是多少？

〔玩鎖・玩索〕

如果將碎形數列的每一個第一次出現的數刪除，將發現剩下的數列與原來一樣，如下圖所示：

$1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 3, 3, 2, 4, 4, 8, 1, 9, 5, 10, 2, 7, 13, 4, 14, 8, 15, 1, 17, 9, 18, 5, 19, 10, 20, 3, 21, 11, 22, 6, 23, 12, 24, 2, 25, 13, 26, 7, 27, 14, 28, 4, 29, 15, \dots$

根據這規律及(1)可以求得接下來五項的數字。

C. Kimberling 與 Harris S. Shultz 設計過一種翻牌的遊戲來詮釋碎形數列，我看了這翻牌遊戲之後，想起某位做「殺 α ，留 β 遊戲」的科展與碎形數列相關，這裡就借用「殺 1，留 1 遊戲」來敘述碎形數列。事實上，許多事物都可以產生具有高度自我相似性的數列，例如，將下表所列的正無理數依大小順序排列，得

$$a_1 + b_1\sqrt{2} < a_2 + b_2\sqrt{2} < a_3 + b_3\sqrt{2} < \dots \\ < a_n + b_n\sqrt{2} < \dots$$

$1+\sqrt{2}$	$1+2\sqrt{2}$	$1+3\sqrt{2}$	$1+4\sqrt{2}$	$\dots$
$2+\sqrt{2}$	$2+2\sqrt{2}$	$2+3\sqrt{2}$	$2+4\sqrt{2}$	$\dots$
$3+\sqrt{2}$	$3+2\sqrt{2}$	$3+3\sqrt{2}$	$3+4\sqrt{2}$	$\dots$
$4+\sqrt{2}$	$4+2\sqrt{2}$	$4+3\sqrt{2}$	$4+4\sqrt{2}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

數列 $\langle a_n \rangle$ 的前幾項為

$1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, \dots$

數列 $\langle a_n \rangle$ 也是碎形數列的一種。將 $\sqrt{2}$ 改成其它具體的無理數，如 $\sqrt{3}$ ， $\sqrt[3]{2}$ ， π 等，是一道值得研究的問題。

動手玩數學~破解祕笈

第27期

遊戲 105

(1) 因為 M 是 $\overline{AB}$ 的中點，

$$\text{所以 } M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right),$$

即 C 的 x 坐標為 $\frac{a+b}{2}$ 。

又 C 在拋物線上，所以 $C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{(a+b)^2}{4}\right)$

因為 $y' = (x^2)' = 2x$ ，所以拋物線上過 C 點的切線方程式之斜率為 $2 \cdot \frac{a+b}{2} = a+b$ 。

切線方程式為

$$\left(y - \frac{(a+b)^2}{4}\right) = (a+b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right),$$

整理得

$$(a+b)x - y = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

因為直線 AB 的斜率

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

與切線斜率相同，所以兩線平行。

(2) 利用行列式的公式，得三角形 ABC 的面積為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} \frac{a+b}{2} - a & \frac{(a+b)^2}{4} - a^2 \\ b-a & b^2 - a^2 \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} (b-a) \left(\frac{a+b}{2} - a \right) \left| \begin{array}{cc} \frac{a+b}{2} + a & \\ b+a & \end{array} \right| \end{aligned}$$

的絕對值。展開得三角形 ABC 的面積為

$$\frac{(a-b)^3}{8}.$$

(3) 因為直線 AB 的方程式為

$y = (a+b)x - ab$ ，所以拋物線弓形面積為

$$\int_b^a [(a+b)x - ab - x^2] dx$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{a+b}{2} x^2 - abx - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_b^a \\ &= \frac{a+b}{2} (a^2 - b^2) - ab(a-b) - \frac{a^3 - b^3}{3} \\ &= \frac{(a-b)^3}{6}. \end{aligned}$$

(4) 從(2)與(3)知道：弦 AB 所對應的拋物線弓形面積與三角形 ABC 的面積比

$$\frac{(a-b)^3}{6} : \frac{(a-b)^3}{8} = 4 : 3.$$

遊戲 106

如下圖所示，球撞到 A_1 點的入射角

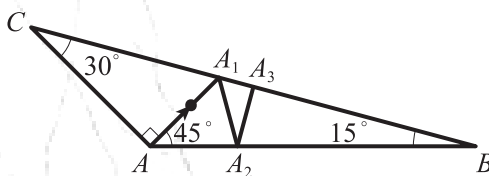
$$\theta_1 = \angle AA_1C = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ,$$

