龍騰數亦優

因為知識的傳播與分享才造就出人類的偉大
龍騰邀請您　分享寶貴的知識與經驗
共同為數學教育開展出優質的交流園地

投稿議題

1.高中職教育政策，國內外教育新知
2.教材探討、教案分享、資訊融入教學分享
3.教學生活趣聞、教學甘苦談

投稿注意事項

1.請註明主題、投稿科目、作者簡歷、聯絡電話與地址
2.本刊有權刪改稿件，若不接受刪修，請務必註明
3.每篇文章以1000～2000字為限

來稿請寄

248 新北市五股區五權七路1號　數學編輯小組
電話：(02)2299-9063 分機 372
傳真：(02)2298-9755
e-mail :joanne_lee@ lungteng.com.tw

龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第26刊

N5201
26 #1
贈品禁止轉售
龍騰文化

編輯室墨記

生活周遭都是數學，讓數學融入生活中，是我們一直以來努力的目標，許志農教授將「兩岸四地華羅庚金盃少年數學菁英邀請賽」的遊戲題目與解析稍做修飾，提供給老師們做為數學選修課程或特色課程的參考資料，讓高中的數學不再只是定理公式而是活潑趣味的生活試題，以吸引學生的學習動機。

「世界何時毀滅？」這問題和移動圓盤耗費的時間有何相關性？原來這就是所謂的河內塔問題，運用到遞迴關係的理論，這麼好玩的趣味數學遊戲，讓我們跟著老師的腳步，一同鑽進遞迴數列的世界吧！「哇！插值法」，課本中學到的插值法原來可以運用這麼多種方法來探討，讓我們一起來欣賞不同解法之美！

您知道如何讓財富倍增嗎？您知道要如何計算嗎？讓我們來看看這神奇的法則。生活中倡導的節能減碳、調薪有感，這些已不是單純口號，讓我們來看看如何用 69.34 法則將其應用出來。「翻轉教育」這是當今最夯的話題，從國小一路到大學，大家都在翻轉，TRML 的培訓和翻轉有關係嗎？讓我們來一探究竟！我們學過最小成本法，大家知道差額法也可以求最佳解嗎？讓我們來看看簡潔有效率的方法！

按照一定的順序堆疊八個全等正方形，也跟數學有關嗎？簡單的塗色遊戲也有必勝的祕技嗎？快翻閱動手玩數學，大展身手一下吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的內容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 joanne_lee@lungteng.com.tw。

發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
執行編輯：李彥宜
美術編輯：林佳瑩

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248新北市五股區五權七路1號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2298-9755
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2015/03/16
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2015.03 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

兩岸四地華羅庚金盃少年數學菁英邀請賽

許志農／臺灣師大數學系

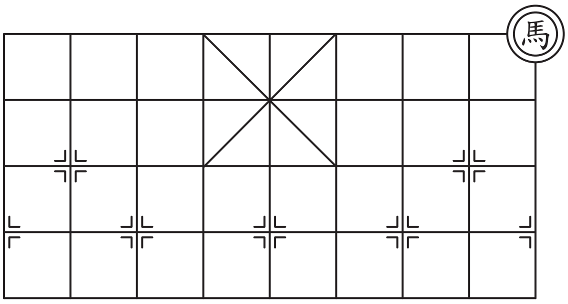
◎第一、二屆請見龍騰數亦優第 24 刊、第三屆請見第 13 刊、第四屆請見第 25 刊。

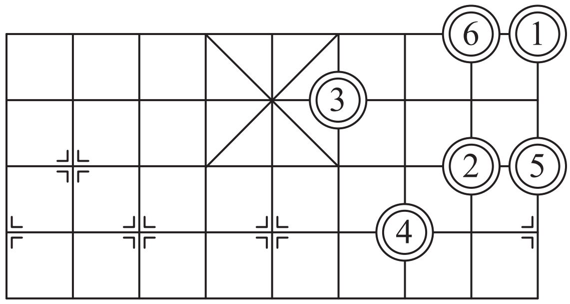
第五屆

一、競賽試題

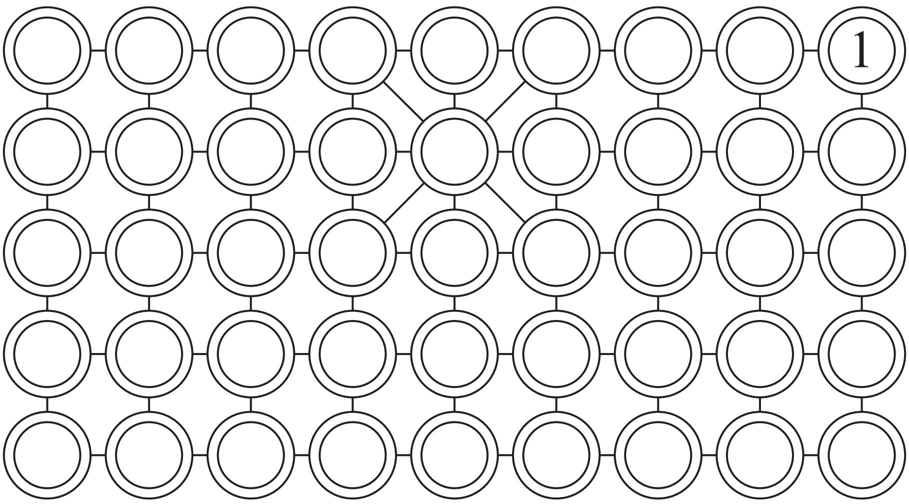
＊**第 1 題**：（限時 15 分鐘）

大家都知道：中國象棋裡的「馬」走「日」步。左下圖是將馬擺放在棋盤的右上角，而右下圖：標出了馬從右上角出發所走幾步經過的點的順序編號：

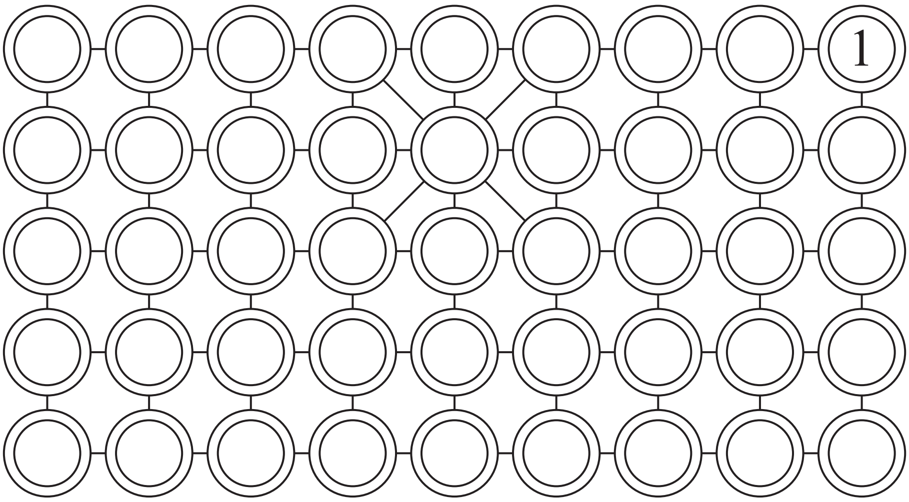




現讓馬從右上角出發，在每個點至多只能走過一次的限制下，盡可能讓馬走更多步，並將其走過的點依序標在所附的答題紙上。

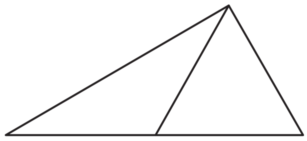


第 1 題答題紙



＊第 2 題：（限時 15 分鐘）

給定一個三角形，過一個頂點畫一線段將此三角形割成兩個小三角形，如下圖所示：



問題：有哪些類型的三角形可以在適當的畫一線段後，讓兩個小三角形都是等腰三角形。

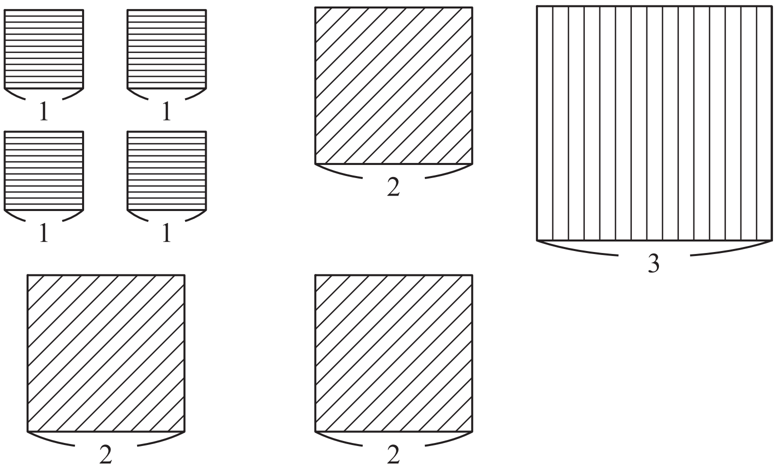
要求：1. 舉出的類型越多，得分越高；

2. 最好不要舉單一特例，例如邊長是多少或角度為幾度的三角形等。

3. 每種類型用直尺、圓規做出一個實例，保留尺規作圖痕跡。

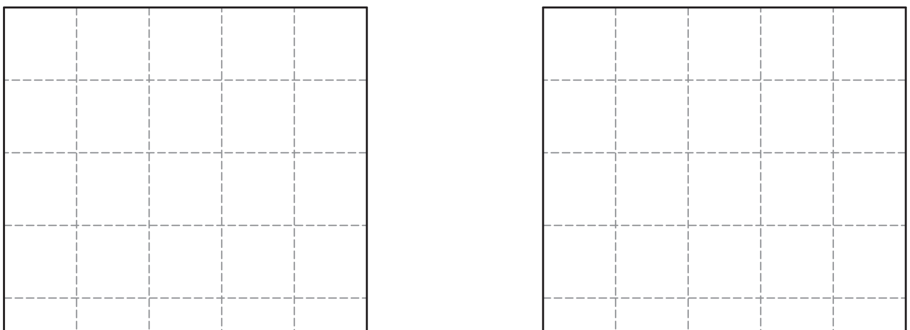
＊第 3 題：（限時 10 分鐘）

我們手上有四個邊長為 1 的正方形，三個邊長為 2 的正方形及一個邊長為 3 的正方形，一共八個正方形，如下圖所示：



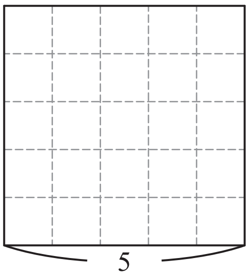
請將這八個正方形無重疊的擺放到邊長為 5 的正方形中，並將擺放的結果標在所附的答題紙上。

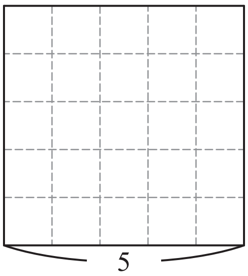
（註：不同拼法，越多越好，擺放的兩個圖形經旋轉或背後透視相同的拼法視為同一種。）

