



象棋棋盤上的數學遊戲…老馬識途

半張棋盤上的 45 顆棋子騰空躍起，一匹馬以敏捷的馬步迅速地將它們串連成了一條直線，避免所有棋子散落一地。

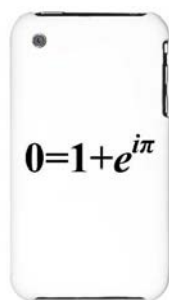
許志農／臺灣師大數學系

在 1783 年，晚餐後，尤拉一邊喝著茶一邊和小孫女玩耍，突然之間，煙斗從他手中掉了下來。他說了一聲：「我的煙斗」，並彎腰去撿，結果再也沒有站起來，他抱著頭說了一句：「我死了」，尤拉停止了生命和計算。尤拉是數學史上最多產的數學家，現在常用的數學符號很多都是尤拉所發明的，例如：函數符號 $f(x)$ ，圓周率 π ，自然對數的底 e ， $\log x$ ， $\sin x$ ， $\cos x$ 以及虛數單位 i 等。

尤拉恆等式

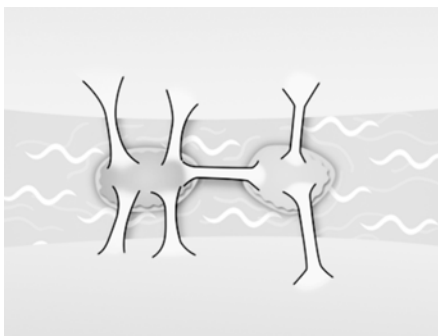
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

曾經被兩本數學雜誌評選為史上最漂亮數學公式的第一名。尤拉本人也非常喜歡這恆等式，原因是式子中的 0 與 1 分別是加法與乘法的單位元素，式子中還有加法、乘法與次方三種運算，並且涵蓋虛數 i 及圓周率 π 兩個重要的數學符號。下圖則是尤拉注視著現代蘋果電腦公司在 i-phone 手機背殼上所刻的尤拉恆等式。



⊙尤拉

提到尤拉就讓人聯想到他在哥尼斯堡七橋問題上的畫龍點睛之作：每座城市被濃縮成為一個點，而橋樑被幻想成為連接兩點間的線段。這出神入化的轉換，讓網絡圖解決了七橋問題，在當時，也只有鬼魅數學家尤拉才想得出來。哥尼斯堡七橋問題是基於一個現實生活中的事例：當時東普魯士哥尼斯堡（今日俄羅斯加里寧格勒）市區跨普列戈利亞河兩岸，河中心有兩個小島，小島與河的兩岸有七座橋連接。哥尼斯堡市長要求尤拉找出一條散步路線，讓人能走經哥尼斯堡的七座橋，而且每座橋只能經過一次。



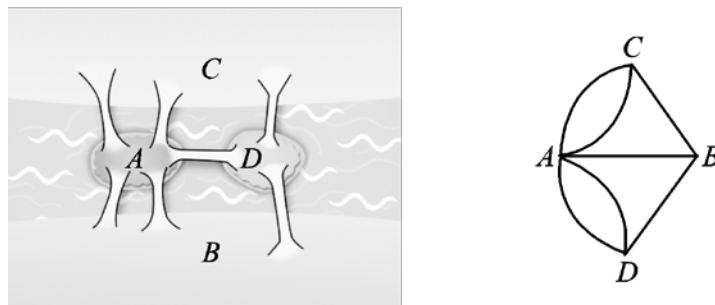
哥尼斯堡七橋問題是現代圖論中的有名問題，這個問題在所有橋都只能走一遍的前提下，如何才能把這個地方所有的橋都走遍？於 1736 年，尤拉在聖彼得堡科學院發表了圖論史上第一篇重要文獻，圓滿地解決了七橋問題，並證明市長要求的散步路線並不存在，也順帶解決了所謂的「一筆畫問題」。

尤拉把實際的問題簡化為平面上點與線的網絡圖，每一座橋視為一條線，橋所連接的地區視為點。這樣若從某點出發後最後再回到這點，則這一點所連出去的線數必須是偶數條。為了方便解釋，把連出去的線數為奇數的點稱為奇點，而連出去的線數為偶數的點叫偶點，而所謂的網絡圖能一筆畫就是可以從某起點出發，在每條線剛好畫過一次的條件下，最後畫到另一個終點，要注意的是：起點是可以等於終點。

更詳細的討論是：如果一個網絡圖能一筆畫完成，那麼一定有一個起點開始畫，也有一個終點。有一條邊進這點，那麼就要有一條邊出去，有進無出的點肯定是終點，而有出無進的點就是起點。因此在「過路點」進出的邊總數應該是偶數，即「過路點」是偶點。綜合起來，能一筆畫完成的網絡圖必須具備以下兩個條件中的一個：

- ① 如果起點和終點是不一樣，那麼起點與終點必須是奇點。
- ② 如果起點和終點是一點，那麼它也是屬於「有進有出」的類型，因此必須是偶點，這個網絡圖上的每個點都必須是偶點。

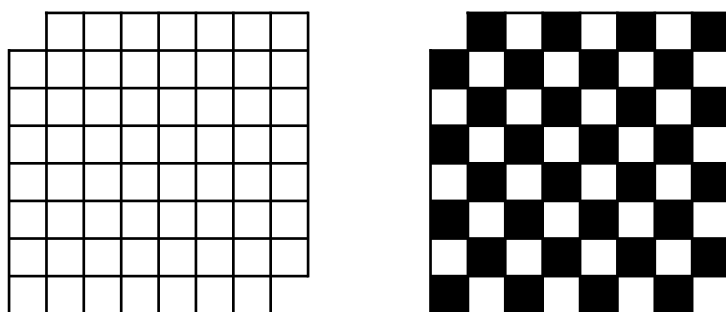
尤拉把哥尼斯堡附近的地圖轉化成可以用一筆畫思考的網絡圖，其中 A, B, C, D 四點代表四塊區域濃縮所產生的點，而點與點的連線就是橫跨區域之間的橋樑。



因為四個點都是奇點，所以無法將這網絡圖一筆畫。把這線條圖上的推論還原回實際的問題，就是告訴我們：遊覽哥尼斯堡的七座橋，而且每座橋只能經過一次的散步路線是不存在的。

哥尼斯堡七橋問題是一道「無解」的問題，而這個無解並不是幾何學裡的邊長與角度兩個量度上的無解，而是將城市縮成一個點，橋樑當成連接點與點之間的線段，透過有出就有進的一筆畫原理說明「哥尼斯堡市長所要求的散步路線是不存在的」。尤拉的一筆畫作法使幾何學擺脫了測量距離與角度的負擔，而開啟了現代拓樸學的一扇窗。有了七橋問題的經驗之後，碰到幾何問題不一定要從長度與角度的幾何量著手，也可以考量其他的方法。

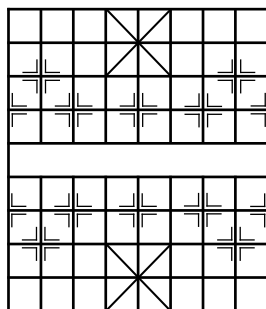
底下就是一道典型的幾何謎題：切下棋盤斜對角線上的兩個邊角，如下左圖所示，然後你是否可以用 31 張長方形骨牌去完全覆蓋這個棋盤？每一張骨牌的大小必須剛好覆蓋棋盤上相鄰的兩個正方形格。



這道謎題對經驗不足的初學者來說，簡直是一道難題，但對看過解答的老鳥來說，卻又是送分題。我們只需將棋盤塗成黑白相間的西洋棋盤樣式，如上右圖所示，接著發現：每塊骨牌無論橫著擺或者縱著放，都剛好占據一格黑色與一格白色的正方格。而這棋盤一共有 62 格正方格，需要 31 塊骨牌才能蓋滿，但這 31 塊骨牌應該蓋住「31 格黑色正方格與 31 格白色正方格」，這剛好與棋盤上的「32 格黑色正方格與 30 格白色正方格」相抵觸。也就是說，這也是一道無解的問題。

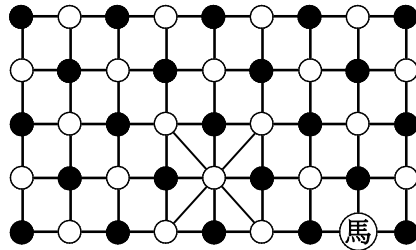
「數學知識是被發現還是被發明或者被創造的，或者兩者皆有」是一道有趣的哲學問題，同樣的「數學遊戲是被發現還是被發明或者被創造的，或者兩者皆有」也是各說各話的問題。像網絡圖的一筆畫原理是因七橋問題而誕生，還是七橋問題只是一個動機，讓早就存在的數學知識「一筆畫原理」被數學家發現呢？接下來是遊戲時間，讓我們介紹一道象棋的啟蒙遊戲…老馬識途。

中國象棋盤由九道直線和十道橫線交叉組成，棋盤上共有 90 個交叉點，象棋子就擺放和活動在這些交叉點上，棋盤分成兩個半張，每半張都是由九道直線和五道橫線交叉組成，共有 45 個交叉點：



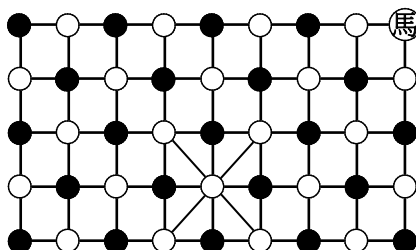
一隻馬能否跳遍半張空象棋棋盤上的每一個交叉點？答案是肯定的，稍具象棋知識的人，都能準確回答這個問題。但是若進一步要求：是否能找到一條路徑，讓馬跳遍半張空棋盤上所有交叉點的過程中，任意一個交叉點只允許被馬踩過一次？後面這個問題，恐怕要難倒許多人了。這個古老難題，在西方稱之為「騎士旅遊」，早在十六世紀時，瑞士數學家貝爾特蘭德即提出這個問題，著名的大數學家尤拉在 1759 年開始研究它，並獲得了一般解法。

讓我們將思緒跳回到半張象棋棋盤上，如下圖，將 45 個交叉點塗上黑、白的顏色，計算一下，有 23 個交叉點被塗上黑色，其餘的 22 個交叉點被塗上白色（包括馬所在的位置也是白色）：



馬從白色交叉點出發，是否可以找到一條路徑，讓每一個交叉點剛好被馬踩過一次？用馬走的日步模擬一下，不難發現：前後兩步分別會落在不同顏色的交叉點上。既然馬從白色交叉點出發，這代表馬的奇數步落在白色交叉點，而偶數步停在黑色交叉點上。又半張棋盤一共有 45 個交叉點，若馬找到每一個交叉點剛好被踩過一次的旅行方式，則奇數步有 23 步，偶數步有 22 步，也就是說，馬會踏過 23 個白色交叉點及 22 個黑色交叉點。這顯然與半張棋盤上的交叉點顏色分布不合。那就是說，馬從白色交叉點出發，是沒辦法完成旅行的。

最後來一道象棋專家的餘興節目，我們把馬起始位置改變一下，讓馬從黑色交叉點開始跳躍，結果又如何呢？各位可以從下圖中動手嘗試看看，能否讓馬剛好踩過每個交叉點一次的前提下，讓馬以日步完成半張象棋棋盤的旅行：



這是一道帶有東方色彩的餘興節目，「馬走日步」更是道地的中國口味。在中國，馬是一種獨特的動物，牠可文可武，可以是人文、藝術與棋藝的主題，也可以是主導整齣戰爭歷史的利器；可以是貴族用來標示身分地位的象徵，也可以是攸關庶民生活的重要寄託。我們很難找到一種功能如此多元、指向如此豐富、可平實又可高貴、與人長期相伴的動物。

在餘興節目中，稱這遊戲為老馬識途，是有數學典故的，而這典故跟唐朝及中國數學家陳省身有關聯。唐太宗昭陵上，有六匹駿馬的浮雕石刻聞名於世，俗稱昭陵六駿（白蹄烏、青驄、颯露紫、拳毛騧、特勤驃、什伐赤）。這六匹戰馬是李世民在唐開國戰爭中南征北討的坐騎，並命唐初大畫家閻本立繪草圖，監石雕而成，因而有

