兩岸四地華羅庚金盃少年數學菁英邀請賽

許志農／臺灣師大數學系

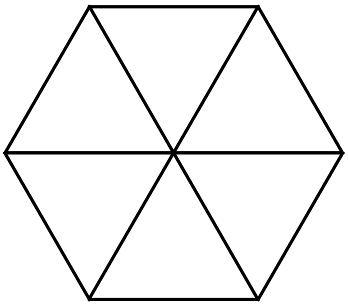
隨著十二年國教的開展，高中職的數學教學面臨許多問題與挑戰，例如學生程度的落差變大、學習態度的改變、特色課程的開設⋯等。許多學校都想開數學的選修課程或特色課程，但市面上並沒有這方面的資料與教案，究竟高中職的數學特色課程該長成何種模樣？我想每個老師的答案可能都不一樣或不清楚。有些學校想開趣味數學為主，有些想玩數學遊戲，有些著重課綱內容的熟悉，有些是加深與加廣，但都面臨著編出一套合適、好用教材的困擾。我覺得這些題目的長相與設計方式非常適合提供國內開數學特色課程的老師參考，所以我把這些遊戲題目與解析稍做修飾，放在龍騰數亦優供老師們參考與使用。

第一屆

一、競賽試題

＊第一題：6 變 2，是容易？（限時 10 分鐘）

利用大會提供的 12 枝竹籤砌成如下圖的一個正六邊形，圖中共有六個等邊三角形。



想想看：你能否每次從圖中抽起兩枝竹籤，並且放回圖中，從而使圖中三角形的數目按下列次序遞減：

6 個三角形→5 個三角形→4 個三角形→3 個三角形→2 個三角形。

抽放規則：a. 所砌出來的三角形的大小可以是不相同的；

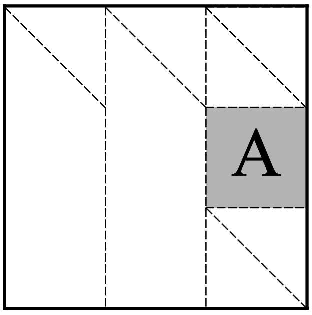
b. 砌得的三角形不存在大三角形包小三角形或重疊三角形的形式；

c. 在砌得的圖形中，12 枝竹籤都一定是三角形的一部分。

補充：每隊只准演示一次。各隊需派一代表，在評判面前演示三角形數目遞減的過程 6→5→4→3→2；當演示開始了，每一步驟不可以退回前一步，不接受重新再開始。若限時到了，即使演示未完結，活動亦告結束。

＊第二題：大變小，仍是方！（限時 10 分鐘）

利用大會提供的剪刀，沿虛線剪開正方形，並將 A 部分的小正方形交回給評判。用餘下的八部分重新砌成一個正方形。



＊第三題：猜猜看，是黑還是白？（限時 20 分鐘）

每隊的 4 位組員排成一行，坐在椅子上。工作人員將會為各組員戴上黑色或白色的帽子。每位組員只能看見前面組員戴在頭上帽子的顏色。由排第 4 的組員開始猜頭上帽子的顏色，然後到排第 3 的組員猜自己頭上帽子的顏色，如此類推到排第 2 和排第 1 的組員猜自己頭上帽子的顏色。

只需要排第 1 至排第 3 的組員能夠猜對自己頭上帽子的顏色，即使排第 4 的組員猜錯了自己頭上帽子的顏色，猜帽活動也算成功。

規則：a. 在工作人員為各組員戴上黑色或白色的帽子開始，組員不得擰轉頭看自己或其他隊友帽子的顏色，組員不可以交談或發出任何聲音，違例者整隊的比賽分數作 0 分處理；

b. 組員在猜自己頭上帽子的顏色時，只需以選擇工作人員提供的紅、白卡紙作表示，工作人員會記錄隊員的答案在答題紙上，並交及下一組員作參考。在整個過程中，組員不可以交談或發出任何聲音，違例者整隊的比賽分數作 0 分處理；

c. 共有三個獨立的猜帽活動，各隊需猜帽三次，若限時到了，即使猜帽演示未能完成，活動亦告結束。

＊第四題：怎麼分開來呢？（限時 10 分鐘）

先把大會提供的兩條繩子，按照工作人員的指示，使兩條繩交錯地縛在兩位組員雙手的手腕上。問在不可以把繩子從雙手手腕脫出及弄斷繩子的情況下，兩位組員怎樣才能分開來？

規則：a. 組員可以交談、討論及試演解難的方法，但發出的聲音不可以過大；

b. 能在 10 分鐘內找得解難的方法，並成功演示出來得 10 分。

二、解析

1. 給分：每完成一次改變，正確的便會取得相應的分數；活動的總分是所取得的分數的總和。

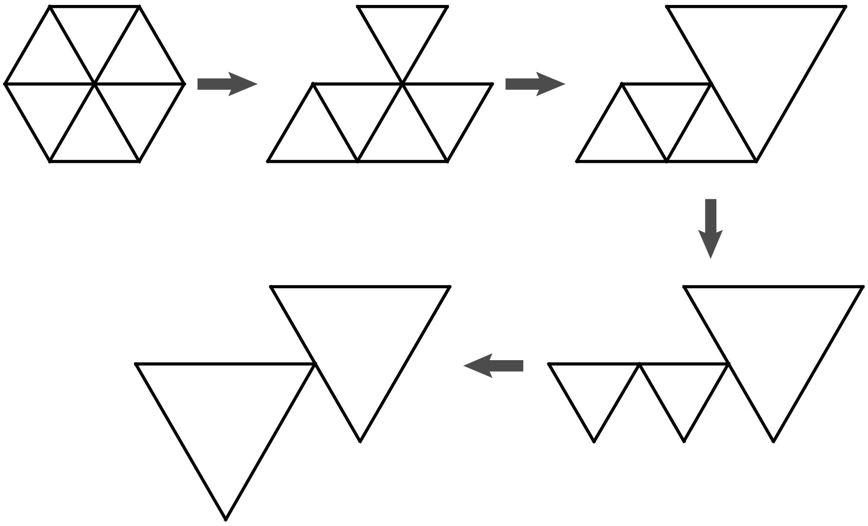
(1) 6 個三角形→5 個三角形（2 分）；

(2) 5 個三角形→4 個三角形（3 分）；

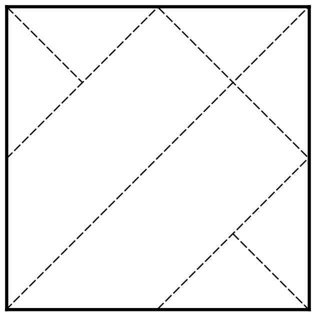
(3) 4 個三角形→3 個三角形（7 分）；

(4) 3 個三角形→2 個三角形（3 分）。

參考解答：



2. 參考解答：



3. 工作人員給隊員戴帽的次序：

	4th	3rd	2nd	1st	
第 1 個猜帽演示：	白	黑	白	黑	（7 分）；
第 2 個猜帽演示：	黑	白	白	白	（5 分）；
第 3 個猜帽演示：	黑	黑	白	白	（8 分）。