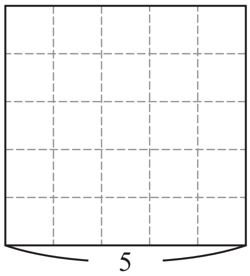


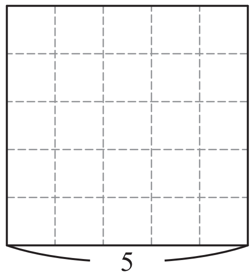
補充：拼出越多種拼法越好，得分越高。

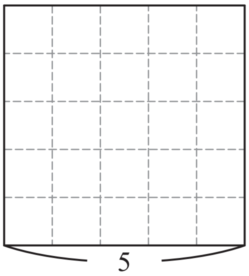
第 3 題答題紙

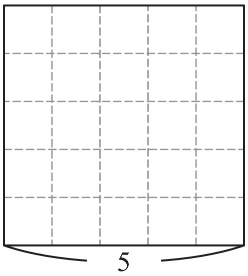


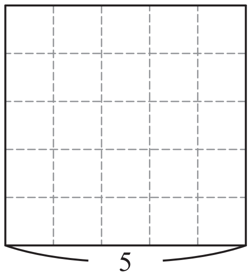


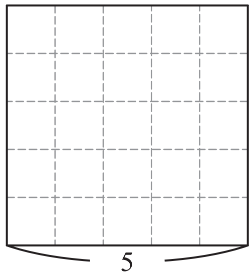


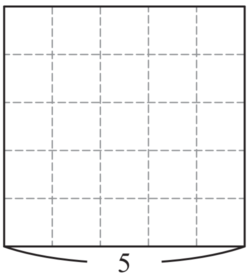


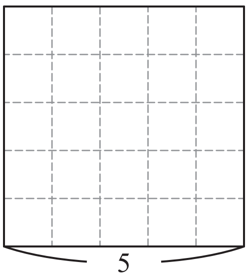


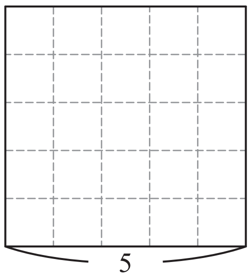


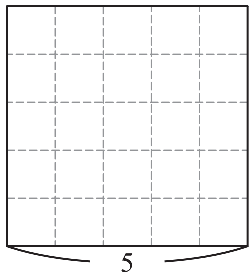






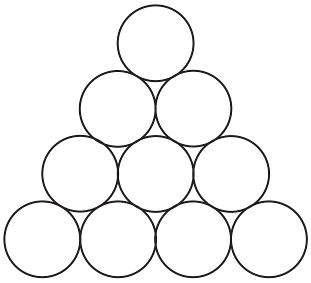




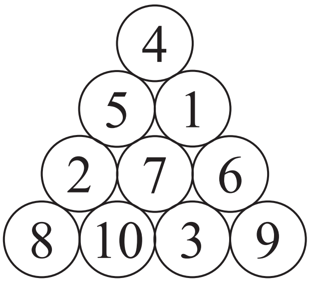


＊**第 4 題：**（限時 20 分鐘）

將十個數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 填入下圖的圓圈內，每個圓圈填入不同的數字：

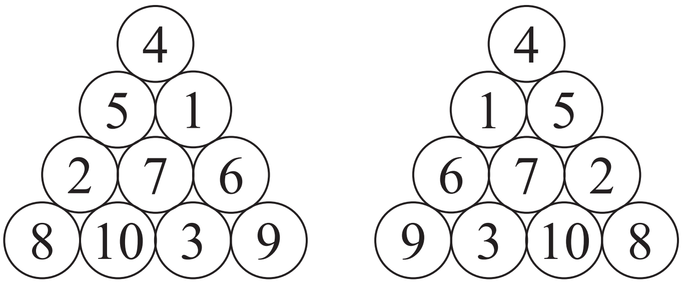


如果要求每個圓圈內的數字必須是底下兩個圓圈內的數字差，例如下圖填法



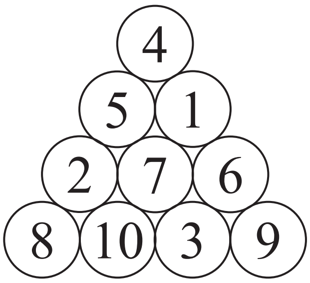
那麼一共有多少種不同的填法？並將其各種填法寫在所附的答題紙上。

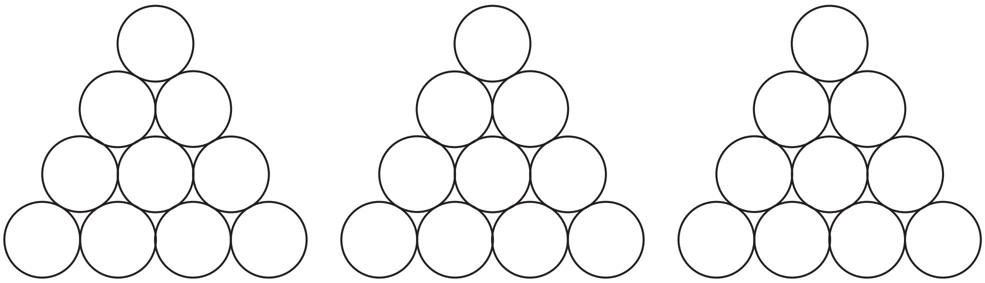
補充：1. 左右對稱的填法（如下圖所示），視為同一種；

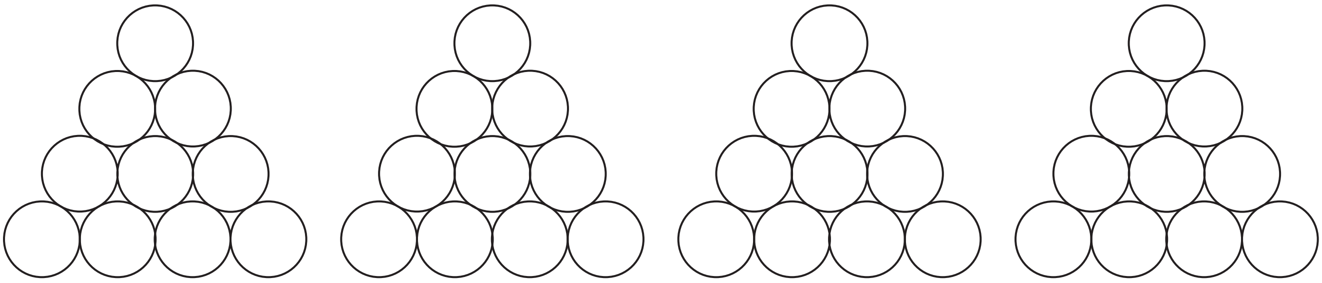


2. 列舉出越多符合題目要求的填法，得分越高。

第 4 題答題紙







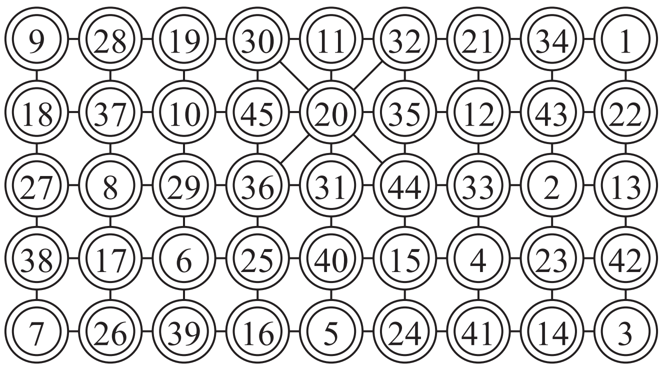
二、解析

第 1 題評分準則：

(1) 說明：測試時間為 15 分鐘。

(2) 評分：在棋盤上符合「馬」走「日」步要求的最大路徑標號 $N+25$，得分數為 N。例如最大路徑標號為 35，該隊得 10 分，而全走完共 45 步，會得 20 分。

(3) 原則上每個點（共 45 點）都可以走過，參考答案如下

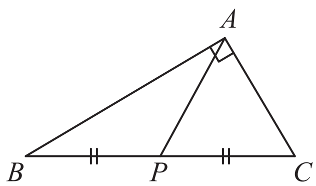


第 2 題評判準則：

(1) 說明：測試時間為 15 分鐘。

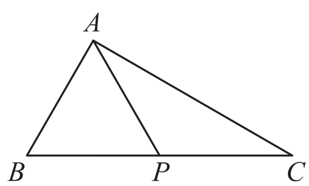
(2) 解答：符合題目要求的三角形有三種。

① $\angle A = 90°$（直角三角形）：



P 是 BC 的中點，連接 AP。此時，$AP = PB = PC$，即三角形 APB, APC 為等腰三角形。

② $\angle B = 2\angle C < 90°$（一角是另一角二倍）：



作 AP 使得 $2\angle C = \angle B = \angle APB = \angle PAC + \angle C$，即 $\angle C = \angle PAC$，故 $AB = AP = PC$。

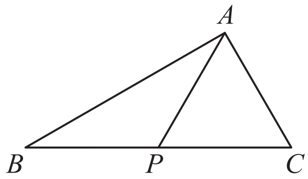
【另作】1. 作 $\angle C < 45^\circ$。

2. 在 $\angle C$ 的一邊選一點 B，作 $\angle CBA = 2\angle C$，A 為與 $\angle C$ 另一邊的交點。

3. 以點 A 為圓心，線段 AB 為半徑作弧交線段 BC 於點 P。

4. 連接 AP，AP 即為所求線段。

③ $\angle A = 3\angle B < 135°$（一角是另一角三倍）：



作 AP 使得 $\angle B = \angle BAP$ ，此時 $AP = BP$ ，又

$\angle CPA = \angle BAP + \angle B = 2\angle BAP = \angle CAP$ ，即 $CA = CP$ 。

【另作】1. 作 $\angle B < 45^{\circ}$ 。

2. 在 $\angle B$ 的一邊上取點 A ，作 $\angle BAC = 3\angle B$ ，點 C 為與 $\angle B$ 另一邊的交點。

3. 以 C 為圓心， CA 為半徑作弧交線段 BC 於點 P 。

4. 連接 AP ，線段 AP 即為所求。

(3) 給分：有上述三種類型者，準確說出一種符合題意類型給 6 分、寫明條件限制的給 2 分、畫出實例且作法正確的給 2 分，每類給 10 分。若沒列舉上述三類型，而舉角度或邊長的特例，例如：30 度，60 度，90 度的三角形或邊長為 3，4，5 的三角形，給 5 分。

第 3 題評判準則：

(1) 說明：測試時間為 10 分鐘。

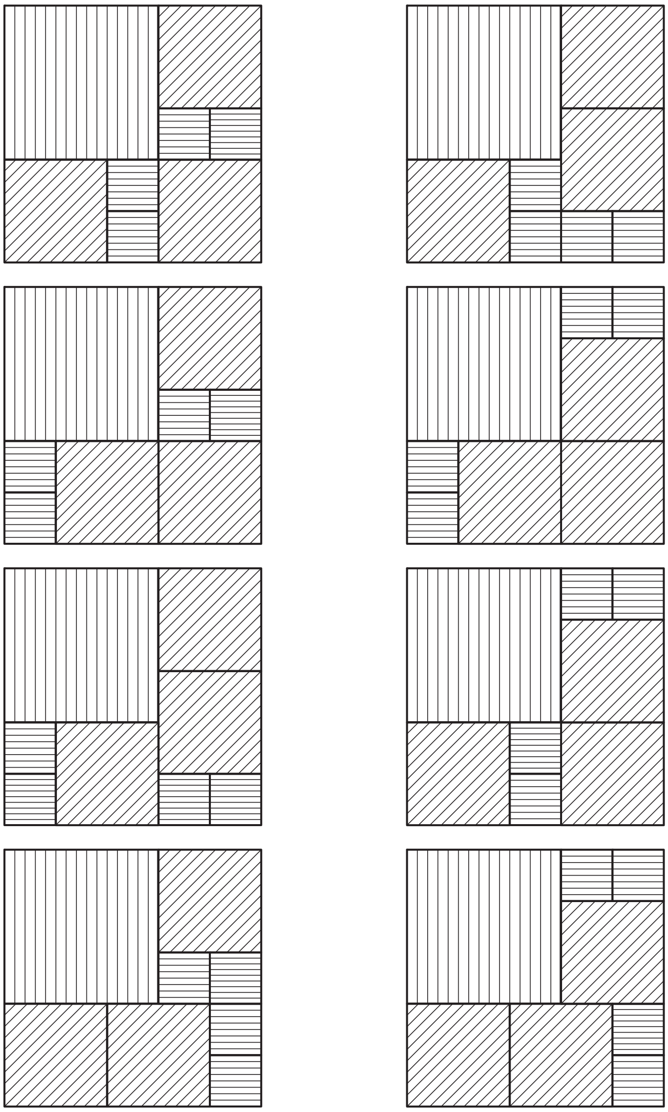
(2) 給分：(a) 答對 1 至 3 種，得 5 分；

(b) 答對 4 或 5 種，得 10 分；

(c) 答對 6 或 7 種，得 15 分；

(d) 答對 8 種，得 20 分。

(3) 答案：有如下八種：

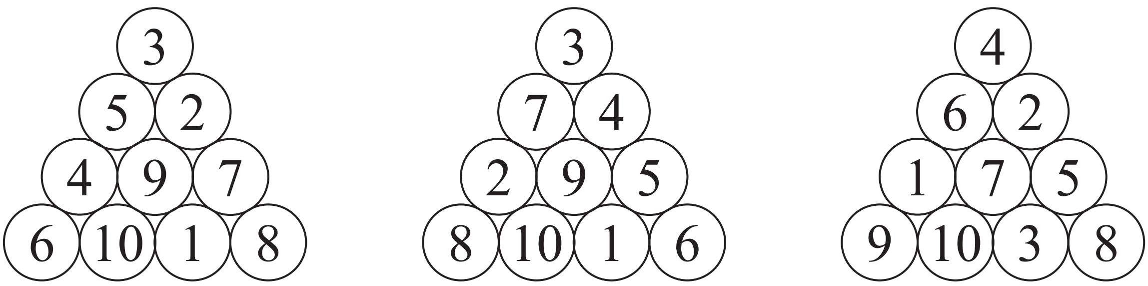


第 4 題評判準則：

(1) 說明：測試時間為 20 分鐘。

(2) 給分：找到一個給 6 分，找到兩個給 13 分，三個給 20 分。

(3) 參考答案如下：



遞迴數列

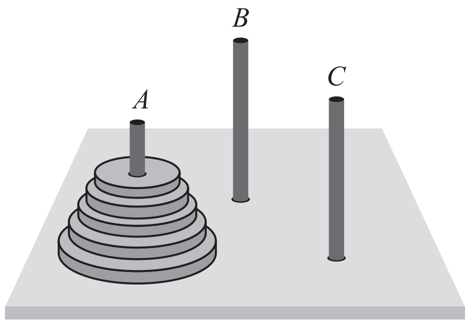
江慶昱／衛道中學退休教師

一、緣起》

婆羅痆斯國（今印度北部瓦臘納西（Varanasi），靠近尼泊爾）方圓四千多里，居民大多信奉外道，少數人敬信佛法。從婆羅痆河向東走十多里，就到了鹿野苑，是釋迦牟尼佛初轉法輪的地方。寺院內精舍西南有一座石塔，塔前有無憂王石柱，石柱旁邊不遠處有座佛塔，是當初阿若憍陳如等五人見如來放棄苦行，便不再侍衛如來而來這裡自己修行的地方。旁邊還有三座塔，有過去三佛安坐和散步的遺跡。（參考資料 1）

維斯瓦納特（Kashi Vishwanath）是印度濕婆神（大自在天）的寺廟，位於瓦臘納西。廟裡面有一個很大的房間，裡面有 3 根柱子，旁邊放了 64 個金屬圓盤。依照下列規則移動圓盤：

有 A，B，C 三柱，其中 A 柱上套著 n 個大小不同的圓盤，將其由小到大圓盤編號為 1，2，…，n。若藉助 A，B，C 三柱作橋樑，且每次移動圓盤時都保持較大圓盤在下面，較小圓盤放在上面的規定，將 A 柱的圓盤全部移動到 C 柱。一旦工作完成，這個世界終將結束。



假設移動一個圓盤需要 1 分鐘，則 64 個圓盤依照上述規則，由 A 柱全部移動到 C 柱需要多少時間？世界何時毀滅？

以上所述，盧卡斯（Édouard Lucas 1842～1891）在 1887 年把它寫成一個趣味數學遊戲（8 個圓盤的情形）又稱為河內（Hanoi）塔問題。

（註：盧卡斯對費氏數列也很有研究，請看參考資料 3，二階線性遞歸關係）

二、問題轉化》

設 a_n 表示將 n 個圓盤全部由 A 柱搬到 C 柱所需的最少次數，試求〈 a_n 〉的遞迴關係式，並求 a_n。

因為河內塔問題課堂上都會教到，所以得到遞迴關係的過程就不再贅述。

$a_1 = 1$，$a_n = 2a_{n-1} + 1$。

三、求解》

解 1：

製造一個公比 = 2 的新數列〈 $a_n - c$ 〉，其中 c 是一個常數，

$a_{n+1} - c = 2(a_n - c)$，和原式比較，得 $c = -1$，

即我們產生一個公比$=2$的新數列〈 a_n+1 〉，所以$a_n+1=(1+1)\cdot 2^{n-1}$，

得$a_n=2^n-1$。

因為產生的新數列為等比數列，我遂自告奮勇，把原數列叫做「準等比數列」。（註：眼尖的學生看出$c=-1$是$x=2x+1$的解，這可不是巧合。）

但是，產生新數列的過程常使學生感到突兀，一位衛道中學的同事強烈建議我這樣教：

解 2：

$a_1=1$，

$a_2=2+1$，

$a_3=2(2+1)+1=2^2+2+1$，

$a_4=2(2^2+2+1)+1=2^3+2^2+2+1$，

…找到規律性，

所以$a_n=2^{n-1}+2^n+\cdots+2+1=2^n-1$。

這樣做一般學生應該可以掌握。

如果時間允許，我兩種方法都會教。我發現，程度較好的學生傾向於第一種解法。這應該是數學成熟度的問題，第一種解法比較抽象。不知道根據數學方法論如何解釋。

深入地說，第二種解法$a_4\to a_n$的過程其實是一個「猜想」，然後引入數學歸納法，這是「證明」的部分。這樣就很完美了！這就印證了 Paul Erdös 說的：生命的意義在猜想與證明。

四、費氏數列》

$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$稱為費氏數列。

費氏數列一般項的求法就我所知至少有 3 種：(1)矩陣；(2)生成函數；(3)製造新數列；等等，都超出目前高中課程。我高中時曾試著解過，就是用製造新數列的方法，但沒有成功。

以下介紹製造新數列的方法。

對於費氏數列，如果存在α，β，使得$(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$，則$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$，$\alpha$，$\beta$是$x^2-x-1=0$的兩根，則〈 $a_{n+1}-\alpha a_n$ 〉是一個公比為β的等比數列，於是$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$，這樣的數列有必要研究一下。

[引理]