「秦王鐵騎取天下，六駿功高畫亦優」

這樣的詩句流傳於世。這六匹馬中的颯露紫與拳毛騧於 1914 年被盜，運往美國，現藏於美國費城賓夕法尼亞大學博物館，它們的複製品與其餘四匹駿馬的真品陳列於西安碑林博物館。數學家陳省身有感於古物流落他鄉的遺憾，特在偉大數論學家韋依所著的《數論》這本書的扉頁上，用毛筆書寫著「老馬識途」四個中文字，並附上拳毛騧的圖片。渴望它們早日回歸故里。

唐太宗懷念的這六駿，有的在箭雨中穿行，帶傷而馳；有的跨河飛奔，越野而去；有的緩步慢行，若有所思。閻本立所草繪的六匹駿馬中，三匹作騰蹄飛奔之狀，三匹為站立徐行的姿勢；有些馬則身中數箭，甚至有一幅是描述邱行恭武將替太宗的一匹愛馬拔箭的情景：



最後讓我們回到尤拉，如開頭所言，虛數單位 i 是尤拉發明的，想必尤拉在方程式上也有很大的貢獻，這裡提出一則尤拉在解方程式上的天才之旅。在「代數基本定理」尚未被證明正確之前，萊布尼茲就質疑過「每個實係數多項式都可以分解成一次或者兩次實係數多項式的乘積」的正確性。數學家白努力更舉一個精確的例子說：「四次多項式

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$$

就不可能分解成兩個實係數多項式的乘積」。

然而，代數大師尤拉在 1742 年時，將白努力所舉的四次多項式 $f(x)$ 分解為二次多項式

$$x^2 - \left(2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right)x + \left(1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{7}\right)$$

與另一個二次多項式

$$x^2 - \left(2 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right)x + \left(1 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{7}\right)$$

的乘積。如果再套一下一元二次方程式根的公式解，那麼尤拉就把這個四次多項式方程式的四個根都精確的表達出來了。真不知道這神奇的因式分解是如何想出來的！

像這種類似的例子還有許多，例如將乘式

$$\left(x^2 + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}x + \sqrt{5}\right)\left(x^2 - \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}x + \sqrt{5}\right)$$

乘開，也是一個以整數為係數的四次多項式。

尤拉是第一位將 -1 的平方根 $\sqrt{-1}$ 定義為 i 的數學家，究竟在那個時代，人們如何理解 i 這個「數」呢？我們以尤拉的一段話來作結束：「所有可能的數不是大於 0 就是小於 0 或等於 0，所以負數的平方根就不能是個數。既然是不可能的數，…，我們只能稱之為虛數，因為只有在虛幻中才會有這樣的數。」



圍貓遊戲…心理學家的遊戲

運籌於帷幄之中，以空間換取時間，決勝於千里之外。

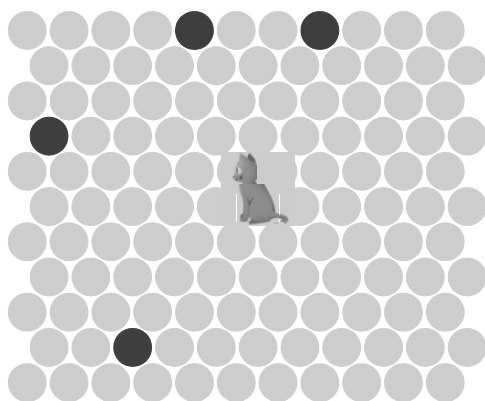
許志農／臺灣師大數學系

玩電腦上的遊戲到底利多還是弊多？我教過一位女大學生，高中時因愛玩電玩遊戲「楓之谷」，高一、高二多是資優班倒數，高三才發憤圖強，順利考上公費生；讀博士班時，我的室友每天都玩電腦上的遊戲，沉溺到連指導教授都經常來關切；最近，樓下的鄰居說：「他兒子最近被電玩遊戲迷住了，連補習都不想去上。」諸如此類的情形，在中學或大學應該是很普遍的現象。我孩子就讀的小學，有一間超過百坪大的教室，裡面擺滿兩三百種益智小遊戲，坊間看得到的都在裡面，而且每位小朋友每學期都要上六次「數學探索」的課程，其實就是在探索那些益智遊戲。我當了一學年的數探志工，覺得這課程還不錯。究竟沉溺於電玩遊戲跟玩益智小遊戲要如何區別呢？我們可以慎選出具有啟發或啟蒙意義，又不會讓小孩沉溺於其中的遊戲嗎？

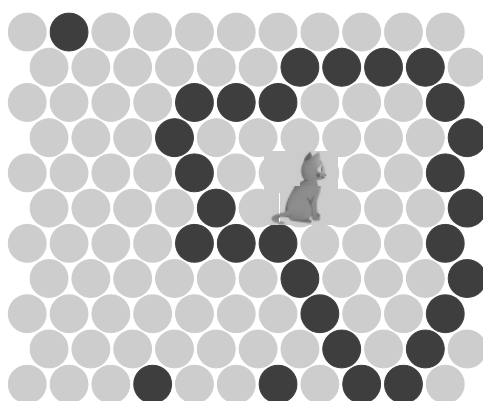
最近，心理學家發現，休閒放鬆類的簡單小遊戲才能提高快樂感，達到減壓效果。據美國媒體報導，美國俄亥俄州立大學傳播和心理學教授布拉德·布希曼等人招募了一些志願者玩不同種類的遊戲，研究人員清楚地發現，那些玩休閒小遊戲的人自我感覺更舒服、更快樂，能體驗到較多的正面情緒；而玩暴力遊戲的人則攻擊性和侵略性增強。此外，玩了一會兒休閒小遊戲，比如和小動物互動之後，人們會變得更親切，更願意主動幫助他人。希望本章所要介紹的遊戲，也是心理學家們發明的「圍貓遊戲」可以達到這個效果，甚至超過這個功能，達到啟蒙的意義。

圍貓遊戲是心理學家所設計出來的一道數學遊戲，遊戲背景是平面上放置許多排列整齊的圓圈，一隻貓位於正中央的圓圈上，而有少許的圓圈是黑色。這是一場圍貓者與貓的鬥智遊戲，圍貓者每次可以點選一個圓圈讓它變成黑色，而貓每次必須移動到鄰近還尚未變成黑色的圓圈上。當貓被黑色圓圈圍住時，貓就被捉擒了，但若貓跑出所有的圓圈外，則圍貓失敗。

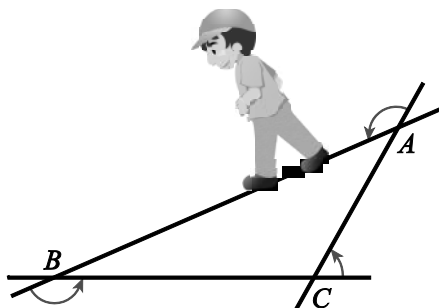
這遊戲是心理學家發明的，心理學家把貓視為需要接受輔導的對象（如叛逆的學生），而圍貓的人是輔導人員（如學校的導師），而黑色圓圈是貓的朋友，輔導人員或學校導師必須透過這些朋友的幫忙，將貓咪圍起來才算輔導成功。



日本 Game Design 團體將圍貓遊戲數位化，寫成 Flash 的版本，讓圍貓遊戲成為線上遊戲的一種，各位可以在網路上用「圍貓遊戲」四個字搜尋，就能在線上玩圍貓遊戲了。這遊戲除了好玩之外，還可以測試玩者的決策能力。在布滿圓形的長方形棋盤上，每個圓形都與六個圓形相連，一隻貓立於棋盤中央的圓形內，玩者每次點選一個圓形塗黑來圍堵貓，但貓可以往尚未被塗色的隔壁圓形移動。究竟鹿死誰手，就要看 Game Design 的設計功力與圍貓者的技巧誰強了，下圖是貓被圍住的一種情形：



用堵貓的方法進行圍貓遊戲，經常沒辦法成功，主要是因為貓有六個方向可以逃竄，圍堵方法很難奏效。那麼圍貓遊戲是一種純靠運氣的遊戲嗎？應該也不是，我們可以往數學層面來思考。在進入更深入的討論之前，回想一下國中時「任一三角形 ABC 的內角和剛好等於 180° 」是如何證明的。讓小朋友站在 A 點、朝向 B 點、往 B 點走去，當走到 B 點時、原地旋轉、轉到臉朝 C 點的方向、接著往 C 點走去，又當走到 A 點時、並原地旋轉、轉到臉朝 B 點的方向，停了下來。此時，小朋友回到出發前的 A 點，且臉部朝向的方向相同（都朝向 B 點），這告訴我們「小朋友一共轉了完整的一圈，即 360° 的意思。」另外我們在三角形 A, B 及 C 三個頂點上分別畫出旋轉的角度，會發現他們都是外角。

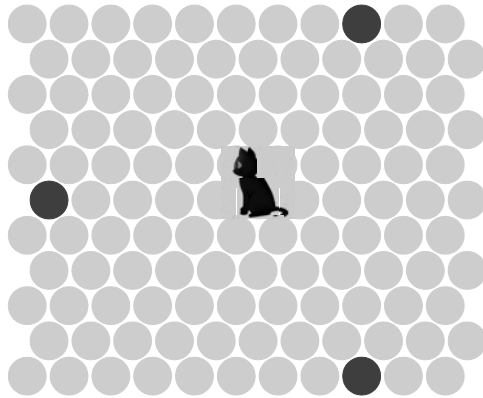


因為 A, B 及 C 每點都是由一對內角及一對外角構成，所以三角形的內角和就是

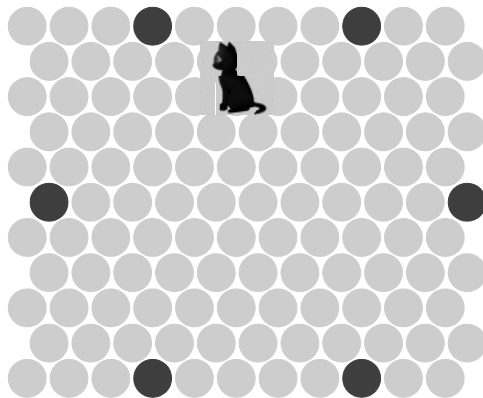
$$\frac{3 \times 360^\circ - 2 \times 360^\circ}{2} = 180^\circ .$$

證明三角形內角和等於 180° 的概念真的對圍貓遊戲有所幫忙或者啟發嗎？且讓我們深入一點來探討圍貓遊戲吧！圍貓棋盤上，貓有六個方向可以逃竄，用堵貓的方式圍貓肯定很難奏效，貓移動速度過快，無法圍住。所以利用空間爭取時間是個不錯的圍法，但究竟要離貓多遠的地方開始圍起呢？這可能要根據貓有多少朋友，這些黑色圓圈如何分布來決定了。又以何種形狀來圍住貓呢？是圓形、三角形、長方形或者還有其他各種不同的形狀呢？因為貓

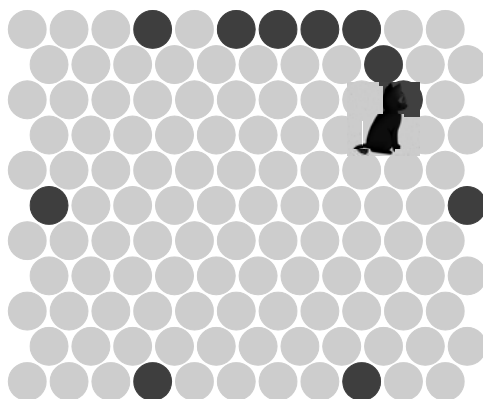
有六個方位可以逃，所以用六邊形來圍貓是個不錯的想法。舉例來說，在下圖中，貓僅有三位朋友，照理說圍住貓很難，但是可以先想辦法幫貓製造比較多的朋友。