策略：(1)第 4 個猜白，代表首前三位是 白白白 或 兩黑一白；

第 4 個猜黑，代表首前三位是 黑黑黑 或 兩白一黑。

(2)第 4 個猜白，代表首前三位白色帽的數目是單數；

第 4 個猜黑，代表白色帽的數目是偶數。

4. 給分：(1)能在 5 分鐘內找得解難的方法，並成功演示出來得 15 分；

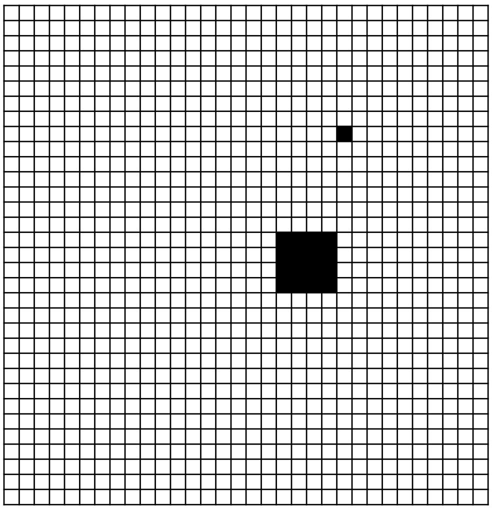
(2)能在 10 分鐘內找得解難的方法，並成功演示出來得 10 分。

第二屆

一、競賽試題

＊第一題（限時 15 分鐘）

下圖是33×32的長方形，黑色兩塊是邊長為 1 與 4 的磁磚，其餘的部分尚未鋪磁磚：



鋪磁磚的師傅說：「只需邊長為 7,8,9,10,14,15,18 的正方形磁磚各一塊（共七塊），就可以將整個長方形鋪滿。」試著鋪看看。

＊第二題（限時 20 分鐘）

桌面上有編號 1 至編號 10 的十枚硬幣，甲、乙兩人輪流取這十枚硬幣。

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩

規則如下：a. 甲先取、乙後取，被取走的硬幣不再放回桌上；

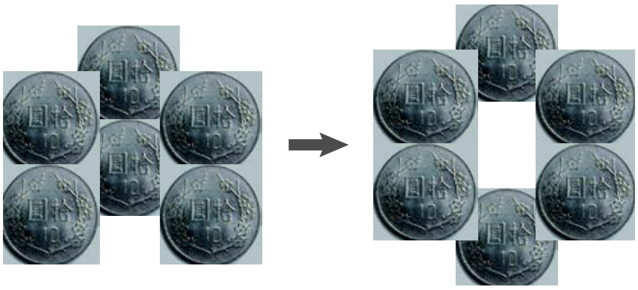
b. 當一方取走 a 號硬幣時，桌面上編號為 a 的因數的硬幣也同時被此人拿走。例如：當甲取 4 號硬幣時，編號 1,2,4 的硬幣都歸甲所有，故剩下 3,5,6,7,8,9,10 號的硬幣；接著若乙取走 9 號硬幣，則 3,9 號硬幣就歸乙所有；

c. 最後把所有硬幣取完的人獲勝。

試問：甲第一次需取幾號硬幣，他才有絕對的把握可以贏得比賽。（答案可能有好幾個）

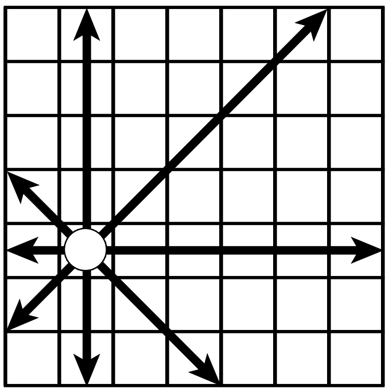
＊第三題（限時 20 分鐘）

準備七枚十元硬幣，先將一枚放在桌子上，然後將其餘的六枚放在此枚的四周（不可以重疊），這六枚的中心剛好構成一個正六邊形，再將六枚中的任意一枚拿掉。這時桌上只剩下六枚硬幣，每次操作只能在桌子上滑動六枚硬幣中的一枚，使其與至少兩枚硬幣相外切，而且滑動過程不能動到其餘的五枚硬幣。你是否有辦法在有限次的滑動之後，使這六枚硬幣的中心剛好構成一個正六邊形（如果可以的話，至少需多少次操作才能完成）。



＊第四題（限時 20 分鐘）

在 7×7 的土地上，當在某一個格子內立一盞燈時，由這格子所畫出的水平線，鉛直線及兩條斜對角線所經過的格子，都會被照亮，其餘的格子無法被照亮。試問：應該立幾盞燈，才會照亮所有的格子，又該立在哪幾個格子上（所立的燈愈少愈好）。



