龍騰數亦優

因為知識的傳播與分享才造就出人類的偉大
龍騰邀請您　分享寶貴的知識與經驗
共同為數學教育開展出優質的交流園地

投稿議題

1.高中職教育政策，國內外教育新知
2.教材探討、教案分享、資訊融入教學分享
3.教學生活趣聞、教學甘苦談

投稿注意事項

1.請註明主題、投稿科目、作者簡歷、聯絡電話與地址
2.本刊有權刪改稿件，若不接受刪修，請務必註明
3.每篇文章以1000～2000字為限

來稿請寄

248 新北市五股區五權七路1號　數學編輯小組
電話：(02)2299-9063 分機 372
傳真：(02)2298-9755
e-mail :joanne_lee@ lungteng.com.tw

龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優　第25刊

N5201
25　#1

龍騰文化

編輯室墨記

十二年國教已勢在必行，許志農教授將「兩岸四地華羅庚金盃少年數學菁英邀請賽」的遊戲題目與解析稍做修飾，提供給老師們做為數學選修課程或特色課程的參考資料，讓高中的數學課程也能活潑與趣味化，以吸引學生的學習興趣。

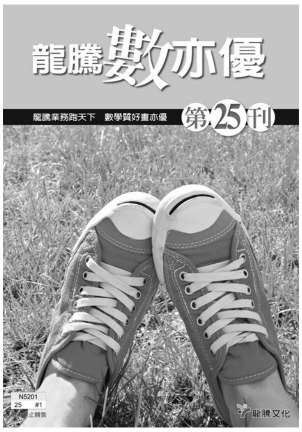
前一陣子才結束 2014 世界盃足球賽，江慶昱老師趁著這股足球熱，將帶領我們探一探傳統足球面上為什麼非有正五邊形不可的祕密，而這個祕密跟化學也有關係嗎？葉善雲老師在這一期將帶大家用「直尺與圓規」這兩樣從小就開始使用的工具，製作出多個「正多邊形」，讓我們跟著老師的腳步，一同鑽進尺規作圖的樂趣裡吧！

此外，您知道可以用 4 種方法證明一個絕對不等式嗎？究竟吳建生老師要怎麼證明呢？快看看〈四歸一〉中的說明。您有想過綁鞋帶也有分「美式綁帶法」與「鞋店式綁帶法」嗎？哪一種綁帶法需要的鞋帶長度比較短呢？請看〈國立臺灣師範大學數學系 103 學年度大學甄選入學指定項目甄試試題〉的說明。

我們也常常在颱風來襲時會聽到氣象播報風壓的大小，生活週遭隨處可見的戶外廣告招牌能不能承受颱風來臨時相對應的風壓？招牌被吹落的機會有多大？路人有沒有危險？……，試試看動手玩數學中的遊戲 98，您可以求出各風級對應的風壓是多少嗎？讓我們一起試試看吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的內容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 joanne_lee@lungteng.com.tw。



發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
執行編輯：李彥宜
美術編輯：林佳瑩

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地 址：248新北市五股區五權七路1號
電 話：(02)2299-9063
傳 真：(02)2298-9755
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2014/11/12
網 址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2014.11目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

兩岸四地華羅庚金盃少年數學菁英邀請賽

許志農／臺灣師大數學系

◎第一、二屆請見龍騰數亦優第 24 刊、第三屆請見龍騰數亦優第 13 刊。

第四屆

一、競賽試題

＊第一題（限時 15 分鐘）

從以下的數字卡中，選擇適當的字卡（卡數不限），把字卡上的數字加起來，所得的數必須要是質數。

19	49	63	26	20	9	13	52	6	31
15	24	36	1	2	82	4	33	12	5
6	75	8	29	3	11	22	46	7	58

數字卡共 30 張

把組合所得的質數及數式記錄在以下所附的答題紙上。

補充：1. 每張數字卡在每次組合中不得重複使用；

2. 所得的質數的數量愈多，得分愈高；

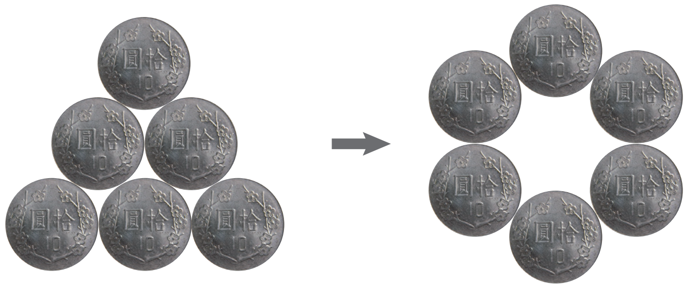
3. 所得的質數之和愈大，得分愈高。

答題紙：

	算式	答案
例	1+2	3
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		
14.		
15.		

＊第二題（限時 10 分鐘）

如下圖所示，有六枚硬幣拼砌成一等邊三角形，然後每次只准將一枚硬幣在桌面上平移滑動，不准改動其他硬幣的位置，且移動後的該枚硬幣必須要與最少兩枚硬幣是接觸的。在這規定下，要把該等邊三角形變成一正六邊形，問最少要滑動多少枚硬幣？隊員透過討論後，由隊長先說出要滑動硬幣的枚數，然後進行硬幣滑動操作。

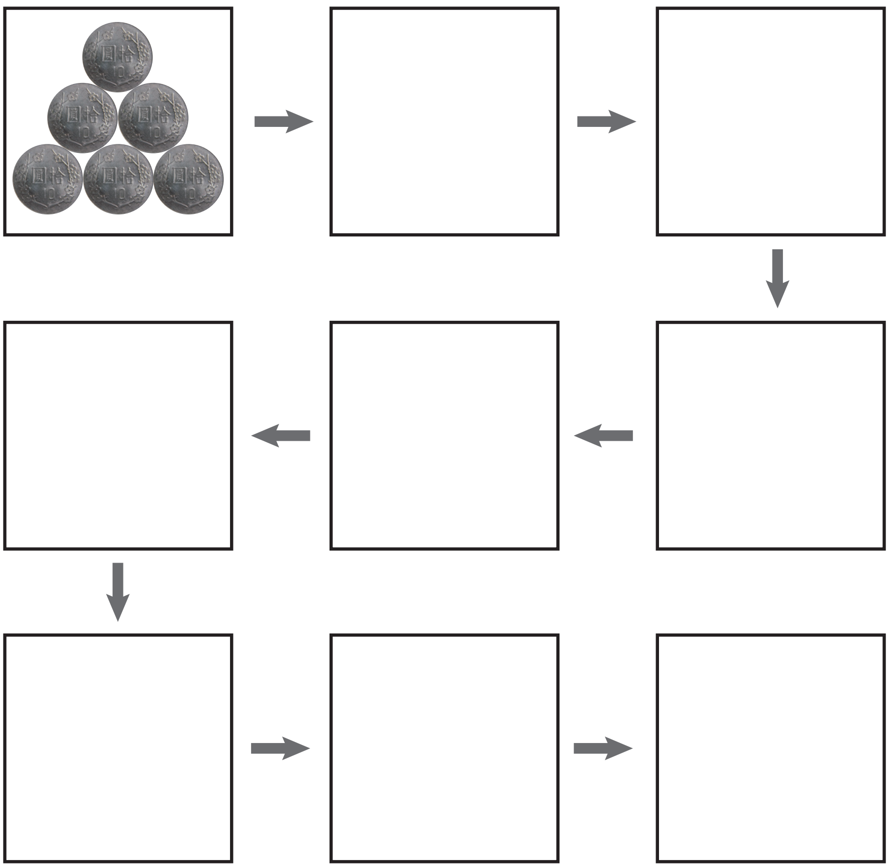


補充：1. 能夠在正確的最少滑動硬幣枚數下完成該次活動，得分愈高；

2. 以最快時間，準確完成活動，得分愈高。

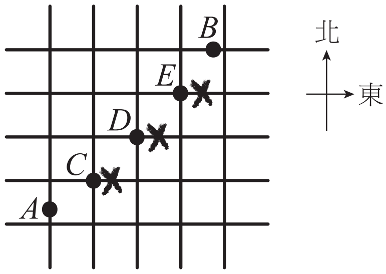
答題紙：

最少滑動次數為_____次，將滑動示意圖畫下：



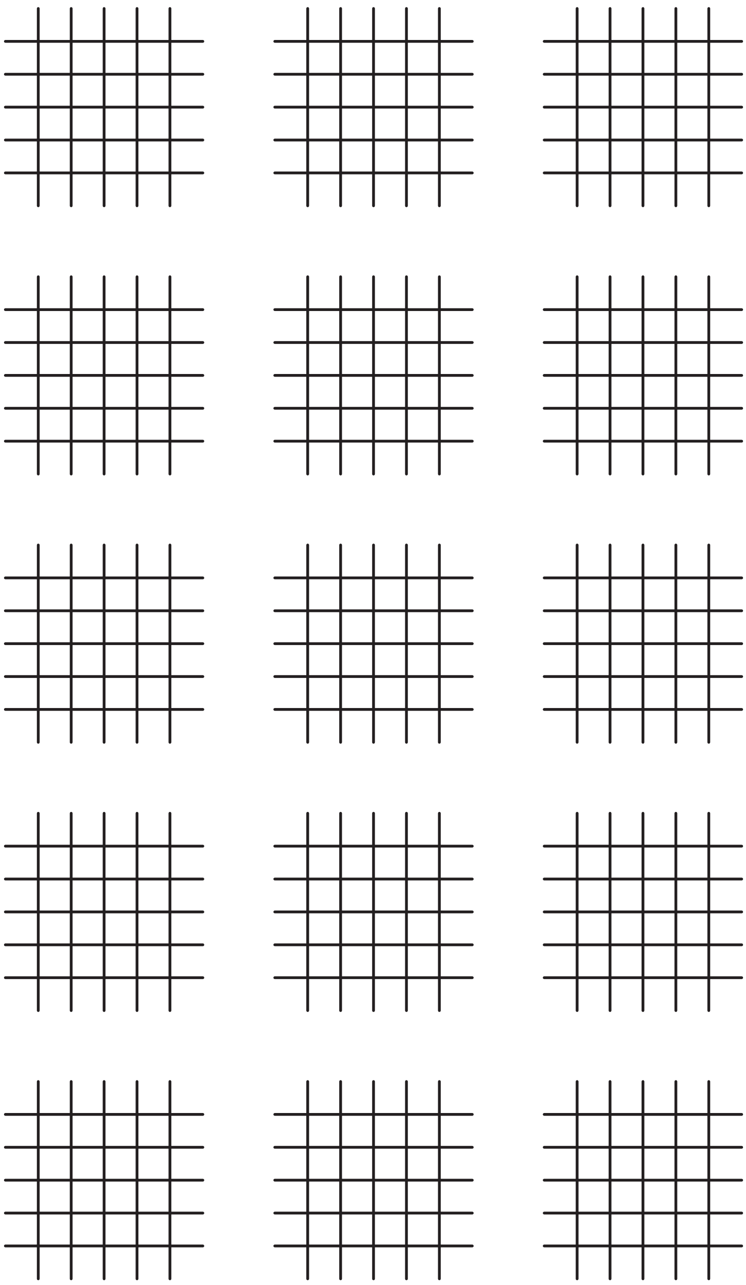
＊**第三題**（限時 15 分鐘）

下圖為一汽車行駛道路網絡圖，C、D 和 E 是三個封閉了向東方向的十字路口。張老師欲從位置 A 駕車前往位置 B，他決定了只向北或向東開車。問共有多少條可供張老師選擇的可行之行車路徑？將所有行車路徑列舉在第三題答案紙的方格上。



補充：列舉的可行路徑愈多，則得分愈高。

答題紙：



＊第四題（限時 20 分鐘）

表格上標示著 A、B、C、D、E 及 F 六個位置，在這六個位置下會分別寫上「黑」或「白」或留空沒寫任何字，如下圖所示：

A	B	C	D	E	F
	白	黑	黑	白	黑

上圖的「黑」或「白」或留空只有評判知道，不可讓學生與隊長看見。學生需猜測在各位置上所寫的是「黑」或「白」或留空，然後由隊長填在賽會提供的表格上。評判需對照隊長寫上的猜測，回應他們的猜想，告知答對黑白顏色的數目、答對顏色及位置的數目各是多少個。學生再經過討論、分析評判的回應及原先的猜測，然後由隊長填上第二次猜測，評判再次回應，以此類推。

例如：若題目是

A	B	C	D	E	F
黑		白		白	白

而學生第一次猜測是

A	B	C	D	E	F
白	白	黑		白	黑

評判回應便是：答對黑白顏色的數目是__4__個，答對顏色及位置的數目是__1__個。

補充：1. 大會提供黑白圍棋各六粒以供學生做猜測判斷時使用，唯每次猜測均以隊長在表格上「黑」或「白」或留空的答案為準；

2. 用了最少猜測次數便能猜對全部顏色及位置，則得分最高。

答題紙：

學生填寫							評判圈出	
猜測的次數	A	B	C	D	E	F	答對顏色的數目	答對顏色及位置的數目
1							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
2							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
3							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
4							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
5							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
6							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
7							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
8							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
9							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
10							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
11							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
12							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
13							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
14							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
15							1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6

二、解析

1. 給分：(1)所得質數的數目數 N：

   $6 \le N \le 10$（5 分）；$11 \le N \le 13$（10 分）；$14 \le N$（15 分）。

   (2)所得的最大質數和 S 的範圍：

   $200 \le S \le 300$（5 分）；$301 \le S \le 600$（10 分）；$601 \le S \le 767$（15 分）。

   數據：正整數 2 至 359 以內的質數表，供評分參考：

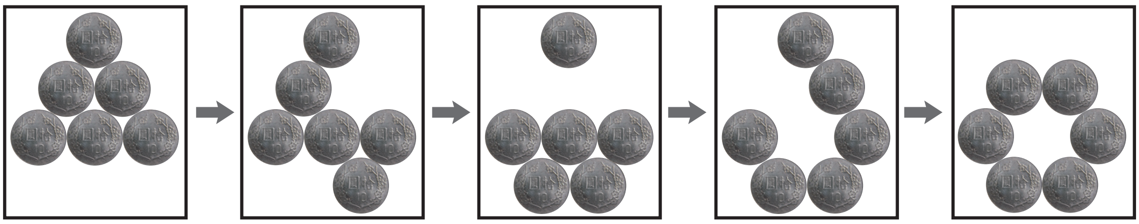
   2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109,
   113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,193,197,199,211,223,227,229,
   233,239,241,251,257,263,269,271,277,281,283,293,307,311,313,317,331,337,347,349,353,
   359

