

直角坐標平面上點到直線的距離公式

李維昌／國立宜蘭高中

一、研究目的》

以直線的傾斜角與三角函數，來求直角坐標平面上點到直線的距離公式。

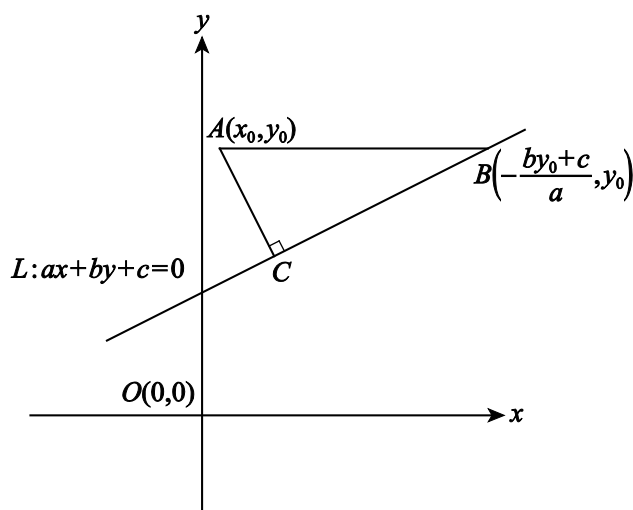
二、研究內容》

已知 $A(x_0, y_0)$ ， $L: ax + by + c = 0$ ， $A \notin L$ ，直線 L 的傾斜角為 θ ，將傾斜角 θ 分成四類來討論， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 、 $\theta = 0$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 。

1. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ：

$a \neq 0$ ， $B\left(-\frac{by_0 + c}{a}, y_0\right) \in L$ ，點 A 投影到 L 的投影點為 C ， $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ ， $\vec{AB} \parallel x$ 軸，

$\angle ABC = \theta$ ，如下圖所示：



$$(1) \overline{AB} = \left| x_0 - \frac{-by_0 - c}{a} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a|}。$$

$$(2) \text{ 直線 } L \text{ 的傾斜角為 } \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \theta = -\frac{a}{b} \Rightarrow \sin \theta = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > 0。$$

(3) 點 A 到直線 L 的距離

$$\begin{aligned} d &= \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \sin \angle ABC = \overline{AB} \cdot \sin \theta \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a|} \cdot \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}。 \end{aligned}$$

2. $\theta = 0$:

$a = 0, L: by + c = 0$, 點 A 投影到 L 的投影點為 $C\left(x_0, -\frac{c}{b}\right)$, 點 A 到 L 的距離

$$d = \overline{AC} = \left| y_0 - \left(-\frac{c}{b}\right) \right| = \frac{|by_0 + c|}{|b|} = \frac{|0 \cdot x_0 + by_0 + c|}{\sqrt{0^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}。$$

3. $\theta = \frac{\pi}{2}$:

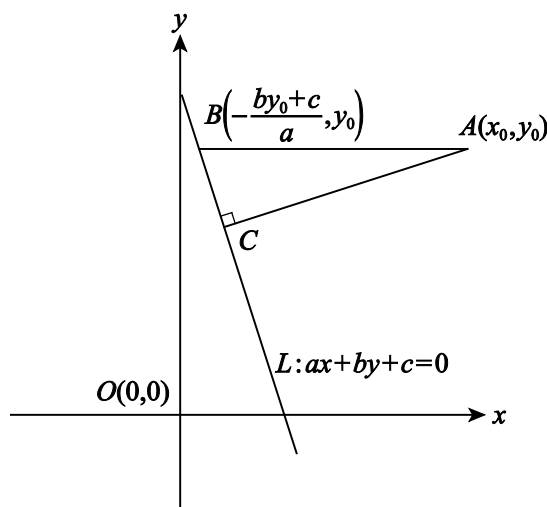
$b = 0, L: ax + c = 0$, 點 A 投影到 L 的投影點為 $C\left(-\frac{c}{a}, y_0\right)$, 點 A 到 L 的距離

$$d = \overline{AC} = \left| x_0 - \left(-\frac{c}{a}\right) \right| = \frac{|ax_0 + c|}{|a|} = \frac{|ax_0 + 0 \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + 0^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}。$$

4. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$:

$a \neq 0, B\left(-\frac{by_0 + c}{a}, y_0\right) \in L$, C 為 A 投影到 L 的投影點 , $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel x$ 軸 ,

$\angle ABC = \pi - \theta$, 如下圖所示 :



$$(1) \overline{AB} = \left| x_0 - \frac{-by_0 - c}{a} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a|}。$$

$$(2) \text{ 直線 } L \text{ 的傾斜角 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \tan \theta = -\frac{a}{b} \Rightarrow \sin(\pi - \theta) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > 0。$$

(3) 點 A 到直線 L 的距離

$$\begin{aligned} d &= \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \sin \angle ABC = \overline{AB} \cdot \sin(\pi - \theta) \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a|} \cdot \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}。 \end{aligned}$$

三、結論 》

由 1、2、3、4 的討論，可得點 $A(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax + by + c = 0$ 的距離 $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

迴歸直線預測準確度之探討

蕭善夫／嘉義市興華高中

一、前言》

99 課程數學課本第二冊第 4 章數據分析單元介紹使用「最小平方法」求二維數據的迴歸直線方程式，並進而使用迴歸直線來做預測。但是若有兩組數據，且已經分別求出各自的迴歸直線，那麼我們如何知道哪一組的迴歸直線較適合用來做預測呢？也就是說，迴歸直線雖然名稱為「最佳直線」，但用來做預估時，應有它準確性的限制，而所產生的誤差究竟有多大呢？本文即是探討二維數據的迴歸直線用來做預測時，所產生的誤差。

二、迴歸直線方程式推導》

各個高中數學課本版本對於推導迴歸直線方程式有所不同。翰林版與康熹版採用原始數據直接配方後而得〔註 1〕〔註 2〕，而龍騰版、南一版、全華版、三民版則是先將原始數據標準化後再配方〔註 3〕〔註 4〕〔註 5〕〔註 6〕。本文使用原始數據去推導迴歸直線，但是推導的過程與前述課本的方法有所不同，分別採用「改良式配方法」與「解二元一次方程組」兩種方法。

方法一：改良式配方法

有別於課本中的傳統配方法，在此將 $(y_i - a - bx_i)$ 拆開成三項： $y_i - \bar{y}$ 與 $\bar{y} - (a + b\bar{x})$ 與 $b(x_i - \bar{x})$ ，再平方展開，推導過程如下：

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left((y_i - \bar{y}) + \bar{y} - a - bx_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left((y_i - \bar{y}) + [\bar{y} - (a + b\bar{x})] - b(x_i - \bar{x}) \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n [\bar{y} - (a + b\bar{x})]^2 + b^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) [\bar{y} - (a + b\bar{x})] \\ &\quad - 2b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) [\bar{y} - (a + b\bar{x})] - 2b \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) \end{aligned}$$

$$\text{因為 } \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0 ,$$

$$\text{同理 } \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \bar{y} = n\bar{y} - n\bar{y} = 0$$

故原式可繼續推導得到

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + n[\bar{y} - (a + b\bar{x})]^2 + b^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - 2b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= A + B + C , \end{aligned}$$

我們發現上式為 A 、 B 、 C 三項的組合，其中

$$A = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$B = n[\bar{y} - (a + b\bar{x})]^2$$

$$C = b^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - 2b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

觀察 A 、 B 、 C 三項可知：

$$A = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \text{ 與 } a, b \text{ 無關} ,$$

$$B = n[\bar{y} - (a + b\bar{x})]^2 \text{ 欲產生最小值} ,$$

$$\text{必須 } \bar{y} - (a + b\bar{x}) = 0 , \text{ 亦即 } \bar{y} = a + b\bar{x} ,$$

$$\text{而 } C = b^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - 2b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \left(b^2 - 2b \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} \right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \left(b - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} , \end{aligned}$$

由上式可知，欲使 C 產生最小值，必須

$$b - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 0 , \text{ 亦即}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

若以上式解出的 b 代入 $\bar{y} = a + b\bar{x}$ ，即可得到 $a = \bar{y} - b\bar{x}$ 。

方法二：解二元一次方程組

在這個方法中，將誤差平方展開後，依 a, b 分類，令一為常數，另一為變數，並配方後求方程組的解。

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \sum_{i=1}^n [(a + bx_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n [a + (bx_i - y_i)]^2 \\ &= na^2 + 2a \sum_{i=1}^n (bx_i - y_i) + \sum_{i=1}^n (bx_i - y_i)^2 \\ &= n \left(a^2 + 2a \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (bx_i - y_i)}{n} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n (bx_i - y_i) \right)^2}{n^2} \right) + \sum_{i=1}^n (bx_i - y_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (bx_i - y_i) \right)^2}{n} \\ &= n \left(a + \frac{\sum_{i=1}^n (bx_i - y_i)}{n} \right)^2 + \sum_{i=1}^n (bx_i - y_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (bx_i - y_i) \right)^2}{n}, \end{aligned}$$

令 b 為常數，則欲使 $E(a, b)$ 產生最小值，必須

$$a + \frac{\sum_{i=1}^n (bx_i - y_i)}{n} = 0, \text{ 亦即 } na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

同樣方法，若

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \sum_{i=1}^n [(a + bx_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n [bx_i + (a - y_i)]^2 \\ &= b^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i (a - y_i) + \sum_{i=1}^n (a - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(b^2 + 2b \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i (a - y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i (a - y_i) \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2} \right) + \sum_{i=1}^n (a - y_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i (a - y_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(b + \frac{\sum_{i=1}^n x_i (a - y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n (a - y_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i (a - y_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

令 a 為常數，則 $E(a, b)$ 欲產生最小值，必須

$$b + \frac{\sum_{i=1}^n x_i (a - y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 0, \text{ 亦即 } a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

由以上結果，可得到以 a, b 為變數的二元一次方程組

$$\begin{cases} na + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

由克拉瑪公式，得到方程組的解為

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

以上兩種推導的方法，其結果相同，得到迴歸直線方程式為 $y = a + bx$ ，其中直線斜率

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \text{ 而 } y \text{ 截距 } a = \bar{y} - b\bar{x}。$$

三、迴歸直線之誤差計算》

若是給定一組數據，我們已經可求出迴歸直線，而且知道這條直線是最能擬合原始數據的「最適合直線」，但問題是：擬合的程度是如何？若是用迴歸直線來預測未知的數值時，其預測的誤差有多大？準確性有多高？為了解答上述的疑惑，以下我們針對預測所產生的誤差來討論。

因為迴歸直線方程式為 $y = a + bx$ ，令 x_i 的預測值為 $\bar{y}_i = a + bx_i$ ，則可推導得

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i)^2 \quad (\text{推導過程見附錄})。$$

我們發現， $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ 可看成是一不變量，它不受迴歸直線方程式係數所影響，且此不變量由兩部分 $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2$ 與 $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i)^2$ 所組成，而後者 $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i)^2$ 則是最小平方法所計算之誤差平方和，可視為以迴歸直線所預測產生錯誤的部分，相對而言，前者 $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2$ 則可視為以迴歸直線準確預測的部分，此兩部分組成總不變量 $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ 。

在實際估算時，若是要求預測能夠準確，則錯誤預測的部分 $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i)^2$ 要愈小愈好，正確預測的部分 $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2$ 要愈大愈好，但這些數值受到數據個數 n 的影響，也就是數據個數愈多，則誤差平方和當然愈大，但不代表預測不準確，故我們轉而計算預測正確部分 $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2$ 在總不變量 $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ 中占了多少百分比，因為

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^n [(a + bx_i) - (a + b\bar{x})]^2 \\ &= b^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} , \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} &= \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \right)^2,\end{aligned}$$

因為我們知道 x, y 的相關係數 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ ，故由上面的推導，我們發現

$\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ 剛好等於相關係數的平方，此數值稱為決定係數(coefficient of determination)〔註 7〕，

它表示用迴歸直線來做預測時的準確度，當決定係數愈大時，表示迴歸直線所做的預測愈準確。

四、實例分析》

以下這個實例係採自龍騰課本第二冊第 200 頁的例題〔註 3〕，我們將它延伸至求預測的準確度。

實例：若有甲乙丙丁戊 5 個考生，其筆試與口試的成績如下表：

考生	甲	乙	丙	丁	戊
筆試成績 x	5	5	4	7	9
口試成績 y	3	1	4	3	9

若有一考生僅考筆試，且筆試成績為 8，請以迴歸直線預測其口試成績是多少？並說明預測結果的準確度。

解：將計算所用到的數據列表如下：

x_i	5	5	4	7	9	$\bar{x} = 6$
y_i	3	1	4	3	9	$\bar{y} = 4$
$x_i - \bar{x}$	-1	-1	-2	1	3	
$y_i - \bar{y}$	-1	-3	0	-1	5	
$(x_i - \bar{x})^2$	1	1	4	1	9	
$(y_i - \bar{y})^2$	1	9	0	1	25	
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	1	3	0	-1	15	
$\hat{y}_i = a + bx_i$	2.875	2.875	1.75	5.125	7.375	
$\hat{y}_i - y_i$	-0.125	1.875	-2.25	2.125	-1.625	
$(\hat{y}_i - y_i)^2$	0.015625	3.515625	5.0625	4.515625	2.640625	
$\hat{y}_i - \bar{y}$	-1.125	-1.125	-2.25	1.125	3.375	
$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	1.265625	1.265625	5.0625	1.265625	11.390625	

計算結果：

$$(1) b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{9}{8}$$

$$(2) a = \bar{y} - b\bar{x} = -\frac{11}{4}$$

$$(3) \text{迴歸直線方程式 } y = \frac{9}{8}x - \frac{11}{4}$$

$$(4) \text{總離均差平方和 } \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 36$$

$$(5) \text{預測正確的平方和 } \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 20.25$$

$$(6) \text{預測錯誤的平方和 } \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = 15.75$$

如同上面所推導的結果，我們發現總不變量 $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ 等於 $\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ 與 $\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2$ 的和。

$$(7) \text{決定係數 } r^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \right)^2 = \left(\frac{18}{\sqrt{16}\sqrt{36}} \right)^2 = 0.5625$$

故由以上的計算，可知筆試成績與口試成績的相關係數的值為 0.75，雖為中高度正相關，但是決定係數的值為 0.5625，亦即使用迴歸直線來預測的準確度僅為 56.25%，不到六成，準確度並不高。

五、結論》

一、一般高中數學課本在推導迴歸直線方程式時，是採用配方法，本文是採用二種不同的方法來推導，一是改良式的配方法，另一是解方程組，這兩種方法均是採用未標準化的數據，而且所用到的觀念並未超出高中數學課程的範圍。

二、迴歸直線雖名為「最佳直線」，但在做預測時，其準確度受到相關係數大小的影響，且預測的準確度也就是決定係數等於相關係數的平方，所以在利用迴歸直線做預估時，若決定係數不大，所求出的迴歸直線並不適合用來做預測，這點在使用迴歸直線求預估值時常被忽略，本文提出這個論點供作大家參考。

六、引註資料》

- 1.余文卿主編(2010)。高級中學數學第二冊。臺南市：翰林出版。
- 2.李虎雄等(2010)。高級中學數學第二冊。新北市：康熹文化。
- 3.許志農主編(2010)。高級中學數學第二冊。新北市：龍騰文化。
- 4.林福來等(2010)。高級中學數學第二冊。臺南市：南一書局。
- 5.楊壬孝主編(2010)。高級中學數學第二冊。新北市：全華圖書。
- 6.鄭惟厚、單維彰主編(2010)。高級中學數學第二冊。臺北市：三民書局。
- 7.林清山(1998)。心理與教育統計學。臺北市：東華書局。

七、附錄》

我們要證明 $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i)^2$ ，設迴歸直線為 $y = a + bx$ ，直線上的點

是 $(x_i, \bar{y}_i)$ ，其中 $\bar{y}_i = a + bx_i$ 。在證明之前，必須注意到 $\bar{\bar{y}} = a + b\bar{x} = \bar{y}$ 。第二個等號成立是因為

迴歸直線必過點 $(\bar{x}, \bar{y})$ 。

證明如下：

由

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i + \bar{y}_i - \bar{y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{y})\end{aligned}$$

我們的目標是證出 $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{y}) = 0$

此式展開後化簡可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n (y_i \bar{y}_i - y_i \bar{y} - \bar{y}_i \bar{y}_i + \bar{y}_i \bar{y}) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \bar{y}_i - n \bar{y}^2 - \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \bar{y}_i + n \bar{y}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i \bar{y}_i - \bar{y}_i^2)\end{aligned}$$