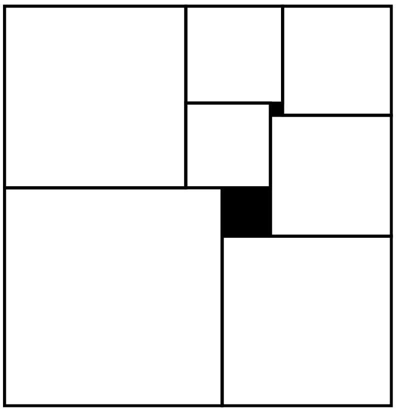
二、解析

1. 給分：(1) 5 分鐘內得到解答（15 分）；

   (2) 10 分鐘內得到解答（10 分）；

   (3) 15 分鐘內得到解答（5 分）。

   參考解答：



2. 給分：(1)答案中沒有④或⑥者得 0 分；

   (2)答案中恰含④⑥其中之一者，從 12 分往下扣，每多寫一個錯誤答案扣 4 分；

   (3)答案中含④與⑥者從 20 分往下扣，每多寫一個錯誤答案扣 4 分，也就是說，寫正確答案④與⑥者得 20 分。

   答案：甲先取④或⑥可保證獲勝。

3. 給分：(1) 5 分鐘內得到解答（10 分）；

   (2) 10 分鐘內得到解答（5 分）。

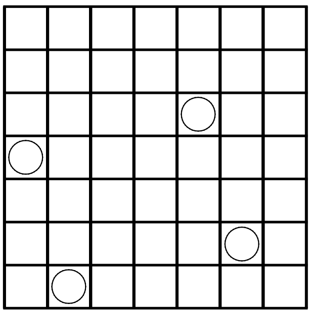
   答案：四次（操作如下）。

4. 給分：(1)立四盞燈得 15 分；

   (2)立五盞燈得 10 分；

   (3)立六盞燈得 5 分。

   答案：立四盞燈即可，如下圖所示：



聽音辨形—等周長定理

江慶昱／衛道中學退休教師

楞嚴經：「…不由前塵所起知見，明不循根，寄根明發，由是六根互相為用。阿難，汝豈不知？今此會中，阿那律陀，無目而見；跋難陀龍，無耳而聽；殑河神女，非鼻而聞香；驕梵缽提，異舌知味；舜若多神，無身覺觸；摩訶迦葉，久滅意根，圓明了知，不因心念。…」

一、楔子 》

大約 1994 年，衛道中學一位同事跟我說，想要指導學生證明等周長定理：「周長固定的平面簡單（自身不相交）封閉曲線中圓的面積最大。」我試問自己：「等周長定理可以用初等數學證明嗎？」後來到清華大學進修 40 學分班，跟全任重先生學動態幾何，對反演幾何有比較深入的接觸，反演幾何是史坦那（Jacob Steiner, 1796~1863）於 1830 年發展的。同時跟沈昭亮先生學到史坦那對稱化法，1838 年史坦那就是用對稱化法「證明」了等周長定理，這是最早用綜合幾何的方法證明等周長定理的人。這時候對等周長定理才有比較深入的理解。

二、歷史背景 》

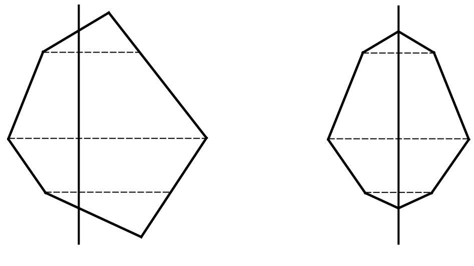
「具有相等面積的平面圖形中，以圓形周長最短」，或者它的等價敘述「周長固定的平面圖形中，以圓的面積最大」，這就是等周長定理（isoperimetric theorem）。公元前 300 年的歐幾里得已經知道矩形的等周長定理。後來禪德羅斯（Zenodorus, 200BC~140BC）寫了一本《等周圖形》的書，但流失了。公元 300 年帕伯斯（Pappus of Alexandria, 290~350）重新敘述並證明他的結果。事實上，他「認為」他證明了等周長定理。

一個周長為 L，所圍區域面積為 A 的閉曲線，其等周商 IQ（Isoperimetric Quotient）定義為與具有相同周長的圓的面積比，顯然一個平面圖形的等周商 $IQ=\dfrac{4\pi A}{L^2}$。因此，匈牙利數學家波里亞（G. Pólya, 1887~1985）把等周長定理改成這樣：「一個平面圖形的等周商 $IQ\le 1$。」換句話說，圓的等周商 $IQ=1$，是最大的。各種平面圖形的等周商如下表：

圖形	圓	正方形	1/4 圓	3：2 矩形	半圓	1/6 圓	2：1 矩形	正三角形	3：1 矩形
IQ	1	0.785	0.774	0.755	0.748	0.709	0.699	0.604	0.584

三、史坦那對稱化法 》

所謂史坦那對稱化法是這樣的：「考慮一個凸體，在給定的方向上畫一條直線 L，移動每條垂直於此直線的弦，使得 L 成為此弦的垂直平分線，平移後的弦端點構成一個新的對稱圖形，它與原圖形有相同的面積，但是周長較小。」（稱為反射原理，跟後面習作有關）



以下是史坦那關於等周長定理證法的脈絡：

1. 如果圖形不是凸的，用反射原理可以找到一個周長相等，但是面積較大的圖形。
2. 一個凸的圖形，如果不是圓形，一定存在一軸使該圖不對稱，則我們對該軸作史坦那對稱化，則找到一個面積相等、周長較小的圖形，所以等周長定理成立。

註：此處反射原理請參看凡異出版社出版的《幾何不等式》P.26、67。

史坦那並沒有證明最大面積的存在性，所以維爾斯特拉斯（Karl Weierstrass, 1815~1897）必須進一步發展微積分來證明。

四、數學與物理交會的地方 》

1973 年我大學二年級，當時微分幾何是黃海先生教的，課程教完後他說要到國外念書，聽說是去念「聽音辨形」。沒錯，就是聽到一個振動體發出的聲音，就可以知道它的形狀。武俠小說中「聽音辨形」是修練暗器的功夫，「聽音辨形」聽起來蠻厲害的。

拿一把吉他，按住弦中點所發出的音調比空弦時高八度，這件事古希臘的畢達哥拉斯早已知道了。十七世紀是分析學的肇始時代，分英國與歐陸兩學派。英國學派宗主是牛頓，1714 年牛頓的學生，泰勒（Brook Taylor, 1685~1731）解決了弦振動的基本頻率公式，它完全由弦的長度、拉力與密度決定。1746 年，法國數學家達朗貝爾（Jean Le Rond d’Alembert, 1717~1783）證明了琴弦的許多種振動都不是正弦式駐波。1748 年，瑞士數學家尤拉（Euler, 1707~1783）推出了琴弦的「波動方程式」，並求出其解。到這裡，我們可以說，聽到琴弦發出的頻率可以知道它的「形狀」了。

解決了一維的問題，當然要處理二維的東西了。二維振動的樂器中，自然就想到鼓了。1795 年尤拉開始研究鼓的問題，並再度導出一個波動方程式。那麼聽到鼓音的頻率可以知道鼓的形狀嗎？瑞利爵士（Lord Rayleigh, 1842~1919）把許多等面積、不同形狀的羊皮均勻的繃在鼓上，然後測量它們發出的主頻率，得到「圓具有最低的主頻率」的結論。於是他提出瑞利猜測：「聽到一個振動體發出的聲音，就可以知道它的形狀。」