2. 評分：(1)能夠在正確的最少滑動硬幣枚數下完成這次活動，完成愈快得分愈高；

   (2)5 分鐘內得到解答得 20 分；

   (3)10 分鐘內得到解答得 10 分。

   解答：最少滑動硬幣枚數應是四枚，操作如下：



3. 給分：(1)14 條全對得 25 分；

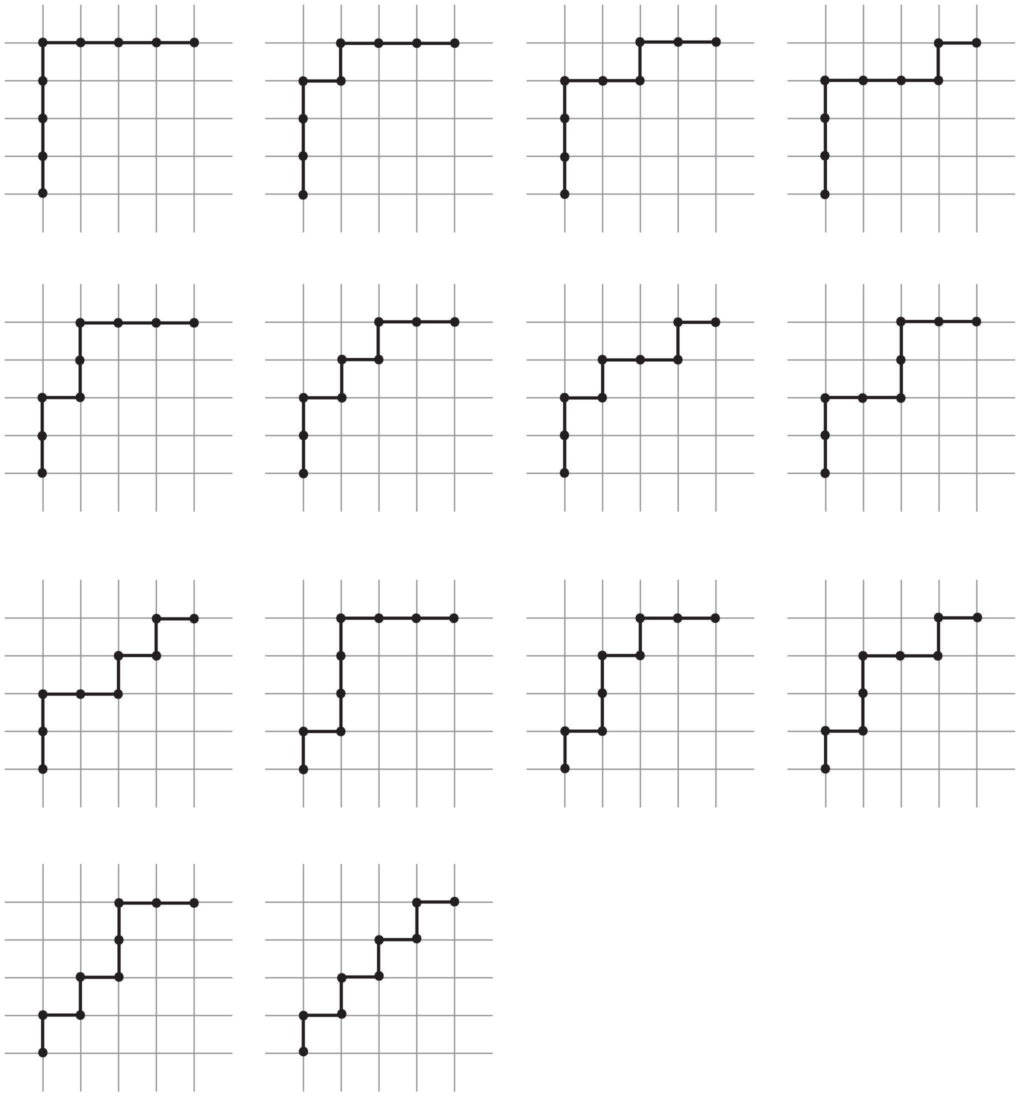
(2)答對 12 或 13 條得 15 分；

(3)答對 10 或 11 條得 10 分；

(4)答對 7、8 或 9 條得 5 分；

(5)答對少於 7 條得 0 分。

答案：可能的路徑如下，共有 14 條此類的路徑：



4. 給分：(1)五次或少於五次得 40 分；

(2)六次或七次得 30 分；

(3)八、九次或十次得 15 分；

(4)十次以上得 10 分；

(5)未能全對，則以最後猜想評分，對顏色及位置得 1 分，即最多只得 5 分。

球面的Euler示性數——C60

江慶昱／衛道中學退休教師

一、楔子》

「為什麼傳統的足球面上非有正五邊形不可？」

1990 年的一個早上，衛道中學。這時候 C60（富勒烯）正夯，化學老師老蔡如是說。我當天下午在一家寵物店買了一個很小很可愛的足球送給他，並提供他一個證明，以酬多年情誼。

二、所謂拓樸學》

把一個曲面拉長、扭曲，只要不把它戳破或兩點黏起來叫作連續變形。連續變形後不變的性質叫作拓撲性質。

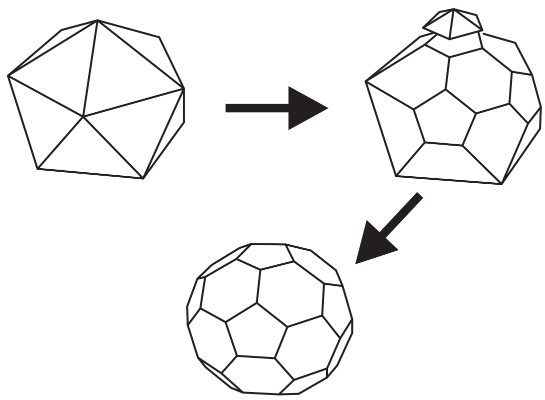
1735 年，尤拉研究哥尼斯堡七橋問題預告拓撲學之門即將展開。

假設一個多面體，點的個數$=V$，邊的個數$=E$，面的個數$=F$，則$V-E+F=2$就是一個拓撲性質，叫作尤拉示性數，在高等幾何是一個非常重要的性質。

球面的尤拉示性數$=2$，其證明早期列入高中課程中，並不困難。

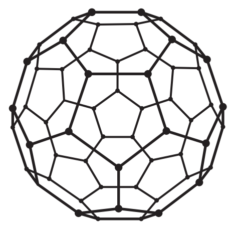
三、C60 的幾何結構》

正多面體有五種：正四面體、正方體、正八面體、正十二面體、正二十面體。稱為柏拉圖多面體。



C60，一個有 20 個正 6 邊形，12 個正 5 邊形所構成的多面體，60 個碳就放在 60 個頂點上，是一個截角正 20 面體，亦即將一個正 20 面體的每一個凸角切掉大小適當的一塊如右圖，這樣的結構有 32 個面，60 個頂點，以及 90 條邊，當然合乎$60-90+32=2$。

四、從理論到應用》



1985 年，美國萊斯（Rice）大學的克爾（Robert F. Curl 1933～）、史麥利（Richard E. Smalley 1943～2005）與英國瑟息斯（Sussex）大學的克魯圖（Harold W. Kroto 1939～）從純理論推測，有由 60 個碳原子所組成的空心球狀分子 C60 存在，三人因此共獲 1996 年諾貝爾化學獎。

1990 年德國的克拉舒末（Wolfgang Krätschmer 1942～）與美國的哈夫曼（Donald Ray Huffman 1935～）正式宣布他們製造出 C60。

1991 年飯島澄男（Sumio Lijima 1939～；2002 年獲頒富蘭克林物理獎）提出奈米碳管的概念後，C60 將成為 21 世紀關鍵材料。另一方面，製作成的奈米機器人將提供一種新的醫療

方法。

至於臺灣，到 1992 年才有臺大化學系的牟中原、陸天堯等人投入。

2010 年西班牙卡納利天文研究所（Instituto de Astrofisica de Canarias）的天文學家與生化學家確認在大麥哲倫星系裡的 SMP48 有 C60。

五、證明足球面上有 12 個正五邊形》

假設有 m 個五邊形，n 個六邊形在球面上，則

$V=\dfrac{5m+6n}{3}$（每個頂點被 3 個邊所共有，所以除以 3），

$E=\dfrac{5m+6n}{2}$（每個邊被 2 個面所共有，所以除以 2），

$F=m+n$，

代入尤拉示性數：$V-E+F=2$，$\dfrac{5m+6n}{3}-\dfrac{5m+6n}{2}+(m+n)=2$，

兩邊同乘以 6，$2(5m+6n)-3(5m+6n)+6(m+n)=12$，得 $m=12$。

六、習作》

1. 證明球面的尤拉示性數＝2 。
2. 很多病毒是正 20 面體（icosahedron），例如：皰疹（herpes）病毒，水痘（chickenpox）病毒，人體疣（human wart）病毒，犬類傳染性肝炎病毒，腺病毒（adenovirus）等。用尤拉示性數證明：正多面體恰有 5 種。
3. 達文西（Leonardo da Vinci 1452～1519）曾作一幅素描，此素描是由邊長相等的正五邊形與正三角形所組成的封閉多面體，且正五邊形每一邊都與正三角形共邊，且正三角形每一邊都與正五邊形共邊，則此多面體有幾個正五邊形？幾個正三角形？（建中通訊徵答 第九期 第 89903 題）

七、習作解答》

1. 證法很有意思，請看 http://plus.maths.org/content/eulers-polyhedron-formula
2. 正多面體的頂點 V 個，稜 L 條，面 F 個，則 $L=\dfrac{V\times m}{2}=\dfrac{F\times n}{2}$，代入尤拉公式 $V-L+F=2$

   得 $L(\dfrac{2}{m}+\dfrac{2}{n}-1)=2$，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{L}$，其中 $m\geq 3$，$n\geq 3$，

   但 m，n 不能同時大於 3，否則 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$ 不合，所以 $m=3$ 或 $n=3$，

   若 $m=3$，則 $\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{L}$，$n=3$，4，5；解得 $L=6$，12，30，

   若 $n=3$，則同理 $m=3$，4，5；解得 $L=6$，12，30，

   (1) $(m,n)=(3,3)$，$V=4$，$L=6$，$F=4$ 正四面體

   (2) $(m,n)=(3,4)$，$V=8$，$L=12$，$F=6$ 正六面體

(3) $(m, n)=(4, 3)$，$V=6$，$L=12$，$F=8$　　正八面體

(4) $(m, n)=(3, 5)$，$V=20$，$L=30$，$F=12$　　正 12 面體

(5) $(m, n)=(5, 3)$，$V=12$，$L=30$，$F=20$　　正 20 面體

3. 假設正五邊形 m 個，正三角形 n 個，則 $V=\dfrac{5m+3n}{4}$，$E=\dfrac{5m+3n}{2}$，$F=m+n$，

代入尤拉示性數公式，化簡得 $n-m=8$，又 $3n=5m$，所以 $m=12$，$n=20$，

有 12 個正五邊形，20 個正三角形。

八、後記》

C60 存在於天上（大麥哲倫星系）、地上（隕石），由數學理論、實驗室到量產，由古希臘時代到現代。時空事件的轉折充滿趣味且令人深思。

魏爾（Hermann Weyl 1885～1955）在其著作《Space-time-matter》中提議建立分子內部的數學。史都華（Ian N. Stewart 1945～）1990 年代寫的兩本書，《大自然的數學遊戲》與《生物世界的數學遊戲》中介紹生物數學的後續發展，說明數學是研究模式（pattern）的科學並提倡一種新的數學：形態數學（morphomatics），屬於微管的數學。也許由研究 C60 引起的分子拓撲學正是大家所尋找的新數學。

我們的頭髮至少有一個漩渦，也是一個拓撲性質（覆蓋圓盤的連續切向量場一定有奇異點），清大林文雄教授是這方面的專家。至於為什麼我的漩渦變成地中海，那就不是數學，而是生物遺傳學的範疇了。

九、參考資料》

1. 「準正多面體」有 13 種，富勒烯是其中一種。阿基米得在西元三世紀就描述過了。
   《Mathematics and the Buckyball》 American Scientist vol8, Jan-Feb 1993 p.56
2. 多面體百科全書 http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html
3. 發現碳元素　http://case.ntu.edu.tw/blog/?p=1439
4. 1996 年諾貝爾化學獎
5. C60 計畫　https://sites.google.com/a/c60.tw/my-first-project/
6. 奈米碳網　http://sa.ylib.com/MagCont.aspx?Unit=featurearticles&id=1188
7. 天體中的富勒烯與石墨烯
   http://tamweb.tam.gov.tw/v3/TW/content.asp?mtype=c2&idx=327
   http://tamweb.tam.gov.tw/v3/TW/content.asp?mtype=c2&idx=600
8. 分子拓撲學的出現（徐文光）
   http://www.cuhk.edu.hk/ics/21c/issue/articles/036_960420.pdf
9. 二十一世紀雜誌 第 13 期 p.53 李榮基
   http://www.cuhk.edu.hk/ics/21c/issue/articles/013_92064.pdf