球撞到 A_2 點的入射角

$$\theta_2 = \angle A_1A_2A = 15^\circ + \angle A_2A_1B = 15^\circ + \theta_1 = 75^\circ,$$

同理球撞到 A_3 點的入射角

$$\theta_3 = \angle A_2A_3A_1 = 15^\circ + \theta_2 = 90^\circ$$



因為球撞到 A_3 點的入射角為 90° ，即 $\overline{A_2A_3}$ 與邊 $\overline{BC}$ 垂直，所以球撞到 A_3 點後會沿原來的路徑跑回去。因此，球所行經的路徑依序為

$$A, A_1, A_2, A_3, A_2, A_1, A, A_1, A_2, A_3, A_2, A_1, \dots$$

遊戲 107

(1) ① 當 $n=2$ 時，由左式 $= \sqrt{2} \approx 1.414$ ，右式

$$= \frac{3}{\sqrt{2+2}} = 1.5 \text{ 知不等式成立。}$$

② 設 $n=k$ 時不等式成立，即

$$A = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots k}}}} < \frac{3}{2^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{k+2}} = B.$$

當 $n=k+1$ 時，利用上述不等式，得

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\sqrt{k\sqrt{k+1}}}}} = \sqrt[k]{k+1}A \\
&< \sqrt[k]{k+1}B = \frac{3\sqrt[k]{k+1}}{\sqrt[k-1]{k+2}} = 3\sqrt[k]{\frac{k+1}{(k+2)^2}} \\
&< 3\sqrt[k]{\frac{1}{k+3}} \\
&= \text{右式}。
\end{aligned}$$

根據數學歸納法，不等式成立。

(2) 根據(1)的不等式，我們只需證明不等式

$$\frac{3}{\sqrt[n-1]{n+2}} < 3 \text{ 或 } 1 < \sqrt[n-1]{n+2}$$

成立即可，而這不等式又等同於不等式

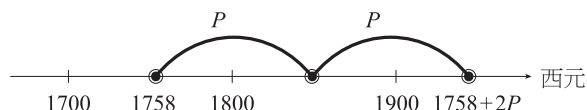
$$1 < n+2,$$

顯然成立。故對每個大於 1 的整數 n ，恆有

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}} < 3。$$

遊戲 108

(1) 將彗星出現的數線圖描繪如下：

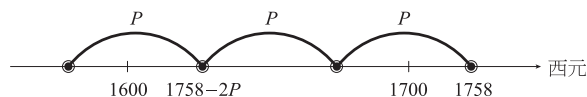


因為下一次出現落在 1801 年至 1900 年之間，再次出現是 1901 年以後的事了。由此推得不等式

$$1758 + 2P \geq 1901 \Rightarrow P \geq 71.5。$$

因為週期 P 是個正整數，所以 $P \geq 72$ 。

(2) 將彗星出現的數線圖描繪如下：



因為上兩次出現落在 1601 年至 1700 年之間，再上次出現是 1600 年以前的事了。

由此推得不等式

$$1758 - 2P \geq 1601 \Rightarrow P \leq 78.5。$$

因為週期 P 是個正整數，所以 $P \leq 78$ 。

(3) ① 若 $P = 72$ ，則哈雷彗星在 1110 年與 1182 年將兩度光臨第十二世紀（與觀測不符）。

② 若 $P = 73$ ，則哈雷彗星在 1101 年與 1174 年將兩度光臨第十二世紀（與觀測不符）。

③ 若 $P = 74$ ，則哈雷彗星在 1018 年與 1092 年將兩度光臨第十一世紀（與觀測不符）。

④ 若 $P = 75$ ，則哈雷彗星在 1008 年與 1083 年將兩度光臨第十一世紀（與觀測不符）。

⑤ 若 $P = 77$ ，則哈雷彗星在第十四世紀僅光臨地球一次（在 1373 年），與觀測不符。

⑥ 若 $P = 78$ ，則哈雷彗星在第十四世紀僅光臨地球一次（在 1368 年），與觀測不符。

⑦ 若 $P = 76$ ，則哈雷彗星光臨地球的次數與觀測的相符。

綜合得到，哈雷彗星的週期為 76 年。

(4) 哈雷彗星將於西元

$$1758 + 4 \cdot 76 = 2062$$

年再度光臨地球。