這是由觀察、歸納、類比到猜想的過程，當然數學家想要從猜想得到證明。1966 年，波蘭數學家卡克（Mark Kac, 1914~1984）重提這個問題：「你可以聽到鼓的形狀嗎？（一個黎曼流形是否由其拉普拉斯譜決定？）」瑞利猜測再度引起注意。

因此可知黃海先生就是為瑞利猜測出去的。結果如何呢？1992 年（大約是黃海先生出國的 20 年後），達特茅斯學院的女教授戈登（Carolyn S. Gordon）、瑋伯（David L. Webb）與沃伯特（Scott Wolpert）找到了反例。換句話說，瑞利猜測已得到否定的答案，可以找到不同形狀的鼓，它們聽起來是一樣的。但這不是重點，整個數學史的發展一直都是這樣的，結論其實並不是最重要的，重要的是從求解的過程中我們會得到很多方法或數學內容。

數學的等周長定理與物理的瑞利的膜片實驗為什麼有那麼密切的關聯呢？理由是因為它們都來自同一個宇宙本體。所謂「人法地、地法天、天法道、道法自然。」有尤拉的波動方程式，才有馬克斯威爾的電磁學，有電磁學才有電視機，我們日常生活用品的背後有很嚴密的數學支持著，數學是文化重要的一環，我們是用數學的模式解讀自然。

五、後記 》

具有等體積的所有立體中，以球有最小的表面積，這是等周長定理的延伸。其實這件事小貓也知道，當寒冬來臨，貓都是蜷曲著身體。體積固定，表面積愈小，則散熱愈少，小貓便是以此保持體溫。

等周長定理的名稱是笛卡爾最先在《思想的法則》一書中提出的。笛卡爾另一本比較有名的著作是《我思故我在》，其實那沒什麼了不起，我很小的時候有一次走路不小心，腳趾踢到石頭，痛入心扉，就知道「我痛故我在」的道理了。

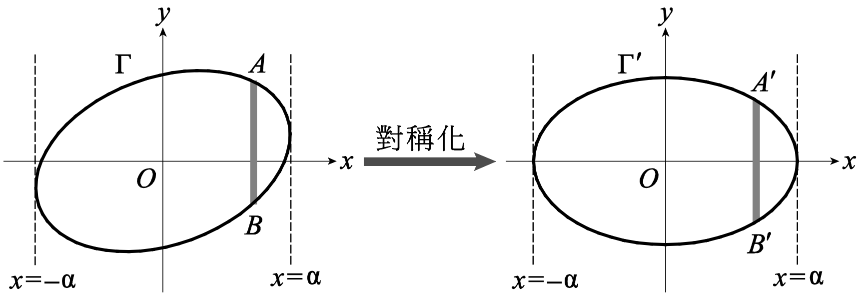
六、習作 》

1. 證明周長固定的三角形中，以正三角形面積最大。
2. 試證面積固定，底固定的三角形中，以等腰三角形周長最小。
3. 面積固定，上、下底固定的梯形中，以等腰梯形周長最小。
4. 利用史坦那對稱化法求 $ax^2+2bxy+cy^2=1$（$b^2-ac<0$）所圍的區域面積。

解答

第 1 題用到海龍公式與算幾不等式；第 2、3 題是國中數學，可以輕易解決。

4. 對稱化（對 x 軸）：搬動線段 $\overline{AB}$，使得 $\overline{AB}$ 的中點落在 x 軸上。



設 $A(x_0,y_1),B(x_0,y_2)$，則 $A'(x_0,\dfrac{y_1-y_2}{2}),B'(x_0,\dfrac{y_2-y_1}{2})$，設 $x_0=X,\dfrac{y_1-y_2}{2}=Y$，欲求 (X,Y) 滿足的方程式。

y_1,y_2 是 $cy^2+2bx_0y+ax_0^2-1=0$ 的兩根，所以$(*)\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{-2bx_0}{c} \\ y_1y_2=\dfrac{ax_0^2-1}{c} \end{cases}$。

又 $ax_0^2+2bx_0y_1+cy_1^2=1, ax_0^2+2bx_0y_2+cy_2^2=1$ 兩式相加得

$$2ax_0^2+2bx_0\left(y_1+y_2\right)+c\left(y_1-y_2\right)^2+2cy_1y_2=2，$$

代入$(*)$，化簡得 $\left(\dfrac{ac-b^2}{c}\right)X^2+cY^2=1$，得證。

因為長軸之半為 $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{ac-b^2}}$，短軸之半為 $\dfrac{1}{\sqrt{c}}$，所以面積為 $\dfrac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$。

參考資料：

1. 凡異出版社（1999），幾何不等式，新竹：凡異出版社，P.26、67。
2. 葉李華（譯）（1996），史都華，大自然的數學遊戲，臺北：天下文化，P.90。
3. 牛頓雜誌，第 112 期，P.141。
4. 歐陽鐘汕、劉寄星（1995），從肥皂泡到液晶生物膜，臺北：牛頓出版社，P.120。
5. 李心燦（譯）（1990），G. Polya，數學與猜想，臺北：九章出版社，P.182。
6. 史坦那的生平，數學傳播季刊，第 10 卷第 1 期，P.8。
7. 我們可以聽出鼓的形狀嗎？（Peter Greiner 演講）數學傳播季刊，第 30 卷第 4 期，P.34。
8. Mark Kac（1966），Can one hear the shape of a drum? American Mathematical Monthly 73，P.1~23。
9. 等周長定理與不等式：
http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/isoperimetric.shtml（2014.01.13 取自）。
10. You can’t always hear the shape of a drum：
http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-199706（2014.01.13 取自）。
11. Drums that sound alike：
http://www.maa.org/mathland/mathland_4_14.html（2014.01.13 取自）。

利用切面法求整數規劃的問題

鍾國華／臺北市祐德高中

一、前言 》

在龍騰數亦優第 21 刊的文章：「利用單形法求線性規劃的問題」刊出後，再度引起學生們的興趣。因為在線性規劃的問題中，若決策變數為分數，例如雇用工人 3.6 人，購買 4.7 部機器…等，則分數解並無意義。因此，上課中學生們最常提到的兩個問題：