數列〈 a_n 〉，滿足$a_{n+1}+pa_n+qr^n=0$，則存在常數A，B，使得$a_{n+1}=A(-p)^n+Br^n$。

證明：

$a_{n+1}+pa_n+qr^n=0\cdots\cdots①$，

$a_n+pa_{n-1}+qr^{n-1}=0\cdots\cdots②$，

①$-r$②得$(a_{n+1}-ra_n)+p(a_n-ra_{n-1})=0$，

所以〈 a_n-ra_{n-1} 〉是一個公比$=-p$的等比數列，

$a_{n+1}-ra_n=(a_2-ra_1)(-p)^{n-1}\cdots\cdots③$

$a_{n+1}+pa_n=-qr^n\cdots\cdots$④，③$\times p+$④$\times r$，得

$(p+r)a_{n+1}=-(a_2-ra_1)(-p)^n-qr^{n+1}$，取 $A=\dfrac{ra_1-a_2}{p+r}$，$B=\dfrac{-qr}{p+r}$，則 $a_{n+1}=A(-p)^n+Br^n$。

由此引理，費氏數列〈 a_n 〉滿足 $a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$，所以 $a_{n+1}=A\alpha^n+B\beta^n$。

此時 $p=-\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$q=\dfrac{-(1-\alpha)}{\beta}=-1$，$r=\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，

$A=\dfrac{r-1}{p+r}=\dfrac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\sqrt{5}}$，$B=\dfrac{-qr}{p+r}=\dfrac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{5}}$。

故 $a_{n+1}=A\alpha^n+B\beta^n=\dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\dfrac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，

請採取這部分，或直接用後面論述，多謝！

$a_{n+1}=A\alpha^n+B\beta^n$ 表示 a_n 可以表為 α^n，β^n 的線性組合，令 $a_n=P\alpha^n+Q\beta^n$，

取 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，因為 $a_1=a_2=1$，取 $n=1$，2 代入，則

$$\begin{cases}P\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+Q\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1\\[2ex] P\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+Q\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1\end{cases}$$，解得 $P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$Q=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

所以費氏數列的一般項 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，這是雅克・比奈（Jacques Binet 1786～1856）於 1843 年得到的結果。

五、分式線性關係的不動點解法》

臺中一中 101 學年度第一次教師甄試考了這樣一道題目：

設數列〈 a_n 〉滿足 $a_1=2$ 且 $a_n=\dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2}$，$\forall n\geq 2$，求一般項 a_n。（以 n 表示）

解 1：作歸納性的猜測

$a_1=2$，$a_2=\dfrac{5}{4}$，$a_3=\dfrac{14}{13}$，$a_4=\dfrac{41}{40}$，$\cdots$，

令 $b_1=1$，$b_2=4$，$b_3=13$，$b_4=40$，$\cdots$，則 $b_n-b_{n-1}=3^{n-1}$，

$b_n = 1+3+3^2+\cdots+3^{n-1} = \frac{1}{2}\left(3^n-1\right)$，所以 $a_n = \dfrac{\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)+1}{\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)} = \dfrac{3^n+1}{3^n-1}$，

再用數學歸納法證明，此處省略。

解 2：不動點解法

也是源自「製造新數列」的想法。

是否存在 α，β，λ，使得 $\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} = \lambda\left(\dfrac{a_{n-1}-\alpha}{a_{n-1}-\beta}\right)$，在 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在的情況下，答案是肯定的，且

α，β 是 $x = \dfrac{2x+1}{x+2}$ 的兩根。

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，假設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$，則 x 滿足 $x = \dfrac{2x+1}{x+2}$，其兩根 α，β 稱為原數列的不動點，今解得不動點 $x = \pm 1$。

$\dfrac{a_n-1}{a_n+1} = \lambda\left(\dfrac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}\right)$，求 λ，

$a_n - 1 = \dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2} - 1 = \dfrac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+2} \cdots\cdots ①$

$a_n + 1 = \dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2} + 1 = \dfrac{3a_{n-1}+3}{a_{n-1}+2} \cdots\cdots ②$，①除以②得 $\lambda = \dfrac{1}{3}$，

所以 $\dfrac{a_n-1}{a_n+1} = \dfrac{2-1}{2+1} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，可解得 $a_n = \dfrac{3^n+1}{3^n-1}$。

六、結語》

我同學陳文進教授專長是演算法，目前任教於臺大資工，他非常喜歡「具體數學」這本書，在臺大教了很多年，這本書開宗明義第一章就是遞迴數列。

1931 年哥德爾（K. Gödel）利用了所謂的「原始遞迴函數」的概念證明了不完備定理，這個定理除了使得希爾伯特（D. Hilbert 1862～1943）的形式論學派的夢想破滅之外，也直接影響了計算機科學的理論。因此，近代數理邏輯為除了集合論、模型論、證明理論之外，還有遞迴理論。

我與項潔教授在大學時代一起修過集合論，但是對於近代數理邏輯的遞迴理論沒有接觸，相信遞迴理論在計算機科學中非常重要。項教授目前也任教於臺大資工。我們在求遞迴數列的一般項過程中學得許多方法，這是數學學習的精神所在，也是我寫這篇文章的動機之一。

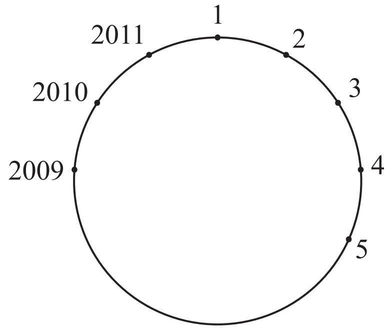
在解河內塔問題中的遞迴數列時，我的同事強烈建議我不要用「製造新數列」的方法，其實我並不贊同，但是「心事誰人知」呢！？

寫這篇文章剛好可以借題抒發一下，我們由本文可以看到「製造新數列」其實是一個重要的方法。

至於世界何時終止大部分人不會在意吧！

七、習作》

1. 平面上 n 條線最多可分割出多少個區域？史坦那（Jacob steiner 1796～1863）1826 年提出來的問題。
2. 有 n 位女士坐成一排，然後 n 位女士全部起立再重新入座，而每位女士可選擇自己之前的座位或是之前她前後位置的座位，試問這 n 位女士有多少種入座的方式？（中山大學應數系雙週一題　99 學年度第 2 學期）
3. 將自然數 1 到 2011 按順時鐘方向依序排列在一個圓圈上，從 1 開始依順時鐘方向，保留 1，擦掉 2；保留 3，擦掉 4；保留 5，擦掉 6；…，如此每隔一個數擦掉一個數，一直循環下去，當最後剩下一個數時，剩下的數是______。（臺中一中 100 年科學班推甄試題）



八、解答》

1. $a_1 = 2$，$a_n = a_{n-1} + n$（詳解略）。
2. 假設 n 位女士入座的方式有 $f(n)$ 種，則有 $n+2$ 位女士時，第一位女士不動或到第二位時；當她（第一位女士）不動時，後面 $n+1$ 位女士有 $f(n+1)$ 種方法，當她（第一位女士）到第二位時第二位女士要排到第一位，後面剩下 n 位女士，所以 $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$，又 $f(1) = 1$，$f(2) = 2$。

   後面的解法就與「費氏數列」解法相同了。解得

   $$f(n) = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{。}$$

   或者請看 http://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/ 99 年第二學期第 6 題。
3. 這是約瑟夫（Titus Flavius Josephus）問題改寫。

   請看參考資料 4，p.9～12。

   遞迴式為 $J(1) = 1$，$J(2n) = 2J(n) - 1$，$J(2n+1) = 2J(n) + 1$，$n \geq 1$，

   遞迴式的解為 $J(2^m + l) = 2l + 1$，$m \geq 0$ 且 $0 \leq l < 2^m$，

   所以 $J(2011) = J(2^{10} + 987) = 2 \times 987 + 1 = 1975$ 這是答案。

九、參考資料》

1. 大唐西域記　商周出版　p.144。
2. 數學傳播季刊第 23 卷第 4 期　數學方法論與新世紀數學。
   http://w3.math.sinica.edu.tw/media/media.jsp?voln=234
3. 數學傳播季刊第 28 卷第 1 期　遞歸數列與不動點。
   http://w3.math.sinica.edu.tw/media/media.jsp?voln=281
4. 具體數學（Donald Knuth 等著）　格致圖書公司　陳衍文　譯。
5. 約瑟夫問題。http://en.wikipedia.org/wiki/Josephus problem

關於一道多項式函數插值問題利用四種不同方法來求解

李維昌／國立宜蘭高中

研究目的：試圖以直觀、牛頓（Newton）、拉格朗日（Lagrange）、巴貝奇（Babbage）四種不同的插值方法，來求一道多項式函數插值問題。

研究過程：求解的題目如下：

設 $f(x)$ 為2012次多項式函數，且 $f(k)=\dfrac{k}{k+1}$，對 $k=0,1,2,\cdots,2012$ 皆成立，試求 $f(2013)$ 之值。

方法一：直觀插值法 》

首先構造 $g(x)=1-\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2011)(x-2012)}{2013!}$，$\deg g(x)=2012$，

因為
$$g(-1)=1-\frac{(-1-1)(-1-2)(-1-3)\cdots(-1-2011)(-1-2012)}{2013!}$$
$$=1-\frac{(-2)(-3)(-4)\cdots(-2012)(-2013)}{2013!}$$
$$=1-\frac{2013!}{2013!}=1-1=0\text{ ，}$$

所以 $x+1|g(x)$，令 $g(x)=(x+1)\cdot h(x)\Rightarrow h(k)=\dfrac{g(k)}{k+1}=\dfrac{1}{k+1}$，$k=1,2,\cdots,2012$，

宣稱 $f(x)=x\cdot h(x)$，其中 $\deg h(x)=2011$。檢驗如下：

1. $f(0)=0\cdot h(0)=0=\dfrac{0}{0+1}$，

   $f(k)=k\cdot h(k)=k\cdot\left(\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{k}{k+1}$，$k=1,2,\cdots,2012$，

   $f(x)$ 滿足 $f(k)=\dfrac{k}{k+1}$，$k=0,1,2,\cdots,2012$。

2. $\deg f(x)=\deg[x\cdot h(x)]=\deg[x]+\deg h(x)=1+2011=2012$。

3. 由 1.與 2.的討論得知：

   $f(x)$ 為 2012 次多項式函數，且 $f(k)=\dfrac{k}{k+1}$，$k=0,1,2,\cdots,2012$ 皆成立。

4. 所求 $f(2013)=2013\cdot h(2013)=2013\cdot\left[\dfrac{g(2013)}{2013+1}\right]=\dfrac{2013}{2014}\cdot g(2013)$

$$=\frac{2013}{2014}\left[1-\frac{(2012)(2011)\cdots(2)(1)}{2013!}\right]=\frac{2013}{2014}\left(1-\frac{2012!}{2013!}\right)$$

$$=\frac{2013}{2014}\left(1-\frac{1}{2013}\right)=\frac{2013}{2014}\cdot\frac{2012}{2013}=\frac{1006}{1007}$$ 。

方法二：牛頓插值法 》

所求的 $f(x)=\frac{x}{2!}-\frac{x(x-1)}{3!}+\frac{x(x-1)(x-2)}{4!}-\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{5!}$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{6!}-\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{7!}$$

$$+\cdots+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-2010)}{2012!}-\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-2011)}{2013!}$$ 。

檢驗如下：

5. $f(0)=\frac{0}{2!}-\frac{0}{3!}+\frac{0}{4!}-\frac{0}{5!}+\frac{0}{6!}-\frac{0}{7!}+\cdots+\frac{0}{2012!}-\frac{0}{2013!}=0$ ，

$f(1)=\frac{1}{2!}-\frac{0}{3!}+\frac{0}{4!}-\frac{0}{5!}+\frac{0}{6!}-\frac{0}{7!}+\cdots+\frac{0}{2012!}-\frac{0}{2013!}=\frac{1}{2}$ ，

$f(2)=\frac{2}{2!}-\frac{2}{3!}+\frac{0}{4!}-\frac{0}{5!}+\frac{0}{6!}-\frac{0}{7!}+\cdots+\frac{0}{2012!}-\frac{0}{2013!}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ ，

$$f(3)=\frac{3}{2!}-\frac{3\cdot2}{3!}+\frac{3\cdot2\cdot1}{4!}-\frac{0}{5!}+\frac{0}{6!}-\frac{0}{7!}+\cdots+\frac{0}{2012!}-\frac{0}{2013!}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4\cdot3}{2!}-\frac{4\cdot3\cdot2}{3!}+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4!}\right)=\frac{1}{4}\left(C_2^4-C_3^4+C_4^4\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(C_0^4-C_1^4+C_2^4-C_3^4+C_4^4\right)-\left(C_0^4-C_1^4\right)\right]=\frac{1}{4}\left[(1-1)^4-\left(C_0^4-C_1^4\right)\right]=\frac{1}{4}(0-1+4)=\frac{3}{4}$$ ，

$$f(4)=\frac{4}{2!}-\frac{4\cdot3}{3!}+\frac{4\cdot3\cdot2}{4!}-\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{5!}+\frac{0}{6!}-\frac{0}{7!}+\cdots+\frac{0}{2012!}-\frac{0}{2013!}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{5\cdot4}{2!}-\frac{5\cdot4\cdot3}{3!}+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4!}-\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5!}\right)=\frac{1}{5}\left(C_2^5-C_3^5+C_4^5-C_5^5\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left[\left(C_0^5-C_1^5+C_2^5-C_3^5+C_4^5-C_5^5\right)-\left(C_0^5-C_1^5\right)\right]=\frac{1}{5}\left[(1-1)^5-\left(C_0^5-C_1^5\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}(0-1+5)=\frac{4}{5}$$ ，

$$f(5)=\frac{5}{2!}-\frac{5\cdot4}{3!}+\frac{5\cdot4\cdot3}{4!}-\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{5!}+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6!}-\frac{0}{7!}+\cdots+\frac{0}{2012!}-\frac{0}{2013!}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{6\cdot5}{2!}-\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4!}-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{5!}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6!}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(C_2^6-C_3^6+C_4^6-C_5^6+C_6^6\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left[\left(C_0^6-C_1^6+C_2^6-C_3^6+C_4^6-C_5^6+C_6^6\right)-\left(C_0^6-C_1^6\right)\right]=\frac{1}{6}\left[(1-1)^6-\left(C_0^6-C_1^6\right)\right]$$

$$=\frac{1}{6}(0-1+6)=\frac{5}{6}\text{ ，}$$

$$f(6)=\frac{6}{2!}-\frac{6\cdot5}{3!}+\frac{6\cdot5\cdot4}{4!}-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{5!}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6!}-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{7!}+\frac{0}{8!}-\cdots+\frac{0}{2012!}-\frac{0}{2013!}$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{7\cdot6}{2!}-\frac{7\cdot6\cdot5}{3!}+\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4!}-\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{5!}+\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6!}-\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{7!}\right)$$

$$=\frac{1}{7}\left(C_2^7-C_3^7+C_4^7-C_5^7+C_6^7-C_7^7\right)$$

$$=\frac{1}{7}\left[\left(C_0^7-C_1^7+C_2^7-C_3^7+C_4^7-C_5^7+C_6^7-C_7^7\right)-\left(C_0^7-C_1^7\right)\right]=\frac{1}{7}\left[(1-1)^7-\left(C_0^7-C_1^7\right)\right]$$

$$=\frac{1}{7}(0-1+7)=\frac{6}{7}\text{ ，}$$

$$f(k)=\frac{1}{k+1}\left(C_2^{k+1}-C_3^{k+1}+C_4^{k+1}-C_5^{k+1}+C_6^{k+1}-C_7^{k+1}+\cdots-C_k^{k+1}+C_{k+1}^{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k+1}\left[\left(C_0^{k+1}-C_1^{k+1}+C_2^{k+1}-C_3^{k+1}+C_4^{k+1}-C_5^{k+1}+C_6^{k+1}-C_7^{k+1}+\cdots-C_k^{k+1}+C_{k+1}^{k+1}\right)\right.$$

$$\left.-\left(C_0^{k+1}-C_1^{k+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{k+1}\left[(1-1)^{k+1}-\left(C_0^{k+1}-C_1^{k+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{k+1}(0-1+k+1)=\frac{k}{k+1}\text{ ，}k=7,9,11,13,\cdots,2009,2011,$$

$$f(k)=\frac{1}{k+1}\left(C_2^{k+1}-C_3^{k+1}+C_4^{k+1}-C_5^{k+1}+C_6^{k+1}-C_7^{k+1}+\cdots+C_k^{k+1}-C_{k+1}^{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k+1}\left[\left(C_0^{k+1}-C_1^{k+1}+C_2^{k+1}-C_3^{k+1}+C_4^{k+1}-C_5^{k+1}+C_6^{k+1}-C_7^{k+1}+\cdots+C_k^{k+1}-C_{k+1}^{k+1}\right)\right.$$

$$\left.-\left(C_0^{k+1}-C_1^{k+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{k+1}\left[(1-1)^{k+1}-\left(C_0^{k+1}-C_1^{k+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{k+1}(0-1+k+1)=\frac{k}{k+1}\text{ ，}k=8,10,12,14,\cdots,2010,2012$$