因此只需證明 $\sum_{i=1}^n (y_i \bar{y}_i - \bar{y}_i^2) = 0$ 即可

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (y_i \bar{y}_i - \bar{y}_i^2) &= \sum_{i=1}^n [y_i (bx_i + a) - (bx_i + a)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (bx_i y_i + ay_i - b^2 x_i^2 - 2abx_i - a^2) \\ &= \sum_{i=1}^n bx_i y_i + na \bar{y} - \sum_{i=1}^n b^2 x_i^2 - 2nab \bar{x} - na^2 \\ &= \sum_{i=1}^n bx_i y_i + na(b \bar{x} + a) - \sum_{i=1}^n b^2 x_i^2 - 2nab \bar{x} - na^2 \\ &= \sum_{i=1}^n bx_i y_i + nab \bar{x} + na^2 - \sum_{i=1}^n b^2 x_i^2 - 2nab \bar{x} - na^2 \\ &= b \sum_{i=1}^n x_i y_i - b^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - nab \bar{x} \\ &= b \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n x_i^2 - na \bar{x} \right)\end{aligned}$$

此時，利用迴歸直線的斜率

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

右邊分母乘到左邊，得

$$b \sum_{i=1}^n x_i^2 - nb\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$$

移項成

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n x_i^2 = n\bar{x}\bar{y} - nb\bar{x}^2$$

所以原式

$$b \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n x_i^2 - na\bar{x} \right) = b \left(n\bar{x}\bar{y} - nb\bar{x}^2 - na\bar{x} \right) = bn\bar{x}(\bar{y} - b\bar{x} - a)$$

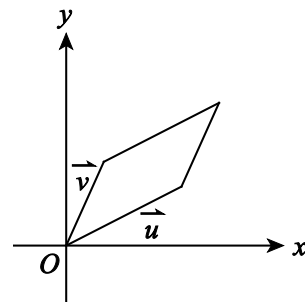
又 $\bar{y} = b\bar{x} + a$ ，故 $bn\bar{x}(\bar{y} - b\bar{x} - a) = 0$ ，即得所證。

行列式二三事

江慶昱／衛道中學退休教師

一、行列式的幾何意義》

$\vec{u} = (a_1, b_1)$ ， $\vec{v} = (a_2, b_2)$ 是兩平面向量，則 $\vec{u}$ ， $\vec{v}$ 所張的平行四邊形面積 $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|$ ，取 $\vec{u}$ 到 $\vec{v}$ 為逆時針方向，則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 為 $\vec{u}$ ， $\vec{v}$ 所張的有向面積。這件事在所有的課本都會有證明，所以我們就略過。



二、Cramer 公式的幾何意義》

$$\text{解} \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}, \text{ 設 } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}.$$

假設 $\Delta \neq 0$ ，則克拉瑪（Cramer）公式說： $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ ， $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ 。

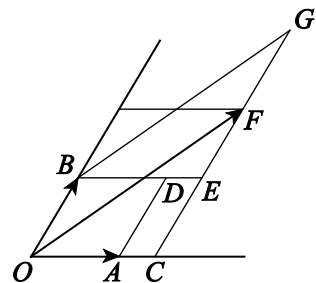
聯立方程組的解為什麼是面積比？幾乎所有的課本都是用加減消去法解出 x, y ，沒有呈現幾何（面積）意義。其實，驗證其幾何意義不難。

把 $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ 改寫成 $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$ ，其中 $\vec{OA} = \vec{u} = (a, d)$ ，

$\vec{OB} = \vec{v} = (b, e)$ ， $\vec{OF} = \vec{w} = (c, f)$ 則

$$x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\square OCEB}{\square OADB} = \frac{\square OFGB}{\square OADB} = \frac{\det(w, v)}{\det(u, v)} = \frac{\Delta_x}{\Delta},$$

同理可知 $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ 。

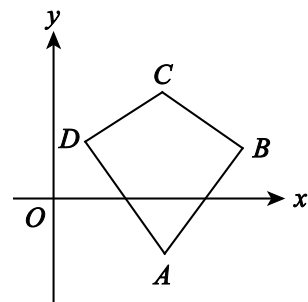


以上所述之 $\det(u, v)$ 表示向量 $\vec{u}$ ， $\vec{v}$ 所張的有向面積，所以 x, y 當然有可能是負數。三階行列式表示有向體積，想必三元一次聯立方程組的 Cramer 公式也可以這樣做。

三、測量師公式》

$A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ ， $D(x_4, y_4)$ 是平面上四個點，則四邊形 $ABCD$ 的面積

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & A \\ \hline & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{array} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1 - x_1 y_4 - x_4 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1)
 \end{aligned}$$

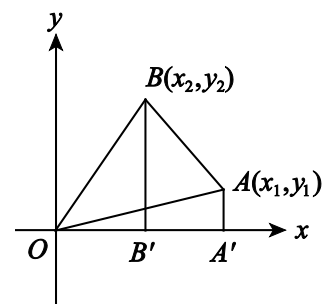


稱為測量師公式，聰明的學生就問了：是行列式嗎？

第一次我說：不是。後來想一想就說是：「加長型」行列式。何以故？我們來看看證明。

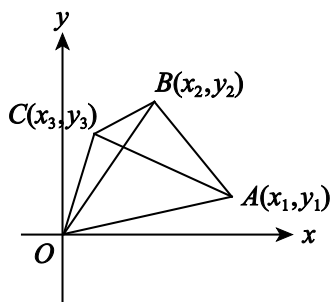
(1) 如右圖，

$$\begin{aligned}
 \Delta OAB &= \Delta OB'B + AA'B'B - \Delta OA'A \\
 &= \frac{1}{2} x_2 y_2 + \frac{1}{2} (y_1 + y_2) (x_1 - x_2) - \frac{1}{2} x_1 y_1 \\
 &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)
 \end{aligned}$$



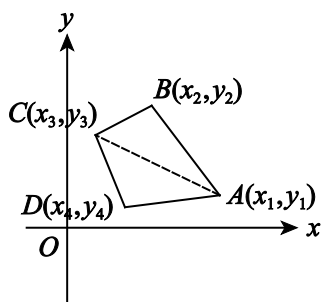
(2) 如右圖，

$$\begin{aligned}
 \Delta ABC &= \Delta OAB + \Delta OBC - \Delta OAC \quad (\text{由(1)}) \\
 &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) + \frac{1}{2} (x_2 y_3 - x_3 y_2) - \frac{1}{2} (x_1 y_3 - x_3 y_1) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$



(3) 如右圖，

$$\begin{aligned}
 ABCD &= \Delta ABC + \Delta CDA \quad (\text{由(2)}) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_3 \\ y_3 & y_4 & y_1 & y_3 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

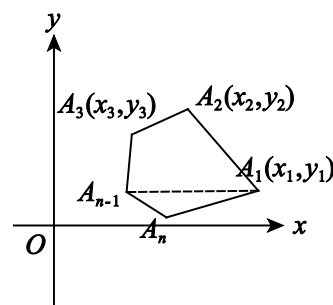


當然， n 個點形成的 n 邊形如右圖，面積

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n & x_1 & x_{n-1} \\ y_{n-1} & y_n & y_1 & y_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

我們注意其過程，就是幾個行列式一直疊在一起，所以說，測量師公式就是「加長型」行列式。



四、畢氏定理推廣》

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 是兩空間向量，則 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 所張的平行四邊形面積

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2} \cdots (*)。其幾何意義為何？$$

我們先看看畢氏定理說什麼，假設線段 L 長為 l ，其在 x, y 軸的投影長為 l_x, l_y 則畢氏定理說

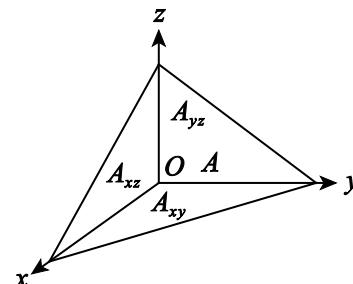
$$l^2 = l_x^2 + l_y^2。$$

$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ 表示 $\vec{a}, \vec{b}$ 所張的平行四邊形 A 在 yz 平面的投影面積，

我們用 A_{yz} 表示，則 $(*)$ 表示 $A^2 = A_{yz}^2 + A_{xz}^2 + A_{xy}^2$ ，正是畢氏定

理推廣到二維的情形。

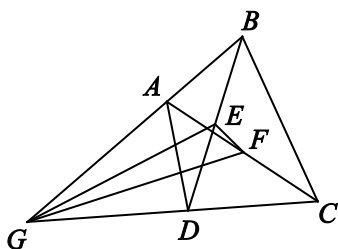
我高中時看到 $(*)$ ，認出它就是畢氏定理推廣，當時還滿得意的，所以念數學系，這有點關係。測量師公式可以推到 Green 定理，請看參考資料。



五、習作》

設四邊形 $ABCD$ 的邊 BA, CD 的延長線交於 G ，對角線 BD, AC 的中點交於 E, F ，則 $\triangle GEF$

的面積 = $\frac{1}{4}$ (四邊形 $ABCD$ 面積) (全國高中數學競賽 2005 中區 嘉義一)



參考資料：

1. 維基百科，Cramer's_rule，http://en.wikipedia.org/wiki/Cramer's_rule。
2. 維基百科線上數學百科全書，CramersRule，<http://mathworld.wolfram.com/CramersRule.html>。
3. 蔡聰明，從醉月湖的面積談起，
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_21_2_01/index.html。
4. 林琦焜，Green 定理與應用，http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_21_4_03/index.html。
5. 笛卡爾之夢，九章出版社，P.267。
6. From Pythagoras to Grassmann，畢氏定理高維方面的推廣，傳播季刊第 47 期。

習作解答：

《Lemma》

若 $\vec{a} \wedge \vec{b}$ 表示 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的有向面積，則：

$$(1) \vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b} \qquad (2) \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

$$\frac{1}{2} |\vec{GF} \wedge \vec{GE}| = \triangle GEF \text{ 的面積，由分點公式知 } \vec{GF} = \frac{1}{2} (\vec{GC} + \vec{GA}), \vec{GE} = \frac{1}{2} (\vec{GD} + \vec{GB})$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \vec{GF} \wedge \vec{GE} &= \frac{1}{2} (\vec{GC} + \vec{GA}) \wedge \frac{1}{2} (\vec{GD} + \vec{GB}) \\ &= \frac{1}{4} (\vec{GA} \wedge \vec{GB} + \vec{GA} \wedge \vec{GD} + \vec{GC} \wedge \vec{GB} + \vec{GC} \wedge \vec{GD}) = \frac{1}{4} (\vec{GA} \wedge \vec{GD} - \vec{GB} \wedge \vec{GC}) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \vec{GA} \wedge \vec{GB} = \vec{GC} \wedge \vec{GD} = 0$$

(逆時針算出來的值是正的，順時針算出來的值是負的)，這表示

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\vec{GF} \wedge \vec{GE}| &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} |\vec{GB} \wedge \vec{GC}| - \frac{1}{2} |\vec{GA} \wedge \vec{GD}| \right) \\ &= \frac{1}{4} (\triangle GBC - \triangle GAD) = \frac{1}{4} (\text{四邊形 } ABCD \text{ 面積})， \end{aligned}$$

得證。

科普好書推薦專欄

洪萬生／臺灣師大數學系退休教授

推薦 01

書名：《1, 2, 3 和 $+-\times\div$ 的數學旅行》

作者：大衛·柏林斯基 (David Berlinski)

譯者：甘錫安

推薦序：洪萬生

出版社：臉譜出版社

出版日期：2012 年 6 月

ISBN：9789862351833

關鍵詞：數學基礎、數學史、數學普及



就數學普及書寫而言，本書主題近於大學數學系的傳統課程《數學基礎》(foundations of mathematics)，是相當罕見且具膽識的選擇。顧名思義，數學基礎探討最基本的數學知識（如自然數概念等）的本質，尤其為什麼它具有確定性 (certainty)。這或許可以解釋何以作者提出他所謂的「超基礎數學」(absolutely elementary mathematics)。

由於本書說理與敘事兼備，儘管前者是重頭戲，不過，有時候為了讓讀者暫時擺脫邏輯的必然性「壓力」，作者會在適當時機提供敘事 (narrative)。因此，除了在相關脈絡中引進數學家的故事或文學性作品之外，作者也運用了許多比喻 (metaphor)，讓讀者對於他的說理有了更溫潤的理解可能。

一般來說，具有數學洞察力與寫作才華的數學家書寫普及作品時，都很喜歡針對數學世界進行比喻，以便強化他們的敘事與說明。他們除了模仿啟蒙運動思想家將數學知識比喻成一棵大樹之外，像史都華 (Ian Stewart) 就將數學比喻成為一座風景區，如此一來，他就可以搖身一變為風景區的導覽志工。至於本書作者則「設想數學就像一個城市，城市天際線的主角是三座雄偉的高塔。這三座宏偉的建物分別屬於『幾何』、『分析』和『代數』，探究的對象各是空間、時間及符號和結構。」在這樣的藍圖中，作者希望他所陪伴的主人翁自然數、0、負數和分數，可以為我們訴說這座數學城市的故事。

不過，本書最精彩的比喻，則是在第 21 堂課中，將環 (ring) 的三重抽象概念類比到法律

20 數亦優

上的契約的三種內涵。對比威利斯頓（Williston）的《契約》（Contracts），作者指出：在數學這一邊，首先的要求是數學家（以及讀者）願意接受公理所進行的壓縮；其次，數學家（以及讀者）願意把眼光投向剛開始要求我們接受公理的主題之外；最後，願意在公理系統中找出完全由公理創造的事物。而在法律這一邊，則威利斯頓注意到「法律將履行契約視為義務」；其次，法官或陪審團著手了解某些雙邊協議中有承諾約束；最後，願意了解契約法所說的契約是什麼。由於數學知識的確定性來自邏輯的「必然性」，因此，作者顯然企圖呼應契約中的某種法律「強制性」。

基於此一數學 vs. 法學之比喻，我們很容易可以猜測本書在數學論證方面的講究。現在，讓我簡介本書內容，或許讀者可以據以體會作者的用心。

本書共有 25 堂課，其中第 5、13、16 課分別以整課的篇幅，介紹三位數學家（阿伯拉、狄摩根和索菲雅·卡巴列夫斯基）的故事，其餘 22 課內容，就圍繞在自然數、0、負數與分數之概念及其運算所產生的抽象數學結構上。第 1-3 課主題是自然數與 0 的命名及位置記數法，其中並提及如何利用集合來定義自然數。在第 4 課中，作者介紹邏輯學中有關推論形式之意義，特別是與自然數的連結。第 6-7 課主題是公理系統與皮亞諾公理（Peano's Axiom）。第 8-9 課主要解釋加法的定義。第 10 課主題是乘法的定義，而進一步延伸的，是第 11 課的基底以及位置記數法。第 12 課主題是遞迴原理（recursion theorem），其中作者也特別說明它與相關定義法（method of definition）之連結。在第 14 課中，作者介紹五個算術定律：結合律、交換律、（乘法對加法的）分配律、三一律以及消去律，並且預示運算決定了數系結構之事實。在第 15 課中，作者說明數學歸納法原理（principle of mathematical induction）與良序原理（well-ordering principle）之關連。

限於篇幅，我上述這些流水帳式的簡介，看來相當「枯燥乏味」，儘管原書中還是有許多頗為精巧的論證。無論如何，作者顯然覺得此時必須來個「中場休息」，這應該是在第 16 課介紹偉大女數學家索菲雅·卡巴列夫斯基（Sofya Kavalevskaya）的故事，「不妨體會一下它們隱藏的熱情，以及它們引發的戲劇性事件」。

在第 17 課中，作者演示數學歸納法，以證明加法的結合律。第 18 課介紹 0 與負數，其中罕見地提及負數在複式簿記制度中相當好用。第 19 課主題是整數系。在第 20 課中，作者引述新代數作為一種符號的科學（science of signs），以及偉大（女）數學家諾特（Emmy Noether）對現代抽象代數的偉大貢獻。由於諾特的貢獻之一是環（ring），因此，作者緊接著在第 21 課中，介紹此一抽象代數之結構。然後，在此一關連中，作者在下一課（第 22 課）提供「負負得正」之證明。在第 23 課中，作者從《萊茵德紙草書》談到方程式求解，最終目的是討論多項式（可構成一個環）的角色。第 24 課主題是除法與分數，並進一步討論分數與小數的表徵形式。第 25 課的主題是數體（number field），作者引進這些抽象結構，完全基於它們的圓滿自足：「體的定義……本身告訴我們，數學和超基礎數學需要人類投注所有心力，創造抽象概念，同時相信這

些概念。」最後，在結語中，作者引用《蘇丹在後宮》這一幅畫，來強調數學的本質是關乎「自然生成與人為創造的兩種事物，和諧地彼此共存」。

就訴求目標讀者來說，本書可以跟《社會組也學得好的數學十堂課》（傑瑞·金著，商周出版，2010）做一個對比。後者顯然針對非科學主修大學生的數學通識課程。作者傑瑞·金（Jerry King）使用了數學 vs. 詩篇的類比，強調即使是人文社會科學主修的學生，也可以學好數學。如果一般人可以被詩篇所感動，那麼，他們又何嘗無緣參與數學知識活動呢？傑瑞·金認為基本的邏輯推理訓練、集合論、從自然數經整數、有理數、實數到複數的數系發展、數論、函數（含解析幾何）、機率論以及微積分等等，都是不可或缺的主題。同時，他又高度重視數學知識的結構面向，譬如從自然數系到微積分的縱深統整論述，就明確地演示數學的意義與價值不僅在於它的廣泛應用，而且也關乎它自身的真與美。