問題一：圖解法中如何解決整數問題，是否採用最佳分數的左右整數值，即可得到最佳整數解？

問題二：是否還有其他的解法？

本文提出**切面法**（Cutting Plane Method），以解答學生的學習問題。

二、切面法（Cutting Plane Method） 》

1. 沿史：美國數學家高默理（R. E. Gomery）於 1958 年提出切面法，用以解決整數規劃的問題。
2. 原理：切面法在求解時首先忽略整數條件，而以單形法（Simplex Method）來求最佳解，如果解值不是整數，則再加上一個限制條件，稱之為 Gomery 條件（Gomery Condition）。這個限制條件所代表的意義是在線性規劃的可行解區域內，加上一個整數限制條件，以縮小可行解區間，然後以對偶單形法（Dual Simplex Method）求解。如果經過這個步驟仍不能求得整數解，則再一次加 Gomery 條件求解，一直反覆，直到所有變數均為整數為止。

三、最小的非負值分數（Smallest Nonnegative Fraction） 》

在還沒有說明新增 Gomery 條件前，先解釋一個符號— f（最小的非負值分數），這是一個在 $[0,1]$ 之間的分數。當非整數的數字減去一個分數後，其結果成為整數。

求 f 的原則是：

1. 若原數為正數，則直接取其尾數為 f。例如 $10\frac{1}{4}$，則 $f=\frac{1}{4}$，因為 $10\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=10$。
2. 若原數為負數，則取其尾數與 1 形成互補（Complement）之數字。例如 $-5\frac{2}{3}$，則 $f=\frac{1}{3}$，因為 $-5\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-6$。
3. 若原數為整數，則 $f=0$。

四、切面法的求解步驟 》

第一步：解沒有整數限制的線性規劃問題，令 $\overline{x}$ 為最佳解，且令 $p=1$（表示第 1 次的切面數）。

第二步：若 $\overline{x}$ 全為整數，則為整數規劃的最佳解，停止。否則，到第三步。

第三步：令 $f_q=\max\left\{f_i \,\middle|\, f_i=\overline{b_i}-\left[\overline{b_i}\right], f_i>0\right\}$，

$\overline{b_i}$ 是最佳解的右手係數（Right-hand Coefficient），$\left[\overline{b_i}\right]$ 是小於等於 $\overline{b_i}$ 的最大整數。

第四步：令 $d_{qj}=\overline{a_{qj}}-\left[\overline{a_{qj}}\right]$，增加一個限制式（切面）：$x_p-\sum_{x_j\text{是非基本變數}} d_{qj}x_j=-f_q$ 。

以上 x_p 是新的虛擬基本變數， $\overline{a_{qj}}$ 是最佳解非基本變數 x_j 的第 q 列的係數。

第五步：增加以上限制條件到目前的線性規劃問題中，求其最佳解；

或者將上列限制條件加到目前最佳解表中，再利用對偶單形法求解。

第六步：若以上線性規劃問題，無可行解，則整數規則無解，停止。

若 $p>M$ （M 是最大切面數），停止。

否則 $\bar{x}$ 為線性規劃的最佳解，令 $p=p+1$ ，回到第二步。

※在第五步驟中，所提到對偶單形法有兩個運算規則如下：

〈規則一〉選擇一個負數最小的基本變數（Basic Variables）做為退出的變數，

即 $x_{Br}=\min\{x_{Bi}\}$ for $x_{Bi}<0$ （即 $\overline{b_i}<0$ ）。

〈規則二〉以 c_j-z_j 來除該退出變數方程式之變數中技術係數（ a_{rj} ）為負值者而計算其比例，

並考慮目標函數：

1. 如果是求極大值的題目，計算比例時選最小者，以決定進入變數，即

$\min\left\{\dfrac{c_j-z_j}{a_{rj}}\right\}$ for $a_{rj}<0$ 。（註： c_j-z_j 為 $-m$ 者不考慮）

2. 如果是求極小值的題目，計算比例時選最大者，以決定進入變數，即

$\max\left\{\dfrac{c_j-z_j}{a_{rj}}\right\}$ for $a_{rj}<0$ 。（註： c_j-z_j 為 m 者不考慮）

注意：對偶單形法是先選退出變數，然後再決定進入變數；而單形法則相反！

五、整數規劃的問題與求解 》

在高中數學課本第三冊 2-2 節之課本習題：

若 x、y 均為整數，且滿足 $0\le x\le 7, 0\le y\le 4, 0\le x+y\le 9, 4x+7y\ge 30$ ，求 $5x+8y$ 之最小整數解為何？

解一：利用**圖解法**求解

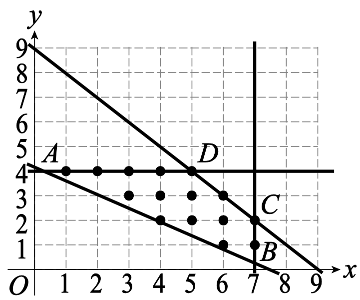
目標函數： $\min f(x,y)=5x+8y$ ，

結構限制式： S.T $\begin{cases} x\le 7 \\ y\le 4 \\ x+y\le 9 \\ 4x+7y\ge 30 \end{cases}$ ，x、y 為 0~9 的非負整數，

利用直角坐標系之圖解找出可行解區域及端點。

整理限制條件： $x\le 7, y\le 4, x+y\le 9, 4x+7y\ge 30$ ，x、y 皆為 0~9 的非負整數，

作可行解區域 $ABCD$，如右圖。



端點： $A(\frac{1}{2},4), B(7,\frac{2}{7}), C(7,2), D(5,4)$ 代入目標函數

分別為 $\frac{69}{2}$（最小值）, $\frac{261}{7}, 51, 57$ 。

因 $x=\frac{1}{2}, y=4$ ，分數解不合題意。

取 $x=\dfrac{1}{2}$ 的左右整數值（$0<\dfrac{1}{2}<1$）代入，求符合不等式的 x 值：

當 $x=0$ 時，$y\le 4, y\le 9, 7y\ge 30$，交集無解。

當 $x=1$ 時，$y\le 4, y\le 8, 7y\ge 26$，交集 $\dfrac{26}{7}\le y\le 4$，取最小整數 $y=4$。

格子點 $(1,4)$ 代入目標函數為 37，但不是最小整數值。因本題的最佳解為 $x=4, y=2$，目標函數的最小整數值為 36。顯然採用最佳分數的左右整數值，並不一定得到最佳整數解。