$f(x)$滿足$f(k)=\dfrac{k}{k+1},k=0,1,2,\cdots,2012$ 。

6. $\deg f(x)=2012$ ，$f(x)$的領導係數為$-\dfrac{1}{2013!}$ 。

7. 由 5.與 6.的討論得知：

$f(x)$ 為 2012 次多項式函數，且 $f(k)=\dfrac{k}{k+1}$ ，$k=0,1,2,\cdots,2012$ 皆成立。

8. 所求 $f(2013)=\dfrac{2013}{2!}-\dfrac{2013\cdot 2012}{3!}+\dfrac{2013\cdot 2012\cdot 2011}{4!}-\dfrac{2013\cdot 2012\cdot 2011\cdot 2010}{5!}$

$$+\frac{2013\cdot 2012\cdot 2011\cdot 2010\cdot 2009}{6!}-\frac{2013\cdot 2012\cdot 2011\cdot 2010\cdot 2009\cdot 2008}{7!}$$

$$+\cdots+\frac{2013\cdot 2012\cdot 2011\cdot\cdots\cdot 4\cdot 3}{2012!}-\frac{2013\cdot 2012\cdot 2011\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2}{2013!}$$

$$=\frac{1}{2014}\left(C_2^{2014}-C_3^{2014}+C_4^{2014}-C_5^{2014}+C_6^{2014}-C_7^{2014}+\cdots+C_{2012}^{2014}-C_{2013}^{2014}\right)$$

$$=\frac{1}{2014}\Big[\big(C_0^{2014}-C_1^{2014}+C_2^{2014}-C_3^{2014}+C_4^{2014}-C_5^{2014}+C_6^{2014}-C_7^{2014}+\cdots$$

$$+C_{2012}^{2014}-C_{2013}^{2014}+C_{2014}^{2014}\big)-\left(C_0^{2014}-C_1^{2014}+C_{2014}^{2014}\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{2014}\left[(1-1)^{2014}-1+2014-1\right]=\frac{1}{2014}(0-1+2014-1)$$

$$=\frac{2012}{2014}=\frac{1006}{1007}$$

方法三：拉格朗日插值法 》

所求 $f(2013)$

$$=f(0)\cdot\frac{(2013-1)(2013-2)(2013-3)(2013-4)\cdots(2013-2011)(2013-2012)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)\cdots(0-2011)(0-2012)}$$

$$+f(1)\cdot\frac{\left[(2013-0)\right](2013-2)(2013-3)(2013-4)\cdots(2013-2011)(2013-2012)}{\left[(1-0)\right](1-2)(1-3)(1-4)\cdots(1-2011)(1-2012)}$$

$$+f(2)\cdot\frac{\left[(2013-0)(2013-1)\right](2013-3)(2013-4)\cdots(2013-2011)(2013-2012)}{\left[(2-0)(2-1)\right](2-3)(2-4)\cdots(2-2011)(2-2012)}$$

$$+f(3)\cdot\frac{\left[(2013-0)(2013-1)(2013-2)\right](2013-4)\cdots(2013-2011)(2013-2012)}{\left[(3-0)(3-1)(3-2)\right](3-4)\cdots(3-2011)(3-2012)}$$

$$+f(4)\cdot\frac{\left[(2013-0)(2013-1)(2013-2)(2013-3)\right]\cdots(2013-2011)(2013-2012)}{\left[(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)\right](4-5)\cdots(4-2011)(4-2012)}$$

$$\vdots$$

$$+f(2011)\cdot\frac{\left[(2013-0)(2013-1)(2013-2)(2013-3)\cdots(2013-2010)\right](2013-2012)}{\left[(2011-0)(2011-1)(2011-2)(2011-3)\cdots(2011-2010)\right](2011-2012)}$$

$$+f(2012)\cdot\frac{\left[(2013-0)(2013-1)(2013-2)(2013-3)\cdots(2013-2010)(2013-2011)\right]}{\left[(2012-0)(2012-1)(2012-2)(2012-3)\cdots(2012-2010)(2012-2011)\right]}$$

$$=f(0)\left(C_0^{2013}\right)(1)+f(1)\left(C_1^{2013}\right)(-1)+f(2)\left(C_2^{2013}\right)(1)+f(3)\left(C_3^{2013}\right)(-1)+f(4)\left(C_4^{2013}\right)(1)$$

$$+f(5)\left(C_5^{2013}\right)(-1)+\cdots+f(2011)\left(C_{2011}^{2013}\right)(-1)+f(2012)\left(C_{2012}^{2013}\right)(1)$$

$$=0+\left(\frac{1}{2}\right)\left(C_1^{2013}\right)(-1)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(C_2^{2013}\right)(1)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(C_3^{2013}\right)(-1)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(C_4^{2013}\right)(1)+\left(\frac{5}{6}\right)\left(C_5^{2013}\right)(-1)$$

$$+\cdots+\left(\frac{2011}{2012}\right)\left(C_{2011}^{2013}\right)(-1)+\left(\frac{2012}{2013}\right)\left(C_{2012}^{2013}\right)(1)$$

$$=0+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(C_1^{2013}\right)(-1)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(C_2^{2013}\right)(1)+\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(C_3^{2013}\right)(-1)+\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(C_4^{2013}\right)(1)$$

$$+\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(C_5^{2013}\right)(-1)+\cdots+\left(1-\frac{1}{2012}\right)\left(C_{2011}^{2013}\right)(-1)+\left(1-\frac{1}{2013}\right)\left(C_{2012}^{2013}\right)(1)$$

$$=\left(-C_1^{2013}+C_2^{2013}-C_3^{2013}+C_4^{2013}-C_5^{2013}+\cdots-C_{2011}^{2013}+C_{2012}^{2013}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}\cdot C_1^{2013}-\frac{1}{3}\cdot C_2^{2013}+\frac{1}{4}\cdot C_3^{2013}-\frac{1}{5}\cdot C_4^{2013}+\frac{1}{6}\cdot C_5^{2013}-\cdots+\frac{1}{2012}\cdot C_{2011}^{2013}-\frac{1}{2013}\cdot C_{2012}^{2013}\right)$$

$$=\left[\left(C_0^{2013}\right)-C_1^{2013}+C_2^{2013}-C_3^{2013}+C_4^{2013}-C_5^{2013}+\cdots-C_{2011}^{2013}+C_{2012}^{2013}-\left(C_{2013}^{2013}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2014}\left(C_2^{2014}-C_3^{2014}+C_4^{2014}-C_5^{2014}+C_6^{2014}-\cdots+C_{2012}^{2014}-C_{2013}^{2014}\right)$$

$$=\left[(1-1)^{2013}\right]+\frac{1}{2014}\left\{\left[\left(C_0^{2014}-C_1^{2014}\right)+\left(C_2^{2014}-C_3^{2014}+C_4^{2014}-C_5^{2014}+C_6^{2014}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\cdots+C_{2012}^{2014}-C_{2013}^{2014}+\left(C_{2014}^{2014}\right)\right]-\left(C_0^{2014}-C_1^{2014}+C_{2014}^{2014}\right)\right\}$$

$$=0+\frac{1}{2014}\left\{\left[(1-1)^{2014}\right]-(1-2014+1)\right\}=\frac{2012}{2014}=\frac{1006}{1007}\text{ 。}$$

方法四：巴貝奇插值法 》

引述巴貝奇定理：

設 $f(x)$ 為 2012 次多項式函數，$d\neq 0$ ，則

$C_{2013}^{2013}\cdot f(a+2013d)-C_{2012}^{2013}\cdot f(a+2012d)+C_{2011}^{2013}\cdot f(a+2011d)-\cdots+C_5^{2013}\cdot f(a+5d)$

$-C_4^{2013}\cdot f(a+4d)+C_3^{2013}\cdot f(a+3d)-C_2^{2013}\cdot f(a+2d)+C_1^{2013}\cdot f(a+d)-C_0^{2013}\cdot f(a)=0$ ，

取 $a=0$ ，$d=1$ ，可得

$C_{2013}^{2013}\cdot f(2013)-C_{2012}^{2013}\cdot f(2012)+C_{2011}^{2013}\cdot f(2011)-\cdots+C_5^{2013}\cdot f(5)$

$-C_4^{2013}\cdot f(4)+C_3^{2013}\cdot f(3)-C_2^{2013}\cdot f(2)+C_1^{2013}\cdot f(1)-C_0^{2013}\cdot f(0)=0$ ，

所求 $f(2013)$

$$
\begin{aligned}
&= f(0)\left(C_0^{2013}\right)(1)+f(1)\left(C_1^{2013}\right)(-1)+f(2)\left(C_2^{2013}\right)(1)+f(3)\left(C_3^{2013}\right)(-1)+f(4)\left(C_4^{2013}\right)(1)\\
&\quad +f(5)\left(C_5^{2013}\right)(-1)+\cdots+f(2011)\left(C_{2011}^{2013}\right)(-1)+f(2012)\left(C_{2012}^{2013}\right)(1)\\
&=0+\left(\frac{1}{2}\right)\left(C_1^{2013}\right)(-1)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(C_2^{2013}\right)(1)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(C_3^{2013}\right)(-1)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(C_4^{2013}\right)(1)+\left(\frac{5}{6}\right)\left(C_5^{2013}\right)(-1)\\
&\quad +\cdots+\left(\frac{2011}{2012}\right)\left(C_{2011}^{2013}\right)(-1)+\left(\frac{2012}{2013}\right)\left(C_{2012}^{2013}\right)(1)\\
&=0+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(C_1^{2013}\right)(-1)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(C_2^{2013}\right)(1)+\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(C_3^{2013}\right)(-1)+\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(C_4^{2013}\right)(1)\\
&\quad +\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(C_5^{2013}\right)(-1)+\cdots+\left(1-\frac{1}{2012}\right)\left(C_{2011}^{2013}\right)(-1)+\left(1-\frac{1}{2013}\right)\left(C_{2012}^{2013}\right)(1)\\
&=\left(-C_1^{2013}+C_2^{2013}-C_3^{2013}+C_4^{2013}-C_5^{2013}+\cdots-C_{2011}^{2013}+C_{2012}^{2013}\right)\\
&\quad +\left(\frac{1}{2}\cdot C_1^{2013}-\frac{1}{3}\cdot C_2^{2013}+\frac{1}{4}\cdot C_3^{2013}-\frac{1}{5}\cdot C_4^{2013}+\frac{1}{6}\cdot C_5^{2013}-\cdots+\frac{1}{2012}\cdot C_{2011}^{2013}-\frac{1}{2013}\cdot C_{2012}^{2013}\right)\\
&=\left[\left(C_0^{2013}\right)-C_1^{2013}+C_2^{2013}-C_3^{2013}+C_4^{2013}-C_5^{2013}+\cdots-C_{2011}^{2013}+C_{2012}^{2013}-\left(C_{2013}^{2013}\right)\right]\\
&\quad +\frac{1}{2014}\left(C_2^{2014}-C_3^{2014}+C_4^{2014}-C_5^{2014}+C_6^{2014}-\cdots+C_{2012}^{2014}-C_{2013}^{2014}\right)\\
&=\left[(1-1)^{2013}\right]+\frac{1}{2014}\left\{\left[\left(C_0^{2014}-C_1^{2014}\right)+\left(C_2^{2014}-C_3^{2014}+C_4^{2014}-C_5^{2014}+C_6^{2014}\right.\right.\right.\\
&\quad \left.\left.\left.-\cdots+C_{2012}^{2014}-C_{2013}^{2014}\right)+\left(C_{2014}^{2014}\right)\right]-\left(C_0^{2014}-C_1^{2014}+C_{2014}^{2014}\right)\right\}\\
&=0+\frac{1}{2014}\left\{\left[(1-1)^{2014}\right]-(1-2014+1)\right\}=\frac{2012}{2014}=\frac{1006}{1007}
\end{aligned}
$$

。

迴歸線估算修正「財富倍增之72法則」——69.34法則

葉善雲／臺北市東山高中

《摘要》

72 法則（the rule of 72）是一種計算財富倍增所需時間的簡單算式，即以 72 為分子，投資報酬率為分母，兩者相除即為財富倍增所需的時間。舉例來說：某甲目前可投資額為一百萬元，他急於知道若他投資一平均年報酬率為 8%的共同基金時，要經過多久時間，一百萬才可以變成兩百萬？依照 72 法則，則是 72 除以 8 後得到的答案為 9，也就是 9 年後某甲的資產可以從一百萬變成兩百萬。然而 72 法則僅是個經驗估算法則，況且有時誤差大，維基百科網頁上也有 70 法則、69.3 法則、E-M 法則與 Padé 近似式，其中以「Padé 近似式」估算最精確，這些估算方法的共同特徵在「用一次除法的計算取代複雜的指對數計算」。本文使用「迴歸線估算」，提供 double 法則的理論基礎，建議應使用 69.34 法則——若年利率為 r%，則約需(0.34＋69.34/r)年本利和達 2 倍。當年利率在 1%～50%時，用此法則估算誤差在 7 天內；當年利率在 4%～14%時，用此法則估算誤差只在 1 天內；當年利率在 2%～10%時，用此法則估算比用「Padé 近似式」估算更精確。此外，由 69.34 法則關係式，可推廣處理本利和達其他倍數的相關問題，篇末我們也用 69.34 法則關係式製作真數較小時的對數表。