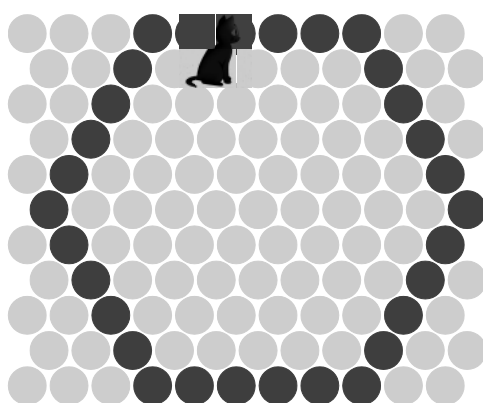
在下圖中，幫貓找到了三位朋友，讓六位朋友位於凸六邊形的六個頂點上，但我們也要付出讓貓移動三步的代價，還好此時貓還沒跑出六邊形外，代表還有機會圍貓成功。



從上圖可以洞悉，貓想要往北邊逃竄，當務之急當然是把北邊守住，然後牽引貓順著六邊形的邊移動，在碰到頂點時，帶著貓轉彎，如下圖所示：



繼續牽引貓順著六邊形的邊移動，在碰到頂點時，帶著貓轉彎，在經歷六個轉彎之後，貓就會發現「牠已被困在六邊形內了」。



總結我們的作法是「利用空間換取時間，先選妥適當大小的凸六邊形，最好這凸六邊形的六個頂點中，有愈多是黑色圓圈愈好（代表儘量用貓的朋友當頂點），然後點選剩下的非黑色圓圈，構築完成圍貓的六邊形。當貓衝撞這六邊形的一邊時，牽引貓順著邊移動，遇到頂點時帶著貓轉彎，在經歷六個轉彎之後，貓就被困在凸六邊形內，大功告成。」手癢的讀者可以在線上試玩看看。圍貓遊戲是一道老少咸宜，不分男女，都很喜歡玩的遊戲，也是心理學家闡述「何謂輔導」的遊戲。

把圍貓遊戲視為一道數學問題，我們從混沌的實際操作過程裡得到圍貓的精髓，這整個過程就是數學孕育與思考的過程。數學家亨利·龐加萊在《數學的創造》中，將自己對數學的思考分為三個階段—準備、孕育與驗證。首先，所謂的準備階段就是對問題下很大功夫，又深陷混亂的階段；在這個階段，人們都會採取觀察、實作、分析、學習與內化等有意識的策略。其次，孕育階段就是停止有意識的思考，讓潛意識發酵，當腦袋裡的小燈泡忽然被點亮，那個「恍然大悟」的時刻就會到來。最後，驗證階段也是收割階段，這一階段只是寫下所有的事情、檢查細節、進行組織並發表。龐加萊特別強調孕育階段的潛意識角色，這是最難懂也是至為關鍵的階段。

談到潛意識就讓我們聯想到作夢，而談到作夢又讓我們想到佛洛伊德在 1900 年出版的《夢的解析》這本書。在佛洛伊德出版《夢的解析》之前，人類常把所作的夢當成神諭或預告未來即將發生的事件看待。上個世紀初期，當印度數學家拉馬奴姜在英國留學時，他的老師哈代就常常好奇的問說：「你每天早上一起床，就寫下這麼多的恆等式，到底是如何發生的？」拉馬奴姜總是說「那些是昨晚神明託夢給我的。」例如：

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{32}{5}} - \sqrt[5]{\frac{27}{5}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{25}} + \sqrt[5]{\frac{3}{25}} - \sqrt[5]{\frac{9}{25}} ;$$

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\frac{3(\sqrt[3]{9}-2)}{2}} ;$$

$$\sqrt[3]{\sec 40^\circ} + \sqrt[3]{\sec 80^\circ} - \sqrt[3]{\sec 20^\circ} = \sqrt[3]{6(\sqrt[3]{9}-1)} .$$

拉馬奴姜顯然是個等式達人，也是將龐加萊孕育階段中的潛意識發揮到淋漓盡致的人。

最後，把圍貓遊戲當成小孩子數學思考的學習單，觀察不同孩子經歷準備、孕育與驗證階段的發展過程是個不錯的主題。當然，小孩迷失方向時，老師應該適時介入給予該有的幫忙，但切忌將答案傳遞給他。

附錄

101 學年度全國高中數學科能力競賽決賽在彰師大數學系舉行，其中的筆試試題(一)第二題就是證明拉馬奴姜的恆等式

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\frac{3(\sqrt[3]{9}-2)}{2}}.$$

在五十位考生中只有一位作對，而且是位高二的男生，以下是羅啟心這位男學生的作法：

則

$$S = \sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} + \sqrt[3]{\cos 160^\circ},$$

$$\begin{aligned} S^3 &= \cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ \\ &\quad + 3\left(\sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 80^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ} + \sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ}\right)S \\ &\quad - 3\sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 80^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ}. \end{aligned}$$

利用三倍角公式可知 $\cos 40^\circ, \cos 80^\circ, \cos 160^\circ$ 為

$$4x^3 - 3x = -\frac{1}{2}$$

的三個根，再由根與係數的關係知道

$$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0;$$

$$\cos 40^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ \cos 160^\circ + \cos 40^\circ \cos 160^\circ = -\frac{3}{4};$$

$$\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\frac{1}{8}.$$

由第一及第二式知

$$S^3 = 3\left(\sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 80^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ} + \sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ}\right)S + \frac{3}{2}.$$

現在令

$$T = \sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 80^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ} + \sqrt[3]{\cos 40^\circ}\sqrt[3]{\cos 160^\circ},$$

則

$$S^3 = 3TS + \frac{3}{2}.$$

又

$$\begin{aligned}
T^3 &= \cos 40^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ \cos 160^\circ + \cos 40^\circ \cos 160^\circ \\
&\quad + 3T \left(\sqrt[3]{\cos^2 40^\circ} \sqrt[3]{\cos 80^\circ} \sqrt[3]{\cos 160^\circ} + \sqrt[3]{\cos 40^\circ} \sqrt[3]{\cos^2 80^\circ} \sqrt[3]{\cos 160^\circ} + \sqrt[3]{\cos 40^\circ} \sqrt[3]{\cos 80^\circ} \sqrt[3]{\cos^2 160^\circ} \right) \\
&\quad - 3 \sqrt[3]{\cos^2 40^\circ} \sqrt[3]{\cos^2 80^\circ} \sqrt[3]{\cos^2 160^\circ} \\
&= -\frac{3}{4} + 3T \left(-\frac{1}{2} \right) S - 3 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \\
&= -\frac{3}{2} TS - \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

綜合兩式，得

$$T^3 + \frac{1}{2} S^3 = -\frac{3}{4}.$$

將此式代入 $S^3 = 3TS + \frac{3}{2}$ ，得

$$\left(S^3 - \frac{3}{2} \right)^3 = (3ST)^3 = 27S^3 \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2} S^3 \right),$$

展開整理，得

$$S^9 + 9S^6 + 27S^3 - \frac{27}{8} = 0,$$

再配方，得

$$(S^3 + 3)^3 = \frac{27}{8} + 27 = 27 \cdot \frac{9}{8},$$

解得

$$S^3 + 3 = \frac{3\sqrt[3]{9}}{2}, \quad \frac{3\sqrt[3]{9}}{2} \omega \text{ 或 } \frac{3\sqrt[3]{9}}{2} \omega^2,$$

即

$$S^3 = \frac{3\sqrt[3]{9}}{2} - 3, \quad \frac{3\sqrt[3]{9}}{2} \omega - 3 \text{ 或 } \frac{3\sqrt[3]{9}}{2} \omega^2 - 3.$$

因為 S 為實數，所以 S^3 也是實數，因此

$$S^3 = \frac{3\sqrt[3]{9}}{2} - 3,$$

解得

$$S = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}}{2} - 3},$$

即

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 2)},$$

得證。

中央極限定理

廖世經／臺中市立東山高中

一、前言》

高中數學課程近幾年不斷的加入統計的課程，目的是想要讓學生感覺數學更貼近我們的生活，內容包含迴歸直線、抽樣統計、信賴區間…等，而信賴區間這個單元，建立在一個重要的理論之上，即為中央極限定理。查閱大學教材內容大多在做定理及輔助定理的推導，大多數人未能完全了解其意義。在這篇文章中，我們將以高中生的觀點，來欣賞中央極限定理。

二、中央極限定理（Central Limit Theorem，簡寫 C. L. T.）是什麼？》

每四年一次的總統大選選前，新聞社都會透過電話隨機抽樣的方式，來估計各組候選人的支持度。若每次電話抽樣訪問新聞社都隨機挑選 100 人，這樣他們便可以獲得一組平均數、標準差。這樣的行為重複多次，則可以得到多組抽樣，並討論其平均數、標準差。如果多組的平均數用柱狀圖來呈現，我們可以發現圖形隨著抽樣的次數增加，會接近常態分配，並且當選舉後，會發現真實的支持率，與所有研究者當初所做的結果平均數相同，且其標準差接近原來的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 倍。即我們討論對象已由原來調查樣本，變為這些研究者為我們討論對象，這便是中央極限定理討論的內容。

現在讓我們重新敘述中央極限定理（有限母體）的內容。

中央極限定理（Central Limit Theorem，簡寫 C. L. T.）

設研究目標為變量 $T: t_1, t_2, \dots, t_N$ ，平均數： μ ，標準差： σ ，則

$$\left(\mu = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}; \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (t_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i^2 - \mu^2} \right).$$

每次抽樣皆取 n 個，並取後放回，其共有 $C_n^N = m$ 種抽樣方法數。若每次抽樣平均分別為 $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_m}$ ，其結果會成常態分配。則

1. $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_m}$ 平均數為： $\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_N}{N} = \mu$ 。

2. $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_m}$ 標準差為： $\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}\sigma$ 。

另外，當 $N \square n$ 時，標準差近似於 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。

接下來我們可以進一步以高中的觀點探討為何抽樣平均的平均數會與當初未知的平均數相同，抽樣平均的標準差為何是 $\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}\sigma$ 。

三、抽樣平均的平均數及標準差》

沿用上述的定理符號，可以得到

$$\begin{aligned}
 \text{mean} &= \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \cdots + \bar{x}_m}{m} \\
 &= \frac{\left(\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n} \right) + \left(\frac{t_1 + t_3 + \cdots + t_{n+1}}{n} \right) + \cdots + \left(\frac{t_{N-n+1} + t_{N-n+2} + \cdots + t_N}{n} \right)}{m} \\
 &= \frac{C_{n-1}^{N-1} (t_1 + t_2 + \cdots + t_N)}{nm} \\
 &\quad \left(C_{n-1}^{N-1} = \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} = \frac{n}{N} \cdot \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{n}{N} C_n^N, \text{ 同理 } C_{n-2}^{N-2} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} C_n^N \right) \\
 &= \frac{\frac{n}{N} C_n^N (t_1 + t_2 + \cdots + t_N)}{nm} \quad (\because C_n^N = m) \\
 &= \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_N}{N} = \mu.
 \end{aligned}$$

從上式證明結果，我們可以發現學者抽樣平均所做的平均數，與當初我們想要研究的目標平均數是相同的，這個觀念有助於我們將來思考信賴區間的概念。

抽樣平均的變異數 $\sqrt{\left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{N-n}{N-1} \right)} \sigma$ 推導則為

$$\text{variance} = \frac{\sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \mu)^2}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^m \bar{x}_i + \sum_{i=1}^m \mu^2}{m} \quad (\text{A})$$

首先我們先考慮(A)中的 $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i$ 。

從平均數的推導，我們得到

$$\frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_i}{m} = \mu, \text{ 則 } \sum_{i=1}^m \bar{x}_i = m\mu \quad (\text{B})$$

再考慮(A)中的 $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2 &= \left(\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n} \right)^2 + \left(\frac{t_1 + t_3 + \cdots + t_{n+1}}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{t_{N-n+1} + t_{N-n+2} + \cdots + t_N}{n} \right)^2 \\
 &= \frac{C_{n-1}^{N-1} (t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2) + 2C_{n-2}^{N-2} (t_1 t_2 + t_1 t_3 + \cdots + t_{N-1} t_N)}{n^2} \\
 &= \frac{\frac{n}{N} C_n^N (t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2) + 2 \frac{n(n-1)}{N(N-1)} C_n^N (t_1 t_2 + t_1 t_3 + \cdots + t_{N-1} t_N)}{n^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{N} m (t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2) + 2 \frac{(n-1)}{N(N-1)} m (t_1 t_2 + t_1 t_3 + \cdots + t_{N-1} t_N)}{n} \quad (\text{C})
 \end{aligned}$$