相對而言，本書也極端重視論證，不過，作者在求「真」方面顯得更加堅持，為此，他認為應該深入公理系統的設置底層，探索比如算術加法與乘法的結合律（associative law）與遞迴（recursion）的本質關係。另一方面，他的「求真」也相當「純粹」，比如當他運用一列骨牌比喻數學歸納法：「若（if）第一張骨牌倒下，且若（if）推倒任何一張骨牌即可再（then）推倒下一張，則（then）所有骨牌一定會倒。」緊接著，他表達了「以物理方式類比數學運算時的必然限制」：「我經常想，這個說法（按即骨牌比喻）在物理學上是否成立。動量在骨牌長龍中傳遞，意味著骨牌可能會持續倒下，但動量在骨牌長龍中會逐漸衰減，意味著骨牌長龍延伸到外太空時，它呈現的波浪會逐漸減慢，最終會停頓下來，直到很多很多骨牌直立著。」還有，基於這種比喻，本書內容幾乎不涉及數學應用例證，一點都不令人感到意外。

上述有關本書這些風貌，都可以解釋作者的敘事手法。由於本書強調數學基礎之論證，因此，在考量到讀者的耐心時，他隨時地「岔入」數學或數學家的故事。在本書中，作者所介紹的數學家（從古代到 20 世紀中期）就將近 20 位之多，而且大都簡述他（她）們的故事傳奇。此外，他也經常引述一些文學作品，以便「淡定」陷入基礎深淵的數學熱情。

總之，這是一本相當另類的數學普及小品。一般讀者初次接觸本書不免覺得論證「超量」，但平心而論，讀者若懷抱一點點耐心，順著這些材料讀下去，也並非難以理解。數學知識中有許多基本但極為深刻的內容，譬如自然數如何定義？中學階段所學習的數學歸納法有何意義？所謂的遞迴定理與我們所理解的數學基本概念又有何關連？還有，數學運算如何決定結構？等等，都在本書中有了簡易可及的切入點。無論如何，本書的訴求呼應了通識教育中非常古典的心智訓練，讀者若有機會隨性地讀個幾章（順序無妨），一定可以變得比較博雅才是。至於中小學數學教師呢，本書至少可以提醒：那五個算術定律為何那麼重要了。

最後，我們必須指出本書的一些謬誤與商榷，供讀者參考。

有關基數 (cardinal number) 問題。頁 12 提及「沒有自然數，我們無法計數，也無法回答『有多少？』這個問題。」這一句論斷值得商榷，因為在「數不過三」(亦即：只能數一、二、很多很多)的民族部落中，還是有能力運用一一對應關係 (one-to-one correspondence)，確認他的二十頭羊是否走失。

頁 141 有關骨牌比喻數學歸納法之說明中，「直到僅餘一個骨牌直立著」應該修訂為「直到還有很多很多張骨牌直立著」，才比較「正確」與達意。

在頁 185，作者提及群論 (group theory) 是在伽羅瓦決鬥身亡前一天晚上寫成的作品中達到完備。又，在頁 224，作者再次強調：「在決鬥身亡的前一天晚上，二十四歲的伽羅瓦盡情發揮才能，重新檢視多項 (式) 方程式的根，首先發現了對稱限制系統，這個系統將可決定哪些方程式可解、哪些又不可解。」有關此一敘事不符合史實，數學史家早已貼心糾正，可惜，作者可能還是參考始作俑者的 E. T. Bell 的《大數學家》(Men of Mathematics)。事實上，在決鬥前夕，伽羅瓦寫信給他的好友，交代後者要幫忙珍惜他自認為畢生最偉大的數學貢獻，而那是他已發表的論文結果，因為他說：「我的命運已經無法讓祖國及時認識我的貢獻」。

書名：《數字奇航》(Alex's Adventures in Numberland)

作者：艾利克斯·貝洛斯 (Alex Bellos)

譯者：胡守仁

出版社：時報文化出版

出版日期：2012 年 4 月

ISBN：9789571355283

關鍵詞：趣味數學、科技新聞主義 (scientific journalism)、數學普及、民族數學



一、前言

本書原文有兩個版本，分別是美國版與英國版。本中譯本根據英國版翻譯成，其書名顯然仿自《愛麗斯夢遊仙境》(Alice Adventures in Wonderland)。不過，美國版除了書名改為 “Here’s Looking at Euclid” 以及略掉一些彩色差頁圖片之外，其餘內容完全一樣。作者艾利克斯·貝洛斯 (Alex Bellos) 從牛津大學獲得數學與哲學雙學位，因此，他的敘事 (narrative) 與說理 (discourse) 之游刃有餘，可以見證他的所學之博雅。他曾經擔任英國《衛報》記者，並派駐巴西數年，同時，從他的姓氏，或可猜出他的拉丁美洲血統。這些跨界的豐富經歷，也讓他的書寫觸角遍及全世界那些非西方主流或非制式 (nonconventional) 的數學知識活動。因此，我們在本書中得以欣賞作者所呈現的「民族數學」(ethnomathematics)，一點也不令人意外。

在他的〈序言〉中，作者也分享他書寫本書的心路歷程：「成年後再踏入數學世界，我的經驗與孩童時期截然不同。當時由於應付考試，往往忽略了真正引人入勝的事物，而現在我得以自由自在地涉獵看起來新奇的事物。」因此，「我覺得我就像一個身負重任的駐外特派記者，只不過這次，我的駐在地是抽象的數學世界。」顯然，作者現在打算「馴服」(tame) 數學，¹ 至於他的切入點，則是體驗數學的實際運用。於是，他開始將他的旅行地圖延伸到全球各地：譬如說吧，他訪問印度，為的是體驗這個古文明如何發明 0；他進入雷諾賭場去觀察機率與博弈；到了日本，他則是認識了會計算的猩猩。

隨著旅程的推進，作者發現他自己「處於既是專家又是業餘者的微妙地位」，同時，「再度學習學校教過的數學就像重新認識老朋友」。部分基於此一原因，在本書中，作者加入了相當分

¹ 巧合地，臺灣數學教育學會 (Taiwan Association of Mathematics Education) 的英文縮寫也剛好是 TAME。這種巧合，或許是學會的成員自許要將 (一般人認為抽象、可怕的) 數學馴化，以便與一般人分享數學知識的有趣與有用吧。

量的歷史資料，因為數學就是數學發展的歷史。人文科學永遠都因為新思想或新潮流取代了舊思維，而處於一再重複發現的狀態，應用科學的理論總是經歷不斷的修正。但數學和它們不一樣，數學永遠不老化。畢氏定理或歐幾里得定理的成立，現今一如往昔，這也就是為什麼畢達哥拉斯和歐幾里得是我們在學校學到的最古老的名字了。到了十六歲，學生學到的也不超過十七世紀中葉人們所懂的數學，到了十八歲，學到的也不過是十八世紀中葉的數學，而我在大學裡學到的最現代的數學，則是來自 1920 年。

旨哉斯言！光是憑著作者上述的「現身說法」，本書就值得高度推薦！

不過，原書與中譯本有一些誤謬或誤植（請參考本文末勘誤表），也請讀者多加注意為要。

二、內容簡介

本書共有十二章，目次依序如下：

第 0 章 數字之始

第一章 計數文化

第二章 看吧！

第三章 關於空無一物

第四章 π 的故事

第五章 X-因子

第六章 遊戲時間

第七章 數列的秘密

第八章 金手指

第九章 機遇好極了

第十章 一切歸於正常

第十一章 盡頭到了

有關本書內容，在第 0、一章中，作者主要說明民族數學例子、計數、基底進位制與（日本與中國的）珠算盤。第二章以婆神迦羅（Bhaskara II）的畢氏定理證明結語 —「看吧！」（behold!）為題，當然介紹與該定理證明的相關歷史，譬如歐幾里得《幾何原本》內容，乃至日本的摺紙數學，尤其是芳賀和夫（Kazuo Haga）的貢獻：

如果說現代世界有哪一個人能夠體現畢達哥拉斯的精髓，我敢說那就是芳賀和夫了。他和畢達哥拉斯對於數學的發現有著相同的熱情，都是基於幾何單純的和諧性。這種發現的經驗觸動芳賀的靈魂，就像兩千多年前的畢達哥拉斯。芳賀說：「大多數的日本人都熱中於創造新的摺紙形狀，我的目的是跳脫在實際上創造新東西，反而是發現數學現象。這就是為什麼我會這麼感興趣。就算在極其簡單的世界，一樣能夠發現令人著迷的東西。」（頁 90）

有關第三章，本書作者則以 0 的發明為主題，並說明數學與印度教與佛教文明之密切關係。任何讀者有意了解印度宗教文化，本章是極佳切入點。在第四章中，作者則從幾位速算者（lightening calculator）談起，其中還包括一些被科學研究中心聘用專司計算。譬如德國的達斯（Zacharias Dase），就曾接受偉大的高斯建議，建立一個從 7,000,000 到 10,000,000 之間的所有數的因數表。但是，他之所以有趣，則是因為他十幾歲時，就已經計算 π 到小數點後兩百位了。利用這個引子，作者為我們說明 π 的故事。其中，有許多插曲都已見於其他科普書籍如《 π 的傳奇》。不過，真正有趣的，則是前述的達斯求得 π 的兩百位小數近似值，所運用的無窮級數展開式：

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3}{3} \right] + \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^5}{5} \right] - \dots$$

當然，他如何得知此一展開式，高斯是否曾經指點一二，真是令人好奇！

第五章主題是代數與對數，但是，作者卻是利用一個魔術數字 1089 當作引子。在代數的發展史方面，作者依序介紹古埃及、古希臘丟番圖、第九世紀的阿爾·花拉子模，以及韋達與笛卡兒的符號法則（symbolism）。有關符號法則的威力，作者也對照了帕西歐尼（Luca Pacioli, 1494）、韋達（Viète）以及笛卡兒有關二次方程式 $4x^2 - 5x + 3 = 0$ 的寫法（中譯本頁 152 第二段）。可惜，原書本段有承上啟下的一句話被略掉了，以致於讀起來不連貫。² 在對數的歷史發展方面，作者介紹納皮爾（John Napier）引進對數（logarithm，取自古希臘語 logos 與 arithmos 之組合），接著，又說明布里格斯（Henry Briggs）利用以十為底數的概念簡化對數，以及甘特（Edmund Gunter）發明並由奧特瑞德（William Oughtred）改良的對數尺。

第六章的主題是娛樂數學或休閒數學（recreational mathematics）。作者以幻方（magic square）、拉丁方陣（Latin square）、數獨、七巧板以及數字推盤遊戲，最後這個遊戲後來演變成為魔術方塊。本章也介紹兩位解謎專家，美國的羅伊德與英國的杜德奈，後者的數學能力甚佳，乃能觸及一些頗有深度的數學問題，譬如郵差問題。另外，杜德奈也發現了正方形與正三角形、正方形與正五邊形互換的幾何切割方法，他將這種謎題為裁縫商謎題（Haberdasher's puzzle）。在本章最後，作者特別分享他參加為葛老爹（1914-2010）而聚的第八屆 G4G（Gathering for Gardner）研討會之心得。另一方面，本章也提及魔術方塊之相關賽事，國內對相關問題感興趣的讀者，想必曾經造訪本系郭君逸（David Guo）教授的網站才是。

對於稍微熟悉數學分析學的讀者來說，本書第七章所揭示的數列之秘密，是相當受用的內容，比如說，從調和級數刪除下列各項（含有數字 9 的每一項）：

² 這句話如下：With Descartes' symbology, all traces of rhetorical expression had been expunged.

$1/9, 1/19, 1/29, 1/39, 1/49, 1/59, 1/69, 1/79, 1/89, 1/90, 1/91, 1/92, \dots$

其結果是變為收斂級數，「刪除 9，我們馴服了巨大的無限。」不過，本章更令人瞠目結舌的例子，則是與數論有關的一些奇妙數列，比如說，在下列數列

$1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 2, \dots$

中，3 第一次出現在第九項，4 第一次出現在第 221 項。但是，5 何時第一次出現呢？答案匪夷所思，請讀者先猜猜看吧！

第八章主題是黃金比（golden ratio） ϕ 與斐波那契數列。「黃金比」這個名詞在中文界都慣稱為「黃金比例」，其實有一點誤解，因為這代表一個比（值），而非「比例式」。本章一開始，作者就介紹一位 phi 迷樂文（Eddy Levin）與我們認識，他對 ϕ 的著迷（obsession）已經到了無法自拔的程度了。譬如，他一見到本書作者 Alex Bellos，就請後者利用大寫英文寫下這個名字 ALEX BELLOS，然後，運用他的「黃金尺規」（一把鉗子），確認作者所寫的名字之字母分布比是為黃金比。換言之，作者書寫時，遵循了黃金法則。至於這位樂文何以對 ϕ 如此狂熱呢？原來，他是一位牙醫，早年發現他自己再怎麼努力設計，都無法讓假牙在患者臉上的笑容顯得自然一些：「不管怎麼樣，牙齒看起來就很假。」於是，他開始上數學與心靈課程，因而知道了黃金比例。他深受帕喬利（Luca Pacioli）的《神聖比例》之啟發，有一天半夜兩點，他赫然發現在最迷人的牙齒中，中間的大門牙比兩側的門牙寬一個 ϕ （的比值）。側門牙比犬齒寬一個 ϕ 。犬齒又比前臼齒寬一個 ϕ 。因此，他的結論是：完美微笑之美由 ϕ 決定了。

第九章主題是機率，作者從期望值與大數法則兩方面來編故事。作者一開始，從吃角子老虎（角子機）開始談起，緊接著，介紹卡丹諾（Girolamo Cardano）出場。再接著，則是十七世紀標誌著機率論誕生的「點數問題」（problem of points）。原來這是一位賭徒向巴斯卡請教的一個賭局中斷如何分配賭金的問題，經過巴斯卡與費馬兩人的通信，最後，他們各自提出了圓滿的解法，以及相同的正確答案。本章最後的主題是隨機，作者指出：「由於我們的頭腦不擅長了解隨機，機率論是數學中充斥最多悖論和驚奇的領域。我們直覺認為模式出現必有其因即使知道並非如此。對於角子機的玩法認為機器在連敗之後釋出大獎的機會很大，我們很容易嗤之以鼻，但是賭徒的謬誤心理在非賭徒身上也看得到。」於是，他討論科普書籍十分喜愛的生日悖論（birthday paradox），比如過去十屆（足球）世界杯的決賽球隊中，有七屆至少有兩個球員生日在同一天！或比如「隨便找 23 個人，其中有 2 個人生日在同一天的機會要比兩人生日都不在同一天的機會更大」。這種以大數法則為論述基礎的「隨機漫步」或「醉漢走路」，也幫助我們澄清了我們直覺上的「期望」謬誤。

第十章主題為統計學。作者從經驗數據（譬如法國麵包的重量）的收集切入，進一步指出：在十六、十七世紀時，「收集數據成了流行的業餘活動，而這並不是一時的風尚，這股狂熱標誌著現代科學的開端」。不過，統計學成為一門學問，卻遲至十九世紀。作者先從高斯發現的鐘形曲線談起，藉以呼應數據收集的誤差現象。接著，就轉向讓 statistics 成為現代用法的奎特雷（Adolph Quetelet），這位比利時學者在 1853 年舉辦了第一次的統計國際會議。再其次，作者將達爾文（Charles Darwin）的表兄弟高爾頓（Francis Galton）帶出場。不同於奎特雷對鐘形與平均的著迷，高爾頓強調優生學。這種偏執的主張，為種族主義者提供了可怕的彈藥，一直到 1994 年，還有人著書強調「不同種族間的智力差異，是種族差異的證據」。儘管如此，高爾頓對統計學的貢獻，絕對不僅止於協助他的被保護者（protégé）Karl Pearson 在大學（University of College London）創辦了第一所統計系，而是他的迴歸與相關（regression and correlation）等概念，讓統計分析成為今日科學（自然與社會都包括在內）研究的利器。可惜，高爾頓的貢獻及其應用，譬如說解讀美國《運動畫報》（Sports Illustrated）的詛咒等等，都被中譯版略掉了。

第十一章（也是最後一章）的主題是非歐幾何學，但是，由於這種幾何違背吾人直觀，作者也運用了本章另一半的篇幅來介紹康托（Georg Cantor）的集合論。或許，這是作者為了呼應第 0 章所作的安排：

也是結束我們旅程的好地方。我在開始的章節這麼說：數學因人類意圖找出所在環境的意義的渴望而出現。由在木頭上刻痕或數指頭，我們的祖先發明了數。數對於農耕與交易都有助益，因此引導我們進入「文明」。當數學發展之後，這個課題不再只有實際的東西，更多的是抽象化的東西。希臘人引入了點與線，印度人發明了 0，打開了更激進的抽象化大門，例如負數。這些概念一開始時或許違反直觀，但很快就為人們所吸收，我們現在都在使用。然而到了十九世紀末，連接數學和我們經驗的臍帶從此斷裂。經過了黎曼和康托，數學失去了任何與世界直觀評價的聯繫。