尺規與拋物線構作三次方程式的實根

葉善雲／臺北市東山高中

前言 》》

我們對「尺規作圖」似乎既熟悉又陌生，國中生能用直尺與圓規輕易作出正三角形、正方形，也「熟知」不能只用圓規與直尺將任意角三等分，因此無法只用尺規作出正 9 邊形。要如何構作正多邊形呢？本文第一節將從解二次方程式實根的觀點，用尺規構作正 5 邊形、正 15 邊形與正 17 邊形。若將作圖工具放寬，用尺規加上「圓錐曲線」或「可三等分角」或「二刻尺」，則可構作正 7 邊形、正 9 邊形等更多正多邊形。本文第二節從解三次方程式實根的觀點，用尺規加上（頂點在原點的）拋物線構作正 7 邊形與正 13 邊形（正 19 邊形留作練習）。

壹、二次方程式實根之作圖（尺規）》》

解二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 相當於解方程式 $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$，

當 $b^2-4ac>0$ 時，二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的實根可由圓與直線構作：

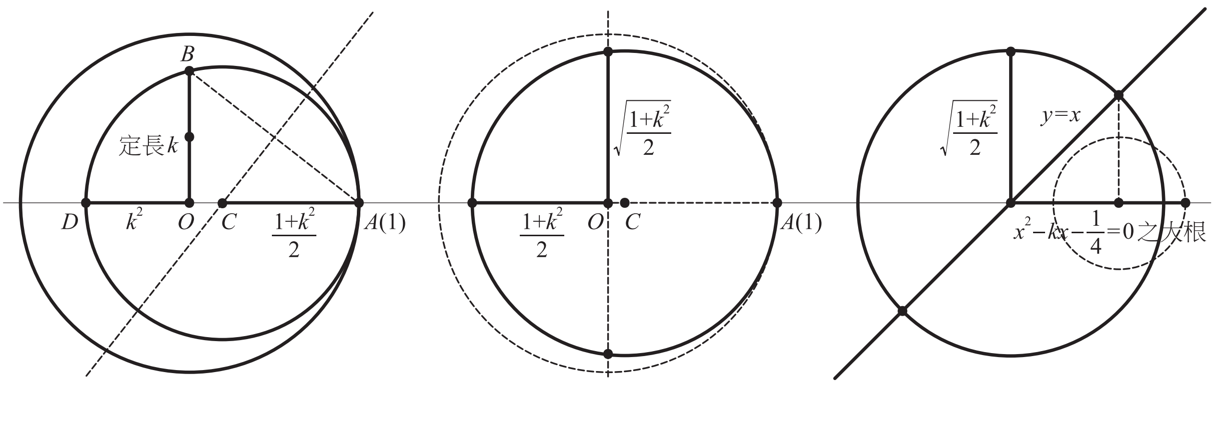
(1) 先構作直線與圓的交點 $\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2=\dfrac{b^2-4ac}{2a^2} \end{cases}$。

(2) 再將上述圓與直線之交點之 x 坐標平移 $\dfrac{-b}{2a}$ 可得。

[例如] 給定值 k（例如 $k=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$），構作方程式 $x^2-kx-\dfrac{1}{4}=0$ 之較大根：

方程式之判別式 k^2+1，方程式的實根可由圓與直線構作。

先求出 $\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2=\dfrac{k^2+1}{2} \end{cases}$ 的交點，再將上述交點之較大 x 坐標平移 $\dfrac{k}{2}$ 可得。[1]



[註1] 利用附錄方法作 k^2、$\dfrac{k^2+1}{2}$ 與 $\sqrt{\dfrac{k^2+1}{2}}$

甲、尺規作圖類

我們將依循高斯作正 17 邊形的想法構作正多邊形。在複數平面上，方程式 $x^n-1=0$（$n\geq 3$）的全體根所代表的點是單位圓的一個內接正 n 邊形的 n 個頂點，其中一個頂點是實軸上的單位點 1，即以 $(1,0)$ 開始逆時針轉 $\theta=\dfrac{2\pi}{n}$ 的整數倍都是其解。令 $w=\cos\theta+i\sin\theta$，則方程式 $x^n-1=0$ 的全體虛根 w^k（其中 k 為整數且 $1\leq k\leq n-1$）的和是 -1，特別是當 n 為奇數時，上半圓所有虛根之實部的和為 $-\dfrac{1}{2}$，即 $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos\left(\dfrac{n-1}{2}\cdot\theta\right)=-\dfrac{1}{2}$。[2]此外，當 n 為奇質數時，將上述 $\dfrac{n-1}{2}$ 個角度的餘弦值適當的分組，可以收到令人「驚奇」的效果。[3]

一、正 5 邊形作圖 》

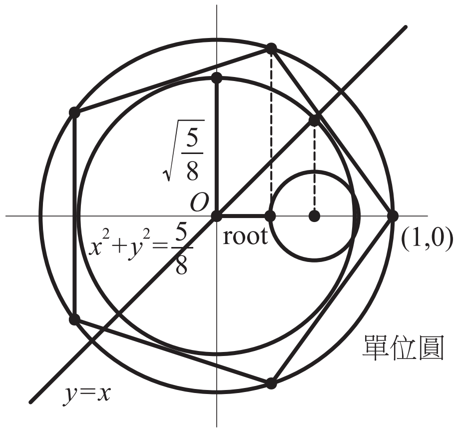
(a) 正 5 邊形圓心角 $\theta=\dfrac{2\pi}{5}$ 之餘弦 $\cos\theta$ 滿足二次方程式 $4x^2+2x-1=0$。

證明：由 $\cos\theta+\cos 2\theta=\dfrac{-1}{2}$，得 $\cos\theta+2\cos^2\theta-1=\dfrac{-1}{2}$，

此時 $\cos\theta$ 滿足方程式 $2x^2+x-\dfrac{1}{2}=0$。

(b) 正 5 邊形邊長可由圓與直線構作：

先求出 $\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2=\dfrac{5}{8} \end{cases}$ 的交點，再將上述交點之 x 坐標平移 $\dfrac{-1}{4}$ 可得。

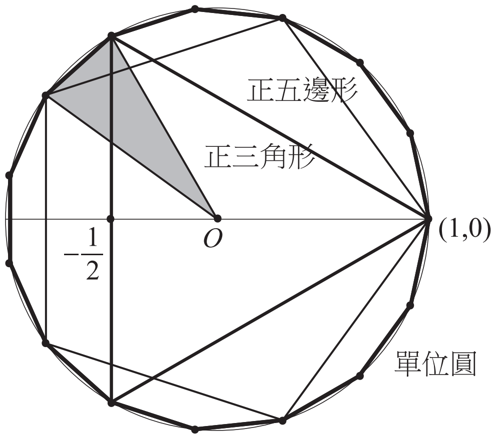


[註 2] 例如：$\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$

[註 3] 例如：當 $\theta=\dfrac{2\pi}{17}$ 時，$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 8\theta$ 為方程式 $x^2+\dfrac{1}{2}x-1=0$ 的較大根；當 $\theta=\dfrac{2\pi}{13}$ 時，$\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta$ 為方程式 $x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}=0$ 的較大根，原因容後說明。

二、正 15 邊形作圖》

由圓內接正三角形、正方形與正 5 邊形的構圖，將邊長（或圓上對應弧）等分，可得正 6 邊形、正 8 邊形、正 10 邊形、正 12 邊形、正 16 邊形、正 20 邊形等正多邊形。又利用關係式 $\frac{2\pi}{15}=2\cdot\frac{2\pi}{5}-\frac{2\pi}{3}$，可構作正 15 邊形。



三、正 17 邊形作圖》

(a) 正 17 邊形圓心角 $\theta=\frac{2\pi}{17}$ 之餘弦 $\cos\theta$ 滿足下列各條件：

(1) 令 $a=\cos\theta+\cos2\theta+\cos4\theta+\cos8\theta$，$b=\cos3\theta+\cos5\theta+\cos6\theta+\cos7\theta$，

則二次方程式 $x^2+\frac{1}{2}x-1=0$ 的較大根為 a 且較小根為 b。

（實際上，$a=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ 且 $b=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$）

(2) 令 $c=\cos\theta+\cos4\theta$，則 c 為二次方程式 $x^2-ax-\frac{1}{4}=0$ 的較大根，

且 $e=\cos3\theta+\cos5\theta$ 為二次方程式 $x^2-bx-\frac{1}{4}=0$ 的較大根。

(3) 二次方程式 $x^2-cx+\frac{e}{2}=0$ 的較大根即為 $\cos\theta$。

[證明] (1) $a=\cos\theta+\cos2\theta+\cos4\theta+\cos8\theta$，$b=\cos3\theta+\cos5\theta+\cos6\theta+\cos7\theta$，

則 $\begin{cases} a+b=\frac{-1}{2} \\ 2ab=\frac{-1}{2}\times4 \end{cases}$，所以 a,b 滿足二次方程式 $x^2+\frac{1}{2}x-1=0$，

其中 a 為較大根且 b 為較小根。

(2) 令 $c=\cos\theta+\cos 4\theta$ ， $d=\cos 2\theta+\cos 8\theta$ ，則 $\begin{cases} c+d=a \\ 2cd=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$ ，

所以 c ， d 滿足二次方程式 $x^2-ax-\dfrac{1}{4}=0$ ，其中 c 為較大根。

同理，令 $e=\cos 3\theta+\cos 5\theta$ ， $f=\cos 6\theta+\cos 7\theta$ ，則 $\begin{cases} e+f=b \\ 2ef=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$ ，

所以 e, f 滿足二次方程式 $x^2-bx-\dfrac{1}{4}=0$ ，其中 e 為較大根。

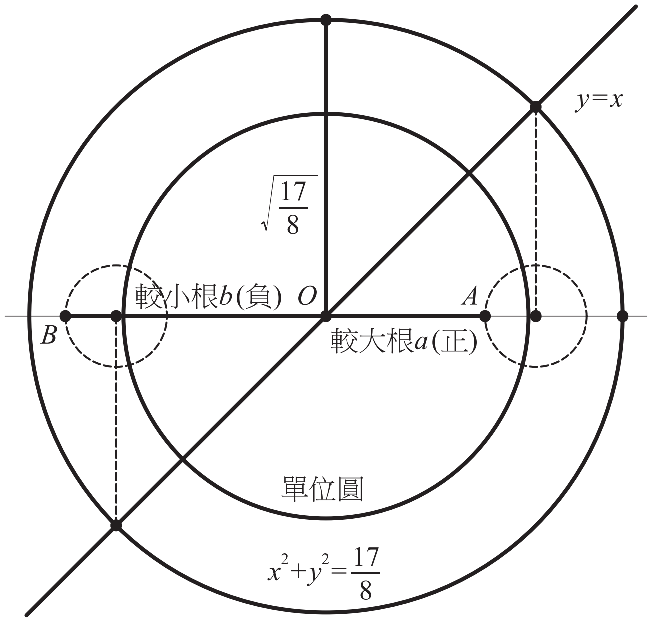
(3) 再由 $2\cos\theta\cdot\cos 4\theta=\cos 3\theta+\cos 5\theta$ ，知 $\cos\theta$ 與 $\cos 4\theta$

滿足二次方程式 $x^2-cx+\dfrac{e}{2}=0$ ，其中 $\cos\theta$ 為較大根。

(b) 正 17 邊形邊長可由構作下列三組（四個）二次方程式的根完成：

① 作二次方程式 $x^2+\dfrac{1}{2}x-1=0$ 的較大根為 a 且較小根為 b 。

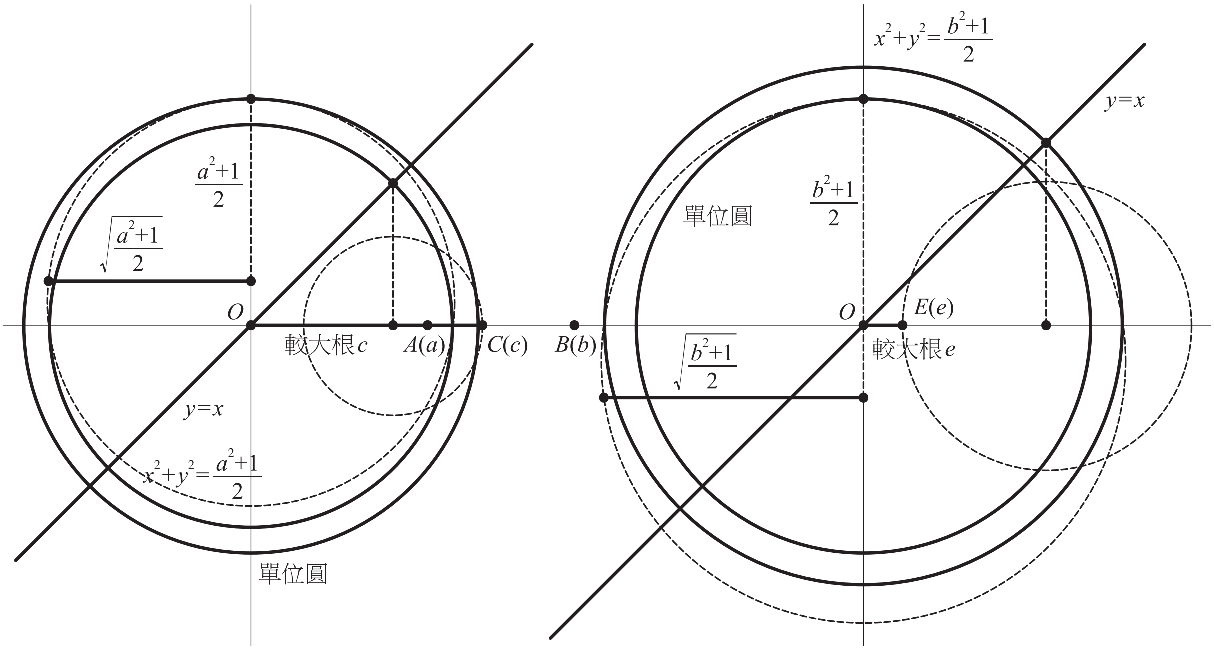
先求出 $\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2=\dfrac{17}{8} \end{cases}$ 的交點，再將上述交點之 x 坐標平移 $\dfrac{-1}{4}$ 可得。