《內文》

有一筆投資保證每年賺 x%，且每年賺的錢再投入（複利計算），則多少年你的本金可以翻一倍？假設是 N 年可以翻一倍，則 N 正確的計算應該是滿足 $(1+x\%)^N=2$。為了解 N，這時兩邊取對數 log，變成 $N\times\log(1+x\%)=\log 2$，所以 $N=\dfrac{\log 2}{\log(1+x\%)}$。

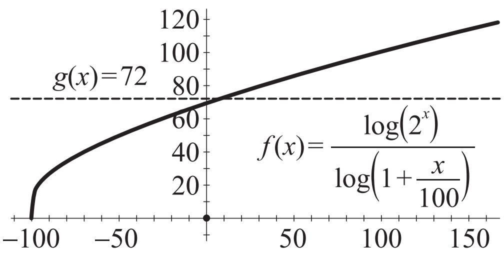
下表（一）為 72 法則、69.3 法則與 Padé 近似式估值比較：

利率＼函數	實際值（年）	72 法則估值（年）	72 法則誤差（年）	69.3 法則估值（年）	69.3 法則誤差（年）	Padé 近似式（年）	Padé 近似式誤差（天）
0.50%	138.9757	144.00	5.0243	138.60	-0.3757	138.9462	-10.7712
0.75%	92.7658	96.00	3.2342	92.40	-0.3658	92.7461	-7.1900
1.0%	69.6607	72.00	2.3393	69.30	-0.3607	69.6459	-5.3996
1.5%	46.5555	48.00	1.4445	46.20	-0.3555	46.5456	-3.6097
2%	35.0028	36.00	0.9972	34.65	-0.3528	34.9953	-2.7156
3%	23.4498	24.00	0.5502	23.10	-0.3498	23.4448	-1.8236
4%	17.6730	18.00	0.3270	17.33	-0.3480	17.6692	-1.3806
5%	14.2067	14.40	0.1933	13.86	-0.3467	14.2036	-1.1179
6%	11.8957	12.00	0.1043	11.55	-0.3457	11.8931	-0.9460
7%	10.2448	10.29	0.0409	9.90	-0.3448	10.2425	-0.8264
8%	9.0065	9.00	-0.0065	8.66	-0.3440	9.0044	-0.7401

9%	8.0432	8.00	-0.0432	7.70	-0.3432	8.0414	-0.6761
10%	7.2725	7.20	-0.0725	6.93	-0.3425	7.2708	-0.6282
11%	6.6419	6.55	-0.0964	6.30	-0.3419	6.6403	-0.5923
12%	6.1163	6.00	-0.1163	5.78	-0.3413	6.1147	-0.5656
13%	5.6714	5.54	-0.1330	5.33	-0.3406	5.6699	-0.5461
14%	5.2901	5.14	-0.1472	4.95	-0.3401	5.2886	-0.5326
15%	4.9595	4.80	-0.1595	4.62	-0.3395	4.9580	-0.5240
16%	4.6702	4.50	-0.1702	4.33	-0.3389	4.6688	-0.5196
17%	4.4148	4.24	-0.1796	4.08	-0.3384	4.4134	-0.5187
18%	4.1878	4.00	-0.1878	3.85	-0.3378	4.1864	-0.5210
19%	3.9847	3.79	-0.1952	3.65	-0.3373	3.9832	-0.5260
20%	3.8018	3.60	-0.2018	3.47	-0.3368	3.8003	-0.5334
25%	3.1063	2.88	-0.2263	2.77	-0.3343	3.1046	-0.6000
30%	2.6419	2.40	-0.2419	2.31	-0.3319	2.6400	-0.7033

無庸置疑，72 法則有其簡便性與實用性，誤差先高估，到 8%左右幾乎接近正確值，然後出現負誤差（低估），因此有 70 法則與 69.3 法則在低利率時用來作修正。

底下，我們擷取 72 法則的精神，打算用非水平直線 L ： $y=ax+b$ 來取代（近似）函數 $y=x\cdot\dfrac{\log 2}{\log(1+x\%)}$（即 $y\approx x\cdot N$ ）[1]：



如此一來，

$$N=\frac{\log 2}{\log(1+x\%)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x\cdot\log 2}{\log(1+x\%)}\approx\frac{1}{x}\cdot(ax+b)=a+\frac{b}{x}\ 。$$

我們在函數 $y=\dfrac{x\cdot\log 2}{\log(1+x\%)}$ 圖形上取 23 個點，然後用最小平方法計算迴歸線（最適直線）L ： $y=ax+b$ 來近似函數 $y=\dfrac{x\cdot\log 2}{\log(1+x\%)}$ ：

[1] 當此函數取為水平線 $y=72$ 時，即為 72 法則。

x	y	$y-\overline{y}$	$\left(y-\overline{y}\right)^2$	$x-\overline{x}$	$\left(x-\overline{x}\right)^2$	$\left(x-\overline{x}\right)\left(y-\overline{y}\right)$
0.50	69.4879	-2.9655	8.7944	-8.75	76.5625	25.9484
0.75	69.5743	-2.8791	8.2890	-8.50	72.2500	24.4721
1.0	69.6607	-2.7927	7.7990	-8.25	68.0625	23.0396
1.5	69.8333	-2.6201	6.8650	-7.75	60.0625	20.3058
2	70.0056	-2.4478	5.9918	-7.25	52.5625	17.7467
3	70.3493	-2.1041	4.4271	-6.25	39.0625	13.1505
4	70.6920	-1.7614	3.1027	-5.25	27.5625	9.2476
5	71.0335	-1.4199	2.0161	-4.25	18.0625	6.0346
6	71.3740	-1.0794	1.1652	-3.25	10.5625	3.5081
7	71.7134	-0.7400	0.5476	-2.25	5.0625	1.6650
8	72.0517	-0.4016	0.1613	-1.25	1.5625	0.5021
9	72.3891	-0.0643	0.0041	-0.25	0.0625	0.0161
10	72.7254	0.2720	0.0740	0.75	0.5625	0.2040
11	73.0607	0.6073	0.3689	1.75	3.0625	1.0628
12	73.3951	0.9417	0.8867	2.75	7.5625	2.5896
13	73.7284	1.2750	1.6257	3.75	14.0625	4.7814
14	74.0608	1.6074	2.5838	4.75	22.5625	7.6353
15	74.3923	1.9389	3.7592	5.75	33.0625	11.1485
16	74.7228	2.2694	5.1501	6.75	45.5625	15.3183
17	75.0524	2.5990	6.7546	7.75	60.0625	20.1420
18	75.3810	2.9276	8.5711	8.75	76.5625	25.6168
19	75.7088	3.2554	10.5977	9.75	95.0625	31.7402
20	76.0357	3.5823	12.8328	10.75	115.5625	38.5096
9.25	72.4534	0	102.3680	0	905.1250	304.3851

由上述資料：$\overline{x}=9.25$，$\overline{y}=72.4534$，$\Sigma\left(y-\overline{y}\right)^2=102.3680$，

$\Sigma\left(x-\overline{x}\right)^2=905.1250$，$\Sigma\left(x-\overline{x}\right)\left(y-\overline{y}\right)=304.3851$，

得此 23 個點的相關係數為

$$\frac{\Sigma\left(x-\overline{x}\right)\left(y-\overline{y}\right)}{\sqrt{\Sigma\left(x-\overline{x}\right)^2}\sqrt{\Sigma\left(y-\overline{y}\right)^2}}=\frac{304.3851}{\sqrt{905.125}\sqrt{102.368}}\approx\frac{304.3851}{304.3942}\approx 0.99997，$$

極適合用一直線（即迴歸線）L ： $y=ax+b$ 來近似函數 $y=\dfrac{x\cdot\log 2}{\log\left(1+x\%\right)}$ 在所選 23 個點附近的值，其中

$$a=\frac{\sum\left(x-\overline{x}\right)\left(y-\overline{y}\right)}{\sum\left(x-\overline{x}\right)^2}=\frac{304.3851}{905.1250}\approx 0.336291\text{，且}$$

$$b=\overline{y}-a\overline{x}=72.4534-0.336291\times 9.25\approx 69.3427\text{。}$$

此時，$N=\dfrac{\log 2}{\log\left(1+x\%\right)}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x\cdot\log 2}{\log\left(1+x\%\right)}\approx\dfrac{1}{x}\cdot\left(ax+b\right)=0.336291+\dfrac{69.3427}{x}$ 。

於是我們得出底下的結論：

當期利率為 $x\%$ 時，約需 $\dfrac{69.3427}{x}+0.336291$ 期本利和達 2 倍。

為了應用上的方便，我們將上式取到兩位小數，成為

當期（年）利率為 $x\%$ 時，約需 $\dfrac{69.34}{x}+0.34$ 期（年）本利和達 2 倍。[2]

也為了便於記憶，我們將上式命名為「69.34 法則」，同時將關係式

$\dfrac{\log 2}{\log\left(1+x\%\right)}\approx 0.34+\dfrac{69.34}{x}$ ，稱為 69.34 法則關係式。

下表（二）為 Padé 近似式 $\dfrac{69.3}{x}\cdot\dfrac{600+4x}{600+x}$ 與 69.34 法則的比較：

利率＼函數	實際值（年）	Padé 近似式（年）	Padé 近似式誤差（天）	迴歸線估算	迴歸線估算誤差（天）	69.34 法則	69.34 法則誤差（天）
0.50%	138.9757	138.9462	-10.7712	139.0217	16.7830	139.0200	16.1616
0.75%	92.7658	92.7461	-7.1900	92.7932	10.0250	92.7933	10.0621
1.0%	69.6607	69.6459	-5.3996	69.6790	6.6721	69.6800	7.0383
1.5%	46.5555	46.5456	-3.6097	46.5648	3.3710	46.5667	4.0665
2%	35.0028	34.9953	-2.7156	35.0076	1.7720	35.0100	2.6321
3%	23.4498	23.4448	-1.8236	23.4505	0.2751	23.4533	1.2998
4%	17.6730	17.6692	-1.3806	17.6720	-0.3725	17.6750	0.7345
5%	14.2067	14.2036	-1.1179	14.2048	-0.6815	14.2080	0.4748
6%	11.8957	11.8931	-0.9460	11.8934	-0.8222	11.8967	0.3671
7%	10.2448	10.2425	-0.8264	10.2424	-0.8675	10.2457	0.3453
8%	9.0065	9.0044	-0.7401	9.0041	-0.8539	9.0075	0.3766
9%	8.0432	8.0414	-0.6761	8.0410	-0.8015	8.0444	0.4426
10%	7.2725	7.2708	-0.6282	7.2706	-0.7226	7.2740	0.5326
11%	6.6419	6.6403	-0.5923	6.6402	-0.6247	6.6436	0.6394
12%	6.1163	6.1147	-0.5656	6.1148	-0.5131	6.1183	0.7585

[2] 若 x 為負利率（通膨），則約需 $\dfrac{69.34}{|x|}-0.34$ 期本利和成為原來的 $\dfrac{1}{2}$ 倍。

13%	5.6714	5.6699	-0.5461	5.6703	-0.3914	5.6738	0.8866
14%	5.2901	5.2886	-0.5326	5.2893	-0.2619	5.2929	1.0215
15%	4.9595	4.9580	-0.5240	4.9591	-0.1266	4.9627	1.1615
16%	4.6702	4.6688	-0.5196	4.6702	0.0132	4.6738	1.3054
17%	4.4148	4.4134	-0.5187	4.4153	0.1564	4.4188	1.4522
18%	4.1878	4.1864	-0.5210	4.1887	0.3022	4.1922	1.6013
19%	3.9847	3.9832	-0.5260	3.9859	0.4500	3.9895	1.7520
20%	3.8018	3.8003	-0.5334	3.8034	0.5993	3.8070	1.9038
25%	3.1063	3.1046	-0.6000	3.1100	1.3560	3.1136	2.6704
30%	2.6419	2.6400	-0.7033	2.6477	2.1124	2.6513	3.4334
35%	2.3097	2.3074	-0.8336	2.3175	2.8563	2.3211	4.1820
40%	2.0600	2.0573	-0.9851	2.0699	3.5827	2.0735	4.9119
45%	1.8655	1.8623	-1.1541	1.8772	4.2895	1.8809	5.6215
50%	1.7095	1.7058	-1.3378	1.7231	4.9762	1.7268	6.3104
60%	1.4748	1.4700	-1.7410	1.4920	6.2899	1.4957	7.6273
70%	1.3063	1.3003	-2.1819	1.3269	7.5279	1.3306	8.8677
80%	1.1792	1.1720	-2.6515	1.2031	8.6961	1.2068	10.0377
90%	1.0799	1.0713	-3.1426	1.1068	9.8006	1.1104	11.1435
100%	1.0000	0.9900	-3.6500	1.0297	10.8470	1.0334	12.1910

由上表可以看出：

(1) 用迴歸線估算時，當年利率在 3%～4%與 15%～16%時，有兩次機會接近正確值[3]，在第一次正確值（約 3.34%）之前為高估，在第二次正確值（約 15.91%）之後亦高估，而在 3.34%～15.91%範圍則為低估（誤差皆在 1 天之內）。

(2) 當年利率在 1%～50%時，用 69.34 法則估算誤差在 7 天內；當年利率在 4%～14%時，用 69.34 法則估算誤差只在 1 天內；當年利率在 2%～10%時，用 69.34 法則估算比用「Padé 近似式」估算更精確。

已經有了處理財富倍增的 69.34 法則，那麼本利和達 3 倍或 k 倍（ $k>1$ ），是否也有相應的法則可以運用呢？

設年利率為 $x\%$ ，且 N 年後本利和可達 k 倍，則 N 滿足 $(1+x\%)^N=k$ ，兩邊取對數 log ，得 $N\times\log(1+x\%)=\log k$ ，所以

[3] 當 $x\approx 3.3371$ 或 $x\approx 15.9065$ 時， $\dfrac{\log 2}{\log(1+x\%)}\approx\dfrac{69.3427}{x}+0.336291$ 。

$$N=\frac{\log k}{\log(1+x\%)}=\frac{x\log 2}{x\log 2}\cdot\frac{\log k}{\log(1+x\%)}=\frac{\log k}{x\log 2}\cdot\frac{x\log 2}{\log(1+x\%)}$$

$$\approx \log_2 k\cdot\frac{1}{x}\cdot(ax+b)=\log_2 k\cdot\left(0.336291+\frac{69.3427}{x}\right)。$$

特別是當$k=3$時，$N\approx 1.584963\cdot\left(0.336291+\frac{69.3427}{x}\right)\approx 0.5330+\frac{109.9056}{x}$。

底下，我們舉幾個例題來說明 69.34 法則的神奇應用[4]。

《例題 1》 前行政院長提出知識經濟，喊出 10 年內要讓臺灣 double（加倍），一般小市民希望第 11 年開始的薪水加倍。如果每年調薪$a\%$，其中a為整數，欲達成小市民的希望，那麼a的最小值為何？

〔說明〕若$a=7$，則約需$\frac{69.34}{7}+0.34\approx 9.9057+0.34=10.2457$年本利和達 2 倍；

若$a=8$，則約需$\frac{69.34}{8}+0.34\approx 8.6675+0.34=9.0075$年本利和達 2 倍。

實際上，若每年調薪$a\%$，在 10 年內欲使薪水加倍，則$\frac{69.34}{a}+0.34\approx 10$，

得$a\approx\frac{69.34}{9.66}\approx 7.178$，因此每年調薪 8%才能達成目標。

《例題 2》 某公司為了響應節能減碳政策，決定在五年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的 75%。公司希望每年依固定的比率（當年和前一年排放量的比）逐年減少二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則該公司每年至少要比前一年減少多少的二氧化碳的排放量？