接著先計算(C)中的 $2(t_1t_2 + t_1t_3 + \cdots + t_{N-1}t_N)$ 。

$$\begin{aligned}(t_1 + t_2 + \cdots + t_N)^2 &= t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2 + 2(t_1t_2 + t_1t_3 + \cdots + t_{N-1}t_N) \\ \Rightarrow (N\mu)^2 &= t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2 + 2(t_1t_2 + t_1t_3 + \cdots + t_{N-1}t_N) \\ \Rightarrow 2(t_1t_2 + t_1t_3 + \cdots + t_{N-1}t_N) &= N^2\mu^2 - (t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2) .\end{aligned}$$

將得到的式子代入(C)，得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2 &= \frac{\frac{1}{N}m(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2) + \frac{(n-1)}{N(N-1)}m(N^2\mu^2 - (t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2))}{n} \\ &= \frac{\frac{m(N-n)}{N(N-1)}(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2) + \frac{m(n-1)N\mu^2}{(N-1)}}{n} \quad (D)\end{aligned}$$

將(B)以及(D)的結果代入(A)，得到

$$\begin{aligned}\text{variance} &= \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^m \bar{x}_i + \sum_{i=1}^m \mu^2}{m} \\ &= \frac{\frac{m(N-n)}{N(N-1)}(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2) + \frac{m(n-1)N\mu^2}{(N-1)}}{m} - 2\mu(m\mu) + m\mu^2 \\ &= \frac{\frac{(N-n)}{N(N-1)}(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2) + \frac{(n-1)N\mu^2}{(N-1)}}{n} - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \left(\frac{1}{n}\right) \frac{(N-n)}{N(N-1)}(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2) + \left(\frac{(n-1)N\mu^2}{n(N-1)} - \mu^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right) \frac{(N-n)}{N(N-1)}(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2) - \frac{(N-n)\mu^2}{n(N-1)} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right) \frac{(N-n)}{(N-1)} \left[\frac{t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_N^2}{N} - \mu^2 \right] \\ &= \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \sigma^2 .\end{aligned}$$

在大學書中，中央極限定理的敘述大多直接使用標準差 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，是因為當 $N \gg n$ 時，則

$$\frac{N-n}{N-1} = 1 - \frac{n-1}{N-1} \rightarrow 1, \text{ 故標準差會近似於 } \frac{\sigma}{\sqrt{n}}。$$

四、結論》

中央極限定理的存在，幫助了我們做抽樣討論時，從原本我們想要研究的目標，轉換到探討研究人員所做的數據上。上面所討論的方式，只透過平均數、變異數的定義，加上組合的想法，可以讓高中生更加了解中央極限定理，藉此了解數學的真善美。這是研究會時分享給其他老師的內容，謝謝我的實習老師：黃怡慈老師的幫忙整理。

數學課程中的兩個邏輯概念

江慶昱／衛道中學退休教師

一、楔子》

古希臘人尤勒士（Euathlus）向普羅塔哥拉斯（Protagoras）學習辯論術，先付一半學費，另一半學費訂定契約，言明等學成後，在第一場辯護勝訴時再付，如果敗訴則學費不必再交。但尤勒士畢業後，根本不擔任辯護的工作，自然也不交另一半的學費，因此普羅塔哥拉斯便告他。普羅塔哥拉斯說：「如果我勝訴，法官當然要判我還我學費；如果我敗訴，那就是尤勒士勝訴，依契約他還是要還我學費。」尤勒士說：「如果我勝訴，當然是要求法官判我不必還學費，如果我敗訴，依契約我也不必還學費。」請問法官該怎麼判？

二、歸謬證法》

亞里斯多德認為：愈重的物體，落下得愈快。1589 年，伽利略如此舉反證：把兩物 A 、 B 綁在一起，成為 $A+B$ 。假設 A 比 B 重，則由高處落下時，因為 B 落下的速度比 A 慢，把 A 拖住，所以 $A+B$ 落下的速度比 A 慢；又 $A+B$ 比 A 重，所以 $A+B$ 落下的速度又比 A 快，矛盾。所以「任何物體，同時從相同的高處落下，皆同時著地。」伽利略如是說。

99 課程綱要把歸謬證法拿掉了，我猜想最少有兩位先生會很鬱卒；一位是歐幾里得先生，他在《幾何原本》中用歸謬證法證明了「質數有無窮多個」，另一位是蔡聰明先生，他用了 28 種方法證明 $\sqrt{2}$ 是無理數。

三、直觀與證明》

最近看到一篇文章，關於 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明：

假設 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ 是有理數，其中 p, q 是正整數且 $(p, q) = 1$ ，則 $2 = \frac{p^2}{q^2}$ ，

直觀上，「如果 $\frac{p}{q}$ 不是整數，則 $\frac{p^2}{q^2}$ 更不可能是整數。」矛盾！

所以假設錯誤，即 $\sqrt{2}$ 是無理數，得證。

（這是因為，如果 p, q 沒有相同的成分， p^2 和 q^2 自然也不會有相同的成分；如果 $\frac{p}{q}$ 都無法化簡成整數， $\frac{p^2}{q^2}$ 更沒有機會了。因此，這個式子是個明顯可笑的矛盾：等號左邊是整數，右邊不是整數。兩者怎麼可能相等？）

我想提一段陳年往事。多年前，一次國中數學週考中，某老師出了一道題目：證明三角形兩邊和大於第三邊。直觀上，這何需證明，因為兩點之間直線最短嘛！於是，我買了歐幾里得的《幾何原本》，根據歐幾里得的體系，證明「三角形兩邊和大於第三邊」確實需要很長的篇幅。我相信這不會是出題老師的本意，我的判斷是出題老師只想要學生說明「兩點之間直線最短」。

那麼，考題應該改成：請說明「三角形兩邊和大於第三邊」。中學階段不必強調數學的嚴密性，這是共識（60年代的新數學過度強調嚴密性是失敗的原因之一）。但是直觀的說明與嚴格的證明應該予以區隔，這純屬我個人的看法。所以我以為上述關於 $\sqrt{2}$ 的證明實偏向於說明。（註：最早項武義先生認為他解決了克卜勒的裝填問題，陳省身先生也為之背書，但還是不被接受。目前公認是 Thomas Hales 解決了：http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_conjecture，數學界的所謂「證明」自有其行規。）

如何在高中引入簡易邏輯是一件困難但是值得深思的事。

四、等價》

高中課程中另一個重要的邏輯概念是「等價」。有一年，大學聯考考這麼一題，證明「海龍公式：邊長 a, b, c 的三角形，面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。」那時候，大學錄取率大約30%不到，補習班之間競爭非常激烈，大家趕著把解答登報。有一間補習班第一天是這樣證明的：

$$\text{因為 } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\text{所以 } \Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \left(2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \right) = \dots = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

第二天，趕快發報更正。因為在邏輯上，第一天拿一個等價的命題當作證明，等於沒有證明。換句話說，患了邏輯上的錯誤了。

五、等價的一些例子》

我們在國中時有這樣的性質 p ：三角形任兩邊和大於第三邊；又在書中的同一個角落看到 q ：三角形任兩邊差小於第三邊。很容易證明「 $p \Leftrightarrow q$ 」，這種情形我們叫 p 與 q 等價，意思是 p 與 q 是同一回事。以下舉一些等價的例子：

1. p ：平行公設：過直線外一點恰有一直線與之平行； q ：三角形內角和為 180° 。
2. G 是 $\triangle ABC$ 的重心，則 p, q, r 三個向量式等價：

$$p: \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} ; q: \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} ; r: \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}。$$

3. $p: \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \right)^2 \leq \left| \overrightarrow{u} \right|^2 \left| \overrightarrow{v} \right|^2$ （柯西不等式）； $q: \left| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \right| \leq \left| \overrightarrow{u} \right| + \left| \overrightarrow{v} \right|$ （三角不等式）。

4. p ：周長固定的平面圖形中以圓形面積最大； q ：面積固定的平面圖形中以圓形周長最小。

5. (1)正弦定理；(2)餘弦定理；(3)投影定理 等價。

6. 實數的完備性有多種等價的敘述。（我有一位同事到師大數學系修碩士班學分就是上了一本這樣的書）

7. p ：算幾不等式； q ：柯西不等式。

六、算幾不等式與柯西不等式的等價》

算幾不等式與柯西不等式在形式上相差很多，兩者會等價甚感意外。我第一次是在臺中一中的網頁內看到證明過程，當時沒有仔細研究，後來回去找就找不到那份資料了。最近上網搜尋，找到建中徐健策老師的一篇專題，算是一償宿願，這是我寫這篇文章的另一個因緣。

七、後記》

1900 年量子力學開始萌芽，到 1965 年朝永振一郎 (S. Tomonaga)、薛文格 (Julian Schwinger) 與費因曼得到諾貝爾物理獎是一段精采的故事。重點是薛文格與費因曼對量子電動力學的看法與算法南轅北轍，薛文格用的是歐洲優雅的數學，費因曼的路徑積分用的是圖像式的數學。把兩者結合為一，或者說，看出兩者的「等價性」的是戴森 (Freeman J. Dyson)，我覺得這比證明兩命題的等價有更深刻的意義。

非歐幾何的發展也有類似的，義大利幾何學家 Eugenio Beltrami (1835~1899) 證明了 Lobachevsky (1793~1856) 與 Ferdinand Minding (1806~1885) 的非歐幾何模型是「等價」的。(註：代數中，複數平面與平面向量同構，以上兩種情況說同構或等價，哪一個說法比較恰當，當就教於各位。)

99 課程綱要把歸謬證法放在附錄，我觀察最近兩年的各校段考試題，大約只有三、四個學校段考中有考歸謬證法。早年，國中考高中每年要考一題證明題、一題尺規作圖，當時我們會努力教證明題，當然包括用「窮舉法」證明：「圓內接四邊形的充要條件為對角互補」。基測不考證明題後，絕大部分的老師不會花時間去證明這個定理。向來就是「考試引導教學」，自古皆然。隋唐時期科舉要考《算經》，所以宋朝有四位偉大的數學家：秦九韶、李治、楊輝、朱世傑。到明清科舉只考八股文，可以印證中國數學沒落的一段史實。證明與數學的關係就如同實驗與物理的關係。基測與學測不考證明題，相信有不少人憂心忡忡，如今又把歸謬證法拿掉（放在附錄與拿掉等價），應該有人輾轉難眠吧！

早上 (2012/8/29) 看到新聞。十二年國教將於後年上路，臺大名譽教授劉廣定批評，103 年到 107 年的高中學生，要繼續接受舊課綱的教育，他堅決反對沒有新課綱的十二年國教。後年就要推十二年國教，課綱最快 106 年才能完成，到 108 年才有新課綱教科書可用，意味之前的高中生都要繼續接受舊課綱教育。芬蘭從 1980 年代開始教改，先找學校試辦，2000 年才全面實施；然而，臺灣十二年國教從宣布到實施只有三年準備期，讓人憂心。

參考資料：

1. 蔡聰明， $\sqrt{2}$ 是無理數的 28 種證明，數學傳播季刊，第 23 卷 (第 1 期)。
2. 王九達，邏輯與數學思維。
3. 南山，柯西不等式與排序不等式，上海教育出版社，P.230。
4. William Dunham (1995)，天才之旅，牛頓出版股份有限公司，P.61。
5. 戴森 (1993)，宇宙波瀾，天下文化。
6. 奧瑟曼 (1997)，宇宙的詩篇，天下文化，P.84。
7. Stefan Kulczycki (1992)，非歐幾里得幾何學，水牛出版社，P.32。
8. 蔡辰理，中國數學史上的黃金時代及其四個偉大的數學家，2013.07.01 取自 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_2_07/page2.html#top
9. 徐健策老師專題，柯西、琴生與冪平均不等式，2013.10.02 取自 <http://math1.ck.tp.edu.tw/徐健策/math.htm>

四元一次聯立方程式與四次多項方程式的巧遇

李維昌／國立宜蘭高中

一、研究目的》

將一道解四元一次聯立方程式的題目，利用四次多項函數且領導係數為 1 的恆等原理來解答。

二、研究過程》

已知

$$\begin{cases} \frac{x}{2^2-1^2} + \frac{y}{2^2-3^2} + \frac{z}{2^2-5^2} + \frac{w}{2^2-7^2} = 1 \\ \frac{x}{4^2-1^2} + \frac{y}{4^2-3^2} + \frac{z}{4^2-5^2} + \frac{w}{4^2-7^2} = 1 \\ \frac{x}{6^2-1^2} + \frac{y}{6^2-3^2} + \frac{z}{6^2-5^2} + \frac{w}{6^2-7^2} = 1 \\ \frac{x}{8^2-1^2} + \frac{y}{8^2-3^2} + \frac{z}{8^2-5^2} + \frac{w}{8^2-7^2} = 1 \end{cases}$$

試求：(1) (x, y, z, w) . (2) $x + y + z + w$.