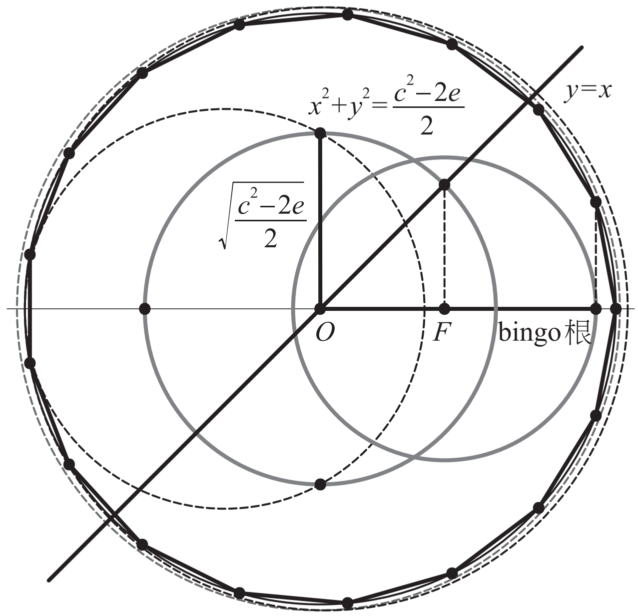
② 作方程式 $x^2-ax-\dfrac{1}{4}=0$ 的較大根 c 且方程式 $x^2-bx-\dfrac{1}{4}=0$ 的較大根 e 。

給定值 k （此處 $k=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$ ），構作方程式 $x^2-kx-\dfrac{1}{4}=0$ 之較大根：

先求出 $\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2=\dfrac{k^2+1}{2} \end{cases}$ 的交點，再將上述交點之較大 x 坐標平移 $\dfrac{k}{2}$ 可得。



③　二次方程式 $x^2-cx+\frac{e}{2}=0$ 的較大根即為 $\cos\frac{2\pi}{17}$ 。



貳、三次方程式實根之作圖（尺規+拋物線）》》

[定理]　三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的實根可由圓與拋物線構作：

(1) $$\begin{cases} x^2=y \\ \left(x+\dfrac{\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2\end{vmatrix}}{54a^3}\right)^2+\left(y+\left(\dfrac{\Delta_1}{12a^2}-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2=\left(\dfrac{\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2\end{vmatrix}}{54a^3}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta_1}{12a^2}-\dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

其中 $\Delta_1=\begin{vmatrix}3a & b \\ 2b & 2c\end{vmatrix}=6ac-2b^2$ 且 $\Delta_2=\begin{vmatrix}3a & b \\ c & 3d\end{vmatrix}=9ad-bc$ 。

(2) 將上述圓與拋物線之非原點之交點之 x 坐標平移 $\dfrac{-b}{3a}$ 可得。

[證明]　解方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 相當於解下列三次方程式

$$\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{\Delta_1}{6a^2}\cdot\left(x+\frac{b}{3a}\right)+\frac{1}{27a^3}\cdot\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2\end{vmatrix}=0\text{ ，}$$

令 $w=x+\dfrac{b}{3a}$ ，並在上式兩邊同乘 w 得

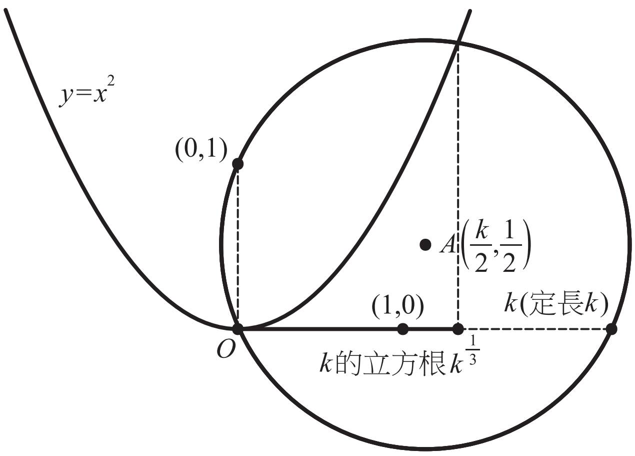
$$w^4+\left(\frac{\Delta_1}{6a^2}-1\right)\cdot w^2+w^2+\frac{\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2\end{vmatrix}}{27a^3}\cdot w=0\text{ ，}$$

再令 $y^2=(w^2)^2$ ，上式成為

$$\begin{cases} w^2=y \\ \left(w+\dfrac{\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2\end{vmatrix}}{54a^3}\right)^2+\left(y+\left(\dfrac{\Delta_1}{12a^2}-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2=\left(\dfrac{\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2\end{vmatrix}}{54a^3}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta_1}{12a^2}-\dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases}\text{ 。}$$

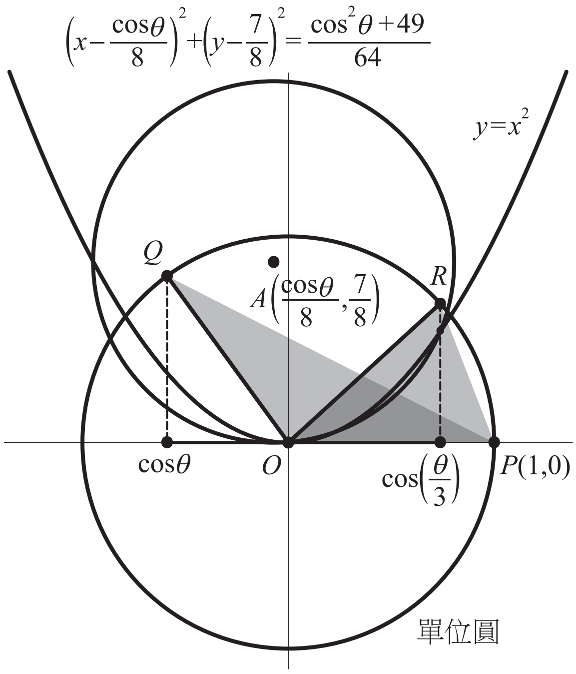
[例如]　(1) 構作 $x^3-k=0$ 的正根，其中 $k>0$ ，即三次方根 $\sqrt[3]{k}$ 的作圖：

可由 $\begin{cases} x^2=y \\ \left(x-\dfrac{k}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{k^2+1}{4} \end{cases}$ 構作。



(2) 構作 $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{\cos\theta}{4}=0$ 的正根，其中 $0<\theta\le 180^\circ$ ，即三等分角 $\cos\frac{\theta}{3}$ 的作圖：

可由 $\begin{cases} x^2=y \\ \left(x-\frac{\cos\theta}{8}\right)^2+\left(y-\frac{7}{8}\right)^2=\frac{\cos^2\theta+49}{64} \end{cases}$ 構作。



乙、尺規+拋物線之作圖類

四、正 7 邊形 》

(1) 正 7 邊形圓心角 $\theta=\frac{2\pi}{7}$ 之餘弦 $\cos\theta$ 滿足方程式 $8x^3+4x^2-4x-1=0$ 。

證明：由 $\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta=\frac{-1}{2}$ ，得

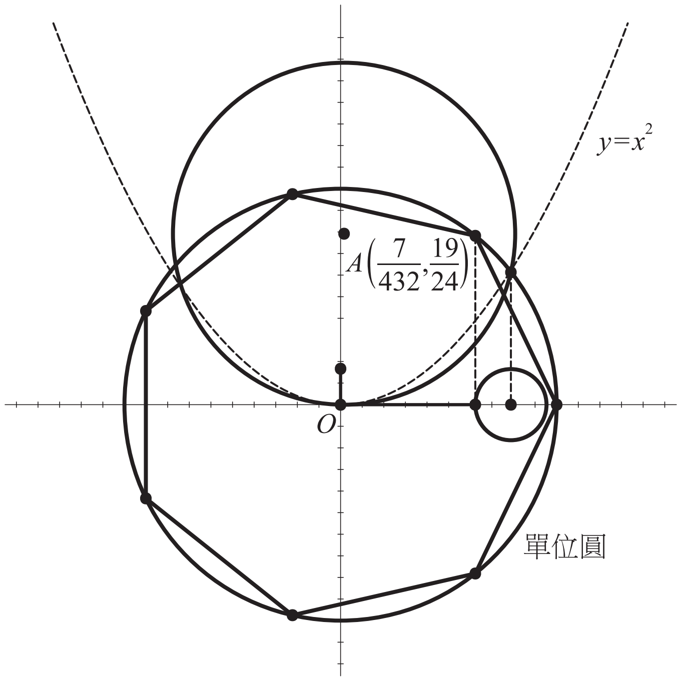
$\cos\theta+2\cos^2\theta-1+4\cos^3\theta-3\cos\theta=\frac{-1}{2}$ ，

此時 $\cos\theta$ 滿足方程式 $4x^3+2x^2-2x-\frac{1}{2}=0$ 。

(2) 正 7 邊形邊長可由圓與拋物線構作：

① $\begin{cases} x^2=y \\ \left(x-\frac{7}{432}\right)^2+\left(y-\frac{19}{24}\right)^2=\left(\frac{7}{432}\right)^2+\left(\frac{19}{24}\right)^2 \end{cases}$ 。

② 將上述圓與拋物線之交點之最大 x 坐標平移 $-\frac{1}{6}$ 可得。



五、正 13 邊形 》

(1) 正 13 邊形圓心角 $\theta=\dfrac{2\pi}{13}$ 之餘弦 $\cos\theta$ 滿足之可構作實係數方程式為

$4x^3-4ax^2-x+\left(a-\dfrac{1}{2}\right)=0$（即 $4x^3+\left(1-\sqrt{13}\right)x^2-x+\dfrac{\sqrt{13}-3}{4}=0$），

其中 $a=\cos\theta+\cos3\theta+\cos4\theta=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{4}$ 滿足二次方程式 $4x^2+2x-3=0$。

證明：(a) 在 $a=\cos\theta+\cos3\theta+\cos4\theta$ 兩邊同乘 $2\cos2\theta$，得

$2a\cos2\theta=\cos\theta+\cos3\theta+\cos\theta+\cos5\theta+\cos2\theta+\cos6\theta$，

化簡為 $2a\cos2\theta=\cos\theta+\left(\dfrac{-1}{2}-\cos4\theta\right)$，

於是 $2a\cos2\theta=\cos\theta+\left(\dfrac{-1}{2}\right)+\cos\theta+\cos3\theta-a$，

此時 $\cos\theta$ 滿足方程式 $2a\left(2x^2-1\right)=2x+\left(\dfrac{-1}{2}\right)+4x^3-3x-a$，

即 $4x^3-4ax^2-x+\left(a-\dfrac{1}{2}\right)=0$。

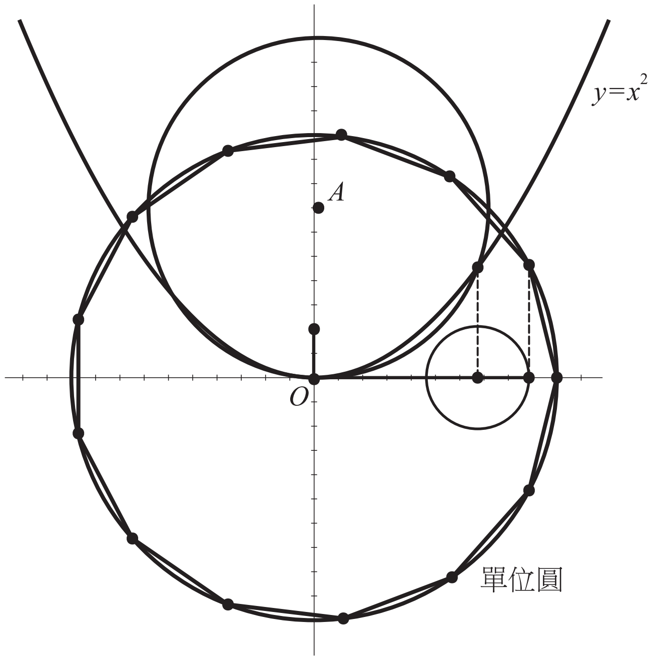
(b) 令 $b=\cos2\theta+\cos5\theta+\cos6\theta$，則 $\begin{cases} a+b=\dfrac{-1}{2} \\ 2ab=\dfrac{-1}{2}\times3 \end{cases}$，

所以 a,b 滿足二次方程式 $x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}=0$。

(2) 正 13 邊形邊長可由圓與拋物線構作：

① $\begin{cases} x^2 = y \\ \left(x - \dfrac{26-5\sqrt{13}}{432}\right)^2 + \left(y - \dfrac{37-\sqrt{13}}{48}\right)^2 = \left(\dfrac{26-5\sqrt{13}}{432}\right)^2 + \left(\dfrac{37-\sqrt{13}}{48}\right)^2 \end{cases}$ 。

② 將上述圓與拋物線之交點之最大 x 坐標平移 $\dfrac{\sqrt{13}-1}{12}$ 可得。



六、正 19 邊形 》

正 19 邊形圓心角 $\theta = \dfrac{2\pi}{19}$ 之餘弦 $\cos\theta$ 滿足之可構作實係數方程式為

$$4x^3 - 4ax^2 - (1+2b)x - (b+1) = 0 \text{ ，}$$

其中 $a = \cos\theta + \cos 7\theta + \cos 8\theta$（約為 -0.610938081），$b = \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta$（約為 1.253509322），$c = \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cos 9\theta$（約為 -1.142571241）滿足三次方程式 $x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{8} = 0$ 。

證明：1. 說明 a，b，c 滿足之三次方程式：

(1) $a + b + c = \dfrac{-1}{2}$ 。

(2) $\begin{cases} 2ab = \dfrac{-1}{2} + 2c + b \\ 2bc = \dfrac{-1}{2} + 2a + c \\ 2ac = \dfrac{-1}{2} + 2b + a \end{cases}$ ，$ab + bc + ac = \dfrac{-3}{2}$ 。

(3) 由 $a^2+b^2+c^2=\left(\frac{-1}{2}\right)^2-2\times\frac{-3}{2}=\frac{13}{4}$，