解二：利用**切面法**求解

我們先採用單形法求解（請參考龍騰數亦優第 21 刊的文章「利用單形法求線性規劃的問題」）。

第一步：將線性規劃模式轉化為標準式及常式

1. 將所有不等式化為等式，使成為線性形式，所加變數之目標函數係數為 0。

$$
\begin{array}{ll}
\min & z=5x_1+8x_2+0x_3+0x_4+0x_5+0x_6 \\
\text{S.T} & \begin{array}{rcrcrcrcrcrl}
x_1 & & & + & x_3 & & & & & & & =7 \\
 & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & =4 \\
x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & & =9 \\
4x_1 & + & 7x_2 & & & & & & & - & x_6 & =30
\end{array}
\end{array}
$$

非負性 $x_j\ge 0, j=1,2,3,4,5,6$

2. 將標準式轉化為常式：

$$
\begin{array}{ll}
\min & z=5x_1+8x_2+0x_3+0x_4+0x_5+0x_6+mx_7 \\
\text{S.T} & \begin{array}{rcrcrcrcrcrcrl}
x_1 & & & + & x_3 & & & & & & & & & =7 \\
 & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & =4 \\
x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & & & & =9 \\
4x_1 & + & 7x_2 & & & & & & & - & x_6 & + & x_7 & =30
\end{array}
\end{array}
$$

非負性 $x_j\ge 0, j=1,2,3,4,5,6,7$

第二步：按常式建立表格，並採用單形法求解，如下表：

c_B		c_j	5	8	0	0	0	0	m	$\overline{b_i}$
		x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
R_1	0	x_3	1	0	1	0	0	0	0	7
R_2	0	x_4	0	1	0	1	0	0	0	4
R_3	0	x_5	1	1	0	0	1	0	0	9
R_4	m	x_7	4	7	0	0	0	-1	1	30
R_5		z_j	$4m$	$7m$	0	0	0	$-m$	m	$30m$
R_6		c_j-z_j	$5-4m$	$8-7m$	0	0	0	m	0	
R_7	0	x_3	1	0	1	0	0	0	0	7
R_8	8	x_2	0	1	0	1	0	0	0	4
R_9	0	x_5	1	0	0	-1	1	0	0	5
R_{10}	m	x_7	4	0	0	-7	0	-1	1	2
R_{11}		z_j	$4m$	8	0	$8-7m$	0	$-m$	m	$32+2m$
R_{12}		c_j-z_j	$5-4m$	0	0	$7m-8$	0	m	0	

R_{13}	0	x_3	0	0	1	$\frac{7}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{13}{2}$
R_{14}	8	x_2	0	1	0	1	0	0	0	4
R_{15}	0	x_5	0	0	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$
R_{16}	5	x_1	1	0	0	$-\frac{7}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
R_{17}		z_j	5	8	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{69}{2}$
R_{18}		$c_j - z_j$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$m-\frac{5}{4}$	

※第一輪的演算過程

第三步：使用內積法則，先計算 (1) $z_j = c_B \cdot \overline{a_{ij}}$（看第 R_5 列）；(2) $\overline{c_j} = c_j - z_j$（看第 R_6 列）。

第四步：因第 R_6 列有 $\overline{c_j} = c_j - z_j \le 0$，尚未達到最佳解。

1. 進入非基本變數：$\min(5-4m, 8-7m) = 8-7m$（看第 R_6 列係數），選 x_2。
2. 退出基本變數：採用 $\min(\frac{4}{1}, \frac{9}{1}, \frac{30}{7}) = 4$（看第 2 行 c_2 係數），選 x_4。
3. 重新樞運算：本身（基本變數）行係數為 1，其他行係數為 0。

   (1) x_2 列係數（看第 R_8 列係數）：因行係數為 1，故 $R_2 = R_8$。

   (2) x_3 列係數（看第 R_7 列係數）：因行係數為 0，故 $R_1 = R_7$。

   (3) x_5 列係數（看第 R_9 列係數）：$R_8 \times (-1) + R_3 = R_9$。

   (4) x_7 列係數（看第 R_{10} 列係數）：$R_8 \times (-7) + R_4 = R_{10}$。

   (5)重新回到第三步驟。

※第二輪的演算過程

第三步：使用內積法則，先計算 (1) $z_j = c_B \cdot \overline{a_{ij}}$（看第 R_{11} 列）；(2) $\overline{c_j} = c_j - z_j$（看第 R_{12} 列）。

第四步：因第 R_{12} 列有 $\overline{c_j} = c_j - z_j \le 0$，尚未達到最佳解。

1. 進入非基本變數：$\min(5-4m) = 5-4m$（看第 R_{12} 列係數），選 x_1。
2. 退出基本變數：採用 $\min(\frac{7}{1}, \frac{5}{1}, \frac{2}{4}) = \frac{2}{4}$（看第 1 行 c_1 係數），選 x_7。
3. 重新樞運算：本身（基本變數）行係數為 1，其他行係數為 0。

   (1) x_1 列係數（看第 R_{16} 列係數）：$R_{10} \div 4 = R_{16}$。

   (2) x_3 列係數（看第 R_{13} 列係數）：$R_{16} \times (-1) + R_7 = R_{13}$。

   (3) x_2 列係數（看第 R_{14} 列係數）：因行係數為 0，故 $R_8 = R_{14}$。

   (4) x_5 列係數（看第 R_{15} 列係數）：$R_{16} \times (-1) + R_9 = R_{15}$。

   (5)重新回到第三步驟。

※第三輪的演算過程

第三步：使用內積法則，先計算 (1) $z_j = c_B \cdot \overline{a_{ij}}$（看第 R_{17} 列）；(2) $\overline{c_j} = c_j - z_j$（看第 R_{18} 列）。

第四步：因第 R_{18} 列所有 $\overline{c_j} = c_j - z_j \geq 0$，其解為 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 4$。

因為 x_1 不是整數解，故需加上 Gomery 條件。先在右手邊的分數解中找 f 最大者：$\frac{13}{2} = 6 + \frac{1}{2}$，$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，找到 $f = \frac{1}{2}$。取第二列（看第 R_{15} 列）非基本變數，則新增條件為

$\frac{3}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{4}x_7 \geq \frac{1}{2}$，再化為常式：$-\frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 + \frac{1}{4}x_7 + x_8 = -\frac{1}{2}$。