一、首先將上題解讀為解四元一次聯立方程式：

$$\text{設 } \begin{cases} x = (3^2 \cdot 5 \cdot 7)a \\ y = (3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11)b \\ z = (3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)c \\ w = (3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13)d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 105a - 2079b - 429c - 143d = 1 \cdots \cdots ① \\ 21a + 1485b - 1001c - 195d = 1 \cdots \cdots ② \\ 9a + 385b + 819c - 495d = 1 \cdots \cdots ③ \\ 5a + 189b + 231c + 429d = 1 \cdots \cdots ④ \end{cases}$$

$$\frac{①-21 \times ④}{4} \Rightarrow -1512b - 1320c - 2288d = -5 \cdots \cdots ⑤$$

$$\frac{①-5 \times ②}{4} \Rightarrow -2376b + 1144c + 208d = -1 \cdots \cdots ⑥$$

$$\frac{5 \times ③ - 9 \times ④}{4} \Rightarrow 56b + 504c - 1584d = -1 \cdots \cdots ⑦$$

$$\begin{cases} ⑦-⑥ \Rightarrow 2432b - 640c - 1792d = 0 \Rightarrow 19b - 5c - 14d = 0 \cdots \cdots ⑧ \\ 5 \times ⑦ - ⑤ \Rightarrow 1792b + 3840c - 5632d = 0 \Rightarrow 7b + 15c - 22d = 0 \cdots \cdots ⑨ \end{cases}$$

$$\text{由 } ⑧⑨ \Rightarrow b:c:d = \begin{vmatrix} -5 & -14 \\ 15 & -22 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -14 & 19 \\ -22 & 7 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 19 & -5 \\ 7 & 15 \end{vmatrix} = 320:320:320 = 1:1:1,$$

$$\text{由 } ⑦ \Rightarrow 56b + 504b - 1584b = -1 \Rightarrow -1024b = -1 \Rightarrow b = c = d = \frac{1}{1024},$$

$$\text{代入 } ④ \Rightarrow 5a + 189 \times \left(\frac{1}{1024}\right) + 231 \times \left(\frac{1}{1024}\right) + 429 \times \left(\frac{1}{1024}\right) = 1 \Rightarrow 5a = \frac{175}{1024} \Rightarrow a = \frac{35}{1024},$$

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{1024}, \frac{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{1024}, \frac{3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{1024}, \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}{1024} \right), \text{ 即為(1)的所求。}$$

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= (3^2 \cdot 5 \cdot 7)a + (3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11)b + (3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)c + (3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13)d \\ &= (3^2 \cdot 5 \cdot 7) \times \frac{35}{1024} + (3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) \times \frac{1}{1024} \\ &\quad + (3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13) \times \frac{1}{1024} + (3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13) \times \frac{1}{1024} \\ &= \frac{11025 + 10395 + 9009 + 6435}{1024} = \frac{36864}{1024} = 36, \text{ 即為(2)的所求。} \end{aligned}$$

二、嘗試利用四次多項函數且領導係數為 1 的恆等原理來解答此題：

1. 構造以 t 為變數的四次多項函數且領導係數為 1，命此函數為 $f(t)$ ，

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1^2)(t-3^2)(t-5^2)(t-7^2) - x(t-3^2)(t-5^2)(t-7^2) \\ &\quad - y(t-1^2)(t-5^2)(t-7^2) - z(t-1^2)(t-3^2)(t-7^2) - w(t-1^2)(t-3^2)(t-5^2), \end{aligned}$$

其中 x, y, z, w 四數為常數。

$$2. \frac{x}{2^2-1^2} + \frac{y}{2^2-3^2} + \frac{z}{2^2-5^2} + \frac{w}{2^2-7^2} = 1$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (2^2-1^2)(2^2-3^2)(2^2-5^2)(2^2-7^2) - x(2^2-3^2)(2^2-5^2)(2^2-7^2) \\ &\quad - y(2^2-1^2)(2^2-5^2)(2^2-7^2) - z(2^2-1^2)(2^2-3^2)(2^2-7^2) \\ &\quad - w(2^2-1^2)(2^2-3^2)(2^2-5^2) = 0 \\ &\Rightarrow f(2^2) = 0. \end{aligned}$$

$$3. \frac{x}{4^2-1^2} + \frac{y}{4^2-3^2} + \frac{z}{4^2-5^2} + \frac{w}{4^2-7^2} = 1$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (4^2-1^2)(4^2-3^2)(4^2-5^2)(4^2-7^2) - x(4^2-3^2)(4^2-5^2)(4^2-7^2) \\ &\quad - y(4^2-1^2)(4^2-5^2)(4^2-7^2) - z(4^2-1^2)(4^2-3^2)(4^2-7^2) \\ &\quad - w(4^2-1^2)(4^2-3^2)(4^2-5^2) = 0 \\ &\Rightarrow f(4^2) = 0. \end{aligned}$$

$$4. \frac{x}{6^2-1^2} + \frac{y}{6^2-3^2} + \frac{z}{6^2-5^2} + \frac{w}{6^2-7^2} = 1$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (6^2-1^2)(6^2-3^2)(6^2-5^2)(6^2-7^2) - x(6^2-3^2)(6^2-5^2)(6^2-7^2) \\ &\quad - y(6^2-1^2)(6^2-5^2)(6^2-7^2) - z(6^2-1^2)(6^2-3^2)(6^2-7^2) \\ &\quad - w(6^2-1^2)(6^2-3^2)(6^2-5^2) = 0 \\ &\Rightarrow f(6^2) = 0. \end{aligned}$$

$$5. \frac{x}{8^2-1^2} + \frac{y}{8^2-3^2} + \frac{z}{8^2-5^2} + \frac{w}{8^2-7^2} = 1$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (8^2-1^2)(8^2-3^2)(8^2-5^2)(8^2-7^2) - x(8^2-3^2)(8^2-5^2)(8^2-7^2) \\ &\quad - y(8^2-1^2)(8^2-5^2)(8^2-7^2) - z(8^2-1^2)(8^2-3^2)(8^2-7^2) \\ &\quad - w(8^2-1^2)(8^2-3^2)(8^2-5^2) = 0 \\ &\Rightarrow f(8^2) = 0. \end{aligned}$$

$$6. \text{由 1.2.3.4.5.的討論可得知，} f(t) \text{等價}(t-2^2)(t-4^2)(t-6^2)(t-8^2)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (t-2^2)(t-4^2)(t-6^2)(t-8^2) \\ &= (t-1^2)(t-3^2)(t-5^2)(t-7^2) - x(t-3^2)(t-5^2)(t-7^2) - y(t-1^2)(t-5^2)(t-7^2) \\ &\quad - z(t-1^2)(t-3^2)(t-7^2) - w(t-1^2)(t-3^2)(t-5^2) \cdots \cdots \textcircled{10} \end{aligned}$$

為 t 的四次多項方程式。

第⑩式等號的左式 t^3 的係數 = 第⑩式等號的右式 t^3 的係數

$$\Rightarrow -(2^2+4^2+6^2+8^2) = -(1^2+3^2+5^2+7^2) - (x+y+z+w)$$

$$\Rightarrow x+y+z+w = (2^2+4^2+6^2+8^2) - (1^2+3^2+5^2+7^2) = 120 - 84 = 36,$$

即為(2)的所求。

7. x 的求法：

將 $t=1^2$ 代入⑩

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1^2-2^2)(1^2-4^2)(1^2-6^2)(1^2-8^2) = -x(1^2-3^2)(1^2-5^2)(1^2-7^2) \\ &\Rightarrow x = \frac{(2^2-1^2)(4^2-1^2)(6^2-1^2)(8^2-1^2)}{(3^2-1^2)(5^2-1^2)(7^2-1^2)} = \frac{(1 \cdot 3)(3 \cdot 5)(5 \cdot 7)(7 \cdot 9)}{(2 \cdot 4)(4 \cdot 6)(6 \cdot 8)} = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{1024}. \end{aligned}$$

8. y 的求法：

將 $t=3^2$ 代入⑩

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (3^2-2^2)(3^2-4^2)(3^2-6^2)(3^2-8^2) = -y(3^2-1^2)(3^2-5^2)(3^2-7^2) \\ &\Rightarrow y = \frac{-(3^2-2^2)(4^2-3^2)(6^2-3^2)(8^2-3^2)}{-(3^2-1^2)(5^2-3^2)(7^2-3^2)} = \frac{(1 \cdot 5)(1 \cdot 7)(3 \cdot 9)(5 \cdot 11)}{(2 \cdot 4)(2 \cdot 8)(4 \cdot 10)} = \frac{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{1024}. \end{aligned}$$

9. z 的求法：

將 $t=5^2$ 代入⑩

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (5^2-2^2)(5^2-4^2)(5^2-6^2)(5^2-8^2) = -z(5^2-1^2)(5^2-3^2)(5^2-7^2) \\ &\Rightarrow z = \frac{(5^2-2^2)(5^2-4^2)(6^2-5^2)(8^2-5^2)}{(5^2-1^2)(5^2-3^2)(7^2-5^2)} = \frac{(3 \cdot 7)(1 \cdot 9)(1 \cdot 11)(3 \cdot 13)}{(4 \cdot 6)(2 \cdot 8)(2 \cdot 12)} = \frac{3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{1024}. \end{aligned}$$

10. w 的求法：

將 $t = 7^2$ 代入 ⑩

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (7^2 - 2^2)(7^2 - 4^2)(7^2 - 6^2)(7^2 - 8^2) = -w(7^2 - 1^2)(7^2 - 3^2)(7^2 - 5^2) \\ &\Rightarrow w = \frac{-(7^2 - 2^2)(7^2 - 4^2)(7^2 - 6^2)(8^2 - 7^2)}{-(7^2 - 1^2)(7^2 - 3^2)(7^2 - 5^2)} = \frac{(5 \cdot 9)(3 \cdot 11)(1 \cdot 13)(1 \cdot 15)}{(6 \cdot 8)(4 \cdot 10)(2 \cdot 12)} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}{1024}. \end{aligned}$$

11. 由 7.8.9.10. 的討論可得，

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{1024}, \frac{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{1024}, \frac{3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{1024}, \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}{1024} \right),$$

即為(1)的所求。

三、結論：

1. 解題的巧妙與否存乎一心，「學則需疑，於不疑處有疑，方是進矣」。本題為解四元一次聯立方程式，基本解題策略為克拉瑪公式、加減消去法或代入消去法三種，由於這三種計算相當繁瑣，進而苦思其他對策，經過一番思索，驀然回首，伊人卻在燈火闌珊處，竟然將此題與四次多項方程式連結在一起，有了令人會心一笑的妙解，真是一次驚奇的解題之旅。
2. 孔子曾言「學而不思則罔，思而不學則殆」。我期待每次解題時，皆能直搗黃龍，一眼看穿題目的堂奧之妙，事後「大膽假設，小心求證」。檢驗過程和結果，是否達到最佳化？藉由在夙昔的典範，亦步亦趨，臻於真、善、美的解題境界。