得 $6abc=\frac{-1}{2}\cdot(a+b+c)+2\left(a^2+b^2+c^2\right)+(ab+bc+ac)$，即 $abc=\frac{7}{8}$。

所以 a，b，c 滿足方程式 $x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}=0$。

2. 說明 $\cos\theta$ 滿足之三次方程式：

在 $a=\cos\theta+\cos7\theta+\cos8\theta$ 兩邊同乘 $2\cos\theta$，得

$2a\cos\theta=1+\cos2\theta+\cos6\theta+\cos8\theta+\cos7\theta+\cos9\theta$，

化簡為 $2a\cos\theta=1+\cos2\theta+\left(\frac{-1}{2}-\cos\theta-\cos4\theta-b\right)$，

兩邊再同乘 $2\cos\theta$，得

$(2a+1)(1+\cos2\theta)=\cos\theta+\cos\theta+\cos3\theta-\cos3\theta-\cos5\theta-2b\cos\theta$，

於是 $(2a+1)(1+\cos2\theta)=(2-2b)\cos\theta-(b-\cos2\theta-\cos3\theta)$，

此時 $\cos\theta$ 滿足方程式 $(2a+1)\cdot2x^2=(2-2b)x-b+\left(2x^2-1\right)+\left(4x^3-3x\right)$，

即 $4x^3-4ax^2-(1+2b)x-(b+1)=0$。

丙、待解作圖類

(1) 正 11 邊形圓心角 $\theta=\frac{2\pi}{11}$ 之餘弦 $\cos\theta$ 滿足之可構作實係數方程式為

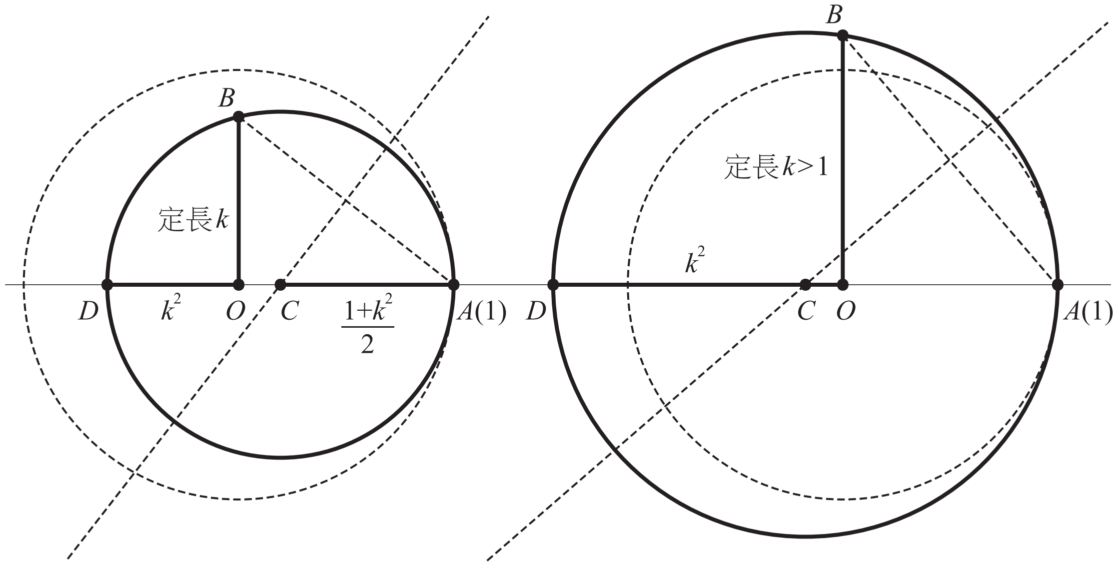
$$32x^5+16x^4-32x^3-12x^2+6x+1=0 \quad \left(\cos\frac{2\pi}{11}\approx0.8412535328\right)。$$

(2) 正 25 邊形圓心角 $\theta=\frac{2\pi}{25}$ 之餘弦 $\cos\theta$ 滿足之可構作實係數方程式為

$$16x^5-20x^3+5x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}=0 \quad \left(\cos\frac{2\pi}{25}\approx0.9685831611\right)。$$

附錄：

1. 給定長 k，求作 k^2：
   (1) 在直線 L 上取單位長 $\overline{AO}$，並在一端點取垂線段長 $\overline{OB}=k$。
   (2) 作 $\overline{AB}$ 之中垂線使與直線 L 相交於 C 點，再以 C 點為圓心且 $\overline{AC}$ 為半徑作圓，使與直線 L 另相交於 D 點。
   (3) $\overline{OD}=k^2$（此時 $\overline{CA}=\frac{1+k^2}{2}$）。



2. 給兩定長a與b，求作ab：
   (1) 在直線L上取一點O，並在兩端分別取線段$\overline{AO}=a$與$\overline{OB}=b$。
   (2) 以$\overline{AB}$為直徑作圓C，取垂線$\overline{OD}$交圓C於D點，此時$\overline{OD}=\sqrt{ab}$。
   (3) 再利用前面構作定長平方的方法，構作$\overline{OD}^2=ab$。

參考書目：

1. 葉善雲（2011）：三次方程式根的公式，龍騰數亦優第 15 刊，p11～19。
2. 曾健威等（2006）：從解三次方程到構作正七邊形，數學傳播第 30 卷第 1 期，p26～29。
3. 曾健威（2005）：未解決的構圖問題——給學生的一個介紹，數學傳播第 29 卷。第 2 期，p81～84。
4. 趙文敏：高斯如何作正十七邊形，高瞻自然科學教學資源平臺。
5. 維基百科：二刻尺作圖。
6. Arthur Baragar（2002）：Constructions Using a Compass and Twice-Notched Straightedge, American Mathematical Monthly 109(2), p151～164。
7. Andrew Gleason（1988）：Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon, American Mathematical Monthly 95(3), p185～194。

四歸一

吳建生／高雄女中退休教師

一、前言 》

本文是列出 4 種方法證明一個高中的絕對不等式，前兩種是土法煉鋼直接處理。第一種眾所皆知，而第二種就需要小技巧。至於後兩種是公式的應用，它們均不在高中課程範圍內，只有敘述，但是將會列明出處。讀者若有興趣，除了知道如何證明外，也才曉得其應用的範圍有多廣（當然要花一些心思）。說不定你會覺得殺雞焉用牛刀。而本文的目的有兩個：一是寄望新手們會宰牛，二是藉解題的多樣性，能感受一點趣味。

二、主題 》

$2\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b$　（ $a,b,c\ge 0$ ）

§1 解法(一)：$2\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b\right)$

$=\left(a^3+b^3-a^2b-b^2a\right)+\left(b^3+c^3-b^2c-bc^2\right)+\left(a^3+c^3-c^2a-ac^2\right)$

$=(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2\ge 0$

§2 解法(二)：先假設 $b\ge c\ge a$（其他 5 種大同小異），

則 $2\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b\right)$

$=\left(a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a\right)+\left(a^3+b^3+c^3-b^2a-a^2c-c^2b\right)$，

又 $a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a$

$=a^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(c-a)$

$=a^2(a-c)+a^2(c-b)+b^2(b-c)+c^2(c-a)$

$=(c+a)(c-a)^2+(b+a)(b-a)(b-c)\ge 0$，

而 $a^3+b^3+c^3-b^2a-a^2c-c^2b$ 同理，

故 $2\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b\right)\ge 0$。

§3 利用排序原理（嚴鎮軍主編之高中數學競賽教程第 18 講　常用著名不等式）

敘述：設有兩個有序數組 $a_1\le a_2\cdots\le a_n$ 及 $b_1\le b_2\cdots\le b_n$，

則 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$（順序和）

$\ge a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}$（亂序和）

$\ge a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$（逆序和），

但 $\{j_1\cdot j_2\cdot\cdots\cdot j_n\}=\{1,2,3,\cdots,n\}$，

不失普遍性，設 $a\ge b\ge c$（因原式為對稱式），

$\because a,b,c\ge 0$，$\therefore a^2\ge b^2\ge c^2$，

由 $\begin{cases}a\ge b\ge c\\ a^2\ge b^2\ge c^2\end{cases}$，

得$a^3+b^3+c^3$（順序和）$\geq a^2b+b^2c+c^2a$（亂序和）$\cdots$①

同理$a^3+b^3+c^3\geq ab^2+bc^2+ca^2\cdots$②

①②相加得$2\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq\left(a^2b+ab^2+bc^2+b^2c+a^2c+ac^2\right)\cdots$③

※①②為齊次輪換對稱不等式（一邊為輪換式，而另一邊為對稱式），

但③則為齊次對稱不等式（§4 和它有關）

而①＋②＝③是齊次輪換對稱不等式，回歸到齊次對稱不等式，幾乎是最簡單情況。

§4 利用齊次對稱不等式（定理）（請參考教育部高中數學科網站第 67 期電子報。〈高中數學教育論壇〉）

敘述：齊次對稱不等式定理

定義：兩實數列α_1，α_2，$\cdots$，α_n及β_1，β_2，$\cdots$，β_n滿足

(1) $\alpha_i\geq\alpha_j$，$\beta_i\geq\beta_j$，$\forall i<j$，

(2) $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i$，

若$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\geq\sum_{i=1}^{k}\beta_i$，$\forall 1\leq k\leq n$（即部分和保持大小關係）

則（$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$）≥（$\beta_1\beta_2\cdots\beta_n$）

本定理（$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$）≥（$\beta_1\beta_2\cdots\beta_n$）

$\Leftrightarrow \Sigma x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\geq\Sigma x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n}$

簡記為$\Sigma\left(\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_n\right)\geq\Sigma\left(\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_n\right)$

※(一)此處Σ表對稱式，如三元$\Sigma a^3=\Sigma a^3b^0c^0=\Sigma(3,0,0)=2\left(a^3+b^3+c^3\right)$，

$\Sigma a^2b=\Sigma a^2b^1c^0=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$，$n$元$\Sigma$共有$n!$項（有時會重複，除非指數互異）。

※(二)本定理最早起源請參考 HARDY 著之 MUIRHEAD INEQUILITY

證明：$2\left(a^3+b^3+c^3\right)=\Sigma a^3b^0c^0$，

又$a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+c^2b+b^2a=\Sigma a^2b^1c^0$，

$\because(3,0,0)\geq(2,1,0)$，

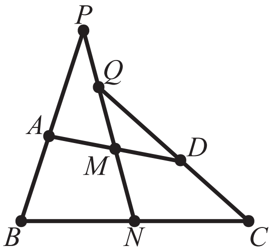
$\therefore\Sigma(3,0,0)\geq\Sigma(2,1,0)$

即$a^3+b^3+c^3\geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$。

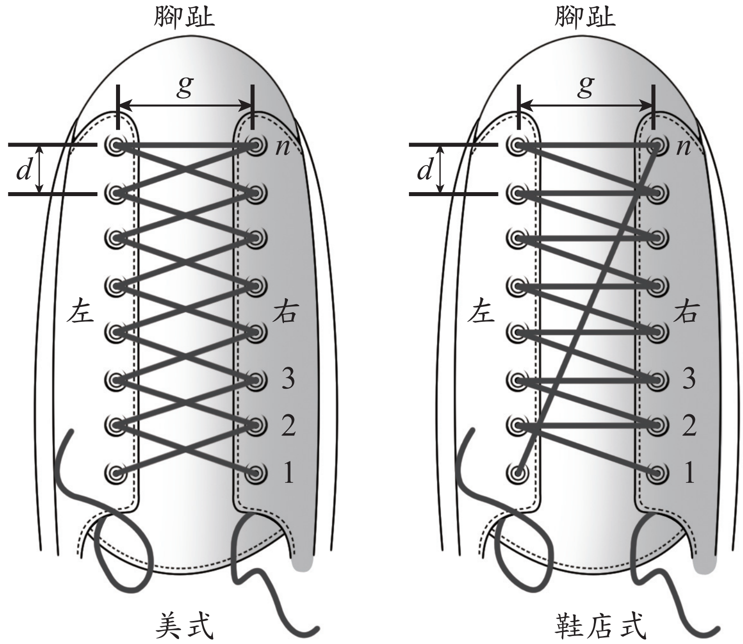
國立臺灣師範大學數學系
103學年度大學甄選入學指定項目甄試試題

筆試一、計算證明題（考試時間：2 小時）

1. 設整數 x，y 滿足 $\log x+\log y$ 為整數，但 $\log x$ ，$\log y$ 及 $\log x^3y^2$ 都不是整數，若 x^3y^2 是一個 6 位數，則求所有的整數數對 (x, y) 。（20 分）
2. 如圖，$\overline{AB}=\overline{CD}$ ，M 為 $\overline{AD}$ 的中點，N 為 $\overline{BC}$ 的中點，兩直線 AB 和 CD 分別交直線 MN 於 P、Q 兩點。試證：$\angle APM=\angle DQM$ 。（20 分）



3. (1) 將多項式 $\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+4x+5\right)$ 表示成 $g(x)^2+h(x)^2$ ，其中 $g(x)$ 與 $h(x)$ 均為實係數多項式。（5 分）
   (2) 將多項式 $\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2+4x+5\right)$ 表示成 $g(x)^2+h(x)^2$ ，其中 $g(x)$ 與 $h(x)$ 均為實係數多項式。（15 分）
4. 考慮 $x,\ y\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，滿足下列方程式：
$$x^3+8y^3+\sin x+2\sin y\cos y=0$$
試在 xy 坐標平面上畫出所有滿足上列方程式的點 (x, y) 之圖形。（20 分）
5. 綁鞋帶的方式五花八門，以下兩個圖案是常見的綁鞋帶方式，美式綁帶法與鞋店式綁帶法：



