# 四次方程式根的判別

葉善雲／臺北市東山高中

## ＊＊ 摘要

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有根的公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ ，其中 $D=b^2-4ac$ 為判別式：

當 $D>0$ 時，方程式有兩個相異實根；當 $D=0$ 時，方程式有二重根 $x=\dfrac{-b}{2a}$ ；當 $D<0$ 時，方程式的兩根為共軛虛數。十六世紀的 義大利 數學家 卡丹諾（G. Cardano，1501~1576）或 費拉里（L. Ferrari，1522~1565）僅提供三次、四次方程式的解法，但沒有寫出具體的判別式與根的公式！後來有多項式方程式的判別式（discriminant）或結式（resultant）可用來判別根的性質 ①。在本刊第 14 期，我們已探討三次方程式根的判別，在本刊第 16 期，也已探討四次方程式的解法，此處繼續引用行列式的方法探討四次方程式根的判別。

## ＊＊內文

延續前一篇文章「**三次方程式根的行列式判別**」中行列式的符號（數亦優第 14 期，P.5~14），考慮多項式函數 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 與其導函數 $f'(x)$ 的關係，得

$$f(x)=f'(x)\cdot\left(\frac{x}{n}+\frac{a_{n-1}}{n^2a_n}\right)+\frac{1}{n^2a_n}\cdot\left(\Delta_1x^{n-2}+\Delta_2x^{n-3}+\cdots+\Delta_{n-2}x+\Delta_{n-1}\right)\qquad(*)$$

其中 $\Delta_k$ （ $1\le k\le n-1$ ）為下列表達式第 1 列與第 $k+1$ 列所成之二階行列式：

$$\begin{pmatrix} na_n & a_{n-1} \\ (n-1)a_{n-1} & 2a_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ 2a_2 & (n-1)a_1 \\ a_1 & na_0 \end{pmatrix}，即 \Delta_k=\begin{vmatrix} na_n & a_{n-1} \\ (n-k)a_{n-k} & (k+1)a_{n-1-k}\end{vmatrix},1\le k\le n-1 。$$

在式子$(*)$兩側同乘 $n^na_n^{n-1}$ ，得

$$n^na_n^{n-1}f(x)=(na_n)^{n-2}f'(x)\cdot\left(na_nx+a_{n-1}\right)+(na_n)^{n-2}\cdot\left(\Delta_1x^{n-2}+\Delta_2x^{n-3}+\cdots+\Delta_{n-2}x+\Delta_{n-1}\right),$$

可將上式化成 $\left(na_nx+a_{n-1}\right)$ 的函數，同時使次高項（ $\left(n-1\right)$ 次項）消失。

此處，我們討論 $n=4$ 時的情形：

---

註 1：方程式的判別式 discriminant 為方程式所有根差平方的乘積；多項式的結式 resultant 為多項式與其導函數所形成的行列式。關於此兩者的關聯，請參考北京大學數學科學學院網站：高等代數第二學期第二十六次課結式 http://www.math.pku.edu.cn:8000/misc/course/algebra/index.html 。

設 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 為四次多項式函數，$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d, \Delta_k$（$k=1,2,3$）為下列表達式第 1 列與第 $k+1$ 列所成之二階行列式：$\begin{pmatrix} 4a & b \\ 3b & 2c \\ 2c & 3d \\ d & 4e \end{pmatrix}$，即 $\Delta_1=\begin{vmatrix} 4a & b \\ 3b & 2c \end{vmatrix}, \Delta_2=\begin{vmatrix} 4a & b \\ 2c & 3d \end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix} 4a & b \\ d & 4e \end{vmatrix}$。