國立臺灣師範大學數學系

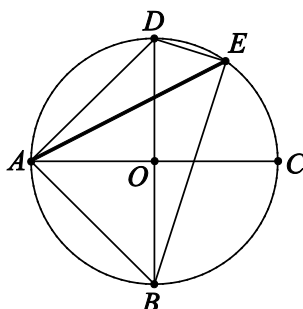
102學年度大學甄選入學指定項目甄試試題

筆試一、計算證明題（考試時間：2 小時）

1. (1) 直角三角形的兩股長為 a, b ，斜邊長為 c 。試證 $c^3 > a^3 + b^3$ 。 (8 分)

- (2) 如下圖，圓 O 內二直徑 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 互相垂直，在劣弧 $\widehat{DC}$ 上任取一點 E 。

試證：以 $\overline{AE}$ 為一邊的正方形面積等於四邊形 $ABED$ 面積的二倍。 (12 分)



2. 設函數 $f(x) = x^2 - 6x + 5$ 。求坐標平面上滿足聯立不等式

$$\begin{cases} f(x) + f(y) \leq 0 \\ f(x) - f(y) \geq 0 \end{cases}$$

的所有點 (x, y) 所形成的區域面積。 (20 分)

3. 設 a, b, c, d 為實數且 $a \neq b, c \neq d$ ， $f(x), g(x)$ 為滿足 $f(a) = f(b)$ 及 $g(c) = g(d)$ 的實係數二次多項式。已知 $f(x) - g(x)$ 為常數多項式，證明：

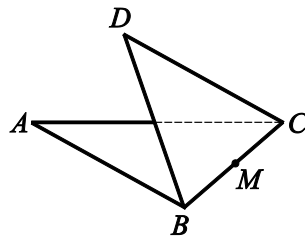
- (1) $a + b = c + d$ 。 (8 分)

(2) $\frac{f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{g(c) - g\left(\frac{c+d}{2}\right)} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2$ 。 (12 分)

4. 如下圖所示， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 為空間中的兩個等腰三角形， M 為線段 $\overline{BC}$ 的中點。令 $\overline{AB} = \overline{AC} = a, \overline{DB} = \overline{DC} = b, \overline{BM} = \overline{CM} = c$ 和 $\overline{DA} = x$ 。

- (1) 已知向量內積 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ，求證 $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2}$ 。 (8 分)

- (2) 已知 $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2}$ ，求證向量內積 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ 。 (12 分)



5. 師大數學系舉辦系徽設計比賽，入圍決選的有四件作品，由 10 名學生代表進行不記名投票，每人投兩票，且兩票須投不同作品。在沒有廢票的情況下，試問：

- (1) 四件作品的得票情形共有幾種？ (8 分)
- (2) 得票數最高的作品恰有一件的票數分布有幾種？ (12 分)

筆試二、填充題 (考試時間：1.5 小時)

1. 設 a 為實數。若對於所有實數 x ， $\left| \frac{x^2 + ax + 3}{x^2 + x + 2} \right| < 2$ 恆成立，則 a 的範圍為_____。
2. 若等比數列的第三項是 $1-i$ ，第五項是 $\frac{1}{16} + \frac{1}{16}i$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則此等比數列的公比為_____。
(有兩解)
3. 從 1,2,3,4,5,6,7 等數字中選取三個排成三位數，數字不重複，則排出來的是 3 的倍數但不是 5 的倍數的整數有_____個。
4. 桌上有十個骰子，當中有一個骰子出現 5 點的機率是 $\frac{1}{2}$ ，而出現其他點數的機率均等；其他九個都是均勻的骰子。用隨機的方式選取一個骰子來投擲。在出現 5 點的情況下，被選取的骰子是不均勻骰子的條件機率為_____。(答案若為分數，請化為最簡分數)
5. 在電腦裡有一公定的對照表(ASCII)，將英文字母 A,B,...,Z 及空格等字元分別對應至一整數，其對應數字如下表所示：

字母	空格	A	B	C	D	E	F	G	H
ASCII 碼	32	65	66	67	68	69	70	71	72
字母	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
ASCII 碼	73	74	75	76	77	78	79	80	81
字母	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
ASCII 碼	82	83	84	85	86	87	88	89	90

我們可利用此對照表在 facebook™ 傳送保密訊息給朋友。我們與朋友約定所有的英文字母及空格皆以對照表中的整數替代，例如「HE IS DAVID」的訊息，用「7269327383326865867368」取代，然後將此數字字串的奇數項排在矩陣的第一列，偶數項排在第二列，形成以下矩陣：

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 & 8 & 3 & 6 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 2 & 9 & 2 & 3 & 3 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 8 \end{bmatrix},$$

再與二階方陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

相乘得到

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & 24 & 7 & 13 & 14 & 7 & 22 & 16 & 20 & 13 & 22 \\ 20 & 39 & 12 & 23 & 25 & 12 & 36 & 27 & 34 & 23 & 36 \end{bmatrix},$$

最後依上述規則反求得字串「11202439071213231425071222361627203413232236」傳送給朋友，如此他人便不能立即得知傳送之內容。現在在此規則下，你接收到數字字串「233825411222213516271932」，可以轉成矩陣

$$\begin{bmatrix} 23 & 25 & 12 & 21 & 16 & 19 \\ 38 & 41 & 22 & 35 & 27 & 32 \end{bmatrix},$$

其所代表之訊息為_____。

6. 坐標平面上圓 C 通過點 $(0, 2)$ ，且 C 與兩直線 $\sqrt{3}x - y + 2 = 0, y + 1 = 0$ 皆相切，則圓 C 的方程式為_____。
7. 坐標空間中 $\triangle ABC$ 的三頂點分別為 $A(1, -1, 1), B(-3, 2, 1), C(5, -4, 3)$ ， P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，且令 P 到 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 的距離分別為 x, y, z ，則 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值為_____。（答案若為分數，請化為最簡分數）
8. 函數 $f(x) = \cos^4 x + 3\sin^4 x$ 的最小值為_____。
9. 設 θ 為實數。若 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，則 $A^5 =$ _____。
10. 袋中有編號分別為 1 到 6 的六個球。從袋中隨機選取兩球，令隨機變數 X 表示在被選取的兩球中，球號比袋中剩下的球號都大的球的個數（例如：如果選到 2 號和 3 號球，那袋中剩下的就是 1, 4, 5, 6 號球；因為選出的球中並沒有比 1, 4, 5, 6 都大的球號，故這種情況下 $X = 0$ ）。隨機變數 X 的期望值為_____。（答案若為分數，請化為最簡分數）

筆試一、計算證明題

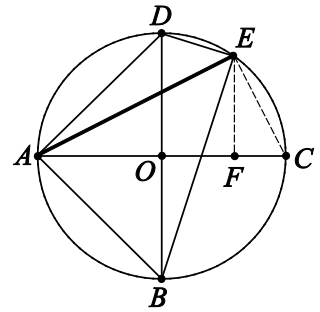
1. (1) 利用 $c^2 = a^2 + b^2$ 及 $c > a, c > b$ 得

$$c^3 = c(a^2 + b^2) = ca^2 + cb^2 > a^3 + b^3 .$$

(2) 過 E 作 $\overline{EF} \perp \overline{AC}$ ，則

四邊形 $ABED$ 的面積

$$\begin{aligned} &= \triangle ABD + \triangle BDE \\ &= \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot \overline{AO} + \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot \overline{OF} \\ &= \frac{1}{2} \overline{BD} (\overline{AO} + \overline{OF}) \\ &= \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AF} , \end{aligned}$$



又在直角三角形 ACE 中，因為 $\overline{AE}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AF}$ ，所以 $\overline{AE}^2 =$ 四邊形 $ABED$ 面積的兩倍。

2. 因為

$$f(x) + f(y) = x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = (x-3)^2 + (y-3)^2 - 8 ;$$

$$f(x) - f(y) = x^2 - y^2 - 6x + 6y = (x-y)(x+y-6) ,$$

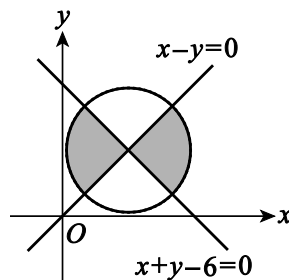
所以

$$\begin{cases} f(x) + f(y) \leq 0 \\ f(x) - f(y) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 8 \\ (x-y)(x+y-6) \geq 0 \end{cases} ,$$

因此，滿足上述條件的所有點 (x, y) 為

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq (\sqrt{8})^2 \\ x-y \geq 0, x+y-6 \geq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq (\sqrt{8})^2 \\ x-y \leq 0, x+y-6 \leq 0 \end{cases} ,$$

其所圍成的區域如下圖所示，面積為 $\frac{1}{2} \pi (\sqrt{8})^2 = 4\pi$ 。



3. (1) 依題意，可設 $f(x) = r(x-a)(x-b) + s, g(x) = r'(x-c)(x-d) + s'$ 。

因為 $f(x) - g(x)$ 是常數多項式，所以比較一、二次項係數知

$$r = r', r(a+b) = r'(c+d),$$

得 $a+b = c+d$ 。

$$(2) \text{ 由 } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = -r \frac{(a-b)^2}{4} + s = -r \frac{(a-b)^2}{4} + f(a) \text{ 得}$$
$$r = \frac{4\left(f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(a-b)^2},$$

故得證。

註：1° 也可利用對稱性知 $y = f(x)$ 的頂點之 x 軸坐標為 $\frac{a+b}{2}$ ， $y = g(x)$ 的頂點之 x 軸坐標

為 $\frac{c+d}{2}$ ，而得證。

2° 亦可用插值多項式證明。

4. (1) 由向量分解 $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BM}) + \overrightarrow{MA}$ 得

$$\begin{aligned}\overline{DA}^2 &= (\overrightarrow{DA})^2 = (\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA})^2 = \overline{DM}^2 + \overline{MA}^2 + 2\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{MA} \\ &= (b^2 - c^2) + (a^2 - c^2) + 2(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{MA} \\ &= b^2 + a^2 - 2c^2 + 2(\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA}).\end{aligned}$$

因為 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ 且 $\overline{BM} \perp \overline{MA}$ ，所以

$$\overline{DA}^2 = b^2 + a^2 - 2c^2.$$

因此

$$\overline{DA} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2}.$$

(2) 由(1)及 $\overline{BM} \perp \overline{MA}$ 可得

$$\overline{DA}^2 = b^2 + a^2 - 2c^2 + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

依題意知 $\overline{DA} = x = \sqrt{b^2 + a^2 - 2c^2}$ ，即

$$(\sqrt{b^2 + a^2 - 2c^2})^2 = b^2 + a^2 - 2c^2 = b^2 + a^2 - 2c^2 + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

故

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{MA} = 0.$$

5. (1) 由題意可以知道：

① 四件作品所得的總票數為 20 票。

② 每件作品最多可以得到 10 票。

令四件作品的得票數分別為 x, y, z, u ，由 ①② 可得

$$x + y + z + u = 20, 0 \leq x, y, z, u \leq 10.$$

因為 $0 \leq x, y, z, u \leq 10$ ，所以 H_{20}^4 須扣掉 $11 \leq x, y, z, u \leq 20$ 的情況。由 $x + y + z + u = 20$ 且 $x, y, z, u \geq 0$ 可知最多只有一個票數會大於等於 11，假設 $x \geq 11$ ，令 $x = x' + 11$ ，可得

$$x' + y + z + u = 9, 0 \leq x', y, z, u \leq 9,$$

此情況有

$$H_9^4 = C_9^{12} = 220 \text{ 種}。$$

因此票數分布為

$$H_{20}^4 - 4 \times H_9^4 = 1771 - 4 \times 220 = 891 \text{ 種}。$$

(2) 假設得票數最高為 x ，由題意可得

$$x + y + z + u = 20, 0 \leq y, z, u < x \leq 10,$$

因為 $y, z, u < x$ ，也就是 $y, z, u \leq x - 1$ ，所以

$$x + y + z + u \leq x + (x - 1) + (x - 1) + (x - 1) = 4x - 3.$$

由 $x + y + z + u = 20$ 得

$$20 \leq 4x - 3,$$

即

$$\frac{23}{4} \leq x.$$

因此，當 $x \geq 6$ 時，才會滿足只有一件作品得票數最高且票數為 x 。

當 $x = 6$ 時，

$$y + z + u = 14, 0 \leq y, z, u \leq 5$$

滿足此情況的 y, z, u 有 $(5, 5, 4), (5, 4, 5), (4, 5, 5)$ 3 種。

當 $x = 7$ 時，

$$y + z + u = 13, 0 \leq y, z, u \leq 6$$

因為 $y + z + u = 13$ 且 $y, z, u \geq 0$ ，所以 y, z, u 最多只有一個會大於等於 7。

由(1)可知滿足此情況有

$$H_{13}^3 - 3 \times H_6^3 = C_{13}^{15} - 3 \times C_6^8 = 105 - 84 = 21 \text{ 種}。$$