上述這些反思固然有其史識，不過，作者還是為我們布置了更有洞察力的結語：

康托引導我們到達想像之外的世界。這是個相當美妙的地方，有趣的是和我一開始所提到的亞馬遜部落的情形剛好相反。孟杜魯庫人有許多東西，卻沒有足夠的數來數；康托提供我們很多很多的數，我們卻沒有足夠的東西需要數。

三、評論

作者在本書每一章開端，都會提供非常有趣的例子，以吸引讀者的閱讀興趣。在第一章，作者就以中世紀英國林肯郡牧羊人數羊時所編的行話為例，說明計數文化的趣味與意義。第二章的主題是畢氏定理及其相關幾何知識，由於涉及畢氏學派，因此，作者就以命數論（numerology）作為引子。第三章主題是印度人發明了 0，因此，作者就以佛經為大數造字為開場白。第四章主

題雖然是 π 的故事，但是，由於背誦圓周率的小數位一直都受人矚目，所以，作者在本章一開始，就以心算天才的故事切入主題。第五章主題是代數學，作者的開胃菜正是魔術數字 1089。這個魔術數字非常可以吸引一般讀者。我曾在臺大數學通識課堂（學生主要來自文法學院）介紹此一數字，結果引起相當大的「騷動」，有兩位學生上臺分享他們的證明，結果也十分令人滿意！

本書第六章主題是休閒或娛樂數學，作者就從日本一家數字益智遊戲雜誌的創辦人鍛冶真起談起。第七章主題是數列，不過，作者的破題卻是一位在網路上編輯《網路整數數列大全》（Online Encyclopedia of Integer Sequences）的怪人。第八章主題是黃金比（golden ratio）與斐波那契數列，作者一開始介紹的是一位黃金比的超級粉絲。第九章主題是機率，作者以吃角子老虎的賭金利潤為引子，然後引進第一個嗜賭成性的十六世紀義大利數學家卡丹諾。第十章主題是統計，作者利用電子秤來收集法國麵包重量的統計數據。在第十一章（也是最後一章）一開始，作者介紹編織雙曲平面（hyperbolic plane）的數學家泰米納（Daina Taimina）出場，她是拉脫維亞裔的數學家，我曾在 HPM 研討會與她見過面。

本書體例可以歸類為最能呼應普及傳統的典型書寫 — 趣味數學，不過，作者每能在適當脈絡切入歷史（數學史）或人類學考察（譬如針對民族數學），又能輔以全世界「走透透」的奇人異士訪談（多虧了他的《衛報》記者身分），因此，本書文體雖然完全符合「科技新聞主義」（scientific journalism）之活潑生動風格，但就數學或數學史的內容來說，本書卻言之有物，內容十分紮實，而不像有些類似作品（作者背景也類似），往往花巧招搖，文勝於質。

最後，就書名來討論。本書中譯版顯然是依照英國版來翻譯。相形之下，我們實在無從理解何以美國版命名為 “Here is Looking at Euclid!”，因為歐幾里得固然在數論方面（譬如《幾何原本》第 VII-IX 冊內容）也貢獻卓著，然而，他的主要成就在幾何學 — 那是本書第二、四和十一章的部分主題，不過，作者念茲在茲的，仍然是他的「數字奇航」(Adventure in Numerland)！無論如何，這種奇航的目的地，顯然是追尋數字中的模式（pattern），而這當然呼應了何謂數學的新說法：數學是一種研究模式的科學！

推薦 03

書名：《啟發每個人的數學小書》

作者：莉莉安·李伯（Lillian R. Lieber）

譯者：洪萬生、英家銘

出版社：究竟出版社

出版日期：2012 年 5 月

ISBN：9789861371559



當你翻開本書目錄時，先猜想一下本書第 IX、X 章標題何以分別稱之為「締結良緣」與「貴子早生」？哈佛大學傑出數學家貝利·馬祖爾（Barry Mazur）說：「這是李伯一家邀請我們參加代數和幾何的婚宴」。事實上，這一對在十七世紀所組成的數學新家庭，就叫做「解析幾何」（analytic geometry），至於他們早生的貴子，當然就是第 X 章的主題「微積分」（calculus）了。

上述這個充滿數學史洞識的比喻，可以見證本書作者李伯一家人的博雅素養，以及非常樂觀的自由主義思想，儘管當時二戰正酣，時局嚴酷與險惡。馬祖爾指出：

進入這本書的世界，就有如發現一個充滿希望的地方，裡面的想法——純粹的想法——正在被雨水閃耀地沖刷。而且，它們就像向日葵一樣，很快就會將自己的嶄新花瓣展現給你，充滿了各種可能、令人喜悅以及有用之處。

當然，這是因為「作者們有那個天分，可以真正寫出一本給所有人看的數學書。」事實上，本書是數學家莉莉安·李伯（Lillian Lieber, 1886-1986）教授於 1944 年，為二戰出征的美國大兵所寫的一本數學休閒小書。全書才大約三萬字，為了方便閱讀，還採用一行一詞句的方式書寫，再加上作者先生休·李伯（Hugh Gray Lieber）的俏皮貼切插畫，使得本書洋溢著極大的啟發性。無怪乎馬祖爾教授還特別強調：

這本小書所帶來的興奮感，剛好和它的大小成反比。這本書的重量，比如說，相較於當代微積分教科書（有時候，我很好奇搬著它們到處跑的學生，為什麼沒有額外的體育課學分），真是有相當大的對比。不知道是出自懶惰還是有一般的躁動靈魂，當我還是青少年的時候，我很喜歡那些去除噓頭，旨在寫出主題本質的並帶點叛逆性的輕薄小書。

可見，本書所以受到馬祖爾的青睞，完全是因為這一位傑出數學家的十二歲年代，受到它直指核心且「帶點叛逆性」的風格所吸引。而這種「現代性」(modernity)，當然也見證了美國數學家養成教育制度的逐漸成熟，以及許多美國在二十世紀早期本土培養的數學博士，如何地以數學教育與普及為職志。

根據約瑟夫·雅伯(Joseph Alper)的說明，¹ 莉莉安·羅森諾夫(Lillian Rosanoff)是生於俄羅斯的猶太人家庭，後來隨家人移民美國。她先後取得紐約的Barnard學院學士、哥倫比亞大學碩士，1914年，她從Clark大學榮獲博士學位。1934年，當她應聘到紐約長島大學數學系任教時，與當時的系主任休·李伯結為連理。1945年，當修·李伯轉任該校藝術系主任時，莉莉安繼任數學系主任，直到1954年退休為止。

顯然基於數學普及的崇高理想(她的科普系列書籍至少有十本之多)，莉莉安希望利用科普書寫，讓年輕人理解數學與科學在政治與倫理等方面的蘊涵。另一方面，她也注意到一般學生直到大學階段，才有機會接觸源自十九世紀的現代數學。因此，為了讓學生體會數學知識活動的令人興奮，她認為有必要引進伽羅瓦群(Galois group)、非歐幾何、四維空間乃至於現代邏輯等等那些革命性的風貌。而所有這些，都在本書中有了相當具體的實現。

本書除了〈前言〉(馬祖爾)、〈序言〉、〈介紹男主角〉以及書末的〈寓意〉之外，共有二十章，其中所介紹數學主題，涵蓋了歐氏幾何、非歐幾何、有限幾何、有限代數、解析幾何、微積分、第四維空間以及相對論等等，並及於方法論之省思，以及現代數學 vs. 現代藝術的抽象性之對比。各章篇幅精簡、內容強悍，但是，呈現手法卻十分輕鬆俏皮，尤其是各章標題，更是時有佳作，除了前述的第IX章〈締結良緣〉(a wedding)、第X章〈貴子早生〉(the offspring)之外，還有分別介紹非歐幾何的第XIV章〈自由與特許〉，以及有限幾何的第XV章的〈傲慢與偏見〉。所有這些，都是由於莉莉安認為所謂的SAM(science, art and mathematics)表現了人類文化的(良)善、真(實)與美(妙)，從而對年輕讀者娓娓道來，說明現代數學的理論、啟示及其令人震懾的興奮效果，是現代教育乃至於數學普及著述必須承擔的時代使命。

儘管如此，李伯夫婦非常「到位」的科普素養，足以在本書一開始，就能讓年輕讀者愛不釋手。譬如說吧，在第I章中，作者就提醒我們「五千萬人也可能是錯的」，他們經由一個簡單的計算題，告訴我們「別成為倉促做決定的人」。其次，在第II章中，作者提出加倍疊紙巾(每張厚度0.003吋)的問題，然後要讀者猜測疊到第32次時，總共疊成的紙巾大約有多高？作者利用這個例子，說明很多時候我們依賴直覺解決問題固然無可厚非，然而，直覺的東西在被檢查和複檢之前，「並不會成為值得尊敬的科學和數學」，儘管她十分仰慕法拉第(Faraday)緣起於直覺的許多貢獻。至於在第III章中，作者則拋出另一個問題：已知有一條鋼環緊緊的環繞著地球的赤道。現在你將它移走，並在一處將它切開，然後接合一段額外10呎長的部分。在這鋼

³ Joseph S. Alper, "Lillian R. Lieber", *Jewish Women's Archive*。2012-03-16 取用。

環和地球之間究竟產生多大的空間呢？針對它那令人出乎意料的解答，作者提醒我們：沒有理論或計畫，光是機械式的操作，這個問題裡面的數字，並不因為你使用算術，就會讓它變得有意義！

以上所提及問題都常見於數學普及書籍。作者在此「老生常談」，其目的就是希望我們都能運用數學來效化（streamline）心靈。為此，當我們學習數學時，就必須強調一般化、抽象化以及精確定義的重要性，進而位於作者所謂的五層「圖騰柱」頂層的純數學思維，當然就至為重要了。作者以收音機為例，說明這個發明如何先後受惠於義大利馬可尼（Marconi）的無線電設備、德國赫茲（Hertz）的電磁波實驗、英國馬克斯威爾（Maxwell）的電磁學理論，乃至於最後，牛頓微積分如何被應用到電磁的微分方程式上。因此，要是沒有純粹的數學理論，哪來科技上的重要發明？

當然，從本書的說明，我們也可以看到數學不只是給工程師，或是需要數學公式的人使用而已，「數學是一種思維方式，一種生活方式」，才是作者所念茲在茲的理念。因此，在第 XI 章「本書上半總結」最後，作者特別指出：「大部分數學課程都沒有留下時間讓你考慮上面那些事情。時間都用來學習演算技術。我們必須要停下來，然後從技術的操弄中，看出可以從中得到哪些一般觀念。而這些一般觀念是對我們所有人都管用的」。

作者這種針對比較結構主義式進路（structuralistic approach）的「新式教育」之呼籲，在本書後半部提供了一個教育現代數學（modern mathematics）的藍圖。至於其具體內容，則是基於隨意定奪的假設、但卻邏輯相容（consistent）的公設數學如非歐幾何、有限幾何、有限代數、第四維空間等等。如此一來，受過這種現代數學訓練的公民，「對於自由終止於何處，以及特許（license）始於何處，有一個非常清楚的體認：他非常了解到他不能在一個系統中引進任何事物，使得矛盾發生，而摧毀這個系統本身。」因此，基於這樣的自由主義之倫理蘊含，「即使在一個民主制度中，允許民主的敵人使用言論自由去摧毀民主，是不合乎邏輯的。同理，自由企業也必須因著民主的其他設準而有所規範。」

上述作者所關心的這種自由 vs. 特許的張力，在現代藝術與音樂等等的創造上，倒是沒有什麼禁忌，因為它的奇特性正是現代主義（modernism）的一個特徵。所以，讀者「將不會驚訝地發現到現代藝術比起過氣的時尚藝術，擁有還要無限多的品類，就好比今日數學擁有比過去一直有的還要無限多的品類」。

無論作者基於現代數學精神的自由主義倫理主張是否具有說服力，本書的精緻內容與圖文並茂的表現形式，都值得我們細心品味。總之，這一本年齡即將邁入七十歲的阿嬤級讀物，既是數學普及書寫的一絕，也是數學知識永恆性的一個見證。因此，我們非常樂意中譯並推介給中文讀者，特別是中學師生閱讀。

科普好書推薦專欄

洪萬生／臺灣師大數學系退休教授

推薦 01

書名：《1, 2, 3 和 $+-\times\div$ 的數學旅行》

作者：大衛·柏林斯基 (David Berlinski)

譯者：甘錫安

推薦序：洪萬生

出版社：臉譜出版社

出版日期：2012 年 6 月

ISBN：9789862351833

關鍵詞：數學基礎、數學史、數學普及



就數學普及書寫而言，本書主題近於大學數學系的傳統課程《數學基礎》(foundations of mathematics)，是相當罕見且具膽識的選擇。顧名思義，數學基礎探討最基本的數學知識（如自然數概念等）的本質，尤其為什麼它具有確定性 (certainty)。這或許可以解釋何以作者提出他所謂的「超基礎數學」(absolutely elementary mathematics)。

由於本書說理與敘事兼備，儘管前者是重頭戲，不過，有時候為了讓讀者暫時擺脫邏輯的必然性「壓力」，作者會在適當時機提供敘事 (narrative)。因此，除了在相關脈絡中引進數學家的故事或文學性作品之外，作者也運用了許多比喻 (metaphor)，讓讀者對於他的說理有了更溫潤的理解可能。

一般來說，具有數學洞察力與寫作才華的數學家書寫普及作品時，都很喜歡針對數學世界進行比喻，以便強化他們的敘事與說明。他們除了模仿啟蒙運動思想家將數學知識比喻成一棵大樹之外，像史都華 (Ian Stewart) 就將數學比喻成為一座風景區，如此一來，他就可以搖身一變為風景區的導覽志工。至於本書作者則「設想數學就像一個城市，城市天際線的主角是三座雄偉的高塔。這三座宏偉的建物分別屬於『幾何』、『分析』和『代數』，探究的對象各是空間、時間及符號和結構。」在這樣的藍圖中，作者希望他所陪伴的主人翁自然數、0、負數和分數，可以為我們訴說這座數學城市的故事。

不過，本書最精彩的比喻，則是在第 21 堂課中，將環 (ring) 的三重抽象概念類比到法律 20 數亦優

上的契約的三種內涵。對比威利斯頓（Williston）的《契約》（Contracts），作者指出：在數學這一邊，首先的要求是數學家（以及讀者）願意接受公理所進行的壓縮；其次，數學家（以及讀者）願意把眼光投向剛開始要求我們接受公理的主題之外；最後，願意在公理系統中找出完全由公理創造的事物。而在法律這一邊，則威利斯頓注意到「法律將履行契約視為義務」；其次，法官或陪審團著手了解某些雙邊協議中有承諾約束；最後，願意了解契約法所說的契約是什麼。由於數學知識的確定性來自邏輯的「必然性」，因此，作者顯然企圖呼應契約中的某種法律「強制性」。

基於此一數學 vs. 法學之比喻，我們很容易可以猜測本書在數學論證方面的講究。現在，讓我簡介本書內容，或許讀者可以據以體會作者的用心。

本書共有 25 堂課，其中第 5、13、16 課分別以整課的篇幅，介紹三位數學家（阿伯拉、狄摩根和索菲雅·卡巴列夫斯基）的故事，其餘 22 課內容，就圍繞在自然數、0、負數與分數之概念及其運算所產生的抽象數學結構上。第 1-3 課主題是自然數與 0 的命名及位置記數法，其中並提及如何利用集合來定義自然數。在第 4 課中，作者介紹邏輯學中有關推論形式之意義，特別是與自然數的連結。第 6-7 課主題是公理系統與皮亞諾公理（Peano's Axiom）。第 8-9 課主要解釋加法的定義。第 10 課主題是乘法的定義，而進一步延伸的，是第 11 課的基底以及位置記數法。第 12 課主題是遞迴原理（recursion theorem），其中作者也特別說明它與相關定義法（method of definition）之連結。在第 14 課中，作者介紹五個算術定律：結合律、交換律、（乘法對加法的）分配律、三一律以及消去律，並且預示運算決定了數系結構之事實。在第 15 課中，作者說明數學歸納法原理（principle of mathematical induction）與良序原理（well-ordering principle）之關連。

限於篇幅，我上述這些流水帳式的簡介，看來相當「枯燥乏味」，儘管原書中還是有許多頗為精巧的論證。無論如何，作者顯然覺得此時必須來個「中場休息」，這應該是他在第 16 課介紹偉大女數學家索菲雅·卡巴列夫斯基（Sofya Kavalevskaya）的故事，「不妨體會一下它們隱藏的熱情，以及它們引發的戲劇性事件」。

在第 17 課中，作者演示數學歸納法，以證明加法的結合律。第 18 課介紹 0 與負數，其中罕見地提及負數在複式簿記制度中相當好用。第 19 課主題是整數系。在第 20 課中，作者引述新代數作為一種符號的科學（science of signs），以及偉大（女）數學家諾特（Emmy Noether）對現代抽象代數的偉大貢獻。由於諾特的貢獻之一是環（ring），因此，作者緊接著在第 21 課中，介紹此一抽象代數之結構。然後，在此一關連中，作者在下一課（第 22 課）提供「負負得正」之證明。在第 23 課中，作者從《萊茵德紙草書》談到方程式求解，最終目的是討論多項式（可構成一個環）的角色。第 24 課主題是除法與分數，並進一步討論分數與小數的表徵形式。第 25 課的主題是數體（number field），作者引進這些抽象結構，完全基於它們的圓滿自足：「體的定義……本身告訴我們，數學和超基礎數學需要人類投注所有心力，創造抽象概念，同時相信這