圖中的符號 n ，d 及 g 分別代表：

- 數目 n（$n \ge 2$）是指鞋子左右兩側各有 n 個鞋帶孔。
- 距離 d（公分）為相鄰兩孔的距離。
- 間距 g（公分）為左右對應兩孔的間距。

若在穿孔之後打一個蝴蝶結，左右兩側的鞋帶各需 15 公分，則在上述兩種綁鞋帶的方式之中哪一種方式所需之鞋帶較短？並證明你的結論。（20 分）

筆試二、填充題（考試時間：1.5 小時）

1. 若 a，b 是實數且 $a+b=3$ ，$a^2+b^2=6$ ，則 $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}$ 的值為________。

2. 已知直線 L 的方程式為 $x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}y+2=0$ 。將 L 對直線 $y=\sqrt{3}x$ 鏡射，得到直線 M，則 M 的方程式為________。

3. 已知三角形 ABC 為銳角三角形，且 $\angle B=\angle C=\theta$ 。若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4}{3}$ ，則 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ 為________。

4. 設 $f(x)=x^4-2014$ ，則與 $f(x)=0$ 的正實根最接近的整數為________。

5. 某次考試共有 17 人參加，平均數為 80 分、標準差為 10 分。則這 17 人當中，得分未達 60 分者至多有________人。

   參考公式：平均數 $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{n}$ 、標準差 $=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n}}$ 。

6. 若 b 滿足 $\log_{10}\left(4^b+9\right)=\left(\log_{10}6\right)+\left(b\log_{10}2\right)$ ，則 $b=$________。

7. 令 G 為下列六條線段的聯集所成的圖形：

   $L_1=\begin{cases}x=t,\ 0\le t\le 1\\ y=0,\end{cases}$ $L_2=\begin{cases}x=t,\ 0\le t\le 1\\ y=1,\end{cases}$ $L_3=\begin{cases}x=0,\\ y=t,\ 0\le t\le 1\end{cases}$

   $L_4=\begin{cases}x=1,\\ y=t,\ 0\le t\le 1\end{cases}$ $L_5=\begin{cases}x=t,\ 0\le t\le 1\\ y=t,\ 0\le t\le 1\end{cases}$ $L_6=\begin{cases}x=t,\quad 0\le t\le 1\\ y=1-t,\ 0\le t\le 1\end{cases}$

   若直線 L： $mx-y-1=0$ 和 G 恰交於三個點，則 m 的解集合為________。

8. 在坐標空間中，已知平面 E 通過三點 $P(2,0,0)$ ，$Q(0,-3,0)$ ，$R(0,0,a)$ ，$a\ge 0$ 。若 E 與 yz 平面的夾角為 45°，則 $a=$________。

9. 甲有 10 顆相同的糖，每回可拿走 1、3 或 5 顆，直到拿完為止。
   問共有________種拿法。（拿糖的順序不同視為不同方法，例如「3,3,3,1」與「1,3,3,3」是不同的拿法）

10. 已知直線 L 通過拋物線 Γ 的焦點 B，並與 Γ 的對稱軸夾 30°，交 Γ 於點 A。若 $\overline{AB}=1$ ，則點 B 到 Γ 的最短距離為________。

解析

筆試一、計算證明題

1. 因為x^3y^2為 6 位數，所以$10^5 \le x^3y^2 < 10^6$，又因為$\log x^3y^2$不是整數，所以$10^5 < x^3y^2 < 10^6$，即$5 < \log x^3y^2 < 6$。

   將$\log x^3y^2$展開，得$5 < \log x + 2(\log x + \log y) < 6 \cdots ①$

   因為$\log x \ge 0$，$\log y \ge 0$，所以$0 \le 2(\log x + \log y) < 6$，推得$0 \le \log x + \log y < 3$。

   因為題意告訴我們$\log xy$為整數，所以$\log x + \log y = 0$，1 或 2。

   分情況討論如下：

   (1) 當$\log x + \log y = 0$時，因為$\log x \ge 0$，$\log y \ge 0$，所以$\log x = \log y = 0$，
   此與題目所要求的$\log x$，$\log y$不為整數互相矛盾。

   (2) 當$\log x + \log y = 1$時，由①得$5 < \log x + 2 < 6$，推得$3 < \log x < 4$，即$-3 < 1 - \log x < -2$。
   再由$\log x + \log y = 1$知，$-3 < \log y < -2$，此與$\log y \ge 0$互相矛盾。

   (3) 當$\log x + \log y = 2$時，由①得$5 < \log x + 4 < 6$，推得$1 < \log x < 2$，即$10 < x < 100$。再由
   $\log xy = \log x + \log y = 2$知$xy = 10^2 = 100$，綜合得到$\begin{cases} 10 < x < 100 \\ xy = 100 \end{cases}$，推得$1 < y < 10$。

   因為y為整數，所以將$y = 2,3,4,5,6,7,8,9$逐一代入$xy = 100$，解得

   $$(x,y) = (50,2),(25,4),(20,5)。$$

   綜合(1)(2)(3)，總共有 3 組解，分別為$(x,y) = (50,2),(25,4),(20,5)$。

2. 設$\triangle PAM$的外接圓半徑為R_1，$\triangle QDM$的外接圓半徑為R_2。
   $\triangle PBN$的外接圓半徑為S_1，$\triangle QCN$的外接圓半徑為S_2。

   (1) 在$\triangle PAM$及$\triangle QDM$中，由正弦定理可知$\dfrac{\overline{AM}}{\sin\angle APM} = 2R_1$，$\dfrac{\overline{DM}}{\sin\angle DQM} = 2R_2$，

   因為$\overline{AM} = \overline{DM}$，所以由上式可得$\dfrac{\sin\angle APM}{\sin\angle DQM} = \dfrac{R_2}{R_1} \cdots ①$

   再對$\triangle PAM$及$\triangle QDM$使用正弦定理可得$\dfrac{\overline{PA}}{\sin\angle PMA} = 2R_1$，$\dfrac{\overline{QD}}{\sin\angle QMD} = 2R_2$。

   由圖可知$\angle PMA + \angle QMD = 180°$，即$\angle PMA = 180° - \angle QMD$，也就是

   $\sin\angle PMA = \sin\angle QMD$，由上式可推得$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{QD}} = \dfrac{R_1}{R_2} \cdots ②$

   (2) 類似①②的推理可得$\dfrac{\sin\angle BPN}{\sin\angle CQN} = \dfrac{S_2}{S_1} \cdots ③$

   及$\dfrac{\overline{PB}}{\overline{QC}} = \dfrac{S_1}{S_2} \cdots ④$

   (3) 因為$\angle BPN = \angle APM$，$\angle DQM = \angle CQN$，由①③可得$\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{S_2}{S_1} \cdots ⑤$

   (4) 由②④⑤可得$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{QD}} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{QC}}$，即$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{QD}} = \dfrac{\overline{PA} + \overline{AB}}{\overline{QD} + \overline{DC}} \cdots ⑥$

在⑥式中將 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 代入，交叉相乘計算可得 $\overline{PA}=\overline{QD}$ ，最後由①②可得

$$\sin\angle APM=\sin\angle DQM$$ 。

3. (1) 由於要將多項式拆成兩個多項式的平方和先化簡成 $a^2\left(b^2+c^2\right)$ 的形式，再利用分配律變成 $a^2b^2+a^2c^2=(ab)^2+(ac)^2$ ，即為所求。

$$\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+4x+5\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2+4x+4+1\right)=\left(x-1\right)^2\left[\left(x+2\right)^2+1^2\right]$$

$$=\left[\left(x-1\right)\left(x+2\right)\right]^2+\left(x-1\right)^2$$ 。

(2) 同(1)作法，但多 (x^2+2) 項無法作相同分解，所以先將 $\left(x^2+2\right)\left(x^2+4x+5\right)$ 相乘後，再做分解，

$$\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2+4x+5\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^4+4x^3+7x^2+8x+10\right)$$ 。

如要將 $\left(x^4+4x^3+7x^2+8x+10\right)$ 拆成兩個多項式的平方和，因為有 $4x^3$ 項，所以可分解成 $\left[\left(x^2+2x+k\right)^2+h\left(x\right)^2\right]$ 的形式，

$$x^4+4x^3+7x^2+8x+10=\left(x^2+2x+k\right)^2+\left[\left(3-2k\right)x^2+\left(8-4k\right)x+\left(10-k^2\right)\right]$$ 。

$h(x)^2=\left[\left(3-2k\right)x^2+\left(8-4k\right)x+\left(10-k^2\right)\right]$ 必須是完全平方式，所以判別式必為 0，

即 $D=\left(8-4k\right)^2-4\left(3-2k\right)\left(10-k^2\right)=0$ ，推得 $\left(k^2-2\right)\left(2k-7\right)=0$ ，即 $k=\pm\sqrt{2}$ ， $\frac{7}{2}$ 。

分情況討論如下：

① 當 $k=\sqrt{2}$ 時，原式 $=\left(x-1\right)^2\left[\left(x^2+2x+\sqrt{2}\right)^2+\left(3-2\sqrt{2}\right)x^2+\left(8-4\sqrt{2}\right)x+8\right]$

$$=\left(x-1\right)^2\left\{\left(x^2+2x+\sqrt{2}\right)^2+\left[\left(\sqrt{2}-1\right)x+2\sqrt{2}\right]^2\right\}$$

$$=\left[\left(x-1\right)\left(x^2+2x+\sqrt{2}\right)\right]^2+\left\{\left(x-1\right)\left[\left(\sqrt{2}-1\right)x+2\sqrt{2}\right]\right\}^2$$ 。

② 當 $k=-\sqrt{2}$ 時，原式 $=\left(x-1\right)^2\left[\left(x^2+2x-\sqrt{2}\right)^2+\left(3+2\sqrt{2}\right)x^2+\left(8+4\sqrt{2}\right)x+8\right]$

$$=\left(x-1\right)^2\left\{\left(x^2+2x-\sqrt{2}\right)^2+\left[\left(\sqrt{2}+1\right)x+2\sqrt{2}\right]^2\right\}$$

$$=\left[\left(x-1\right)\left(x^2+2x-\sqrt{2}\right)\right]^2+\left\{\left(x-1\right)\left[\left(\sqrt{2}+1\right)x+2\sqrt{2}\right]\right\}^2$$ 。

③ 當 $k=\dfrac{7}{2}$，原式 $=(x-1)^2\left[\left(x^2+2x+\dfrac{7}{2}\right)^2-4x^2-6x-\dfrac{9}{4}\right]$

$$=(x-1)^2\left[\left(x^2+2x+\frac{7}{2}\right)^2-\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2\right]。$$

因為會變成 $g(x)^2-h(x)^2$，與題意相矛盾。

由①②③可知，可找出 2 組解，分別為

$$g(x)=(x-1)\left(x^2+2x+\sqrt{2}\right)，h(x)=(x-1)\left[\left(\sqrt{2}-1\right)x+2\sqrt{2}\right]。$$

$$g(x)=(x-1)\left(x^2+2x-\sqrt{2}\right)，h(x)=(x-1)\left[\left(\sqrt{2}+1\right)x+2\sqrt{2}\right]。$$

4. 將方程式整理為 $\left(x^3+\sin x\right)+\left[(2y)^3+\sin(2y)\right]=0$。

若令函數 $f(t)=t^3+\sin t$，則可將方程式再整理為 $f(x)+f(2y)=0$，即

$$f(x)=-f(2y)\cdots①$$

又因為 $-f(2y)=-(2y)^3-\sin(2y)=(-2y)^3+\sin(-2y)=f(-2y)$，所以再由①可得

$f(x)=-f(2y)=f(-2y)\cdots②$

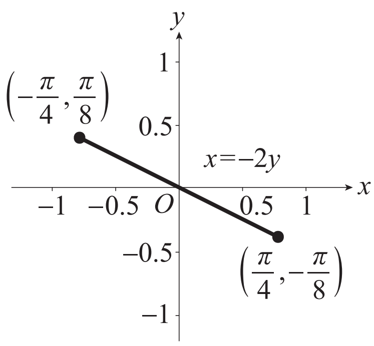
在區間 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上，因為 t^3 及函數 $\sin t$，皆為嚴格遞增函數，所以他們的和，也就是

$f(t)=t^3+\sin t$，也為嚴格遞增函數，亦即 $f(t)$ 為一對一函數。

因為 $f(t)=t^3+\sin t$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 為一對一函數，因此由②可知當 x，y 在區間 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上時，

可得 x，y 關係為 $x=-2y$，

其圖形為一線段，如下圖所示：



5. 由題目的圖得知，從右邊第一格到左邊第二格所需要的鞋帶長度為$\sqrt{d^2+g^2}$，美式穿到下一個數字總共穿了$2(n-1)$次，穿到另一邊一樣的數字有 1 次，左右兩邊還需要各留 15 公分打一個蝴蝶結，所以美式所需鞋帶長度為

$$15\times 2+g+2(n-1)\sqrt{d^2+g^2}\text{ 。}$$

而鞋店式穿到下一個數字總共穿了$(n-1)$次，穿到另一邊一樣的數字有$(n-1)$次，而從右邊第n格穿到左邊第一格所需要的鞋帶長度為$\sqrt{\left[(n-1)d\right]^2+g^2}$，左右兩邊還需要各留 15 公分打一個蝴蝶結，所以鞋店式所需鞋帶長度為

$$15\times 2+(n-1)g+(n-1)\sqrt{d^2+g^2}+\sqrt{\left[(n-1)d\right]^2+g^2}\text{ 。}$$