〔說明〕設每年變化$x\%$使 5 年後成為$\frac{3}{4}$倍，則$(1+x\%)^5=\frac{3}{4}$，兩邊取對數$\log$，得

$5\log(1+x\%)=\log\left(\frac{3}{4}\right)$，即$\frac{\log 2}{\log(1+x\%)}=\frac{5\log 2}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$，所以

$\frac{69.34}{x}+0.34\approx\frac{5\log 2}{\log 3-2\log 2}\approx -12.047$，此時$x\approx\frac{69.34}{-12.387}\approx -5.598$。

此公司應每年至少減少約 5.6%的二氧化碳的排放量，才能達預期目標。

《例題 3》 利用 69.34 法則關係式$\frac{\log 2}{\log(1+x\%)}\approx 0.34+\frac{69.34}{x}$，製作每間隔 0.005，在$\log 1.005$～$\log 1.20$間的對數表[5]。

---

[4] 若是手邊沒有對數表或工程用計算機，不容易處理底下的例題。

[5] 在此區段所取的對數值相當準確，而且真數愈小愈精確；又因此區段之對數值變化劇烈，此方法所取之值恰可彌補用內插法取值誤差太大的缺憾。

〔說明〕此時 $\log(1+x\%) \approx \dfrac{\log 2}{0.34+\dfrac{69.34}{x}}$ 。

下表（三）為 x 每間隔 0.5% ，在 $\log 1.005 \sim \log 1.20$ 之對數表：

x	實際值 $\log(1+x\%)$	69.34 法則估算值	69.34 法則估算 4 位值	一般對數表的 4 位值	誤差
0.5	0.002166	0.002165	0.0022	0.0022	-0.000001
1.0	0.004321	0.004320	0.0043	0.0043	-0.000001
1.5	0.006466	0.006464	0.0065	0.0065	-0.000002
2.0	0.008600	0.008598	0.0086	0.0086	-0.000002
2.5	0.010724	0.010722	0.0107	0.0107	-0.000002
3.0	0.012837	0.012835	0.0128	0.0128	-0.000002
3.5	0.014940	0.014938	0.0149	0.0149	-0.000002
4.0	0.017033	0.017031	0.0170	0.0170	-0.000002
4.5	0.019116	0.019114	0.0191	0.0191	-0.000002
5.0	0.021189	0.021187	0.0212	0.0212	-0.000002
5.5	0.023252	0.023250	0.0233	0.0233	-0.000002
6.0	0.025306	0.025304	0.0253	0.0253	-0.000002
6.5	0.027350	0.027347	0.0273	0.0273	-0.000002
7.0	0.029384	0.029381	0.0294	0.0294	-0.000003
7.5	0.031408	0.031405	0.0314	0.0314	-0.000003
8.0	0.033424	0.033420	0.0334	0.0334	-0.000004
8.5	0.035430	0.035425	0.0354	0.0354	-0.000005
9.0	0.037426	0.037421	0.0374	0.0374	-0.000006
9.5	0.039414	0.039407	0.0394	0.0394	-0.000007
10.0	0.041393	0.041384	0.0414	0.0414	-0.000008
10.5	0.043362	0.043352	0.0434	0.0434	-0.000010
11.0	0.045323	0.045311	0.0453	0.0453	-0.000012
11.5	0.047275	0.047261	0.0473	0.0473	-0.000014
12.0	0.049218	0.049201	0.0492	0.0492	-0.000017
12.5	0.051153	0.051133	0.0511	0.0512	-0.000020
13.0	0.053078	0.053056	0.0531	0.0531	-0.000023
13.5	0.054996	0.054970	0.0550	0.0550	-0.000026
14.0	0.056905	0.056875	0.0569	0.0569	-0.000030
14.5	0.058805	0.058771	0.0588	0.0588	-0.000034
15.0	0.060698	0.060659	0.0607	0.0607	-0.000039
15.5	0.062582	0.062538	0.0625	0.0626	-0.000044

16.0	0.064458	0.064409	0.0644	0.0645	-0.000049
16.5	0.066326	0.066271	0.0663	0.0663	-0.000055
17.0	0.068186	0.068124	0.0681	0.0682	-0.000061
17.5	0.070038	0.069970	0.0700	0.0700	-0.000068
18.0	0.071882	0.071807	0.0718	0.0719	-0.000075
18.5	0.073718	0.073636	0.0736	0.0737	-0.000083
19.0	0.075547	0.075456	0.0755	0.0755	-0.000091
19.5	0.077368	0.077268	0.0773	0.0774	-0.000099
20.0	0.079181	0.079073	0.0791	0.0792	-0.000108
x	實際值 $\log(1+x\%)$	69.34 法則估算值	69.34 法則估算 4 位值	一般對數表的 4 位值	誤差

例如： $\log 1.015 \approx 0.006464$（正確值為 0.006466，取 4 位近似值為 0.0065）；
$\log 1.100 \approx 0.041384$（正確值為 0.041393，取 4 位近似值為 0.0414）；
$\log 1.195 \approx 0.077268$（正確值為 0.077368，取 4 位近似值為 0.0774）。

參考資料：

1. 維基百科網頁：72 法則。
2. 高中數學第一冊指對數章節。
3. 高中數學第二冊二維數值分析章節。
4. excel 與 GSP 軟件輔助。

翻轉之前~TRML數學競賽校內培訓心得分享

林芳綺／新北市中和高中

一、前言》

如何提升學生的學習興趣，讓數學不再是學生感到挫敗畏懼的科目，一直是許多數學教師努力的目標。然而，在點燃學生的學習熱情之前，不如先由自身反思，當初喜歡數學的那份初衷從何而來。

筆者在高一時，因為國中同學的邀約，在毫無任何準備之下一起報名當年首屆 TRML 數學競賽，由於是第一年舉辦，不但免報名費而且報名隊伍不多，所有隊伍全都在師大附中一起比賽。這個競賽不同於以往個人的紙筆測驗，而是要求 15 人共組一隊的團體戰，比賽內容分為團體賽、思考賽、接力賽與個人賽，以四項累計的總得分來決定名次。印象中，我們這一群不明究理的傻蛋，是在考卷發下去之後，才開始了解比賽的規則是什麼，「什麼？！比賽可以講話？！可以討論？！哇！那現在要幹嘛？」，於是嘰嘰喳喳的開始討論到底要如何分配題目。團體賽結束換思考賽時，我們以為規則相同，就照舊的將題目用題號隨意分配，直到分到後面幾題的同學哀號大叫「這跟剛剛不一樣啦！！！！不能這樣分啦！」，於是又得重新討論該怎麼做。而接力賽雖然無法討論，但是考驗著同學間的默契與計算速度，尤其鄰隊同學快速傳答案時，無形中構成一種壓力，挑起了彼此較勁的氛圍。為了不甘示弱，我們也卯起來傳紙條給後面棒次的同學，除了傳答案之外，紙條上面還附註「加油！同學！」、「算快一點啊！你行的！」，讓後面棒次的同學拿到紙條之後感到又氣又好笑。

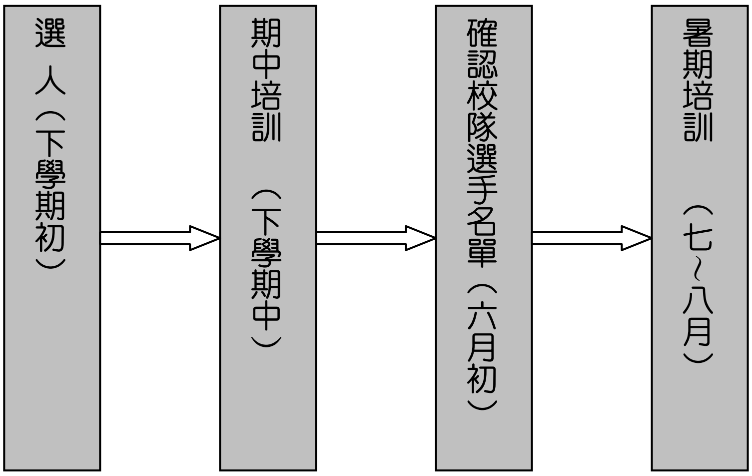
TRML 比賽在過程中不但有同學之間的互動與合作，還有對於數學的討論與思辯，這樣的體驗，不像是參加一場比賽，而像是參與一個數學營隊。我還記得，當走出考場的那一刻，心情是緊張又興奮的。也永遠記得頒獎的時候，看著來自臺灣各地對數學有興趣的高中生全數齊聚在禮堂裡，心中更是無比感動。雖然我們最後沒有獲得任何獎項，但那是我第一次感受到，面對與解決數學問題過程中所獲得的興奮與快樂是可以凌駕於獎項之上的。

事隔多年，TRML 比賽仍持續在臺灣每年八月中旬舉辦，規模已經擴展到必須在北中南三地同步舉辦。已升格為老師的我，也希望能帶領學生感受當年的感動。而本校學生入學的 PR 值約八十幾，若是想在傳統個人檢定式的數學能力競賽中勝出是極不容易的，倒不如透過 TRML 的團隊競賽，也許可以讓學生從中體會到討論數學的樂趣。

因此校內一群熱血的數學教師們決定嘗試帶領學生參與這一年一度的數學盛會，為了不負學校期望，我們先在校內選出有實力的同學後再經培訓成為學校代表隊，期望能代表學校勇奪佳績！每年的培訓模式也不斷地試驗及調整，一路跌跌撞撞的走來，至今也已經六年了。在此將這幾年來所累積的經驗與心得與各位老師分享。

二、培訓方式分享》

首先，我們培訓的流程大致可分以下四個階段，主要是集中在每學年度的下學期進行：



第一階段：選人

選人的原則是希望竭盡所能地網羅校內對數學有相當興趣也有一定實力的同學。採用過的方式有(一)**校內海選**：將下學期原訂開學複習考的時間更改為數學競試，就可讓全校同學共同參與。(二)**數學競試**：公告 TRML 校隊選手要招兵買馬，再利用班週會的時間讓同學採自願報名的方式參加競試。(三)**師長推薦**：請各班數學老師，推薦班上平時表現優秀但競試失常的學生。

若學校能有配合的時間，那麼(一)+(三)是較沒有遺珠之憾的。若是時間上剛好無法配合，那麼(二)+(三)也是一個折衷的辦法。不過，為避免部分同學沒有意願或者最後臨時退出的情況，至少要篩選出預定人數的二至三倍，才能預防及避免最後人數過少不足額的情形。

第二階段：期中培訓

在選出人才也確認其意願之後，學生必須參加期中培訓。培訓時間為平日的晚上，每週一次或兩週一次，考量學生段考或其他活動會適度暫停，整學期約培訓八次。我們曾嘗試過的培訓方式與教材如下：

(一)**主題式教學**：將 TRML 歷屆試題分類為「數論」、「函數」、「組合」、「國中幾何」、「三角」、「極值」等不同主題，重新排版編成講義後，每週以一個主題為主，用考古題加強學生能力。不過缺點是學生面對實際比賽時，難以應付綜合性試題。而且學生一味單向地聽課，能吸收的分量也是有限。

(二)**寫 ARML 試題**：每次上課前先給學生一回 ARML 團體賽試題，做為回家功課，之後再利用課堂上講解。希望學生能夠在課餘時間對題目有充足的思考，但缺點是學生往往疲於應付平時課業，後期作業的完成度及出席率往往每況愈下。

(三)仿 **TRML 組隊競賽**：上課之前先讓學生自行組成三人小組。所有培訓題目由老師自編，每次培訓就仿照 TRML 模式進行**團體賽 5 題共 20 分鐘，個人賽一回合 2 題 10 分鐘，共兩回合。接力賽一回合 6 分鐘，共兩回合**。小組各自取隊名，記錄每次的小隊與個人成績，最終累

計個人最高分以及團體最高分，在週會時進行頒獎。

此法的優點是利用小組的力量可適當鼓勵學生的出席率，因為如果缺少 1 人，接力賽會少一棒，而團隊分數也會受到影響。再者，由於培訓的過程就是模擬競賽，也讓學生更加熟悉比賽的規則，並能及早從過程中學會分工合作。此外，同學先將題目充分思考討論後老師們再來檢討錯誤，會比直接授課來得更有學習效果。這也是目前我們認為最值得推薦的培訓方式。

一開始學生最初接觸團體賽時，總不習慣寫數學是可以互相討論的，常常在考卷發下去後全班便陷入一片寂靜，這樣的閉門造車也會讓一開始的答對題數不盡理想。幾番鼓勵後，他們才慢慢從互動中了解彼此的長短處，並學會互助合作。當同學一旦有了互動，就會發現有同學想法都對，但屢算屢錯，需要另一個隊友幫他驗算才可以得分。所以團體賽的分工，可以是死板的從題號上分工（例如：甲寫第 1、2 題，乙寫第 3、4 題，丙寫第 5 題），進階到步驟上的分工（例如：甲想到一半接不下去，問過乙之後，再由乙把它算完），更可以是主題上的分工（例如：甲負責代數、乙負責幾何、丙負責組合計算）。培訓到後期，教室總是沸沸揚揚的一片，不時傳出此起彼落的吐槽聲，或因答對或猜對產生的尖叫歡呼聲，在夜晚寂靜的校園中，形成一種強烈的對比。

第三階段：確認選手名單

在六月初報名 TRML 之前，我們會舉行最終結訓考，用學生期中培訓以來的出席狀況、平時表現以及結訓考的成績，決定出最後的校隊選手。組隊方式如下：

(一)**能力分隊**：依據學生實力，依序分隊。

(二)**親疏分隊**：將培訓過程中搭配較好，已有固定討論模式的同學組合儘量分到同一隊中。

(三)**年級分隊**：高三集中在一隊，若有不足再從高二遞補。

其實以上三種方法各有優缺點，也並非絕對，往往在報名的那個禮拜，老師們必須傷透腦筋，綜合考量每位同學年級、實力、搭配情況、熟識程度等等多種因素，才能決定好最後的組隊名單。但原則上必有一隊主力隊伍，期待他們能在比賽中大放異彩。

另外，我們也發現，若是該隊組合是高三配高二生，則高三的學長姐因為不想在學弟妹面前丟臉，總能因此鞭策自己，力求表現。因此在非主力隊伍的名單中，我們會儘可能的安排幾位不怯生的高三生與學弟妹一起搭配，會有良好的催化效果。

第四階段：暑期培訓（針對各種類型考試訓練）

暑假培訓的重點是整合各隊員的能力，讓 15 個人彼此熟悉，並能在比賽中將團隊默契發揮到最大值。七、八月會有數次的培訓，每次約莫半天。培訓的方式是利用 TRML 歷屆考古題，每次寫團體賽加個人賽，或思考賽加接力賽。