些概念。」最後，在結語中，作者引用《蘇丹在後宮》這一幅畫，來強調數學的本質是關乎「自然生成與人為創造的兩種事物，和諧地彼此共存」。

就訴求目標讀者來說，本書可以跟《社會組也學得好的數學十堂課》（傑瑞·金著，商周出版，2010）做一個對比。後者顯然針對非科學主修大學生的數學通識課程。作者傑瑞·金（Jerry King）使用了數學 vs. 詩篇的類比，強調即使是人文社會科學主修的學生，也可以學好數學。如果一般人可以被詩篇所感動，那麼，他們又何嘗無緣參與數學知識活動呢？傑瑞·金認為基本的邏輯推理訓練、集合論、從自然數經整數、有理數、實數到複數的數系發展、數論、函數（含解析幾何）、機率論以及微積分等等，都是不可或缺的主題。同時，他又高度重視數學知識的結構面向，譬如從自然數系到微積分的縱深統整論述，就明確地演示數學的意義與價值不僅在於它的廣泛應用，而且也關乎它自身的真與美。

相對而言，本書也極端重視論證，不過，作者在求「真」方面顯得更加堅持，為此，他認為應該深入公理系統的設置底層，探索比如算術加法與乘法的結合律（associative law）與遞迴（recursion）的本質關係。另一方面，他的「求真」也相當「純粹」，比如當他運用一列骨牌比喻數學歸納法：「若（if）第一張骨牌倒下，且若（if）推倒任何一張骨牌即可再（then）推倒下一張，則（then）所有骨牌一定會倒。」緊接著，他表達了「以物理方式類比數學運算時的必然限制」：「我經常想，這個說法（按即骨牌比喻）在物理學上是否成立。動量在骨牌長龍中傳遞，意味著骨牌可能會持續倒下，但動量在骨牌長龍中會逐漸衰減，意味著骨牌長龍延伸到外太空時，它呈現的波浪會逐漸減慢，最終會停頓下來，直到很多很多骨牌直立著。」還有，基於這種比喻，本書內容幾乎不涉及數學應用例證，一點都不令人感到意外。

上述有關本書這些風貌，都可以解釋作者的敘事手法。由於本書強調數學基礎之論證，因此，在考量到讀者的耐心時，他隨時地「岔入」數學或數學家的故事。在本書中，作者所介紹的數學家（從古代到 20 世紀中期）就將近 20 位之多，而且大都簡述他（她）們的故事傳奇。此外，他也經常引述一些文學作品，以便「淡定」陷入基礎深淵的數學熱情。

總之，這是一本相當另類的數學普及小品。一般讀者初次接觸本書不免覺得論證「超量」，但平心而論，讀者若懷抱一點點耐心，順著這些材料讀下去，也並非難以理解。數學知識中有許多基本但極為深刻的內容，譬如自然數如何定義？中學階段所學習的數學歸納法有何意義？所謂的遞迴定理與我們所理解的數學基本概念又有何關連？還有，數學運算如何決定結構？等等，都在本書中有了簡易可及的切入點。無論如何，本書的訴求呼應了通識教育中非常古典的心智訓練，讀者若有機會隨性地讀個幾章（順序無妨），一定可以變得比較博雅才是。至於中小學數學教師呢，本書至少可以提醒：那五個算術定律為何那麼重要了。

最後，我們必須指出本書的一些謬誤與商榷，供讀者參考。

有關基數 (cardinal number) 問題。頁 12 提及「沒有自然數，我們無法計數，也無法回答『有多少？』這個問題。」這一句論斷值得商榷，因為在「數不過三」(亦即：只能數一、二、很多很多)的民族部落中，還是有能力運用一一對應關係 (one-to-one correspondence)，確認他的二十頭羊是否走失。

頁 141 有關骨牌比喻數學歸納法之說明中，「直到僅餘一個骨牌直立著」應該修訂為「直到還有很多很多張骨牌直立著」，才比較「正確」與達意。

在頁 185，作者提及群論 (group theory) 是在伽羅瓦決鬥身亡前一天晚上寫成的作品中達到完備。又，在頁 224，作者再次強調：「在決鬥身亡的前一天晚上，二十四歲的伽羅瓦盡情發揮才能，重新檢視多項 (式) 方程式的根，首先發現了對稱限制系統，這個系統將可決定哪些方程式可解、哪些又不可解。」有關此一敘事不符合史實，數學史家早已貼心糾正，可惜，作者可能還是參考始作俑者的 E. T. Bell 的《大數學家》(Men of Mathematics)。事實上，在決鬥前夕，伽羅瓦寫信給他的好友，交代後者要幫忙珍惜他自認為畢生最偉大的數學貢獻，而那是他已發表的論文結果，因為他說：「我的命運已經無法讓祖國及時認識我的貢獻」。

書名：《數字奇航》(Alex's Adventures in Numberland)

作者：艾利克斯·貝洛斯 (Alex Bellos)

譯者：胡守仁

出版社：時報文化出版

出版日期：2012 年 4 月

ISBN：9789571355283

關鍵詞：趣味數學、科技新聞主義 (scientific journalism)、數學普及、民族數學



一、前言

本書原文有兩個版本，分別是美國版與英國版。本中譯本根據英國版翻譯成，其書名顯然仿自《愛麗斯夢遊仙境》(Alice Adventures in Wonderland)。不過，美國版除了書名改為 “Here’s Looking at Euclid” 以及略掉一些彩色差頁圖片之外，其餘內容完全一樣。作者艾利克斯·貝洛斯 (Alex Bellos) 從牛津大學獲得數學與哲學雙學位，因此，他的敘事 (narrative) 與說理 (discourse) 之游刃有餘，可以見證他的所學之博雅。他曾經擔任英國《衛報》記者，並派駐巴西數年，同時，從他的姓氏，或可猜出他的拉丁美洲血統。這些跨界的豐富經歷，也讓他的書寫觸角遍及全世界那些非西方主流或非制式 (nonconventional) 的數學知識活動。因此，我們在本書中得以欣賞作者所呈現的「民族數學」(ethnomathematics)，一點也不令人意外。

在他的〈序言〉中，作者也分享他書寫本書的心路歷程：「成年後再踏入數學世界，我的經驗與孩童時期截然不同。當時由於應付考試，往往忽略了真正引人入勝的事物，而現在我得以自由自在地涉獵看起來新奇的事物。」因此，「我覺得我就像一個身負重任的駐外特派記者，只不過這次，我的駐在地是抽象的數學世界。」顯然，作者現在打算「馴服」(tame) 數學，¹ 至於他的切入點，則是體驗數學的實際運用。於是，他開始將他的旅行地圖延伸到全球各地：譬如說吧，他訪問印度，為的是體驗這個古文明如何發明 0；他進入雷諾賭場去觀察機率與博弈；到了日本，他則是認識了會計算的猩猩。

隨著旅程的推進，作者發現他自己「處於既是專家又是業餘者的微妙地位」，同時，「再度學習學校教過的數學就像重新認識老朋友」。部分基於此一原因，在本書中，作者加入了相當分

¹ 巧合地，臺灣數學教育學會 (Taiwan Association of Mathematics Education) 的英文縮寫也剛好是 TAME。這種巧合，或許是學會的成員自許要將 (一般人認為抽象、可怕的) 數學馴化，以便與一般人分享數學知識的有趣與有用吧。

量的歷史資料，因為數學就是數學發展的歷史。人文科學永遠都因為新思想或新潮流取代了舊思維，而處於一再重複發現的狀態，應用科學的理論總是經歷不斷的修正。但數學和它們不一樣，數學永遠不老化。畢氏定理或歐幾里得定理的成立，現今一如往昔，這也就是為什麼畢達哥拉斯和歐幾里得是我們在學校學到的最古老的名字了。到了十六歲，學生學到的也不超過十七世紀中葉人們所懂的數學，到了十八歲，學到的也不過是十八世紀中葉的數學，而我在大學裡學到的最現代的數學，則是來自 1920 年。

旨哉斯言！光是憑著作者上述的「現身說法」，本書就值得高度推薦！

不過，原書與中譯本有一些誤謬或誤植（請參考本文末勘誤表），也請讀者多加注意為要。

二、內容簡介

本書共有十二章，目次依序如下：

第 0 章 數字之始

第一章 計數文化

第二章 看吧！

第三章 關於空無一物

第四章 π 的故事

第五章 X-因子

第六章 遊戲時間

第七章 數列的秘密

第八章 金手指

第九章 機遇好極了

第十章 一切歸於正常

第十一章 盡頭到了

有關本書內容，在第 0、一章中，作者主要說明民族數學例子、計數、基底進位制與（日本與中國的）珠算盤。第二章以婆神迦羅（Bhaskara II）的畢氏定理證明結語 —「看吧！」（behold!）為題，當然介紹與該定理證明的相關歷史，譬如歐幾里得《幾何原本》內容，乃至日本的摺紙數學，尤其是芳賀和夫（Kazuo Haga）的貢獻：

如果說現代世界有哪一個人能夠體現畢達哥拉斯的精髓，我敢說那就是芳賀和夫了。他和畢達哥拉斯對於數學的發現有著相同的熱情，都是基於幾何單純的和諧性。這種發現的經驗觸動芳賀的靈魂，就像兩千多年前的畢達哥拉斯。芳賀說：「大多數的日本人都熱中於創造新的摺紙形狀，我的目的是跳脫在實際上創造新東西，反而是發現數學現象。這就是為什麼我會這麼感興趣。就算在極其簡單的世界，一樣能夠發現令人著迷的東西。」（頁 90）

有關第三章，本書作者則以 0 的發明為主題，並說明數學與印度教與佛教文明之密切關係。任何讀者有意了解印度宗教文化，本章是極佳切入點。在第四章中，作者則從幾位速算者（lightening calculator）談起，其中還包括一些被科學研究中心聘用專司計算。譬如德國的達斯（Zacharias Dase），就曾接受偉大的高斯建議，建立一個從 7,000,000 到 10,000,000 之間的所有數的因數表。但是，他之所以有趣，則是因為他十幾歲時，就已經計算 π 到小數點後兩百位了。利用這個引子，作者為我們說明 π 的故事。其中，有許多插曲都已見於其他科普書籍如《 π 的傳奇》。不過，真正有趣的，則是前述的達斯求得 π 的兩百位小數近似值，所運用的無窮級數展開式：

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3}{3} \right] + \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^5}{5} \right] - \dots$$

當然，他如何得知此一展開式，高斯是否曾經指點一二，真是令人好奇！

第五章主題是代數與對數，但是，作者卻是利用一個魔術數字 1089 當作引子。在代數的發展史方面，作者依序介紹古埃及、古希臘丟番圖、第九世紀的阿爾·花拉子模，以及韋達與笛卡兒的符號法則（symbolism）。有關符號法則的威力，作者也對照了帕西歐尼（Luca Pacioli, 1494）、韋達（Viète）以及笛卡兒有關二次方程式 $4x^2 - 5x + 3 = 0$ 的寫法（中譯本頁 152 第二段）。可惜，原書本段有承上啟下的一句話被略掉了，以致於讀起來不連貫。² 在對數的歷史發展方面，作者介紹納皮爾（John Napier）引進對數（logarithm，取自古希臘語 logos 與 arithmos 之組合），接著，又說明布里格斯（Henry Briggs）利用以十為底數的概念簡化對數，以及甘特（Edmund Gunter）發明並由奧特瑞德（William Oughtred）改良的對數尺。

第六章的主題是娛樂數學或休閒數學（recreational mathematics）。作者以幻方（magic square）、拉丁方陣（Latin square）、數獨、七巧板以及數字推盤遊戲，最後這個遊戲後來演變成為魔術方塊。本章也介紹兩位解謎專家，美國的羅伊德與英國的杜德奈，後者的數學能力甚佳，乃能觸及一些頗有深度的數學問題，譬如郵差問題。另外，杜德奈也發現了正方形與正三角形、正方形與正五邊形互換的幾何切割方法，他將這種謎題為裁縫商謎題（Haberdasher's puzzle）。在本章最後，作者特別分享他參加為葛老爹（1914-2010）而聚的第八屆 G4G（Gathering for Gardner）研討會之心得。另一方面，本章也提及魔術方塊之相關賽事，國內對相關問題感興趣的讀者，想必曾經造訪本系郭君逸（David Guo）教授的網站才是。

對於稍微熟悉數學分析學的讀者來說，本書第七章所揭示的數列之秘密，是相當受用的內容，比如說，從調和級數刪除下列各項（含有數字 9 的每一項）：

² 這句話如下：With Descartes' symbology, all traces of rhetorical expression had been expunged.

$1/9, 1/19, 1/29, 1/39, 1/49, 1/59, 1/69, 1/79, 1/89, 1/90, 1/91, 1/92, \dots$

其結果是變為收斂級數，「刪除 9，我們馴服了巨大的無限。」不過，本章更令人瞠目結舌的例子，則是與數論有關的一些奇妙數列，比如說，在下列數列

$1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 2, \dots$

中，3 第一次出現在第九項，4 第一次出現在第 221 項。但是，5 何時第一次出現呢？答案匪夷所思，請讀者先猜猜看吧！

第八章主題是黃金比（golden ratio） ϕ 與斐波那契數列。「黃金比」這個名詞在中文界都慣稱為「黃金比例」，其實有一點誤解，因為這代表一個比（值），而非「比例式」。本章一開始，作者就介紹一位 phi 迷樂文（Eddy Levin）與我們認識，他對 ϕ 的著迷（obsession）已經到了無法自拔的程度了。譬如，他一見到本書作者 Alex Bellos，就請後者利用大寫英文寫下這個名字 ALEX BELLOS，然後，運用他的「黃金尺規」（一把鉗子），確認作者所寫的名字之字母分布比是為黃金比。換言之，作者書寫時，遵循了黃金法則。至於這位樂文何以對 ϕ 如此狂熱呢？原來，他是一位牙醫，早年發現他自己再怎麼努力設計，都無法讓假牙在患者臉上的笑容顯得自然一些：「不管怎麼樣，牙齒看起來就很假。」於是，他開始上數學與心靈課程，因而知道了黃金比例。他深受帕喬利（Luca Pacioli）的《神聖比例》之啟發，有一天半夜兩點，他赫然發現在最迷人的牙齒中，中間的大門牙比兩側的門牙寬一個 ϕ （的比值）。側門牙比犬齒寬一個 ϕ 。犬齒又比前臼齒寬一個 ϕ 。因此，他的結論是：完美微笑之美由 ϕ 決定了。

第九章主題是機率，作者從期望值與大數法則兩方面來編故事。作者一開始，從吃角子老虎（角子機）開始談起，緊接著，介紹卡丹諾（Girolamo Cardano）出場。再接著，則是十七世紀標誌著機率論誕生的「點數問題」（problem of points）。原來這是一位賭徒向巴斯卡請教的一個賭局中斷如何分配賭金的問題，經過巴斯卡與費馬兩人的通信，最後，他們各自提出了圓滿的解法，以及相同的正確答案。本章最後的主題是隨機，作者指出：「由於我們的頭腦不擅長了解隨機，機率論是數學中充斥最多悖論和驚奇的領域。我們直覺認為模式出現必有其因即使知道並非如此。對於角子機的玩家認為機器在連敗之後釋出大獎的機會很大，我們很容易嗤之以鼻，但是賭徒的謬誤心理在非賭徒身上也看得到。」於是，他討論科普書籍十分喜愛的生日悖論（birthday paradox），比如過去十屆（足球）世界杯的決賽球隊中，有七屆至少有兩個球員生日在同一天！或比如「隨便找 23 個人，其中有 2 個人生日在同一天的機會要比兩人生日都不在同一天的機會更大」。這種以大數法則為論述基礎的「隨機漫步」或「醉漢走路」，也幫助我們澄清了我們直覺上的「期望」謬誤。

第十章主題為統計學。作者從經驗數據（譬如法國麵包的重量）的收集切入，進一步指出：在十六、十七世紀時，「收集數據成了流行的業餘活動，而這並不是一時的風尚，這股狂熱標誌著現代科學的開端」。不過，統計學成為一門學問，卻遲至十九世紀。作者先從高斯發現的鐘形曲線談起，藉以呼應數據收集的誤差現象。接著，就轉向讓 statistics 成為現代用法的奎特雷（Adolph Quetelet），這位比利時學者在 1853 年舉辦了第一次的統計國際會議。再其次，作者將達爾文（Charles Darwin）的表兄弟高爾頓（Francis Galton）帶出場。不同於奎特雷對鐘形與平均的著迷，高爾頓強調優生學。這種偏執的主張，為種族主義者提供了可怕的彈藥，一直到 1994 年，還有人著書強調「不同種族間的智力差異，是種族差異的證據」。儘管如此，高爾頓對統計學的貢獻，絕對不僅止於協助他的被保護者（protégé）Karl Pearson 在大學（University of College London）創辦了第一所統計系，而是他的迴歸與相關（regression and correlation）等概念，讓統計分析成為今日科學（自然與社會都包括在內）研究的利器。可惜，高爾頓的貢獻及其應用，譬如說解讀美國《運動畫報》（Sports Illustrated）的詛咒等等，都被中譯版略掉了。