將此條件加入前述表格的最後一列（第 R_5 列）成為：

c_B		c_j	5	8	0	0	0	0	m	0	$\overline{b_i}$
		x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
R_1	0	x_3	0	0	1	$\frac{7}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{13}{2}$
R_2	8	x_2	0	1	0	1	0	0	0	0	4
R_3	0	x_5	0	0	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{2}$
R_4	5	x_1	1	0	0	$-\frac{7}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
R_5	0	x_8	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$
R_6		z_j	5	8	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{69}{2}$
R_7		$c_j - z_j$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$m - \frac{5}{4}$	0	
R_8	0	x_3	0	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	3
R_9	8	x_2	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	2
R_{10}	0	x_5	0	0	0	0	1	0	0	1	3
R_{11}	5	x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$	4
R_{12}	0	x_4	0	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	2
R_{13}		z_j	5	8	0	0	0	-1	1	-1	36
R_{14}		$c_j - z_j$	0	0	0	0	0	1	$m-1$	1	

※第一輪的演算過程

第三步：使用內積法則，先計算 (1) $z_j = c_B \cdot \overline{a_{ij}}$ （看第 R_6 列）；(2) $\overline{c_j} = c_j - z_j$ （看第 R_7 列）。

第四步：因為有 $\overline{b_i} < 0$ ，改用對偶單形法求解，選第 R_5 列。

1. 退出基本變數：選 a_{rj} 係數為負數者，採用 $\min(\frac{-1}{2} \div \frac{-3}{4}, \frac{-1}{2} \div \frac{-1}{4}) = \frac{2}{3}$（看第 R_5 列係數），選 x_8 。
2. 進入非基本變數： $\max(\frac{3}{4} \div (-\frac{3}{4}), \frac{5}{4} \div (-\frac{1}{4})) = -1$（看第 $R_7 \div R_5$ 係數），選 x_4 。

   （註： $c_j - z_j$ 為 m 者不考慮）
3. 重新樞運算：本身（基本變數）行係數為 1，其他行係數為 0。

   (1) x_4 列係數（看第 R_{12} 列係數）： $R_5 \times (-\frac{4}{3}) = R_{12}$ 。

   (2) x_3 列係數（看第 R_8 列係數）： $R_{12} \times (-\frac{7}{4}) + R_1 = R_8$ 。

   (3) x_2 列係數（看第 R_9 列係數）： $R_{12} \times (-1) + R_2 = R_9$ 。

   (4) x_5 列係數（看第 R_{10} 列係數）： $R_{12} \times (-\frac{3}{4}) + R_3 = R_{10}$ 。

   (5) x_1 列係數（看第 R_{11} 列係數）： $R_{12} \times (\frac{7}{4}) + R_4 = R_{11}$ 。

   (6)重新回到第三步驟。

※第二輪的演算過程

第三步：使用內積法則，先計算 (1) $z_j = c_B \cdot \overline{a_{ij}}$ （看第 R_{13} 列）；(2) $\overline{c_j} = c_j - z_j$ （看第 R_{14} 列）。

第四步：因第 R_{14} 列所有 $\overline{c_j} = c_j - z_j \geq 0$ ，達到最佳解的條件。

最佳解為 $x_1 = 4, x_2 = 2$ ，目標函數的最小整數值為 36。

六、結論 》

由上述整數規劃的例題中可發現，它與線性規劃最大不同在於可行解區間。線性規劃之可行解區間為整個區間，而整數規劃之可行解區間只是一些可行解的集合（A Set of Feasible Points）。就可行解來看，整數規劃的可行解是圖形中的格子點（x 與 y 均為整數的點）。因此在兩個變數條件下，圖解法採用最佳分數 x 的左右整數值代入，再求符合不等式的 y 值為整數解，由本例題中顯示不可行。由於這種格子點的取法看似簡單容易，但是當變數數目增加後，則需要嘗試的格子點將急遽上升，其繁可知。因此，採用切面法並配合電腦程式 SAS/OR 求解功能來計算，則計算問題就輕鬆解決了。

參考資料：

1. 高孔廉、張緯良（82），作業研究，五南圖書出版公司。
2. 陳文賢（80），管理科學—作業研究與數量方法，三民書局。
3. 鍾國華（102），利用單形法求線性規劃的問題，龍騰數亦優，第 21 刊，P.16~24。

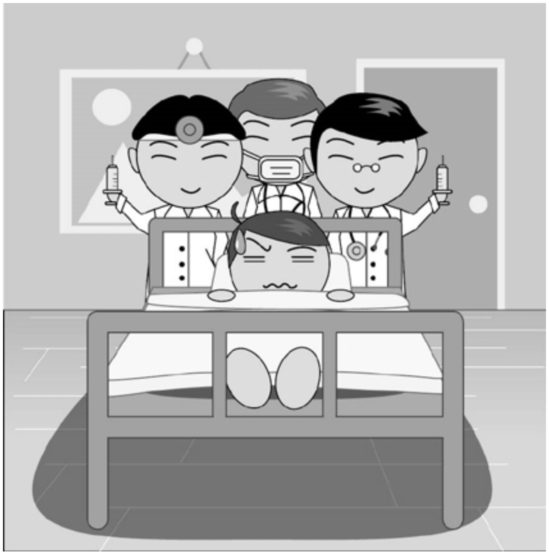
專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 93

☆☆☆

藍委員半夜患了急性盲腸炎，需馬上動手術，但是他同時感染了一種具有高度傳染力的皮膚病。為了慎重起見，三位住院醫師依序輪流進去幫他動手術。每位動手術的醫師雙手必須戴手套，而且藍委員的皮膚病一定會汙染使用過手套的外部。



除了藍委員外，三位住院醫師可能有一位也已經得了這種皮膚病，但我們並不清楚是哪一位醫師得這種皮膚病。正當手術要進行時，護理師才發現只有兩副消過毒的手套可用，而且手術馬上要進行，已經沒時間消毒或再準備手套了。為了不讓醫師間互相感染及被藍委員傳染皮膚病，該如何使用手套呢？護理師說他知道。你知道嗎？

〔玩鎖・玩索〕

百密必有一疏是這道遊戲的寫照，很多學生想了一些情況之後就認定此遊戲無解。事實上，學生經常是漏掉或疏忽可能發生的不尋常情況。當你不得其解時，應該將所有可能的戴法思索一遍，答案一定可以找著。這道題目是在臺北市某國小教書的洪淑琳網友問我的，他說這道問題是臺北美國學校七年級的數學功課。本人將題目的情境稍作修改，取闌尾炎的諧音藍委員。