因為是比較大小，可以先扣除相同長度，即扣掉$15\times 2+g+(n-1)\sqrt{d^2+g^2}$。

扣除後，美式：$(n-1)\sqrt{d^2+g^2}=\sqrt{\left[(n-1)d\right]^2+\left[(n-1)g\right]^2}$，

鞋店式：$(n-2)g+\sqrt{\left[(n-1)d\right]^2+g^2}$。

因為長度皆大於 0，所以平方後大小仍不改變，平方後，

美式：$(n-1)^2d^2+(n-1)^2g^2\cdots$①

鞋店式：$(n-2)^2g^2+(n-1)^2d^2+g^2+2(n-2)g\sqrt{(n-1)^2d^2+g^2}\cdots$②

②－①

$$=\left[(n-2)^2g^2+(n-1)^2d^2+g^2+2(n-2)g\sqrt{(n-1)^2d^2+g^2}\right]-\left[(n-1)^2d^2+(n-1)^2g^2\right]$$

$$=(n-2)^2g^2+g^2-(n-1)^2g^2+2(n-2)g\sqrt{(n-1)^2d^2+g^2}$$

$$=-2(n-2)g^2+2(n-2)g\sqrt{(n-1)^2d^2+g^2}$$

$$=2(n-2)g\left(\sqrt{(n-1)^2d^2+g^2}-g\right)\cdots③$$

因為$(n-1)^2d^2$必大於 0，所以$\sqrt{(n-1)^2d^2+g^2}>\sqrt{g^2}=g$，又$(n-2)$大於或等於 0 且$g$大於 0，所以③必大於或等於 0。

由此可得除了兩側各 2 個孔的情形外，鞋店式所需鞋帶長度大於美式所需鞋帶長度，即美式所需之鞋帶較短。

筆試二、填充題

1. 因為 $a+b=3$ 且 $a^2+b^2=6$，所以 $ab=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2-(a^2+b^2)\right]=\frac{1}{2}(9-6)=\frac{3}{2}$。

利用 $a+b=3$，$a^2+b^2=6$ 及 $ab=\frac{3}{2}$ 得

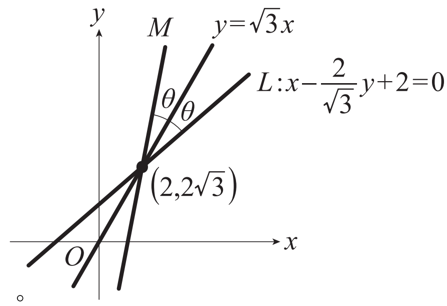
$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}=\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(ab)^2}=\frac{3\left(6-\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\left(\frac{9}{2}\right)}{\frac{9}{4}}=6\text{。}$$

2. （方法一）

設直線 $y=\sqrt{3}x$ 的傾斜角為 α，因為直線 $y=\sqrt{3}x$ 的斜率為 $\sqrt{3}$，所以 $\tan\alpha=\sqrt{3}$。

設 $L: x-\frac{2}{\sqrt{3}}y+2=0$ 的傾斜角為 β，因為斜率為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因此 L 和 $y=\sqrt{3}x$ 的正切夾角為



$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}==\frac{\sqrt{3}}{5}\text{，}$$

故 M 的斜率為 $\tan(\alpha+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}=\frac{\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{5}}{1-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{5}}=3\sqrt{3}$。

又 M 通過 L 和 $y=\sqrt{3}x$ 之交點 $\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ x-\frac{2}{\sqrt{3}}y+2=0 \end{cases}\Rightarrow$ 交點坐標為 $(2,2\sqrt{3})$。

令直線 M 方程式為 $y=3\sqrt{3}x+b\Rightarrow 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}\cdot 2+b\Rightarrow b=-4\sqrt{3}$,
即 M 方程式 $y=3\sqrt{3}x-4\sqrt{3}$ 為所求。

（方法二）

設直線 $y=\sqrt{3}x$ 的傾斜角為 θ，因為直線 $y=\sqrt{3}x$ 的斜率為 $\sqrt{3}$，所以 $\tan\theta=\sqrt{3}$ 且 θ 為銳角，

於是得 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$。由二倍角公式得

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{；}$$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}\text{。}$$

因此，以直線 $y=\sqrt{3}x$ 的鏡射變換 $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$,

取L的方程式$x-\frac{2}{\sqrt{3}}y+2=0$上兩點$(-2,0),(0,\sqrt{3})$透過鏡射變換

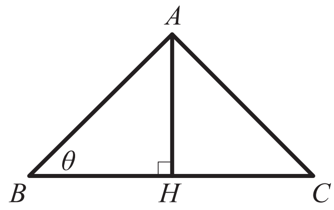
$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{bmatrix}\ ;\ \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

可得$\left(1,-\sqrt{3}\right)$，$\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$為$M$上的點，得$m=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\sqrt{3}\right)}{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{y-\left(-\sqrt{3}\right)}{x-1}$。

故M的方程式為$y=3\sqrt{3}x-4\sqrt{3}$。

3. （方法一）

在銳角等腰$\triangle ABC$中，做$\overline{BC}$邊上的高$\overline{AH}$，如右圖所示：



由圖可知$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AB}}{2\overline{BH}}=\dfrac{1}{2\cos\theta}\cdots$①

由題目可知$\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$，且$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，利用乘法公式可得

$$2\sin\theta\cos\theta=\left(\sin\theta+\cos\theta\right)^2-\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=\frac{16}{9}-1=\frac{7}{9}\text{ 。}$$

利用上式，再利用乘法公式得

$$\left(\sin\theta-\cos\theta\right)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-\frac{7}{9}=\frac{2}{9}\text{ ，}$$

推得$\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\cdots$②

因為$\triangle ABC$為銳角三角形，所以$0^\circ<\angle A<90^\circ$，又因為$2\theta=\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A>90^\circ$，

即$45^\circ<\theta<90^\circ$，可推得$\sin\theta>\cos\theta$，

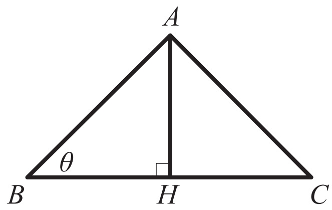
因此，②式中的負不合，得$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdots$③

解③式與$\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$的聯立方程組$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}\\\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}\end{cases}\Rightarrow\cos\theta=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$，$\sin\theta=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$。

將上式中的$\cos\theta=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$代入①式，得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{2\overline{BH}}=\frac{1}{2\cos\theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{4-\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)}{\left(4-\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)}=\frac{12+3\sqrt{2}}{14}\text{ 。}$$

（方法二）



在銳角等腰 $\triangle ABC$ 中，做 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AH}$，如右圖所示：

由圖可知 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AB}}{2\overline{BH}}=\dfrac{1}{2\cos\theta}\cdots$①

由題目可知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4}{3}$，且 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，利用乘法公式可得

$$2\sin\theta\cos\theta=\left(\sin\theta+\cos\theta\right)^2-\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=\frac{16}{9}-1=\frac{7}{9}\text{。}$$

因為 $2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\theta}$，所以 $\dfrac{7}{9}=\sqrt{1-\cos^2 2\theta}$，將此式平方得

$$\frac{49}{81}=1-\cos^2 2\theta\text{，}$$

即 $\cos2\theta=\pm\sqrt{\dfrac{32}{81}}\cdots$②

因為 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，所以 $0^\circ<\angle A<90^\circ$，故 $2\theta=\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A>90^\circ$。因此②式中的正不合，即 $\cos2\theta=-\sqrt{\dfrac{32}{81}}\cdots$③

由半角公式可知 $\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{\cos2\theta+1}{2}}$，將③式代入 $\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{\cos2\theta+1}{2}}$ 計算可得

$$\cos\theta=\pm\frac{4-\sqrt{2}}{6}\text{。}$$

因為 θ 為銳角，所以上式中的負不合，即 $\cos\theta=\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$。

將上式中的 $\cos\theta=\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$ 代入①式，得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{2\overline{BH}}=\frac{1}{2\cos\theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{4-\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)}{\left(4-\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)}=\frac{12+3\sqrt{2}}{14}\text{。}$$

4. 由函數 $f\left(x\right)=x^4-2014=\left(x^2+\sqrt{2014}\right)\left(x^2-\sqrt{2014}\right)$ 可知 $f\left(x\right)=0$ 恰有一正實根，

   又因為 $f\left(6\right)=-718<0$ 及 $f\left(7\right)=387>0$，即 $f\left(6\right)\cdot f\left(7\right)<0$，所以由勘根定理可知：方程式 $f\left(x\right)=0$ 在 6 與 7 之間有一正實根。再計算 $f\left(6.5\right)=-288.9375<0$ 知

   $$f\left(6.5\right)f\left(7\right)<0\text{，}$$

   故此正實根最接近的整數為 7。

5. 假設 17 人的分數分別為 $x_1,x_2,\cdots,x_{17}$。

   由標準差公式與平均數公式，可得 $10=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{17}\left(x_i-80\right)^2}{17}}$，$80=\dfrac{\sum_{i=1}^{17}x_i}{17}$，即

   $$\sum_{i=1}^{17}\left(x_i-80\right)^2=1700\cdots①$$

$$\sum_{i=1}^{17} x_i = 1360 \cdots ②$$

假設 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 未達 60 分， $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_{17}$ 達 60 分，可將①式及②式拆成

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - 80)^2 + \sum_{i=k+1}^{17} (x_i - 80)^2 = 1700 \cdots ③$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{17} x_i = 1360 \cdots ④$$

當$1 \le i \le k$時，$(x_i - 80)^2 > (60-80)^2 = 400$ ；

當 $k+1 \le i \le 17$ 時，$(x_i - 80)^2 \ge 0$ 。

代回③式得到$1700 > 400k + \sum_{i=k+1}^{17} (x_i - 80)^2$ ，推得$1700 > 400k$ ，即 $k = 0,1,2,3,4$ 。

分情況討論如下：

(1)當 $k = 4$ 時，代回③式推得$\sum_{i=5}^{17} (x_i - 80)^2 < 100 \cdots ⑤$

可將④式改寫為 $60 \times 4 + \sum_{i=5}^{17} x_i > \sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=5}^{17} x_i = 1360$ ，推得 $\sum_{i=5}^{17} x_i > 1360 - 60 \times 4 = 1120 \cdots ⑥$

由達到 60 分的人平均為 $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=5}^{17} x_i}{13} > \dfrac{1120}{13}$ 推得 $\sum_{i=5}^{17} x_i^2 > 13 \times (\bar{x})^2 > 13 \times \left(\dfrac{1120}{13}\right)^2 \doteqdot 96492 \cdots ⑦$

再將$\sum_{i=5}^{17} (x_i - 80)^2$ 展開得 $\sum_{i=5}^{17} x_i^2 - 160 \sum_{i=5}^{17} x_i + \sum_{i=5}^{17} 6400$ ，利用⑥式及⑦式推得

$\sum_{i=5}^{17} (x_i - 80)^2 > 96492 - 160 \times 1120 + 13 \times 6400 = 492$ ，此與⑤式矛盾。

(2)當 $k = 3$時，可以找到一組人的分數，滿足平均數為 80 分，標準差為 10 分，而且不及格人數 3 人，及格人數 14 人，其數據如下：

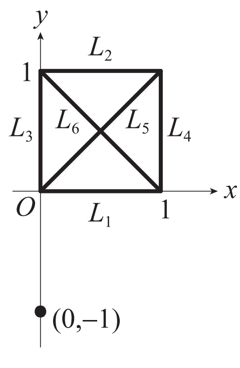
$59, 59, 59, 81, 82, 83, 84, 84, 84.5, 84.5, 84.5, 84.5, 84.5, 84.5, 84.5, 84.5, 93$ 。

綜合(1)(2)，得分未達 60 分至多有 3 人。

6. 因為 $\log_{10}(4^b + 9) = (\log_{10} 6) + (b \log_{10} 2) = \log_{10}(6 \cdot 2^b)$ ，所以 $4^b + 9 = 6 \cdot 2^b$ ，

即$(2^b)^2 - 6 \cdot 2^b + 9 = 0$ 解得 $2^b = 3 \Rightarrow b = \log_2 3$ 。

7. 將 G 畫出，如右圖所示。



而直線 $L: mx - y - 1 = 0$ 整理後為$[y - (-1)] = m(x - 0)$ ，

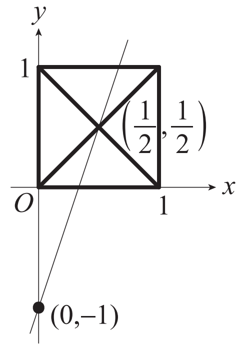
即直線 L 斜率為 m ，且必過點$(0, -1)$ 。

通過$(0, -1)$ ，且又要與圖 G 恰交 3 點的直線有以下兩種情形：

情形一：

如圖(一)，L 恰過 L_5 與 L_6 的交點會恰交三點，即過 $(0,-1)$ 及 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，推得斜率

$$m=3 \text{。}$$



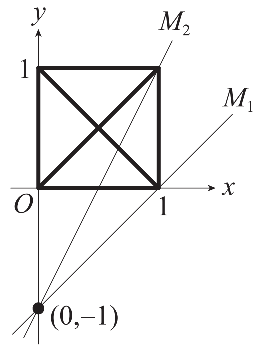
圖(一)

情形二：

如圖(二)，要恰交三點，L 的範圍必須要在直線 M_1 與 M_2 之間，所以斜率 $m_1<m<m_2$，又如果 L 與 M_2 重合，L 也會恰交三點，所以 $m_1<m\le m_2$，即

$$1<m\le 2 \text{。}$$

綜合這兩種情況，m 的解集合為 $\{m\,|\,(m=3)\cup(1<m\le 2)\}$。



圖(二)

8. 由平面的截距式知：平面 E 的方程式為 $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{a}=1$，進一步整理為

$$-3ax+2ay-6z=-6a \text{。}$$

可知平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(-3a,2a,-6)$，又因 yz 平面方程式為 $x=0$，其法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,0,0)$。因為 E 與 yz 平面的夾角等於 $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ 兩法向量的夾角

$$\cos 45^\circ=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3a}{\sqrt{13a^2+36}} \text{，}$$

平方可得

$$13a^2+36=18a^2\Rightarrow 5a^2=36\Rightarrow a=\pm\frac{6}{5}\sqrt{5} \text{。}$$

依題意 $a\ge 0$，所以 $a=\frac{6}{5}\sqrt{5}$。

9. 假設 x 表示每回拿走 1 顆的總次數，y 表示每回拿走 3 顆的總次數，z 表示每回拿走 5 顆的總次數。因為 x,y,z 為非負整數，且滿足 $x+3y+5z=10$，(x,y,z) 可能的組合有以下七種：