第十一章（也是最後一章）的主題是非歐幾何學，但是，由於這種幾何違背吾人直觀，作者也運用了本章另一半的篇幅來介紹康托（Georg Cantor）的集合論。或許，這是作者為了呼應第 0 章所作的安排：

也是結束我們旅程的好地方。我在開始的章節這麼說：數學因人類意圖找出所在環境的意義的渴望而出現。由在木頭上刻痕或數指頭，我們的祖先發明了數。數對於農耕與交易都有助益，因此引導我們進入「文明」。當數學發展之後，這個課題不再只有實際的東西，更多的是抽象化的東西。希臘人引入了點與線，印度人發明了 0，打開了更激進的抽象化大門，例如負數。這些概念一開始時或許違反直觀，但很快就為人們所吸收，我們現在都在使用。然而到了十九世紀末，連接數學和我們經驗的臍帶從此斷裂。經過了黎曼和康托，數學失去了任何與世界直觀評價的聯繫。

上述這些反思固然有其史識，不過，作者還是為我們布置了更有洞察力的結語：

康托引導我們到達想像之外的世界。這是個相當美妙的地方，有趣的是和我一開始所提到的亞馬遜部落的情形剛好相反。孟杜魯庫人有許多東西，卻沒有足夠的數來數；康托提供我們很多很多的數，我們卻沒有足夠的東西需要數。

三、評論

作者在本書每一章開端，都會提供非常有趣的例子，以吸引讀者的閱讀興趣。在第一章，作者就以中世紀英國林肯郡牧羊人數羊時所編的行話為例，說明計數文化的趣味與意義。第二章的主題是畢氏定理及其相關幾何知識，由於涉及畢氏學派，因此，作者就以命數論（numerology）作為引子。第三章主題是印度人發明了 0，因此，作者就以佛經為大數造字為開場白。第四章主

題雖然是 π 的故事，但是，由於背誦圓周率的小數位一直都受人矚目，所以，作者在本章一開始，就以心算天才的故事切入主題。第五章主題是代數學，作者的開胃菜正是魔術數字 1089。這個魔術數字非常可以吸引一般讀者。我曾在臺大數學通識課堂（學生主要來自文法學院）介紹此一數字，結果引起相當大的「騷動」，有兩位學生上臺分享他們的證明，結果也十分令人滿意！

本書第六章主題是休閒或娛樂數學，作者就從日本一家數字益智遊戲雜誌的創辦人鍛冶真起談起。第七章主題是數列，不過，作者的破題卻是一位在網路上編輯《網路整數數列大全》（Online Encyclopedia of Integer Sequences）的怪人。第八章主題是黃金比（golden ratio）與斐波那契數列，作者一開始介紹的是一位黃金比的超級粉絲。第九章主題是機率，作者以吃角子老虎的賭金利潤為引子，然後引進第一個嗜賭成性的十六世紀義大利數學家卡丹諾。第十章主題是統計，作者利用電子秤來收集法國麵包重量的統計數據。在第十一章（也是最後一章）一開始，作者介紹編織雙曲平面（hyperbolic plane）的數學家泰米納（Daina Taimina）出場，她是拉脫維亞裔的數學家，我曾在 HPM 研討會與她見過面。

本書體例可以歸類為最能呼應普及傳統的典型書寫 — 趣味數學，不過，作者每能在適當脈絡切入歷史（數學史）或人類學考察（譬如針對民族數學），又能輔以全世界「走透透」的奇人異士訪談（多虧了他的《衛報》記者身分），因此，本書文體雖然完全符合「科技新聞主義」（scientific journalism）之活潑生動風格，但就數學或數學史的內容來說，本書卻言之有物，內容十分紮實，而不像有些類似作品（作者背景也類似），往往花巧招搖，文勝於質。

最後，就書名來討論。本書中譯版顯然是依照英國版來翻譯。相形之下，我們實在無從理解何以美國版命名為 “Here is Looking at Euclid!”，因為歐幾里得固然在數論方面（譬如《幾何原本》第 VII-IX 冊內容）也貢獻卓著，然而，他的主要成就在幾何學 — 那是本書第二、四和十一章的部分主題，不過，作者念茲在茲的，仍然是他的「數字奇航」(Adventure in Numerland)！無論如何，這種奇航的目的地，顯然是追尋數字中的模式（pattern），而這當然呼應了何謂數學的新說法：數學是一種研究模式的科學！

推薦 03

書名：《啟發每個人的數學小書》

作者：莉莉安·李伯（Lillian R. Lieber）

譯者：洪萬生、英家銘

出版社：究竟出版社

出版日期：2012 年 5 月

ISBN：9789861371559



當你翻開本書目錄時，先猜想一下本書第 IX、X 章標題何以分別稱之為「締結良緣」與「貴子早生」？哈佛大學傑出數學家貝利·馬祖爾（Barry Mazur）說：「這是李伯一家邀請我們參加代數和幾何的婚宴」。事實上，這一對在十七世紀所組成的數學新家庭，就叫做「解析幾何」（analytic geometry），至於他們早生的貴子，當然就是第 X 章的主題「微積分」（calculus）了。

上述這個充滿數學史洞識的比喻，可以見證本書作者李伯一家人的博雅素養，以及非常樂觀的自由主義思想，儘管當時二戰正酣，時局嚴酷與險惡。馬祖爾指出：

進入這本書的世界，就有如發現一個充滿希望的地方，裡面的想法——純粹的想法——正在被雨水閃耀地沖刷。而且，它們就像向日葵一樣，很快就會將自己的嶄新花瓣展現給你，充滿了各種可能、令人喜悅以及有用之處。

當然，這是因為「作者們有那個天分，可以真正寫出一本給所有人看的數學書。」事實上，本書是數學家莉莉安·李伯（Lillian Lieber, 1886-1986）教授於 1944 年，為二戰出征的美國大兵所寫的一本數學休閒小書。全書才大約三萬字，為了方便閱讀，還採用一行一詞句的方式書寫，再加上作者先生休·李伯（Hugh Gray Lieber）的俏皮貼切插畫，使得本書洋溢著極大的啟發性。無怪乎馬祖爾教授還特別強調：

這本小書所帶來的興奮感，剛好和它的大小成反比。這本書的重量，比如說，相較於當代微積分教科書（有時候，我很好奇搬著它們到處跑的學生，為什麼沒有額外的體育課學分），真是有相當大的對比。不知道是出自懶惰還是有一般的躁動靈魂，當我還是青少年的時候，我很喜歡那些去除噓頭，旨在寫出主題本質的並帶點叛逆性的輕薄小書。

可見，本書所以受到馬祖爾的青睞，完全是因為這一位傑出數學家的十二歲年代，受到它直指核心且「帶點叛逆性」的風格所吸引。而這種「現代性」(modernity)，當然也見證了美國數學家養成教育制度的逐漸成熟，以及許多美國在二十世紀早期本土培養的數學博士，如何地以數學教育與普及為職志。

根據約瑟夫·雅伯(Joseph Alper)的說明，¹ 莉莉安·羅森諾夫(Lillian Rosanoff)是生於俄羅斯的猶太人家庭，後來隨家人移民美國。她先後取得紐約的Barnard學院學士、哥倫比亞大學碩士，1914年，她從Clark大學榮獲博士學位。1934年，當她應聘到紐約長島大學數學系任教時，與當時的系主任休·李伯結為連理。1945年，當修·李伯轉任該校藝術系主任時，莉莉安繼任數學系主任，直到1954年退休為止。

顯然基於數學普及的崇高理想(她的科普系列書籍至少有十本之多)，莉莉安希望利用科普書寫，讓年輕人理解數學與科學在政治與倫理等方面的蘊涵。另一方面，她也注意到一般學生直到大學階段，才有機會接觸源自十九世紀的現代數學。因此，為了讓學生體會數學知識活動的令人興奮，她認為有必要引進伽羅瓦群(Galois group)、非歐幾何、四維空間乃至於現代邏輯等等那些革命性的風貌。而所有這些，都在本書中有了相當具體的實現。

本書除了〈前言〉(馬祖爾)、〈序言〉、〈介紹男主角〉以及書末的〈寓意〉之外，共有二十章，其中所介紹數學主題，涵蓋了歐氏幾何、非歐幾何、有限幾何、有限代數、解析幾何、微積分、第四維空間以及相對論等等，並及於方法論之省思，以及現代數學 vs. 現代藝術的抽象性之對比。各章篇幅精簡、內容強悍，但是，呈現手法卻十分輕鬆俏皮，尤其是各章標題，更是時有佳作，除了前述的第IX章〈締結良緣〉(a wedding)、第X章〈貴子早生〉(the offspring)之外，還有分別介紹非歐幾何的第XIV章〈自由與特許〉，以及有限幾何的第XV章的〈傲慢與偏見〉。所有這些，都是由於莉莉安認為所謂的SAM(science, art and mathematics)表現了人類文化的(良)善、真(實)與美(妙)，從而對年輕讀者娓娓道來，說明現代數學的理論、啟示及其令人震懾的興奮效果，是現代教育乃至於數學普及著述必須承擔的時代使命。

儘管如此，李伯夫婦非常「到位」的科普素養，足以在本書一開始，就能讓年輕讀者愛不釋手。譬如說吧，在第I章中，作者就提醒我們「五千萬人也可能是錯的」，他們經由一個簡單的計算題，告訴我們「別成為倉促做決定的人」。其次，在第II章中，作者提出加倍疊紙巾(每張厚度0.003吋)的問題，然後要讀者猜測疊到第32次時，總共疊成的紙巾大約有多高？作者利用這個例子，說明很多時候我們依賴直覺解決問題固然無可厚非，然而，直覺的東西在被檢查和複檢之前，「並不會成為值得尊敬的科學和數學」，儘管她十分仰慕法拉第(Faraday)緣起於直覺的許多貢獻。至於在第III章中，作者則拋出另一個問題：已知有一條鋼環緊緊的環繞著地球的赤道。現在你將它移走，並在一處將它切開，然後接合一段額外10呎長的部分。在這鋼

¹ Joseph S. Alper, "Lillian R. Lieber", *Jewish Women's Archive*。2012-03-16 取用。

環和地球之間究竟產生多大的空間呢？針對它那令人出乎意料的解答，作者提醒我們：沒有理論或計畫，光是機械式的操作，這個問題裡面的數字，並不因為你使用算術，就會讓它變得有意義！

以上所提及問題都常見於數學普及書籍。作者在此「老生常談」，其目的就是希望我們都能運用數學來效化（streamline）心靈。為此，當我們學習數學時，就必須強調一般化、抽象化以及精確定義的重要性，進而位於作者所謂的五層「圖騰柱」頂層的純數學思維，當然就至為重要了。作者以收音機為例，說明這個發明如何先後受惠於義大利馬可尼（Marconi）的無線電設備、德國赫茲（Hertz）的電磁波實驗、英國馬克斯威爾（Maxwell）的電磁學理論，乃至於最後，牛頓微積分如何被應用到電磁的微分方程式上。因此，要是沒有純粹的數學理論，哪來科技上的重要發明？

當然，從本書的說明，我們也可以看到數學不只是給工程師，或是需要數學公式的人使用而已，「數學是一種思維方式，一種生活方式」，才是作者所念茲在茲的理念。因此，在第 XI 章「本書上半總結」最後，作者特別指出：「大部分數學課程都沒有留下時間讓你考慮上面那些事情。時間都用來學習演算技術。我們必須要停下來，然後從技術的操弄中，看出可以從中得到哪些一般觀念。而這些一般觀念是對我們所有人都管用的」。

作者這種針對比較結構主義式進路（structuralistic approach）的「新式教育」之呼籲，在本書後半部提供了一個教育現代數學（modern mathematics）的藍圖。至於其具體內容，則是基於隨意定奪的假設、但卻邏輯相容（consistent）的公設數學如非歐幾何、有限幾何、有限代數、第四維空間等等。如此一來，受過這種現代數學訓練的公民，「對於自由終止於何處，以及特許（license）始於何處，有一個非常清楚的體認：他非常了解到他不能在一個系統中引進任何事物，使得矛盾發生，而摧毀這個系統本身。」因此，基於這樣的自由主義之倫理蘊含，「即使在一個民主制度中，允許民主的敵人使用言論自由去摧毀民主，是不合乎邏輯的。同理，自由企業也必須因著民主的其他設準而有所規範。」

上述作者所關心的這種自由 vs. 特許的張力，在現代藝術與音樂等等的創造上，倒是沒有什麼禁忌，因為它的奇特性正是現代主義（modernism）的一個特徵。所以，讀者「將不會驚訝地發現到現代藝術比起過氣的時尚藝術，擁有還要無限多的品類，就好比今日數學擁有比過去一直有的還要無限多的品類」。

無論作者基於現代數學精神的自由主義倫理主張是否具有說服力，本書的精緻內容與圖文並茂的表現形式，都值得我們細心品味。總之，這一本年齡即將邁入七十歲的阿嬤級讀物，既是數學普及書寫的一絕，也是數學知識永恆性的一個見證。因此，我們非常樂意中譯並推介給中文讀者，特別是中學師生閱讀。

膾炙人口的Morley角三等分線定理

(二) 三外角的情形

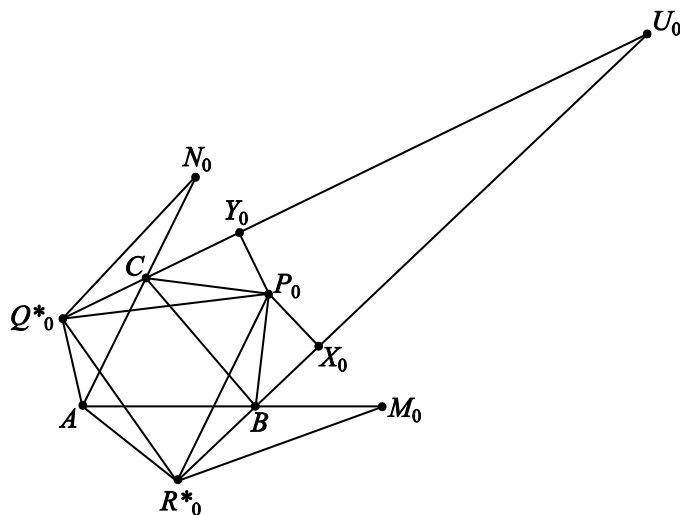
趙文敏／臺灣師大數學系

定理 2 (三外角的 Morley 角三等分線定理)：

設 $\triangle ABC$ 為一個三角形。若 $\angle B$ 的外角與 $\angle C$ 的外角較靠近 $\overline{BC}$ 的兩條角三等分線交於點 P_0 、 $\angle C$ 的外角與 $\angle A$ 的外角較靠近 $\overline{CA}$ 的兩條角三等分線交於點 Q_0 、 $\angle A$ 的外角與 $\angle B$ 的外角較靠近 $\overline{AB}$ 的兩條角三等分線交於點 R_0 ，則 $\triangle P_0Q_0R_0$ 是正三角形。

在下文中，我們仍然將 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 、 $\angle B$ 與 $\angle C$ 的度數分別表成 3α 、 3β 與 3γ ，也就是說， α 、 β 與 γ 分別表示 $\angle A$ 、 $\angle B$ 與 $\angle C$ 之度數的三分之一。於是， $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ ，而且 $\angle A$ 、 $\angle B$ 與 $\angle C$ 的外角之度數的三分之一分別為 $60^\circ - \alpha$ 、 $60^\circ - \beta$ 與 $60^\circ - \gamma$ 。

【幾何證法之一】



▲圖 4

因為 $\triangle ABC$ 的三個內角中至少有兩個是銳角，我們假設 $\angle A$ 是銳角。在 $\angle B$ 的外角較靠近 $\overline{AB}$ 的角三等分線上作點 R_0^* 、在 $\angle C$ 的外角較靠近 $\overline{CA}$ 的角三等分線上作點 Q_0^* 使得

$$\angle BR_0^*P_0 = \angle CQ_0^*P_0 = \alpha,$$

而且點 R_0^* 與點 P_0 在直線 AB 的異側、點 Q_0^* 與點 P_0 在直線 AC 的異側。其次，因為 $\angle A$ 是銳角，所以， $2(60^\circ - \beta) + 2(60^\circ - \gamma) = 120^\circ + 2\alpha < 180^\circ$ 。於是，直線 BR_0^* 與直線 CQ_0^* 交於一點 U_0 而且點 U_0 與點 P_0 位於直線 BC 的同側。事實上，點 P_0 是 $\triangle U_0BC$ 的內心。於是，若點 P_0 至直線 BR_0^* 與直線 CQ_0^* 的垂足分別為點 X_0 與點 Y_0 ，則 $\overline{P_0X_0} = \overline{P_0Y_0}$ 。因為 $\angle BR_0^*P_0 = \angle CQ_0^*P_0$ ，所以， $\angle X_0R_0^*P_0 = \angle Y_0Q_0^*P_0$ ， $\triangle X_0R_0^*P_0 \cong \triangle Y_0Q_0^*P_0$ ， $\overline{P_0Q_0^*} = \overline{P_0R_0^*}$ 。另一方面，因為

$$\begin{aligned}\angle Q_0^*P_0R_0^* &= 360^\circ - \angle X_0P_0Y_0 - \angle X_0P_0R_0^* - \angle Y_0P_0Q_0^* \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle BU_0C) - 2(90^\circ - \alpha) \\ &= \angle BU_0C + 2\alpha \\ &= 180^\circ - 2(60^\circ - \beta) - 2(60^\circ - \gamma) + 2\alpha \\ &= (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) - 60^\circ = 60^\circ,\end{aligned}$$