團體賽的分工方式會由各隊隊長自行討論與調整，基本分法是將 15 人分為 3 人一串的小組，每一串依序寫（第 1、2 題）、（第 3、4 題）、（第 5、6 題）、（第 7、8 題）、（第 9、10 題）。並在教室中將各小組形成環狀排列。但因為每個人擅長領域不同，若是分配到的題目該小組沒有任何想法，就要趕快在時間內與隔壁小組交換題目。而過程中也需要有一位同學負責在各組之間穿針引線，通知大家還有哪些尚未解決的題目。

接力賽的分工方式則是依照每棒的屬性不同而略有調整。第一棒挑選計算能力快，抗壓性強的同學。而第二棒的同學則挑選在不曉得前方同學答案的情況下，能用未知變數代入題目，以做猜答的同學。第三棒的同學不但要有第二棒的能力，最好還要有具數學感良好的同學，才有機會交出最後正確答案。培訓過程會讓三個人自行更換調整棒次，在一次又一次的試跑中，讓三人彼此找到自己最佳位置。

暑期培訓最大的挑戰在於學生的出席率，每次培訓要能全員到齊是十分不容易的，這時靠的就是團體的凝聚力了。加強團體凝聚力的方式如下：

(一)**老師對學生的掌握度**：多數培訓的學生都是我們幾位指導老師的任課班學生，我們也會在培訓過程不斷地關心學生的學習狀況，與學生建立良好的關係，拉近彼此間的距離。

(二)**學長姐制的傳承**：由於隊伍的組成經常會混合兩個年級，學長姐與學弟妹之間因為合作關係也建立了革命情感，當學生考上大學後，仍舊會在暑期培訓過程中回來關心在校生的狀況。而我們也會在 TRML 比賽結束後舉辦慶功宴，除了頒發參賽選手獎狀外，也歡送即將上大學的學長姐。此外，參賽選手多半也是校內理科領域的菁英，最後升大學的成績榜單也十分亮眼，請他們分享讀書心得，無形中也為學弟妹樹立了良好的榜樣。

三、培訓的後續發展與成果》

而因應 12 年國教，學校在 2012 年正式成立了第一屆數學實驗班，希望能更有系統的培育校內對數學有興趣的學生。因此，原先培訓四階段（選人→期中培訓→選手名單→暑期培訓），則可省去選人這步驟，即直接在數學班中篩選表現較好的學生出任比賽選手。再者，原先的期中培訓，則納入數學班的專題課程中，規劃成更完善整體的教學內容，逐步累積學生的實力。而原先仿 TRML 組隊的培訓模式，也導入到專題課程的教學活動中，以團體學習方式激發學生合作討論，從中活化所學，獲得成長。老師在課堂之中也盡力地鼓勵學生發表其作法，再由其他學生補充，最後才是老師總結。

而學生除了參加頗負盛名的 TRML 競賽，也組隊參加 ARML 臺灣地區選拔賽。很幸運地在 2012 年拿下國內金牌與銀牌獎，部分學生也在 2013 的 6 月代表臺灣到美國參加 ARML 比賽，拿下世界團體賽第 3 名與第 6 名，也因此獲得來自美國柏克萊大學數學系的入學邀請函。

而整理歷年學生參加 TRML 的競賽成果，也意外的發現每年成績更是蒸蒸日上：

2009 共派兩隊，僅一隊獲得「地區團體優良獎」

2010 共派兩隊，僅一隊獲得「地區團體優良獎」

2011 共派兩隊，兩隊皆獲得「地區團體優良獎」

2012 共派三隊，一隊榮獲「地區三等獎」、一隊獲得「地區團體優良獎」

2013 共派三隊，一隊榮獲「地區三等獎」、一隊獲得「地區團體優良獎」

2014 共派三隊，二隊榮獲「地區三等獎」、一隊獲得「地區團體優良獎」

四、培訓的幕後花絮》

雖然培訓時間主要是每學年度的下學期至暑假比賽前，但在這期間各位老師所投注的時間與心力是難以計量的。名義上每年帶隊老師只有三位，但實際參與培訓過程的老師包含趙志益、蔡韋弘（現已為建國中學教師）、林志銘、楊佳霖、林芳綺、林子靖（現已為建國中學教師），以及每年為學校注入新血的實習與代理教師。我們必須從上學期開始做好準備，包含每

個禮拜召開一次社群會議，決定當年度的培訓方式以及討論教材修改與考試的出題。在培訓過程中，即便非上課老師，其餘同仁只要有空也會到班關心並指導學生。

培訓過程雖然辛苦，但所獲得的成就感也是難以言喻的。身為一個數學教師而言，在課餘時間能有一群學生可以一起分享、討論數學，也算在教學生涯中提供我們一個慰藉。而這些同學因為在培訓時培養出革命情感，所以回到班上時也會繼續地討論平時課業所遇到的難題，無形中也把討論的風氣帶入各班，甚至許多培訓學生最後升學時選擇就讀數學相關科系，在數學領域中繼續深究。

五、後記》

社會的價值觀常常是以結果論來決定一切，學生上數學課喜歡問老師「學這個要幹嘛？以後買東西又用不到」。因此當校內學生獲柏克萊入學邀請時，媒體試圖為整件事情找到一個「因」，並為那個「因」下一個聳動的標題，於是乎社群的老師們有一個名字叫「數學智囊團」，我們的教學也有一個名稱叫「翻轉教學」。其實我們也搞不清楚，我們是否在做「翻轉教學」。

事實上，事情的開始僅是一個並不偉大而很簡單的念頭。所謂的「因」，只是想在平凡的教學生涯中做一點不同的嘗試，並且試圖將每個嘗試做好而已！TRML 的培訓並不是為了讓學生能得獎而開始，也不會因學生有無獲獎而結束。因此無論學生的表現如何，社群老師們對於數學相關活動的討論也不會停止，也希望有機會能與有興趣的老師們共同交流經驗與分享心得。

利用差額法求運輸問題

鍾國華／臺北市祐德高中

一、前言》

在《龍騰數亦優》第 18 期刊載的文章：「利用最小成本法求運輸問題」刊出後，再度引起老師及學生們的興趣。因此，上課中學生們最常提到的兩個問題：

問題一：在兩個變數中，最小成本法的起始解是否為最佳解？

問題二：是否還有其他的解法？

本文提出差額法，以解答學生的學習問題。

二、有關運輸問題的理論及解法》

請參閱《龍騰數亦優》第 18 刊（註 1）。

三、差額法》

差額法著重於成本相對性之懲罰，故有人稱為懲罰法（Penalty method）。它的方法是就每一橫列或縱行，找出最低與次低成本之差額。此項差額即表示若不依照最佳方法分配，則將使費用增加之懲罰額。因此，我們應該先選擇差額最大之行或列，再就該行或列之最低成本方格進行分配資源，以避免此種懲罰。（註 2）

差額法求起始解的步驟（註 3）是：

第一步：從運輸矩陣表中，計算每列和每行中最小兩個成本的「差」。（成本為零則不考慮，取大於零的最小兩個成本差）。

第二步：選擇所有行列的「差」最大者。

第三步：若該行或列的「差」最大，則從該行或列中，選擇最小單位成本（c_{ij}）為基本變數，並分配資源：$x_{ij}=\mathrm{Min}(s_i,d_j)$。注意，若單位成本為 m，則不考量分配資源。

第四步：將基本變數（B.V）所對應的列供給量與行需求量均減去該最小值 x_{ij}。

第五步：刪去供給量或需求量已經降為零的行或列。

第六步：判別每一個需求量 d_j 是否等於零，若否，則回到第一步驟；若是，得起始解。

四、運輸問題的例題與求解》

在高中數學課本第三冊 2-2 節之例題（註 4）修改：某公司所生產的產品，存放在甲、乙兩倉庫分別有 50 單位、60 單位，現在市場 A、市場 B 的需求量分別是 55 單位、45 單位。若自甲倉庫運送物品至 A 市場、B 市場之每單位的運費分別為 110 元、120 元；自乙倉庫運送物品至 A 市場、B 市場之每單位的運費分別為 130 元、145 元。在滿足 A、B 市場的需求下，應如何分配才能使運費最低？

【第一種解法：圖解法】

第 1 步：建立運輸矩陣供需表，如表 1。

表 1　運輸矩陣供需表

	A 市場	B 市場	供給量
甲倉庫	110 元	120 元	50
乙倉庫	130 元	145 元	60
需求量	55	45	

第 2 步：建立運輸模式。

設甲倉庫運送 x 單位到 A 市場，y 單位到 B 市場；乙倉庫運送 $55-x$ 單位到 A 市場，$45-y$ 單位到 B 市場。

目標函數：min　$Z=110x+130(55-x)+120y+145(45-y)=-20x-25y+13675$

結構限制式：s.t $\begin{cases} x+y\le 50 \\ (55-x)+(45-y)\le 60 \\ 55-x\ge 0 \\ 45-y\ge 0 \end{cases}$

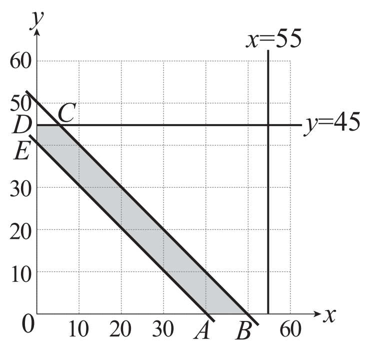
非負性：　$x\ge 0$，$y\ge 0$

第 3 步：利用直角坐標系之圖解找出可行解區域及端點。

整理限制條件：$40\le x+y\le 50$，$0\le x\le 55$，$0\le y\le 45$，作可行解區域如右圖一。

找出端點坐標：$A(40,0)$，$B(50,0)$，$C(5,45)$，$D(0,45)$，$E(0,40)$。

圖一：運輸問題的圖解



第 4 步：運輸模式的最佳解，必在端點上。

將此五個坐標點代入目標函數 $Z=-20x-25y+13675$：

(x,y)	$(40,0)$	$(50,0)$	$(5,45)$	$(0,45)$	$(0,40)$
$Z=-20x-25y+13675$	12875	12675	12450	12550	12675

當 $x=5$，$y=45$ 時，$Z=12450$ 為最小值。

最佳解：甲倉庫運送 5 單位到 A 市場，45 單位到 B 市場；乙倉庫運送 50 單位到 A 市場，0 單位到 B 市場；最低運費為 12450 元。

【第二種解法：最小成本法】

先建立運輸矩陣表，因總供給量大於總需求量，因此增加一個虛擬之終點 C 市場，其需求量為 $110-100=10$，代表不運送的數量為 10 單位，其所加之行成本為 m，m 是無窮大的數值，如表 2-1。因單位成本為 m 者，不考量分配資源，故該行在人工計算時可以省略。

第 1 步：從運輸矩陣表中，選擇最小單位成本（$c_{11}=110$元）為基本變數（B.V），並分配資源：$x_{11}=\min(50,55)=50$，寫在表格中的右下角。

第 2 步：將基本變數所對應的列供給量與行需求量均減去該最小值 $x_{11}=50$。

第 3 步：刪去供給量已經降為零的第一列，如表 2-2。

表 2-1　運輸矩陣的供需相等表

	A 市場	B 市場	C 市場	供給量
甲倉庫	110 元	120 元	m	50
乙倉庫	130 元	145 元	m	60
需求量	55	45	10	110

表 2-2　分配 $x_{11}=50$ 供需矩陣表

	A 市場	B 市場	供給量
甲倉庫	~~110~~ 50	~~120~~	~~50~~ 0
乙倉庫	130	145	60
需求量	5 ~~55~~	45	

第 4 步：重複第 1 步驟，選擇剩餘的最小單位成本（$c_{21}=130$元）為基本變數，並分配資源：$x_{21}=\min(60,5)=5$，寫在表格中的右下角。

第 5 步：將基本變數所對應的列供給量與行需求量均減去該最小值 $x_{21}=5$。

第 6 步：刪去需求量已經降為零的第一行，如表 2-3。

第 7 步：重複第 1 步驟，選擇剩餘的最小單位成本（$c_{22}=145$元）為基本變數，並分配資源：$x_{22}=\min(55,45)=45$，寫在表格中的右下角。

第 8 步：將基本變數所對應的列供給量與行需求量均減去該最小值 $x_{22}=45$。

第 9 步：刪去需求量已經降為零的第二行，如表 2-4。

因每一個需求量 $d_j=0$，得起始解。

表 2-3　分配 $x_{21}=5$ 供需矩陣表

	A 市場	B 市場	供給量
甲倉庫	~~110~~ 50	~~120~~	~~50~~ 0
乙倉庫	130 5	145	~~60~~ 55
需求量	0 ~~5~~ ~~55~~	45	

表 2-4　分配 $x_{22}=45$ 供需矩陣表

	A 市場	B 市場	供給量
甲倉庫	~~110~~ 50	~~120~~	~~50~~ 0
乙倉庫	130 5	145 45	~~60~~ ~~55~~ 10
需求量	0 ~~5~~ ~~55~~	0 ~~45~~	

第 10 步：利用階石法檢查現有解中是否為最佳解，計算基本變數的 $c_{ij}=u_i+v_j$；先令 $u_1=0$，再求其他 u_i、v_j。

$c_{11}=u_1+v_1$：$110=0+v_1$，得 $v_1=110$；

$c_{21}=u_2+v_1$：$130=u_2+110$，得 $u_2=20$；

$c_{22}=u_2+v_2$：$145=20+v_2$，得 $v_2=125$；如表 2-5。

第 11 步：計算非基本變數（N.B.V）的 $c_{ij}-(u_i+v_j)$。

$c_{12}-(u_1+v_2)=120-0-125=-5$，寫在表格中右上角，如表 2-5。

第 12 步：因部分非基本變數的 $c_{ij}-(u_i+v_j)<0$，故尚未得到最佳解。

第 13 步：進入基本變數：

min 問題，先取非基本變數的 $c_{ij}-u_i-v_j$ 為負值最小者，即 $c_{12}-u_1-v_2=-5$ 為負值中最小值者，故應選 x_{12} 為進入變數，令 $x_{12}=\theta$。

第 14 步：退出基本變數：

（一）利用階石法：θ、$(-\theta)$、θ、$(-\theta)$、……的方式組成迴路，此迴路只能有一個非基本變數（N.B.V），其他為基本變數（B.V）組成環狀迴路，且每一行、每一列只能有一個 θ 或 $(-\theta)$，如表 2-6。

（二）在此迴路中，選取 $\min(50-\theta=0，45-\theta=0)$，最小的 $\theta=45$。

表 2-5　基本變數 $u-v$ 值矩陣表

		$v_1=110$	$v_2=125$
		A 市場	B 市場
$u_1=0$	甲	110 50	120 $\boxed{-5}$
$u_2=20$	乙	130 5	145 45