這道遊戲可以延伸一下：當醫師人數是四人時，想要完全完成手術，所需的最少手套數量是多少呢？依此可以推廣到 n 個醫師的一般情況。有興趣做專題研究或數學科展的同學，不妨想想看！

遊戲 94

☆☆☆

清風在 Google 上輸入「Euler Polynomial」查詢，果真查到一個次數為五次的尤拉多項 式

$$f(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{2}\ .$$

網頁內容說道「此多項式有兩個二重根，而且它們都是實數根」。試求出此多項式的所有根。

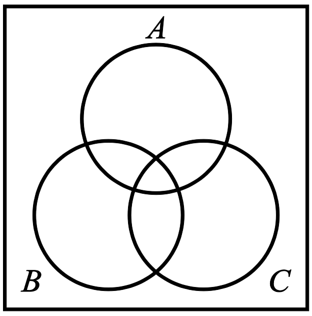
〔玩鎖・玩索〕

了解「重根」與「 $f'(x)$ 」的關係，是這道問題的解決關鍵。

遊戲 95

☆☆☆☆

設 A,B 與 C 是完全獨立的三個事件，而且發生 A,B 與 C 事件的機率分別為 p,q 與 r。在下圖中，標出三個事件 A,B 與 C 中至少發生兩個事件以上的區域，並計算其對應的機率（以 p,q,r 表示）。



有一道不等式問題的敘述是這樣的：已知 $0<p,q,r<1$，求證

$$pq+qr+rp-2pqr<1\ .$$

請利用機率的模型證明上述不等式。

〔玩鎖・玩索〕

這是利用機率與文氏圖解不等式問題的好例子。

遊戲 96

☆☆

設 a,b,c 是閉區間 $[0,1]$ 上的三個實數，且函數 $f(x)$ 為

$$f(x)=\frac{|x-a|+|x-b|+|x-c|}{3}\ .$$

(1) 求 $f(0)+f(1)$ 的值。

(2) 證明：可以在閉區間 $[0,1]$ 上找到實數 x_0 使得

$$f(x_0)=\frac{1}{2}\ .$$

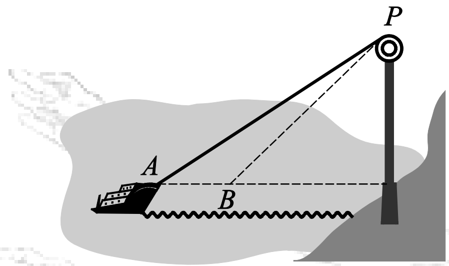
〔玩鎖・玩索〕

中間值定理是一個幾何上很直觀的定理，但中學生卻很少使用它。

動手玩數學~破解秘笈 第23期

遊戲 89

如下圖所示，



滑輪捲動的繩子長度為

$$\left|\overline{PA}-\overline{PB}\right|,$$

而輪船前進的距離為

$$\overline{AB}\ .$$

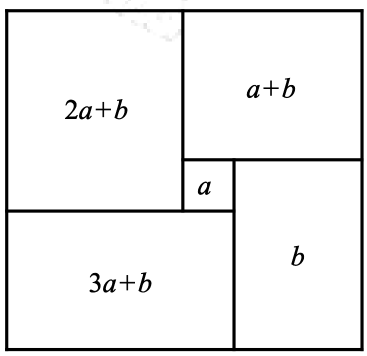
由△PAB 的三角形不等式知道

$$\left|\overline{PA}-\overline{PB}\right|<\overline{AB},$$

即滑輪捲動的繩子長度 ＜ 輪船前進的距離。

遊戲 90

假設有五個小正方形可以圍成大矩形，並令中央及右下角的正方形邊長為 a 與 b（ $a,b>0$ ）。依逆時鐘方向將其餘三個小正方形的邊長以 a,b 來表示，即右上正方形的邊長為 $a+b$ ，左上正方形的邊長為 $a+(a+b)=2a+b$ ，左下正方形的邊長為 $a+(2a+b)=3a+b$ 。



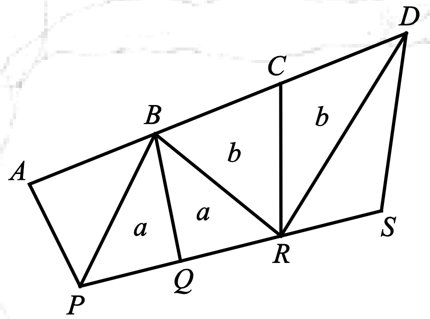
因為圍成大矩形，所以左側的高等於右側的高，即

$$(3a+b)+(2a+b)=b+(a+b)\Rightarrow a=0,$$

矛盾。也就是說，不可能利用五個正方形，在要求的相關位置上，圍出一個大矩形。

遊戲 91

作如下的輔助線，利用同底等高可以得到圖中面積分別為 a,a,b,b 的四個三角形。



同樣利用同底等高可以得到

$$\Delta APB=\Delta BPC=\frac{\Delta BPD}{2},$$

$$\Delta SDR=\Delta RDQ=\frac{\Delta RDP}{2}\ .$$

將兩式相加，得

$$\Delta APB+\Delta SDR=\frac{\Delta BPD}{2}+\frac{\Delta RDP}{2}=\frac{\square BPRD}{2}=a+b$$

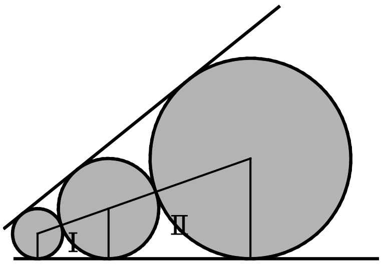
即

$$\square APQB+\square CRSD=2\square BQRC\ .$$

證得四邊形 $APQB,BQRC,CRSD$ 的面積構成等差數列。這解法是某位得一等獎的參賽學生之作法，可以算是妙解。

〔玩鎖・玩索〕解析

如下圖所示，分別從圓心連線到圓的切點，會形成兩個梯形 I 與 II。



設小中大圓之半徑分別為 a,b 與 c。因為梯形 II 是梯形 I 的放大（想想看），所以上底與下底的比例要一樣，即

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\ .$$

得到 $b^2=ac$，故三圓的半徑構成等比數列。

遊戲 92

(1) 根據上述規則，得 $a_6=83, a_7=67$ 與 $a_8=71$。

(2) 根據上述規則，得 $a_{12}=93, a_{13}=71$ 與 $a_{14}=71$。

(3) 當 $n\geq 15$ 時，$a_n=71$，恆為定值。