同理

當 $x = 8, 9, 10$ 時， y, z, u 最多只有一個會大於等於 8, 9, 10，故

當 $x = 8$ 時，有

$$H_{12}^3 - 3 \times H_4^3 = C_{12}^{14} - 3 \times C_4^6 = 91 - 45 = 46 \text{ 種}。$$

當 $x = 9$ 時，有

$$H_{11}^3 - 3 \times H_2^3 = C_{11}^{13} - 3 \times C_2^4 = 78 - 18 = 60 \text{ 種}。$$

30 數亦優

當 $x=10$ 時，有

$$H_{10}^3 - 3 \times H_0^3 = C_{10}^{12} - 3 \times C_0^2 = 66 - 3 = 63 \text{ 種。}$$

因此滿足只有一件作品得票數最高的情形有

$$4 \times (3 + 21 + 46 + 60 + 63) = 772 \text{ 種。}$$

筆試二、填充題

參考答案

1.	2.	3.	4.	5.
$0 < a < 4$	$\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}i \right)$	66	$\frac{1}{4}$	NORMAL
6.	7.	8.	9.	10.
$(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 4$ $(x + 3\sqrt{3})^2 + (y - 5)^2 = 36$ (或是 $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 2y = 0$)	$\frac{50}{79}$	$\frac{3}{4}$	$\begin{bmatrix} \cos 5\theta & 0 & -\sin 5\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 5\theta & 0 & \cos 5\theta \end{bmatrix}$	$\frac{2}{5}$

高中數學專題研究教案 (Part II)

陳敏皓／國立蘭陽女中

《接續，Part I 請見數亦優第 21 期》

四、正多邊形

(一) 除了正方形及三角形以外，我們還考慮將其他形狀組合，討論其撕裂次數是否與正方形、三角形相同。

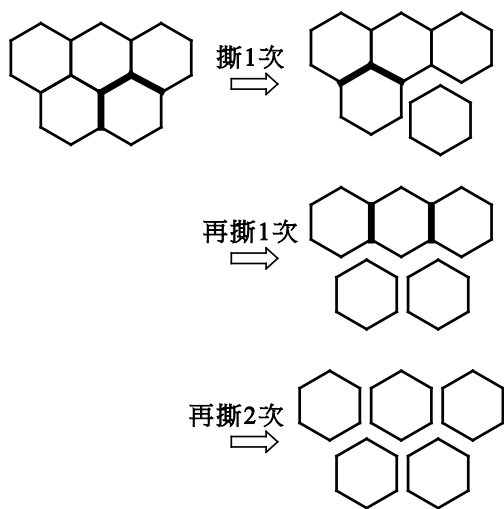
(二) 並非所有正多邊形皆可組合，若內角非 $\frac{360^\circ}{k}, k \in \mathbb{N}$ ，便不能組合。例如：

1. 正五邊形的內角和 $180^\circ \times 3 = 540^\circ$ ，則一個內角為 108° ，但 $108^\circ \times k \neq 360^\circ, k \in \mathbb{N}$ ，無法將五邊形完整組合，必有空隙。

2. 正六邊形的內角和 $180^\circ \times 4 = 720^\circ$ ，則一個內角為 120° ，因為 $120^\circ \times 3 = 360^\circ$ ，則任三個相同的正六邊形皆可相互組合。

(三) 完整排列：正六邊形為例，以 m 張排列。

例 1. 一頁 5 個正六邊形排列

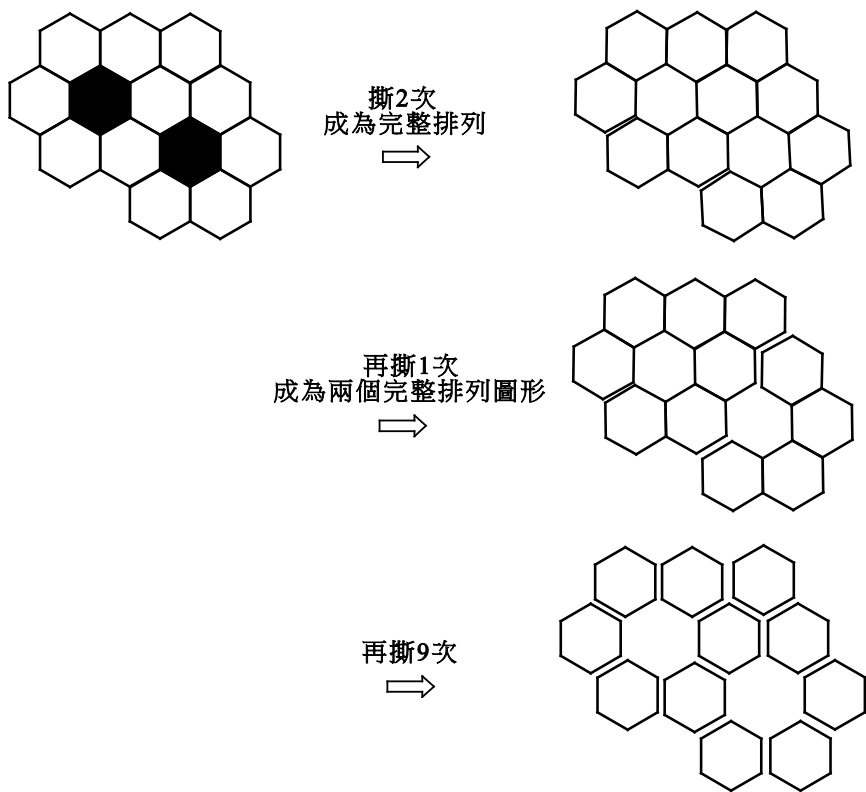


撕開 2 次，使下排的兩個正六邊形與上排分開，再逐一將上排撕開，共需 4 次。

由例 1：撕的次數結果皆為 $m-1$ 次。

(四) 內部有洞：正六邊形為例， m 張 n 個洞排列。

例 2. 一頁 11 張且 2 洞排列



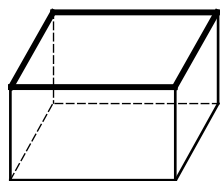
先撕開 2 次，使其成為無洞排列，再撕開 1 次，使其變成兩頁完整排列，再逐一撕開，共需 12 次。

由例 1.與例 2.得知：撕的次數結果皆為 $n + (m - 1)$ 次。

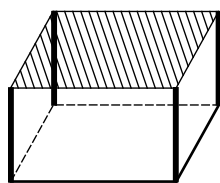
五、「切割」的定義

- (一) 我們從平面延伸到立體，討論柏拉圖的五個正多面體，先將正多面體每面切開、分開的次數，是否也有彼此相似之處。
- (二) 因為立體無法如平面一樣用撕的，故用切的，而計算次數的定義與方法也與平面有很大的差異。
- (三) 「切一次」的定義與限制：沿著稜邊切下一個面，才算作「一次」。第一次切下後，便將封閉的正多面體打開，此後每切一次，都必須從開放的稜邊切下，不可再一次從封閉的面切下。

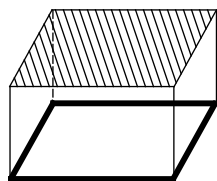
以正六面體為例：



此為一個完整封閉的正六面體。
第一次沿著粗線切開，可切下一個面。



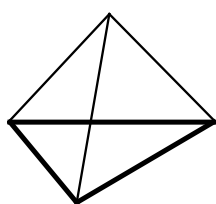
斜線部分為第一次被切下的面。
封閉正六面體被打開後，第二次只能從開放的 4 條稜邊（粗線）切下。



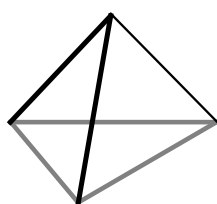
第二刀不可再從封閉面（粗線）開始切。

六、柏拉圖多面體

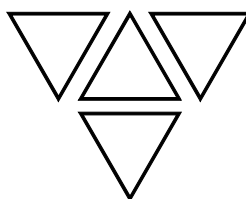
1. 正四面體



第一次切下底面
⇒
第二次開始皆由開放的稜邊切下

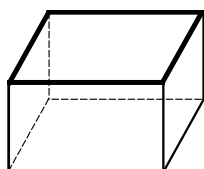


共切3次
成為四個分開的面
⇒

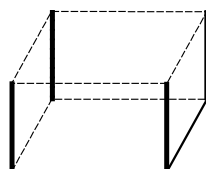


第一次將底面切開以後，再從開放的稜邊開始切，逐一將剩下的 3 個面切下，共需切 $1 + (3 - 1) = 3$ 次。

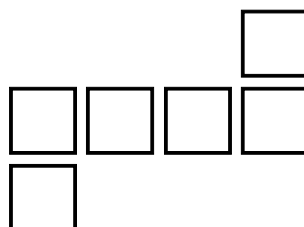
2. 正六面體



第一次切下頂面
⇒
第二次開始皆由開放的稜邊切下

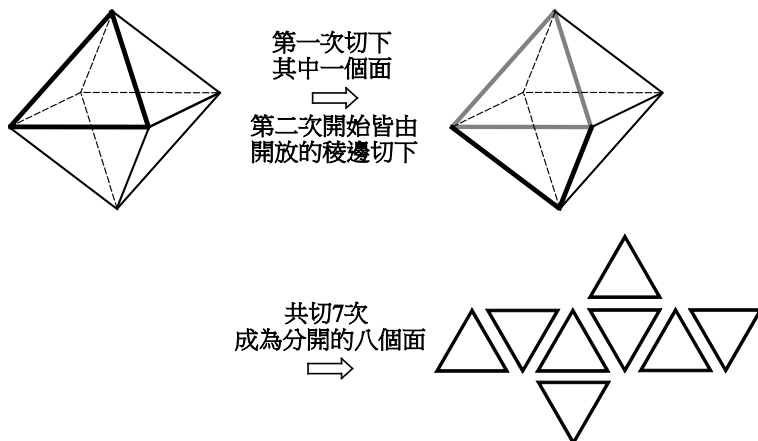


共切5次
成為分開的六個面
⇒



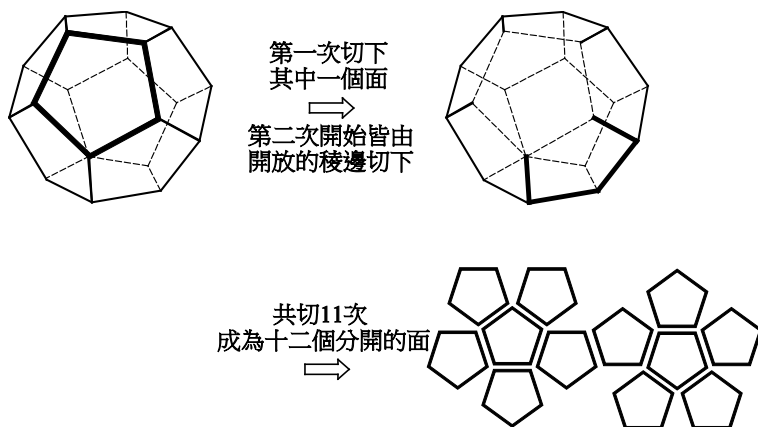
第一次將頂面切開以後，再從開放的稜邊開始切，逐一將剩下的 5 個面切下，共需切 $1 + (5 - 1) = 5$ 次。