$(10,0,0)$，其排列方法有 $\frac{10\ !}{10\ !}=1$；

$(7,1,0)$，其排列方法有 $\frac{8!}{7!\ 1!}=8$；

$(4,2,0)$，其排列方法有 $\frac{6!}{4!\ 2!}=15$；

$(1,3,0)$，其排列方法有 $\frac{4!}{1!\ 3!}=4$；

$(5,0,1)$，其排列方法有$\dfrac{6!}{5!\ 1!}=6$；

$(2,1,1)$，其排列方法有$\dfrac{4!}{2!\ 1!\ 1!}=12$；

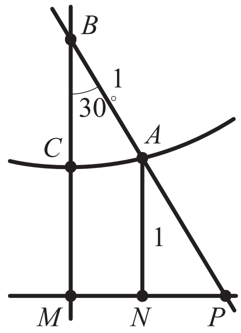
$(0,0,2)$，其排列方法有$\dfrac{2\ !}{2\ !}=1$。

將以上所有各排列方法加總，即$1+8+15+4+6+12+1=47$種。

10. 因為拋物線Γ上的點到焦點的距離等於該點到準線的距離，且$\overline{AB}=1$，所以A點到準線的距離也為 1。

焦點B到Γ的最短距離，就是焦點到頂點的距離，也就是$\overline{BM}$的一半，接下來由圖(一)、圖(二)來求$\overline{BM}$，其中C點為拋物線頂點，P點為$\overleftrightarrow{AB}$與準線的交點，M點為對稱軸與準線的交點，N點為A點到準線最近距離的交點。

(1) 由圖(一)求$\overline{BM}$：



圖(一)

$\triangle APN$中，$\angle APN=90^\circ-30^\circ=60^\circ$，

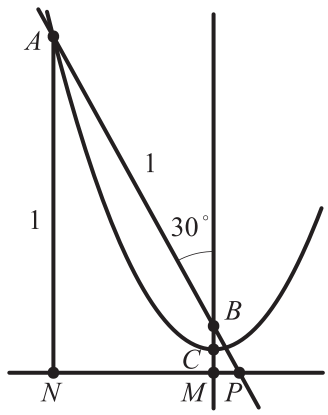
可推得$\overline{AP}=\dfrac{1}{\sin\angle APN}\overline{AN}$，即$\overline{AP}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$。

$\triangle BPM$中，$\overline{BM}=\sin\angle BPM\times\overline{BP}$，即$\overline{BM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$，

整理得$\overline{BM}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$。

點B到Γ的最短距離，即$\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\overline{BM}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$。

(2) 由圖(二)求$\overline{BM}$：



圖(二)

類似(1)的推理，可推得$\triangle APN$中，

$$\overline{AP}=\frac{2}{\sqrt{3}}。$$

$\triangle BPM$中，$\overline{BM}=\sin\angle BPM\times\overline{BP}$，即

$$\overline{BM}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}。$$

點B到Γ的最短距離，即

$$\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{BM}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}。$$

綜合(1)(2)，總共有兩組解，分別為$\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$和$\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$。

專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 97

☆☆

實施一項實驗以研究紙張的張力強度 y（磅／平方英吋）與這批紙的紙漿中所含硬木百分比 x（%）之間的關係，得到如下的五個實驗數據：

x	3	4	7	11	15
y	5	40	15	35	55

(1) 試作出此資料的散布圖，並求其相關係數。

(2) 求 y 對 x 的迴歸線方程式。

(3) 當紙漿中所含硬木百分比為 18%時，預測這種紙張的張力強度 y 是多少？

〔玩鎖・玩索〕

這道問題改編自 1997 年英國皇家統計學會考試的試題。散布圖是將兩個變量的變化數列繪入坐標圖中，以清晰的表明其分布情形。細察散布圖上各點的分布情形，即可看出兩個變量的相關情形。而相關係數則是將散布圖的幾何呈現方式給予量化的結果，迴歸線方程式更是利用一條簡單的直線刻畫兩筆資料間的大致關連。若

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n-1}}\ ,\ S_y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{n-1}}$$

代表兩筆資料的標準差，r 是其對應的相關係數，則 y 對 x 的迴歸線方程式為

$$\frac{y-\overline{y}}{S_y}=r\frac{x-\overline{x}}{S_x}\ 。$$

從迴歸線方程式可以知道：公式雖然除以 S_x 與 S_y，但是 S_x 與 S_y 中的 $n-1$ 並沒有發生作用（互相消掉），所以儘管有些書籍將標準差的公式定為除以 n（非這裡的除以 $n-1$），仍然不會影響迴歸線方程式。

遊戲 98

☆☆

風吹在物體上所產生的壓力，泛稱風壓，其大小與風速平方成正比。下表是有關風級、風速與風壓的對應表。為了方便記憶起見，風速取至小數第一位（第二位四捨五入），風壓四捨五入至整數部分。已知這個表是依風壓 p 與風速 v 的公式

$$p=\alpha v^n$$

計算而得，而且 α 是取至小數第二位的數，n 是固定的正整數，完成下列各問題：

風級	名稱	風速 v（公尺／秒）	風壓 p（公斤／m^2）
5	清風	8.0～10.7	
6	強風	10.8～13.8	14～23
7	疾風	13.9～17.1	
11	暴風	28.5～32.6	
13	颶風	37.0～41.4	
16	颶風	51.0～56.6	

(1) 求 α 與 n 的值。

(2) 當今百米賽跑的紀錄是美國短跑名將賈斯廷・加特林在卡達田徑大獎賽所創的 9.76 秒（2006 年 5 月 13 日凌晨），試問賈斯廷・加特林的速度相當於幾級風。

(3) 將上述表格的風壓部分補上。

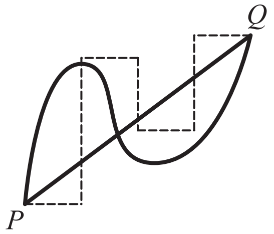
〔玩鎖・玩索〕

大多數經營戶外廣告招牌的廣告公司可能都會問類似問題：在樓頂安裝廣告招牌時，遇大風該廣告牌能否承受相對應的風壓。遇上大風如果廣告招牌不能承受相對應的風壓，那有可能造成難以預料的後果：如廣告招牌從樓頂被吹落，砸傷樓下行人或造成自己或他人財產受損。如果保險公司承保這塊廣告招牌，當然也會首先估算一下該廣告招牌被大風吹落的機率有多大。事實上，即使在平地上安裝廣告牌，這個問題依然存在。也因為這樣，天氣預報時，有時也會播報風壓的大小，特別是颱風來襲的時候。

遊戲 99

☆☆☆

在陸地上行走，兩點間的距離以直線最短，其餘的路線都算繞遠路；同樣的，空間中的兩點以直接連接兩點的直線距離最短。這是人們的經驗法則，也因為這樣，我們把兩點之間的距離定義為直線的距離。但是，不同智能的動物，也許對距離的感受與定義會不同也說不定。



上圖所示，空間坐標中的兩個點 P 與 Q，人們把它的距離定為線段 $\overline{PQ}$ 的長度，這個長度也是從 P 走到 Q 的所有路徑中，距離最短的一條（圖中另兩條路徑長度都比線段 $\overline{PQ}$ 長）。

如果有一種動物，他們把 P,Q 兩點的距離 $d(P,Q)$ 定為「P 與 Q 的坐標中，數字不一樣的位置數。」例如，當 $P=(1,2,3)$ 與 $Q=(5,4,3)$ 時，他們的第一及第二個坐標數字不一樣，第三個坐標數字一樣，所以 $d(P,Q)=2$。在這種距離的定義之下，兩點間的距離只會有 0,1,2 與 3 四種情形。

距離的定義最重要的一點就是：它必須符合三角不等式的意義，也就是說，若 A,B,C 是空間中的任意三點，則不等式

$$d(A,B)+d(B,C)\geq d(A,C)$$

必須成立。

說明這裡的距離函數 $d(P,Q)$ 符合三角不等式的意義。

〔玩鎖・玩索〕

並不是人類或其他動物才需要有距離的概念，自然界中的許多事物都會用到不同的距離觀念，例如九十五學年度指定科目考試試題〈數學乙〉第 5 題就是電腦上使用距離觀念的題目：

一個「訊息」是由一串 5 位元的數字排列組成，而每位數字都僅能是 0 或 1，例如 10010 與 11001 就是兩個不同的訊息。兩個訊息的「距離」定義為此兩組數字串相對應位元中，數字不同的位元數量。例如，數字串 10010 與 11001 在第2,4 及 5 三個位元不同，所以訊息 10010 與 11001 的距離為 3。選出正確的選項：

(1) 與訊息 10010 相距最遠的訊息為 11101。

(2) 任兩訊息之間的最大可能距離是 4。

(3) 與訊息 10010 相距為 1 的訊息恰有 5 個。

(4) 與訊息 10010 相距為 2 的訊息恰有 9 個。

究竟還有多少不同的距離定義方法，是值得我們下功夫去挖掘與研究的課題？

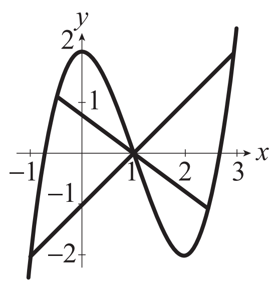
遊戲 100

☆

已知三次函數 $f(x)=x^3-3x^2+2$，求函數值 $f(a)$ 與函數值 $f(2-a)$ 的和 $f(a)+f(2-a)$（答案以符號 a 表示）。

〔玩鎖・玩索〕

將 $y=f(x)$ 的圖形畫出如下，從圖中的兩條割線，是否知道三次函數一個不為人知的祕密：



動手玩數學~破解秘笈 第24期

遊戲 93

師大數學系謝淑莉同學的解：

(1) 第一位醫師戴上第一副手套之後，再套上第二副手套，然後進行手術，即第一位醫師的兩手各戴兩隻手套。術後第二副手套外部被藍委員的皮膚病感染，第一副手套內部可能被第一位醫師感染，也可能沒被感染，但第一副手套外部與第二副手套內部肯定是乾淨的。第一位醫師將右手的第二隻手套反套在他的左手。此時，第一位醫師的右手有一隻手套，而左手套了三隻手套。

(2) 第一位醫師將兩手手套反套給第二位醫師，此時第二位醫師的右手有一隻手套，左手套了三隻手套。術後將左手外面兩層手套套到他的右手。再將兩手的手套反套給第三位醫師。

(3) 這樣就可以完成任務，而且醫師間不會互相感染。

新北市金山高級中學的郭凡瑞同學的解：

第一位醫師戴上第一副手套之後，右手再套上第二副手套的兩隻（即第一位醫師左手戴一隻手套，而右手戴三隻手套的意思）。接下來將該醫師右手最外的手套反套回他的左手，此時第一位醫師雙手各套兩隻手套。然後，第一位醫師將雙手反套給第二位醫師，此時第一位醫師所接觸的手套變成第二位醫師的外套。接著，第二位醫師再將右手最外的手套反套回他的左手。此時第二位醫師左手套三隻手套，右手僅套一隻，且兩隻外套都是乾淨，未被汙染。最後第二位醫師只需將手套再反套給第三位醫師即可。

註：這問題還有第三種解法，你想到了嗎？

遊戲 94

設 a 是尤拉多項式的實數二重根，由 $f'(a)=0$ 知道 a 是四次多項式

$$f'(x)=5x^4-10x^3+5x=5x\left(x^3-2x^2+1\right)$$

的一根。顯然 $(x-1)\left|\left(x^3-2x^2+1\right)\right.$，所以

$$x^3-2x^2+1=(x-1)\left(x^2-x-1\right),$$

即

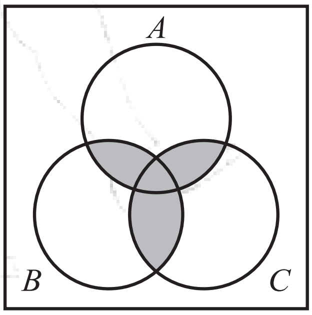
$$f'(x)=5x(x-1)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

因此 a 可能為 $0,1,\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，但是 0 與 1 並非 $f(x)$ 的根，所以 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

遊戲 95

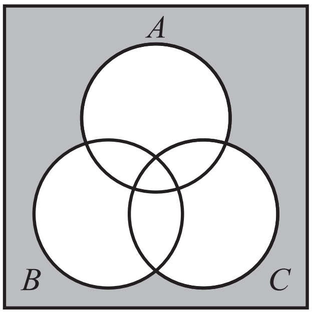
下圖中的鋪色區域就是 A,B 與 C 中至少發生兩個事件以上之區域，利用發生 A 及 B 的機率 $P(A\cap B)=pq$，B 及 C 的機率 $P(B\cap C)=qr$，C 及 A 的機率 $P(C\cap A)=pr$，A,B 與 C 的機率 $P(A\cap B\cap C)=pqr$，得三事件 A,B 與 C 中至少發生兩個事件的機率為

$$pq+qr+rp-2pqr\ .$$



下圖的鋪色區域代表 A,B 與 C 三個事件均不發生的機率，因為它們是完全獨立的三事件，所以發生鋪色區域的機率為 $(1-p)(1-q)(1-r)$。而且，由 $0<p,q,r<1$ 知

$$(1-p)(1-q)(1-r)>0\ .$$



因為 A,B 與 C 三個事件均不發生的機率為正，所以至少發生兩個事件以上的機率必小於 1，也就是說

$$pq+qr+rp-2pqr<1\ ,$$

得證。

遊戲 96

(1) 由

$$f(0)=\frac{a+b+c}{3}$$

及

$$f(1)=\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}=1-\frac{a+b+c}{3}$$

得

$$f(0)+f(1)=1\ .$$

(2) 因為 $f(0)+f(1)=1$，所以 $\frac{1}{2}$ 介於 $f(0)$ 與 $f(1)$ 兩數之間。根據中間值定理，可以在閉區間 $[0,1]$ 上找到實數 x_0 使得

$$f(x_0)=\frac{1}{2}\ .$$