所以， $\triangle P_0Q_0^*R_0^*$ 是正三角形。我們只需再證明：直線 AQ_0^* 與直線 AR_0^* 是 $\angle A$ 的外角的三等分線。

在直線 AB 與直線 AC 上分別選取點 M_0 與 N_0 使得 $\overline{BM_0} = \overline{BP_0}$ 、 $\overline{CN_0} = \overline{CP_0}$ 、而且點 B 介於點 A 與點 M_0 之間、點 C 介於點 A 與點 N_0 之間。由此立即可知： $\triangle BP_0R_0^* \cong \triangle BM_0R_0^*$ 及 $\triangle CP_0Q_0^* \cong \triangle CN_0Q_0^*$ 。於是，得

$$\overline{M_0R_0^*} = \overline{P_0R_0^*} = \overline{P_0Q_0^*} = \overline{N_0Q_0^*} = \overline{Q_0^*R_0^*},$$

$$\angle M_0R_0^*Q_0^* = \angle N_0Q_0^*R_0^* = 60^\circ + 2\alpha.$$

於是，在通過點 M_0 、點 R_0^* 與點 Q_0^* 的圓上，弧 $M_0R_0^*Q_0^*$ 的度數是 $240^\circ - 4\alpha$ 。又因為 $\overline{M_0R_0^*} = \overline{Q_0^*R_0^*}$ ，所以，在此圓上，弧 $Q_0^*R_0^*$ 的度數是 $120^\circ - 2\alpha$ 。由此可知： $\angle Q_0^*M_0R_0^* = 60^\circ - \alpha$ 。同理，在通過點 N_0 、點 Q_0^* 與點 R_0^* 的圓上，弧 $Q_0^*R_0^*$ 的度數也是 $120^\circ - 2\alpha$ 。於是， $\angle Q_0^*N_0R_0^* = 60^\circ - \alpha$ 。因為 $\angle Q_0^*M_0R_0^* = \angle Q_0^*N_0R_0^*$ ，所以，點 M_0 、點 R_0^* 、點 Q_0^* 與點 N_0 共圓。在此圓上，弧 $M_0R_0^*$ 、弧 $R_0^*Q_0^*$ 與弧 $Q_0^*N_0$ 的度數都是 $120^\circ - 2\alpha$ ，所以，弧 $M_0R_0^*Q_0^*N_0$ 的度數是 $360^\circ - 2\angle A$ 。由此可知：點 A 也在此圓上，亦即：點 A 、點 M_0 、點 R_0^* 、點 Q_0^* 與點 N_0 五點共圓，而且 $\angle M_0AR_0^* = \angle Q_0^*AN_0 = 60^\circ - \alpha$ 。於是，直線 AQ_0^* 與直線 AR_0^* 是 $\angle A$ 的外角的三等分線。

因為點 Q_0^* 是 $\angle C$ 的外角與 $\angle A$ 的外角較靠近 $\overline{CA}$ 的兩條角三等分線的交點，所以，點 Q_0^* 與點 Q_0 是同一點。同理，點 R_0^* 與點 R_0 也是同一點。於是， $\triangle P_0Q_0R_0$ 是正三角形。

系理 5：設 $\triangle ABC$ 為一個三角形。若 P_0 、 Q_0 與 R_0 是定理 2 中所提的三個點，又設點 M_0 是點 P_0 對直線 BR_0 的對稱點、點 N_0 是點 P_0 對直線 CQ_0 的對稱點，則點 M_0 在直線 AB 上、點 N_0 在直線 AC 上、而且 A 、 M_0 、 N_0 、 Q_0 與 R_0 五點共圓。

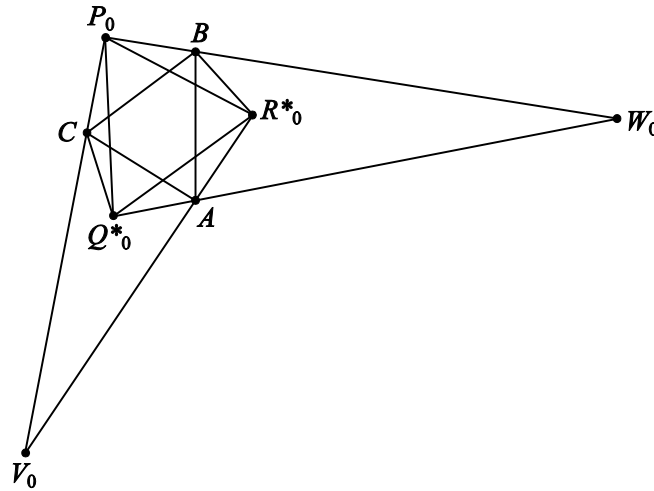
系理 6：設 $\triangle ABC$ 為一個三角形。若 P_0 、 Q_0 與 R_0 是定理 2 中所提的三個點，則

$$\angle BR_0P_0 = \angle CQ_0P_0 = \alpha \quad ,$$

$$\angle CP_0Q_0 = \angle AR_0Q_0 = \beta \quad ,$$

$$\angle AQ_0R_0 = \angle BP_0R_0 = \gamma \quad .$$

【幾何證法之二】



▲圖 5

因為 $\triangle ABC$ 的三個內角中至少有兩個是銳角，我們假設 $\angle B$ 與 $\angle C$ 是銳角。在 $\angle B$ 的外角較靠近 $\overline{AB}$ 的角三等分線上作點 R_0^* 、在 $\angle C$ 的外角較靠近 $\overline{CA}$ 的角三等分線上作點 Q_0^* 使得

$$\angle BP_0R_0^* = \gamma \quad , \quad \angle CP_0Q_0^* = \beta \quad .$$

於是，可得

$$\begin{aligned} \angle Q_0^*P_0R_0^* &= \angle BP_0C - \angle BP_0R_0^* - \angle CP_0Q_0^* \\ &= [180^\circ - (60^\circ - \beta) - (60^\circ - \gamma)] - \gamma - \beta = 60^\circ \quad , \end{aligned}$$

$$\angle BR_0^*P_0 = 180^\circ - [\angle B + 2(60^\circ - \beta)] - \angle BP_0R_0^* = 60^\circ - \beta - \gamma = \alpha \quad ,$$

$$\angle CQ_0^*P_0 = 180^\circ - [\angle C + 2(60^\circ - \gamma)] - \angle CP_0Q_0^* = 60^\circ - \gamma - \beta = \alpha \quad .$$

仿照幾何證法之一的前半段，可知 $\triangle P_0Q_0^*R_0^*$ 是正三角形。我們只需再證明：直線 AQ_0^* 與直線 AR_0^* 是 $\angle A$ 的外角的三等分線。

因為 $\angle C$ 是銳角，所以， $\angle Q_0^*P_0B = \angle Q_0^*P_0R_0^* + \angle R_0^*P_0B = 60^\circ + \gamma < 90^\circ$ 。於是，可在直線 BP_0 上作點 W_0 使得點 B 介於點 P_0 與點 W_0 之間而且 $\overline{W_0P_0} = \overline{W_0Q_0^*}$ 。同理，因為 $\angle B$ 是銳角，所以， $\angle R_0^*P_0C = \angle R_0^*P_0Q_0^* + \angle Q_0^*P_0C = 60^\circ + \beta < 90^\circ$ 。於是，可在直線 CP_0 上作點 V_0 使得點 C 介於點 P_0 與點 V_0 之間而且 $\overline{V_0P_0} = \overline{V_0R_0^*}$ 。由此可知：

$$\angle P_0R_0^*V_0 = \angle R_0^*P_0V_0 = 60^\circ + \beta ,$$

$$\angle P_0Q_0^*W_0 = \angle Q_0^*P_0W_0 = 60^\circ + \gamma ,$$

$$\angle BR_0^*V_0 = \angle BR_0^*P_0 + \angle P_0R_0^*V_0 = 60^\circ + \alpha + \beta ;$$

$$\angle CQ_0^*W_0 = \angle CQ_0^*P_0 + \angle P_0Q_0^*W_0 = 60^\circ + \alpha + \gamma ;$$

$$\angle P_0V_0R_0^* = 180^\circ - 2(60^\circ + \beta) = 60^\circ - 2\beta ,$$

$$\angle P_0W_0Q_0^* = 180^\circ - 2(60^\circ + \gamma) = 60^\circ - 2\gamma .$$

設直線 $R_0^*V_0$ 與直線 AB 交於點 A_{01} ，又設直線 $Q_0^*W_0$ 與直線 AB 交於點 A_{02} ，則得

$$\angle BA_{01}R_0^* = 180^\circ - \angle R_0^*BA_{01} - \angle BR_0^*V_0 = 180^\circ - (60^\circ - \beta) - (60^\circ + \alpha + \beta) = 60^\circ - \alpha ,$$

$$\angle BA_{02}W_0 = 180^\circ - \angle P_0W_0Q_0^* - \angle W_0BA_{02} = 180^\circ - (60^\circ - 2\gamma) - 2(60^\circ - \beta) = 120^\circ - 2\alpha .$$

另一方面，因為 $\triangle R_0^*P_0Q_0^*$ 與 $\triangle W_0P_0Q_0^*$ 都是等腰三角形，所以， $\overrightarrow{W_0R_0^*}$ 是 $\angle BW_0A_{02}$ 的平分線，進一步知點 R_0^* 是 $\triangle BW_0A_{02}$ 的內心。於是，得

$$\angle BA_{02}R_0^* = \angle R_0^*A_{02}W_0 = 60^\circ - \alpha .$$

因為點 A_{01} 、點 A_{02} 與點 B 共線且位於點 B 的同側，所以，由 $\angle BA_{01}R_0^* = \angle BA_{02}R_0^*$ 可得 $A_{01} = A_{02}$ ，亦即：直線 AB 、直線 $R_0^*V_0$ 、直線 $Q_0^*W_0$ 共點。

同理，設直線 $Q_0^*W_0$ 與直線 AC 交於點 A_{03} ，又設直線 $R_0^*V_0$ 與直線 AC 交於點 A_{04} ，則得

$$\angle CA_{03}Q_0^* = 180^\circ - \angle Q_0^*CA_{03} - \angle CQ_0^*W_0 = 180^\circ - (60^\circ - \gamma) - (60^\circ + \alpha + \gamma) = 60^\circ - \alpha ,$$

$$\angle CA_{04}V_0 = 180^\circ - \angle P_0V_0R_0^* - \angle V_0CA_{04} = 180^\circ - (60^\circ - 2\beta) - 2(60^\circ - \gamma) = 120^\circ - 2\alpha .$$

另一方面，因為 $\triangle Q_0^*P_0R_0^*$ 與 $\triangle V_0P_0R_0^*$ 都是等腰三角形，所以， $\overrightarrow{V_0Q_0^*}$ 是 $\angle CV_0A_{04}$ 的平分線，進一步知點 Q_0^* 是 $\triangle CV_0A_{04}$ 的內心。於是，得

$$\angle CA_{04}Q_0^* = \angle Q_0^*A_{04}V_0 = 60^\circ - \alpha .$$

因為點 A_{03} 、點 A_{04} 與點 C 共線且位於點 C 的同側，所以，由 $\angle CA_{03}Q_0^* = \angle CA_{04}Q_0^*$ 可得 $A_{03} = A_{04}$ ，亦即：直線 AC 、直線 $Q_0^*W_0$ 、直線 $R_0^*V_0$ 共點。

因此，直線 $Q_0^*W_0$ 與直線 $R_0^*V_0$ 都通過點 A ，亦即： $A_{01} = A_{02} = A_{03} = A_{04} = A$ 。於是，得

$$\angle BAR_0^* = \angle R_0^*AW_0 = 60^\circ - \alpha ,$$

亦即：直線 AQ_0^* 與直線 AR_0^* 是 $\angle A$ 的外角的三等分線。

因為點 Q_0^* 是 $\angle C$ 的外角與 $\angle A$ 的外角較靠近 $\overline{CA}$ 的兩條角三等分線的交點，所以，點 Q_0^* 與點 Q_0 是同一點。同理，點 R_0^* 與點 R_0 也是同一點。於是， $\triangle PQR$ 是正三角形。

上述證明中附帶得出下述系理中的性質(1)與(4)。

系理 7：設 $\triangle ABC$ 為一個三角形，而 P_0 、 Q_0 與 R_0 是定理 2 中所提的三個點。

(1) 若 $\triangle ABC$ 是銳角三角形，則直線 BR_0 與直線 CQ_0 交於一點 U_0 、點 U_0 與點 P_0 位於直線 BC 的同側，而且

$$\angle Q_0U_0R_0 = 60^\circ - 2\alpha , \angle U_0Q_0R_0 = \angle U_0R_0Q_0 = 60^\circ + \alpha .$$

(2) 若 $\angle A$ 是直角，則直線 BR_0 、直線 CQ_0 都與直線 Q_0R_0 垂直，點 U_0 不存在。

(3) 若 $\angle A$ 是鈍角，則直線 BR_0 與直線 CQ_0 交於一點 U_0 、點 U_0 與點 P_0 位於直線 BC 的異側，而且

$$\angle Q_0U_0R_0 = 2\alpha - 60^\circ , \angle U_0Q_0R_0 = \angle U_0R_0Q_0 = 120^\circ - \alpha .$$

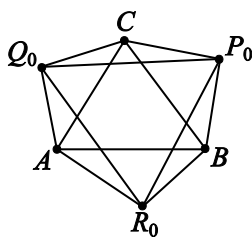
(4) 不論是上述三種情形中任何一種， $\angle B$ 與 $\angle C$ 都是銳角、直線 CP_0 與直線 AR_0 交於一點 V_0 、直線 AQ_0 與直線 BP_0 交於一點 W_0 ，而且

$$\angle R_0 V_0 P_0 = 60^\circ - 2\beta, \quad \angle V_0 R_0 P_0 = \angle V_0 P_0 R_0 = 60^\circ + \beta;$$

$$\angle P_0 W_0 Q_0 = 60^\circ - 2\gamma, \quad \angle W_0 P_0 Q_0 = \angle W_0 Q_0 P_0 = 60^\circ + \gamma.$$

【三角證法】

在下文中，我們仍令 $\angle A = 3\alpha$ 、 $\angle B = 3\beta$ 、 $\angle C = 3\gamma$ 。於是， $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ 。另一方面，令 d 表示 $\triangle ABC$ 的外接圓直徑。



▲圖 6

在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BCP_0$ 中使用正弦定律，可得

$$\begin{aligned} \overline{BP_0} &= \frac{\overline{BC} \sin \angle BCP_0}{\sin \angle BP_0 C} = \frac{\overline{BC} \sin(60^\circ - \gamma)}{\sin(60^\circ + \beta + \gamma)} = \frac{d \sin 3\alpha \sin(60^\circ - \gamma)}{\sin(120^\circ - \alpha)}, \\ \overline{CP_0} &= \frac{\overline{BC} \sin \angle CBP_0}{\sin \angle BP_0 C} = \frac{\overline{BC} \sin(60^\circ - \beta)}{\sin(60^\circ + \beta + \gamma)} = \frac{d \sin 3\alpha \sin(60^\circ - \beta)}{\sin(120^\circ - \alpha)}. \end{aligned}$$

因為

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha = \sin \alpha (3 - 4\sin^2 \alpha) = \sin \alpha (3\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= 4\sin \alpha \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \\ &= 4\sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(120^\circ - \alpha), \end{aligned}$$

所以，可得

$$\overline{BP_0} = 4d \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \gamma),$$

$$\overline{CP_0} = 4d \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta).$$

同理，在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle CAQ_0$ 中使用正弦定律，可得

$$\overline{AQ_0} = 4d \sin \beta \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma) ,$$

$$\overline{CQ_0} = 4d \sin \beta \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) .$$

$$\overline{AR_0} = 4d \sin \gamma \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma) ,$$

$$\overline{BR_0} = 4d \sin \gamma \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \gamma) .$$