表 2-6　階石法的環狀迴路表

	A 市場	B 市場
甲	110 $50-\theta$	120 $\boxed{-5}$ θ
乙	130 $5+\theta$	145 $45-\theta$

第 15 步：樞運算，將 $\theta=45$ 代入，重新計算基本變數，如表 2-7，再回到第 1 步驟。

第 16 步：利用階石法檢查現有解中是否為最佳解，計算基本變數的 $c_{ij}=u_i+v_j$；先令 $u_1=0$，再求其他 u_i、v_j。

$c_{11}=u_1+v_1$：$110=0+v_1$，得 $v_1=110$；

$c_{12}=u_1+v_2$：$120=0+v_2$，得 $v_2=120$；

$c_{21}=u_2+v_1$：$130=u_2+110$，得 $u_2=20$；如表 2-8。

第 17 步：計算非基本變數（N.B.V）的 $c_{ij}-(u_i+v_j)$。

$c_{22}-(u_2+v_2)=145-20-120=5$，寫在表格中右上角，如表 2-8。

第 18 步：所有非基本變數的 $c_{ij}-(u_i+v_j)\geq 0$，故有最佳解。

表 2-7　$\theta=45$ 代入後供需矩陣表

	A 市場	B 市場
甲	110 5	120 45
乙	130 50	145

表 2-8　基本變數 $u-v$ 值矩陣表

		$v_1=110$	$v_2=120$
		A 市場	B 市場
$u_1=0$	甲	110 5	120 45
$u_2=20$	乙	130 50	145 $\boxed{5}$

最佳解：甲倉庫運送 5 單位到 A 市場，45 單位到 B 市場，乙倉庫運送 50 單位到 A 市場，0 單位到 B 市場，最低運費為 $110\times5+120\times45+130\times50=12450$（元）。

【第三種解法：差額法】

先建立運輸矩陣表，因總供給量大於總需求量，因此增加一個虛擬之終點 C 市場，其需求量為 $110-100=10$，代表不運送的數量為 10 單位，其所加之行成本為 m，m 是無窮大的數值，如表 3-1。因單位成本為 m 者，不考量分配資源，故該行在人工計算時可以省略。

第 1 步：從運輸矩陣表中，計算每列和每行中最小兩個成本的「差」。

第 2 步：選擇所有行列的「差」最大者為第二行。

第 3 步：從第二行中，選最小單位成本（$c_{12}=120$ 元），並分配資源：$x_{12}=\min(50,45)=45$，寫在表格中的右下角。

第 4 步：將基本變數的列供給量與行需求量均減去該最小值 $x_{12}=45$。

第 5 步：刪去需求量已經降為零的第二行，如表 3-2。

表 3-1　運輸矩陣的供需相等表

	A 市場	B 市場	C 市場	供給量
甲倉庫	110 元	120 元	m	50
乙倉庫	130 元	145 元	m	60
需求量	55	45	10	110

表 3-2　分配 $x_{12}=45$ 供需矩陣表

	A 市場	B 市場	供給量	橫列差
甲倉庫	110	120 45	~~50~~ 5	10
乙倉庫	130	145	60	15
需求量	55	0 ~~45~~		
縱行差	20	25 ↑		

（差額最大）

第 6 步：從第一行中，選最小單位成本（$c_{11}=110$ 元），並分配資源：$x_{11}=\min(5,55)=5$，寫在表格中的右下角。

第 7 步：將基本變數的列供給量與行需求量均減去該最小值 $x_{11}=5$。

第 8 步：刪去供給量已經降為零的第一列，如表 3-3。

第 9 步：最後剩下一格，成本為（$c_{21}=130$ 元），分配資源：$x_{21}=\min(50,60)=50$，寫在表格中的右下角。

第 10 步：刪去需求量已經降為零的第一行，如表 3-4。

因每一個需求量 $d_j=0$，得起始解。

表 3-3　分配 $x_{11}=5$ 供需矩陣表

	A 市場	B 市場	供給量	橫列差
甲倉庫	~~110~~ 5	~~120~~ 45	~~50~~ ~~5~~ 0	
乙倉庫	130	145	60	
需求量	50 ~~55~~	0 ~~45~~		
縱行差 ↑				

表 3-4　分配 $x_{21}=50$ 供需矩陣表

	A 市場	B 市場	供給量	橫列差
甲倉庫	~~110~~ 5	~~120~~ 45	~~50~~ ~~5~~ 0	
乙倉庫	130 50	145	~~60~~ 10	
需求量	0 ~~50~~ ~~55~~	0 ~~45~~		
縱行差 ↑				

因為差額法的表 3-4 與最小成本法的表 2-7 相同，故最佳解的檢驗同表 2-8。

最佳解：甲倉庫運送 5 單位到 A 市場，45 單位到 B 市場；乙倉庫運送 50 單位到 A 市場，0 單位到 B 市場；最低運費為 $110\times5+120\times45+130\times50=12450$（元）。

由上述求解過程中，可發現在差額法求起始解的過程中，只要表 3-4 即可，其餘表格皆可省略；而在階石法檢驗最佳解的過程中，只要表 2-8 即可。事實上，在高中數學課本中，因只教二元一次不等式的運輸模式，差額法的起始解就是最佳解，所以只要表 3-4 就可得到最佳解，因此採用差額法求運輸問題，顯然較圖解法及最小成本法更簡捷有效率。

五、結論》

由於高中學測沒有計算題，利用圖解法求運輸問題，因計算過程太過繁瑣，而最小成本法的起始解不一定是最佳解，改用差額法求運輸問題，反而讓學生更容易了解與學習，有助於教學內容的改善，值得教學上的參考與運用。差額法可運用在三個未知數以上的運輸問題，而圖解法不適用。

參考資料：
註 1：鍾國華（101），利用最小成本法求運輸問題，龍騰數亦優，第 18 刊，P.18～25。
註 2：高孔廉 & 張緯良（82），作業研究，五南圖書出版公司，P.186。
註 3：陳文賢（80），管理科學——作業研究與數量方法，三民書局，P.196～197。
註 4：許志農（100），高中數學第三冊，新北市：龍騰文化事業公司，P.113。

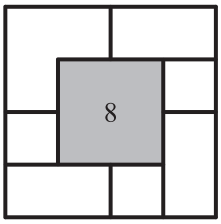
專欄　動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 101

☆

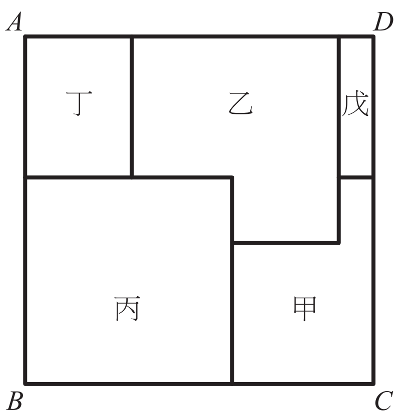
將八個全等的正方形堆疊在一起，如果數字 8 的正方形是最後放的，那麼確定其它 7 個正方形堆放的順序，使得最終看上去像圖中那樣的排列。



〔玩鎖・玩索〕

將每張正方形紙張先作編號，再針對兩個編號的紙張進行比較，考慮兩張紙張的先後重疊次序，就可以歸納出八張紙張重疊次序了。

如果時間充足，不妨想想底下這道出自日本小學數學競賽的延伸題（面積的數據經本人稍作美化）：有五張大小相同的正方形摺紙甲、乙、丙、丁、戊，按某種次序重疊，拼成一個大正方形 $ABCD$ ，如下圖所示。



此時，從上面看到甲、乙、丙部分的面積分別為

甲：18 平方公分；

乙：30 平方公分；

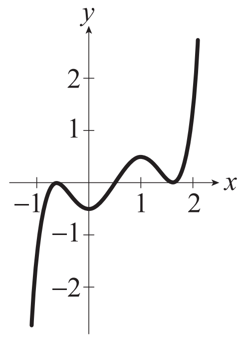
丙：36 平方公分。

從上面看到丁與戊部分的面積，各為多少呢？

遊戲 102

☆☆☆☆

下圖是五次實係數多項式 $f(x)$ 的圖形，這圖形剛好跟 x 軸碰到三次，從左至右依序為 $x=a$ ，$x=\dfrac{1}{2}$ 與 $x=b$ 的位置，如下圖所示：



選出正確的選項：

(1) $f(0.5)=0$ 。

(2) $f'(a)=0$ 。

(3) $(x-b)^2$ 整除 $f(x)$ 。

(4) $f(x)$ 有三實數根與一對共軛複數根。

(5) $f'(x)$ 有四實數根。

(6) $f'(-1)>0$ 。

(7) $f'(2)>0$ 。

(8) $f(x)$ 的首項係數為正。

〔玩鎖・玩索〕

多項式 $f(x)$ 的一次導函數 $f'(x)$ 除了幫我們驗證重根的可能性外，還可以判斷圖形的遞增與遞減性質。所以 $f'(x)$ 的值可以幫助我們瞭解 $y=f(x)$ 圖形的大致長相。

遊戲 103

☆

在坐標平面上，x 與 y 坐標都是整數的點稱為格子點。令以原點為圓心，正整數 n 為半徑的圓內或圓上的格子點數為 a_n，高斯證明過數列〈 a_n 〉會滿足不等式

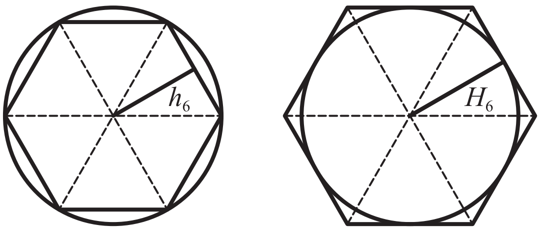
$$\pi n^2 - 2\sqrt{2}\pi n \le a_n \le \pi n^2 + 2\sqrt{2}\pi n \text{。}$$

試利用這個不等式求極限值

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = ?$$

〔玩鎖・玩索〕

夾擠定理最典型也最古老的應用，就是用它來求圓面積公式。令半徑 r 的圓面積為 A，並畫出該圓的內接與外切正 n 邊形，下圖是該圓的內接與外切正 6 邊形：



設圓內接與外切正 n 邊形的周長分別為 l_n 與 L_n，圓心至圓內接與外切正 n 邊形的最短距離為 h_n 與 H_n。因為圓內接與外切正 n 邊形的面積分別為 $\frac{l_n h_n}{2}$ 與 $\frac{L_n H_n}{2}$，所以對任意正整數 $n \ge 3$，不等式

$$\frac{l_n h_n}{2} \le \text{圓面積 } A \le \frac{L_n H_n}{2}$$

恆成立。

當 n 趨近無限大時，l_n 與 L_n 會接近圓的周長 $2\pi r$，即

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} L_n = 2\pi r \text{，}$$

且 h_n 會接近半徑 r，而 H_n 就等於半徑 r，即

$$\lim_{n\to\infty} h_n = r \text{，} H_n = r \text{。}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l_n h_n}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 \text{；}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n H_n}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 \text{。}$$

由夾擠定理知道 $A = \pi r^2$，即半徑 r 的圓之面積為 πr^2。

遊戲 104

☆☆☆

將 18 個白球圍成一圓圈，甲、乙兩人進行塗色遊戲，規則如下：

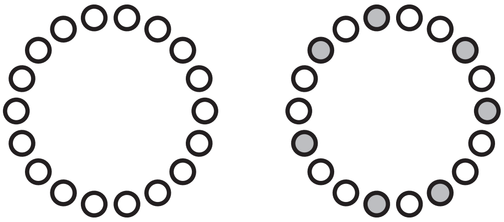
(1) 甲、乙輪流塗色，每次選取一個白球，把它塗成灰色。

(2) 塗過灰色的球不能再塗。

(3) 不能塗完色之後，發生相鄰兩球都是灰色的情形，這樣算違例。

(4) 放棄或違例者輸。

下圖中的左圖就是這遊戲的棋盤，而右圖是甲塗 4 顆球，乙塗 3 顆球後的情形，輪到乙選球塗色，顯然無法做到，所以甲勝。



試問：是先塗色的甲或慢點塗色的乙有必勝的策略呢？

〔玩鎖・玩索〕

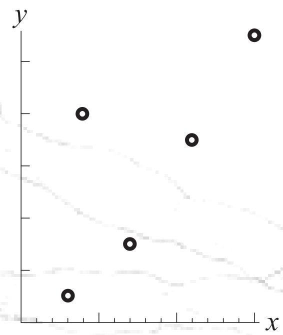
義大利詩人但丁說過「圓是最完美的圖形」，圓的完美來自於它有一個圓心，而圓周完全對稱於圓心。每天起床刷牙照鏡子就是在使用「對稱」的性質，因為太自然與熟悉了，所以反而容易失去對「對稱」兩字的戒心與關心。

在這遊戲裡，18 個白球圍成一圓圈就像鐘錶上的 12 個刻度一樣，有對稱關係。但是，如果將白球的個數設定為奇數，那麼遊戲的困難度就增加不少。有興趣的讀者不妨研究看看！

動手玩數學~破解祕笈 第25期

遊戲 97

(1) 散布圖為



兩筆資料的平均數分別為

$\bar{x}=\dfrac{3+4+7+11+15}{5}=8$，

$\bar{y}=\dfrac{5+40+15+35+55}{5}=30$。

兩筆資料間的相關係數 r 為

$\left[(-5)(-25)+(-4)(10)+(-1)(-15)+(3)(5)+(7)(25)\right] /$

$\left[\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+(-1)^2+3^2+7^2}\sqrt{(-25)^2+10^2+(-15)^2+5^2+25^2}\right]$，

計算，得

$$r=\frac{290}{10\cdot 40}=\frac{29}{40}=0.725$$ 。

(2) 兩筆資料的標準差分別為

$$S_x=\frac{10}{\sqrt{5-1}}=5，S_y=\frac{40}{\sqrt{5-1}}=20$$ 。

因此，y 對 x 的迴歸線方程式為

$$\frac{y-30}{20}=\frac{29}{40}\cdot\frac{x-8}{5}\Rightarrow y=\frac{29}{10}x+\frac{34}{5}$$ 。

(3) 當紙漿中所含硬木百分比為18%時，紙張的張力強度

$$y=\frac{29}{10}\cdot 18+\frac{34}{5}=59$$ 。

遊戲 98

(1) 因為風壓與風速平方成正比，所以 $n=2$。

又由強風的數據

$10.8^2\approx 116.64$，$13.8^2\approx 190.44$，

$\alpha\approx\dfrac{14}{116.64}\approx 0.1200$，

$\alpha\approx\dfrac{23}{190.44}\approx 0.1208$，

得 $\alpha=0.12$。

(2) 因為賈斯廷・加特林的速度

$v=\dfrac{100}{9.76}\approx 10.25$，

所以賈斯廷・加特林的速度相當於 5 級風。

(3) 利用公式 $p=0.12v^2$，得

風級	名稱	風速 v（公尺／秒）	風壓 p（公斤／m^2）
5	清風	8.0～10.7	8～14
6	強風	10.8～13.8	14～23
7	疾風	13.9～17.1	23～35
11	暴風	28.5～32.6	97～128
13	颶風	37.0～41.4	164～206
16	颶風	51.0～56.6	312～384

遊戲 99

若 A 與 C 的某坐標數字不一樣，則 A 與 B 或 B 與 C 在那個坐標位置的數字必至少有一對也不一樣。根據這個原則，得到三角不等式 $d(A,B)+d(B,C)\geq d(A,C)$ 成立。

遊戲 100

因為

$f(a)=a^3-3a^2+2$

$$\begin{aligned}f(2-a)&=(2-a)^3-3(2-a)^2+2\\&=(8-12a+6a^2-a^3)-3(4-4a+a^2)+2\\&=-a^3+3a^2-2\end{aligned}$$ ，

所以 $f(a)+f(2-a)=0$。