3. 正八面體



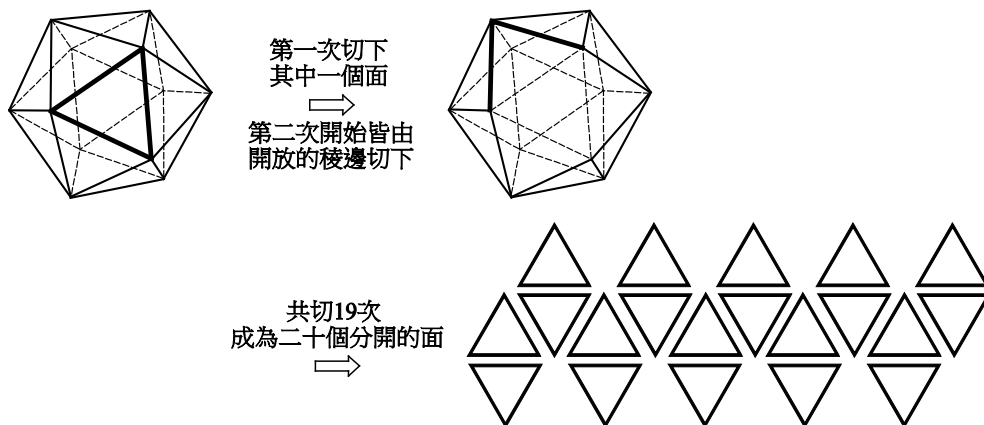
第一次將其中一個面切開以後，再從開放的稜邊開始切，逐一將剩下的 7 個面切下，共需切 $1 + (7 - 1) = 7$ 次。

4. 正十二面體



第一次將其中一個面切開以後，再從開放的稜邊開始切，逐一將剩下的 11 個面切下，共需切 $1 + (11 - 1) = 11$ 次。

5. 正二十面體



第一次將其中一個面切開以後，再從開放的稜邊開始切，逐一將剩下的 19 個面切下，共需切 $1 + (19 - 1) = 19$ 次。

由上述例子可得知：切割次數皆剛好為正多面體的(總面數-1)次。

研究發現

※內部有洞：洞數 $a\{b\}$ ，其中 a ：洞的個數， b ：每個洞的張數。

矩 形				
完整排列	邊長×邊長		總張數	撕的次數
	2×2		4	3
	4×5		20	19
不規則排列	總張數			撕的次數
	10			9
	13			12
內部有洞	邊長×邊長	洞數	總張數（邊長×邊長－洞的張數）	撕的次數
	3×3	1{1}	$8 = 3 \times 3 - 1$	8
	3×5	2{1}	$13 = 3 \times 5 - 2$	14

三 角 形					
完整排列	邊長		總張數	撕的次數	
	2		4	3	
	3		9	8	
不規則排列	總張數			撕的次數	
	10			9	
	13			12	
內部有洞		邊長	洞數	總張數（邊長平方－洞的張數）	撕的次數
	規則	4	1{1}	$15 = 4 \times 4 - 1$	15
		5	1{1}	$24 = 5 \times 5 - 1$	24
		5	1{2}	$23 = 5 \times 5 - 2$	23
		5	1{3}	$22 = 5 \times 5 - 3$	22
		6	1{1}	$35 = 6 \times 6 - 1$	35
		6	1{2}	$34 = 6 \times 6 - 2$	34
		6	2{1}	$34 = 6 \times 6 - 2 \times 1$	35
		6	3{1}	$33 = 6 \times 6 - 3 \times 1$	35
		6	1{2}+1{1}	$33 = 6 \times 6 - (2+1)$	34
		7	2{2}	$45 = 7 \times 7 - 2 \times 2$	46
	不規則		1{1}	22	22
			1{1}	23	23
			1{2}	32	32

六 邊 形			
完整排列	總張數		撕的次數
	3		2
	5		4
內部有洞	洞數	總張數	撕的次數
	1{1}	6	6
	2{1}	11	12

正 多 面 體		
	面數	撕的次數
正四面體	4	3
正六面體	6	5
正八面體	8	7
正十二面體	12	11
正二十面體	20	19

目前的研究我們發現了以下獨特的結論：平面幾何圖形中，矩形、正三角形和正六邊形的規則形狀與不規則形狀紙張之最佳撕法都是(總張數-1)次；矩形、正三角形及正六邊形排列成內部有 n 個洞且 m 張的紙張之最佳撕法都是 $n + (m-1)$ 次；而柏拉圖立體的最少切割次數皆為正多面體的(總面數-1)次。最重要我們發現，其實撕裂或切割次數與撕裂或切割方法（或順序）無關。

參考資料：

1. 陳美如（2000.03）。撕郵票問題。數學傳播，第 24 卷第 1 期，P.82~86。
2. 許志農。與奇人相遇，<http://math.ntnu.edu.tw/~maco/meet.htm>。
3. 林義強。多面體簡介。第一屆全國高中數學教學研討會論文集，P.177~192。

參、數學專題研究反思》

上述作品得到今年北一區數學科展優等，過程中我與學生教學相長。高二學生因為所學的數學很有限，所以數學解題層次會有侷限；但是相對地，數學思維與想像力卻是受過數學訓練的我們所不及的。在這次數學專題研究中，我扮演的角色是諮詢者、協助者、鼓勵者，完成任務是那三位鍥而不捨的同學：鄭羽呈、李依庭、林佩柔。

勘誤

第 21 刊〈高中數學專題研究教案（Part I）〉

P.34 倒數第 6 行，「設 $m = k \in \square$ 」應改為「設 $m \leq k \in \square$ 」。

P.36 第 3 行，「設 $m = k \in \square$ 」應改為「設 $m \leq k \in \square$ 」。

P.38 內部有洞的 1.(1)~(4)分類應改為「1.(1)一頁 24 張內部有一個洞，一張為 1 洞」；

「1.(2)一頁 23 張內部有一個洞，兩張為 1 洞」；

「1.(3)一頁 23 張內部有一個洞，兩張為 1 洞」；

「1.(4)一頁 22 張內部有一個洞，三張為 1 洞」。

專欄

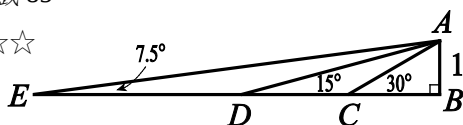
動手玩數學



在下圖中，已知 $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\overline{AB}=1$ ，求

遊戲 85

☆☆



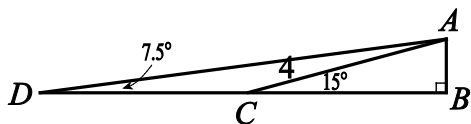
- (1) 線段 $\overline{AD}$ 的長度（化為最簡形式）。
- (2) 餘切 $\cot \frac{\pi}{24}$ 的值。

〔玩鎖・玩索〕

這道問題改編自「求 $\cot \frac{\pi}{24}$ 的值」這道教師甄選試題，關於這道餘切求值問題，有兩位老師的作法是用標準特別角出發，再求出欲求的餘切值。

底下是另一位老師的作法：

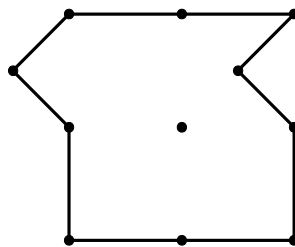
已知 $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\overline{AC}=4$ ，求 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 及 $\cot \frac{\pi}{24}$ 的值。



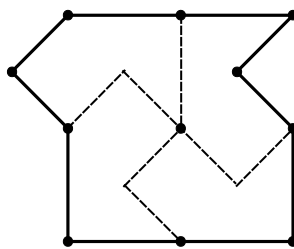
遊戲 86

☆☆☆☆☆

請加上線段，使下圖分成五份形狀完全相等的部分（翻面相等也算）。



或許下圖對你會有些幫助，它們是四份形狀完全相等的部分。



〔玩鎖・玩索〕

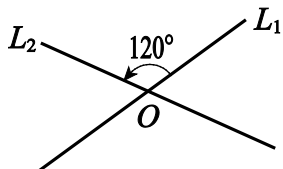
這是 1998 年夏天，香港中文大學教育學院第二次舉辦暑期資優課程中，在數學有關的工作坊裡的一道測智遊戲。



遊戲 87

☆☆☆☆☆

在坐標平面上畫一直線 L_1 ，在線上任取一點 O ，以 O 為旋轉中心，依逆時針方向將直線 L_1 旋轉 120° 得到直線 L_2 ，如下圖所示：



已知直線 L_1 的斜率為 m ，求證直線 L_2 的斜率為

$$\frac{m - \sqrt{3}}{\sqrt{3}m + 1} .$$

〔玩鎖・玩索〕

直線是平面幾何上的重要元素，而斜率又是直線在代數上的代言人，掌握斜率就如同控制直線一樣。從逆轉 120° 的直線斜率公式不難知道：坐標平面上的正三角形之三條邊斜率

$$m_1, m_2, m_3$$

是可以互相推導的，即由 m_1 可以得到 m_2 與 m_3 的公式，而且還知道以下兩個恆等式

$$m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 = -3 ;$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) = 9 .$$



遊戲 88

☆☆☆☆☆

宇富怕手機被盜打，每日更換開機密碼，為了便於記憶，他想到一則更換密碼的算術通則：「昨天密碼為 p ，今

日的密碼就更新為 $\frac{1+p}{1-p}$ 。」

宇富跟所有的人說：「我已經使用這密碼通則 500 天了，而且第一天的密碼就設為 $\sqrt{2}-1$ ，相信各位算到手痠，也無法算出今天的開機密碼。」



徵求可以破解開機密碼的人士。

〔玩鎖・玩索〕

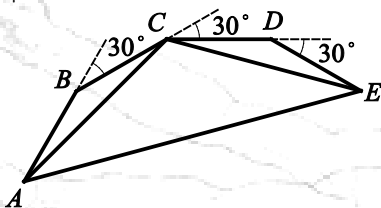
如果第一天的密碼為 π ，那麼破解密碼的難度有增加嗎？

動手玩數學~破解秘笈

第21期

遊戲 81

如圖所示：



(1) 考慮 $\triangle ABC$ ：因為 $\overline{AB} = \overline{BC} = 8\sin 15^\circ$ 且 $\angle ABC = 150^\circ$ ，所以 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，且 $\angle BAC = 15^\circ$ 。因此

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= 2\overline{AB}\cos 15^\circ = 2(8\sin 15^\circ)\cos 15^\circ \\ &= 8\sin 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.\end{aligned}$$

(2) 仿照(1)的方法： $\triangle ACE$ 也是等腰三角形，且 $\angle CAE = 30^\circ$ 。因此

$$\overline{AE} = 2\overline{AC}\cos 30^\circ = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

遊戲 82

秦九韶這個依括弧次序求函數值 $f(a)$ 的演算法就是高中數學多項式那章所介紹的綜合除法：

$$\begin{array}{r|l} 2 & -5 & 4 & 8 & a \\ \hline & 2a & \cdots & \cdots & \\ 2 & () & [] & \{\} & \end{array}$$

仔細計算上述綜合除法的空白位置，可以發現：小、中、大括弧位置所代表的值與秦九韶小、中、大括弧內的值完全一樣。

遊戲 83

$$\begin{aligned}(1) \cot \frac{\pi}{24} &= \frac{\cos \frac{\pi}{24}}{\sin \frac{\pi}{24}} = \frac{2\cos^2 \frac{\pi}{24}}{2\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24}} \\ &= \frac{1+\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} = \frac{1+\cos \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}.\end{aligned}$$

(2) 因為

$$\begin{aligned}\cos \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\sin \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\cot \frac{\pi}{24} &= \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{6-2} \\ &= 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.\end{aligned}$$

遊戲 84

令

$$\begin{aligned}A &= (2a-b-c) + (b-c)\sqrt{3}i, \\ B &= (2c-a-b) + (a-b)\sqrt{3}i, \\ C &= (2b-a-c) + (c-a)\sqrt{3}i,\end{aligned}$$

且

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

因為

$$A = \omega C = \omega^2 B,$$

所以

$$A^3 = \omega^3 C^3 = \omega^6 B^3.$$

又因為 $\omega^3 = \omega^6 = 1$ ，所以

$$A^3 = B^3 = C^3,$$

得證。