其次，在 $\triangle AQ_0R_0$ 中使用餘弦定律，可得

$$\begin{aligned} \frac{\overline{Q_0R_0}^2}{16d^2 \sin^2(60^\circ - \beta) \sin^2(60^\circ - \gamma)} &= \frac{\overline{AQ_0}^2 + \overline{AR_0}^2 - 2\overline{AQ_0} \times \overline{AR_0} \times \cos \angle Q_0AR_0}{16d^2 \sin^2(60^\circ - \beta) \sin^2(60^\circ - \gamma)} \\ &= \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos(120^\circ + \alpha) . \end{aligned}$$

考慮一個外接圓直徑等於 1 而三內角分別為 $120^\circ + \alpha$ 、 β 與 γ 的三角形。根據正弦定律，這個三角形的三邊長分別為 $\sin(120^\circ + \alpha)$ 、 $\sin \beta$ 與 $\sin \gamma$ 。於是，根據餘弦定律，可得

$$\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos(120^\circ + \alpha) = \sin^2(120^\circ + \alpha) = \sin^2(60^\circ - \alpha) .$$

由此即得

$$\overline{Q_0R_0}^2 = 16d^2 \sin^2(60^\circ - \alpha) \sin^2(60^\circ - \beta) \sin^2(60^\circ - \gamma) ,$$

$$\overline{Q_0R_0} = 4d \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma) .$$

接著，在 $\triangle BR_0P_0$ 中使用餘弦定律，可得

$$\begin{aligned} \frac{\overline{R_0P_0}^2}{16d^2 \sin^2(60^\circ - \alpha) \sin^2(60^\circ - \gamma)} &= \frac{\overline{BR_0}^2 + \overline{BP_0}^2 - 2\overline{BR_0} \times \overline{BP_0} \times \cos \angle R_0BP_0}{16d^2 \sin^2(60^\circ - \alpha) \sin^2(60^\circ - \gamma)} \\ &= \sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \gamma \cos(120^\circ + \beta) . \end{aligned}$$

考慮一個外接圓直徑等於 1 而三內角分別為 α 、 $120^\circ + \beta$ 與 γ 的三角形。根據正弦定律，這個三角形的三邊長分別為 $\sin \alpha$ 、 $\sin(120^\circ + \beta)$ 與 $\sin \gamma$ 。於是，根據餘弦定律，可得

$$\sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \gamma \cos(120^\circ + \beta) = \sin^2(120^\circ + \beta) = \sin^2(60^\circ - \beta)。$$

由此即得

$$\overline{R_0 P_0}^2 = 16d^2 \sin^2(60^\circ - \alpha) \sin^2(60^\circ - \beta) \sin^2(60^\circ - \gamma)，$$

$$\overline{R_0 P_0} = 4d \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)。$$

最後，在 $\triangle CP_0 Q_0$ 中使用餘弦定律，可得

$$\begin{aligned} \frac{\overline{P_0 Q_0}^2}{16d^2 \sin^2(60^\circ - \alpha) \sin^2(60^\circ - \beta)} &= \frac{\overline{CP_0}^2 + \overline{CQ_0}^2 - 2\overline{CP_0} \times \overline{CQ_0} \times \cos \angle P_0 C Q_0}{16d^2 \sin^2(60^\circ - \alpha) \sin^2(60^\circ - \beta)} \\ &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(120^\circ + \gamma)。 \end{aligned}$$

考慮一個外接圓直徑等於 1 而三內角分別為 α 、 β 與 $120^\circ + \gamma$ 的三角形。根據正弦定律，這個三角形的三邊長分別為 $\sin \alpha$ 、 $\sin \beta$ 與 $\sin(120^\circ + \gamma)$ 。於是，根據餘弦定律，可得

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(120^\circ + \gamma) = \sin^2(120^\circ + \gamma) = \sin^2(60^\circ - \gamma)。$$

由此即得

$$\overline{P_0 Q_0}^2 = 16d^2 \sin^2(60^\circ - \alpha) \sin^2(60^\circ - \beta) \sin^2(60^\circ - \gamma)，$$

$$\overline{P_0 Q_0} = 4d \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)。$$

因此， $\triangle P_0 Q_0 R_0$ 是正三角形。這就完成了 Morley 角三等分線定理的三外角情形的證明。

上述證明中附帶得出下述性質。

系理 8：設 $\triangle ABC$ 為一個三角形，令 d 表示 $\triangle ABC$ 的外接圓直徑。若 P_0 、 Q_0 與 R_0 是定理 2 中所提的三個點，則

$$(1) \quad \overline{AQ_0} = 4d \sin \beta \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)，\quad \overline{AR_0} = 4d \sin \gamma \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)，$$

$$\overline{BR_0} = 4d \sin \gamma \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \gamma)，\quad \overline{BP_0} = 4d \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \gamma)，$$

$$\overline{CP_0} = 4d \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta)，\quad \overline{CQ_0} = 4d \sin \beta \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta)。$$

$$(2) \overline{Q_0R_0} = \overline{R_0P_0} = \overline{P_0Q_0} = 4d \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)。$$

系理 6 所敘述的等式，在幾何證法中並非直接證明而得。下面我們利用三角方法直接證明這些角的等式。

系理 6 的三角證法：

因為 $\overline{AQ_0} = 4d \sin \beta \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)$ ， $\overline{AR_0} = 4d \sin \gamma \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)$ ，所以，在 $\triangle AQ_0R_0$ 中使用正弦定律，即得

$$\frac{\sin \angle AQ_0R_0}{\sin \angle AR_0Q_0} = \frac{\overline{AR_0}}{\overline{AQ_0}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}，$$

$$\sin \angle AQ_0R_0 \times \sin \beta = \sin \angle AR_0Q_0 \times \sin \gamma。$$

兩端積化和差，即得

$$\cos(\angle AQ_0R_0 - \beta) - \cos(\angle AQ_0R_0 + \beta) = \cos(\angle AR_0Q_0 - \gamma) - \cos(\angle AR_0Q_0 + \gamma)。$$

因為

$$\angle AQ_0R_0 + \angle AR_0Q_0 = 180^\circ - (120^\circ + \alpha) = 60^\circ - \alpha = \beta + \gamma，$$

$$\angle AQ_0R_0 - \beta = -(\angle AR_0Q_0 - \gamma)，$$

$$\cos(\angle AQ_0R_0 - \beta) = \cos(\angle AR_0Q_0 - \gamma)，$$

所以，與前述積化和差所得等式比較，即得

$$\cos(\angle AQ_0R_0 + \beta) = \cos(\angle AR_0Q_0 + \gamma)。$$

因為

$$(\angle AQ_0R_0 + \beta) + (\angle AR_0Q_0 + \gamma) = (\angle AQ_0R_0 + \angle AR_0Q_0) + (\beta + \gamma) < 360^\circ，$$

所以，由 $\cos(\angle AQ_0R_0 + \beta) = \cos(\angle AR_0Q_0 + \gamma)$ 可得

$$\angle AQ_0R_0 + \beta = \angle AR_0Q_0 + \gamma。$$

再與等式 $\angle AQ_0R_0 - \beta = -(\angle AR_0Q_0 - \gamma)$ 比較，即得

$$\angle AQ_0R_0 = \gamma, \quad \angle AR_0Q_0 = \beta.$$

同理，在 $\triangle BR_0P_0$ 中使用正弦定律，可得

$$\angle BR_0P_0 = \alpha, \quad \angle BP_0R_0 = \gamma.$$

在 $\triangle CP_0Q_0$ 中使用正弦定律，可得

$$\angle CP_0Q_0 = \beta, \quad \angle CQ_0P_0 = \alpha.$$

下面三個問題，是本文內容的一些延伸。

性質 4：在圖 4 中，試證：

- (1) 直線 P_0Q_0 與直線 BC 的一個夾角為 $60^\circ + (\beta - \gamma)$ 。
- (2) 直線 P_0R_0 與直線 BC 的一個夾角為 $60^\circ - (\beta - \gamma)$ 。
- (3) 直線 Q_0R_0 與直線 BC 的一個夾角為 $|\beta - \gamma|$ 。

性質 5：設 $\triangle ABC$ 為一個三角形。若 P_0 、 Q_0 與 R_0 是定理 2 中所提的三個點，又設點 M_0 是點 P_0 對直線 BR_0 的對稱點、點 N_0 是點 P_0 對直線 CQ_0 的對稱點，則

- (1) $\angle Q_0M_0P_0 = \angle R_0N_0P_0 = 30^\circ$ 。
- (2) 直線 M_0Q_0 、直線 N_0R_0 都與 $\triangle U_0BC$ 的內切圓相切，其中，點 U_0 是直線 BR_0 與直線 CQ_0 的交點。

性質 6：設 $\triangle ABC$ 為一個三角形。若 P_0 、 Q_0 與 R_0 是定理 2 中所提的三個點，又設直線 BR_0 與直線 CQ_0 交於點 U_0 、直線 CP_0 與直線 AR_0 交於點 V_0 、直線 AQ_0 與直線 BP_0 交於點 W_0 ，又設 d 表示 $\triangle ABC$ 的外接圓直徑，則下述等式成立：

$$\begin{aligned} (1) \quad \overline{AQ_0} \times \overline{BR_0} \times \overline{CP_0} &= \overline{AR_0} \times \overline{BP_0} \times \overline{CQ_0} \\ &= 64d^3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin^2(60^\circ - \alpha) \sin^2(60^\circ - \beta) \sin^2(60^\circ - \gamma). \end{aligned}$$

- (2) 若 $\triangle ABC$ 是銳角三角形，則

$$\begin{aligned} \overline{U_0B} &= \frac{4d \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \gamma) \cos(60^\circ - \gamma)}{\cos(60^\circ + \alpha)}, \\ \overline{U_0C} &= \frac{4d \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) \cos(60^\circ - \beta)}{\cos(60^\circ + \alpha)}, \end{aligned}$$

$$\overline{V_0C} = \frac{4d \sin \beta \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ - \alpha)}{\cos(60^\circ + \beta)},$$

$$\overline{V_0A} = \frac{4d \sin \beta \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma) \cos(60^\circ - \gamma)}{\cos(60^\circ + \beta)},$$

$$\overline{W_0A} = \frac{4d \sin \gamma \sin(60^\circ - \gamma) \sin(60^\circ - \beta) \cos(60^\circ - \beta)}{\cos(60^\circ + \gamma)},$$

$$\overline{W_0B} = \frac{4d \sin \gamma \sin(60^\circ - \gamma) \sin(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ - \alpha)}{\cos(60^\circ + \gamma)}。$$

若 $\angle A$ 是鈍角，則

$$\overline{U_0B} = \frac{4d \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \gamma) \cos(60^\circ - \gamma)}{\cos(120^\circ - \alpha)},$$

$$\overline{U_0C} = \frac{4d \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) \cos(60^\circ - \beta)}{\cos(120^\circ - \alpha)}。$$

(3) 若 $\triangle ABC$ 是銳角三角形，則

$$\overline{U_0Q_0} = \overline{U_0R_0} = \frac{2d \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)}{\cos(60^\circ + \alpha)},$$

$$\overline{V_0R_0} = \overline{V_0P_0} = \frac{2d \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)}{\cos(60^\circ + \beta)},$$

$$\overline{W_0P_0} = \overline{W_0Q_0} = \frac{2d \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)}{\cos(60^\circ + \gamma)}。$$

若 $\angle A$ 是鈍角，則

$$\overline{U_0Q_0} = \overline{U_0R_0} = \frac{2d \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)}{\cos(120^\circ - \alpha)}。$$



動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系



遊戲 73

☆☆

設 n 項數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的每一項都是 $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{5}$ 。若這 n 項數列的和與積分別為 $7\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ 與 $-32000\sqrt{5}$ ，則求項數 n 的值。

〔玩鎖・玩索〕

這是數學系轉系考試的試題。



遊戲 74

☆☆☆☆

設矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{bmatrix},$$

令

$$A^n = \begin{bmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{bmatrix} (n=1, 2, 3, \dots),$$

證明：

- (1) $a_n = d_n$ 。
- (2) $b_n = c_n$ 。
- (3) $a_n + b_n = 1$ 。

〔玩鎖・玩索〕

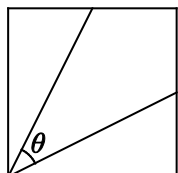
這是九十六學年度國立臺灣大學物理系大學申請數學試題，題目中的矩陣是轉移矩陣的一種特例。對於所有正整數都成立的數學問題，數學歸納法是個不錯的選擇。



在正方形中，已知角 θ 是一頂點與對邊中點連線的夾角，如下圖所示，求 $\sin \theta$ 的值。

遊戲 75

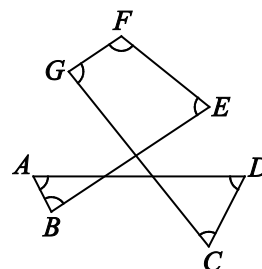
☆☆☆



如下圖所示：

遊戲 76

☆



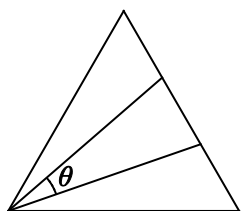
求角度和

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G = ?$$

〔玩鎖・玩索〕

這道問題是國立臺灣大學物理系九十五學年度申請入學的數學試題，在同一份考卷裡，又出了如下的類似題：

「在正三角形中，已知角 θ 是一頂點與對邊三等分點連線的夾角，如下圖所示，求 $\cos \theta$ 的值。」



〔玩鎖・玩索〕

這是 1994 年《祖沖之盃數學邀請賽》的國二試題，考慮多邊形的內角和。

動手玩數學~破解秘笈

第18期

遊戲 69

(1) 恆等式

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \frac{a+b}{a+(a-b)}.$$

(2) 利用恆等式

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2),$$

推導如下：

$$\begin{aligned} & \frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} \\ &= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(a+(a-b))(a^2 - a(a-b) + (a-b)^2)} \\ &= \frac{(a+b)(a^2 - \cancel{ab} + b^2)}{(a+(a-b))(a^2 - \cancel{ab} + b^2)} \\ &= \frac{a+b}{a+(a-b)}. \end{aligned}$$

遊戲 70

將分數數列

$$\begin{aligned} \frac{25}{4} &= 6\frac{1}{4}, \frac{50}{4} = 12\frac{1}{2}, \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}, \\ \frac{100}{4} &= 25, \frac{125}{4} = 31\frac{1}{4}, \dots \end{aligned}$$

取整數部分，得數列

$$6, 12, 18, \underline{25}, 31, \dots$$

因此，宇富接下來拿紙的時間是

「 $25k + 6, 25k + 12, 25k + 18, 25k + 25$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 的數列」。

另外，將分數數列

$$\begin{aligned} \frac{25}{3} &= 8\frac{1}{3}, \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}, \frac{75}{3} = 25, \\ \frac{100}{3} &= 33\frac{1}{3}, \frac{125}{3} = 41\frac{2}{3}, \dots \end{aligned}$$

取整數部分，得數列

$$8, 16, \underline{25}, 33, 41, \underline{50}, \dots$$

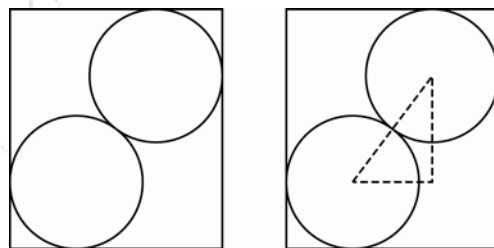
因此，茗茹拿紙的時間是

「 $25k + 8, 25k + 16, 25k + 25$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 的數列」。

這兩個數列的共同項是 25 的倍數，所以下一次一同跟爸爸要紙是第 25 天。

遊戲 71

通過圓柱上、下圓的圓心與兩顆球的球心之平面會將圓柱與球體相交成如下左圖的剖面圖：



如上右圖的虛線直角三角形的斜邊長度為 $2r$ (球的直徑)，兩邊長度分別為 $16 - 2r$ 與 $18 - 2r$ ，根據畢氏定理，得

$$\begin{aligned} (16 - 2r)^2 + (18 - 2r)^2 &= (2r)^2 \\ \Rightarrow r^2 - 34r + 145 &= 0, \end{aligned}$$

解得 $r = 5$ 或 29 (不合)。

故球體的半徑為 5。

遊戲 72

當生產A、B品牌咖啡各 x, y 磅時，利潤函數

$$P(x, y) = 70x + 90y,$$

且需要烘焙過後的甲、乙型咖啡豆各

$\frac{2}{3}x + \frac{2}{5}y$ 與 $\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}y$ 磅。由咖啡生豆甲型125

磅，乙型75磅，烘焙過後均減重20%知：烘焙過後的甲、乙型咖啡豆至多有

$125 \cdot 0.8 = 100$ 與 $75 \cdot 0.8 = 60$ 。綜合得到 x 與 y

必須滿足方程組

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{5}y \leq 100 \\ \frac{1}{3}x + \frac{3}{5}y \leq 60 \end{cases}.$$

方程組所決定的可行解區域之端點坐標為

$(0, 0), (150, 0), (0, 100), (135, 25)$ 。

將此四點代入利潤函數 $P(x, y)$ 知：當

$x = 135, y = 25$ 時，有最大利潤

$$P(135, 25) = 70 \cdot 135 + 90 \cdot 25 = 11700.$$