由 $f(x)=f'(x)\cdot\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{b}{16a}\right)+\dfrac{1}{16a}\cdot\left(\Delta_1x^2+\Delta_2x+\Delta_3\right)$，得

$$
\begin{aligned}
&256a^3\cdot f(x)=16a^2\cdot\left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)\cdot\left(4ax+b\right)+16a^2\cdot\left(\Delta_1x^2+\Delta_2x+\Delta_3\right)\\
&=\left[\left(4ax\right)^3+3b\cdot\left(4ax\right)^2+3b^2\cdot 4ax+b^3+8ac\cdot\left(4ax+b\right)-3b^2\cdot\left(4ax+b\right)+16a^2d-8abc+2b^3\right]\cdot\left(4ax+b\right)\\
&\quad+\Delta_1\cdot\left(16a^2x^2+4ax\cdot 2b+b^2\right)+\left(4a\Delta_2-2b\Delta_1\right)\left(4ax+b\right)+16a^2\Delta_3+b^2\Delta_1-4ab\Delta_2\\
&=\left[\left(4ax+b\right)^3+\left(8ac-3b^2\right)\left(4ax+b\right)+\frac{4a}{3}\left(12ad-2bc\right)-\frac{2b}{3}\left(8ac-3b^2\right)\right]\cdot\left(4ax+b\right)\\
&\quad+\Delta_1\cdot\left(4ax+b\right)^2+\left(4a\Delta_2-2b\Delta_1\right)\left(4ax+b\right)+b^2\Delta_1-4ab\Delta_2+16a^2\Delta_3\\
&=\left[\left(4ax+b\right)^3+\Delta_1\cdot\left(4ax+b\right)+\frac{4a}{3}\cdot\Delta_2-\frac{2b}{3}\cdot\Delta_1\right]\cdot\left(4ax+b\right)\\
&\quad+\Delta_1\cdot\left(4ax+b\right)^2+\left(4a\Delta_2-2b\Delta_1\right)\left(4ax+b\right)+b^2\Delta_1-4ab\Delta_2+16a^2\Delta_3\\
&=\left(4ax+b\right)^4+2\Delta_1\cdot\left(4ax+b\right)^2+\frac{4}{3}\cdot\begin{vmatrix} 4a & \Delta_1 \\ 2b & \Delta_2 \end{vmatrix}\cdot\left(4ax+b\right)+\begin{vmatrix} 4a & 0 & \Delta_1 \\ b & 4a & \Delta_2 \\ 0 & b & \Delta_3 \end{vmatrix}\text{。}
\end{aligned}
$$

利用上面的寫法(實際上,也可反覆運用綜合除法求得),解四次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 就是解下列缺三次項的四次方程式

$$\left(4ax+b\right)^4+2\Delta_1\cdot\left(4ax+b\right)^2+\frac{4}{3}\cdot\begin{vmatrix} 4a & \Delta_1 \\ 2b & \Delta_2 \end{vmatrix}\cdot\left(4ax+b\right)+\begin{vmatrix} 4a & 0 & \Delta_1 \\ b & 4a & \Delta_2 \\ 0 & b & \Delta_3 \end{vmatrix}=0 \text{ 。}$$

由 <u>費拉里</u> 解法的討論，解上述四次方程式相當於解下列三次（預解）方程式

$$y^3+4\Delta_1y^2+\left(4\Delta_1{}^2-4\cdot\begin{vmatrix} 4a & 0 & \Delta_1 \\ b & 4a & \Delta_2 \\ 0 & b & \Delta_3 \end{vmatrix}\right)\cdot y-\frac{16}{9}\cdot\left(\begin{vmatrix} 4a & \Delta_1 \\ 2b & \Delta_2 \end{vmatrix}\right)^2=0 \qquad (**)$$

而解上述三次方程式就是解下列缺二次項的三次方程式 ②

$$\left(3y+4\Delta_1\right)^3+\left(-12\right)\cdot\left(\Delta_1{}^2+3M\right)\cdot\left(3y+4\Delta_1\right)+\Phi=0 \text{ ，}$$

---

註 2：三次方程式 $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ 可化成 $\left(3Ax+B\right)^3+\dfrac{3}{2}\cdot\Delta_1\cdot\left(3Ax+B\right)+\begin{vmatrix} 3A & \Delta_1 \\ B & \Delta_2 \end{vmatrix}=0$，其中

$\Delta_1=\begin{vmatrix} 3A & B \\ 2B & 2C \end{vmatrix}=6AC-2B^2$ 且 $\Delta_2=\begin{vmatrix} 3A & B \\ C & 3D \end{vmatrix}=9AD-BC$ 。

其中$M=\begin{vmatrix}4a & 0 & \Delta_1\\ b & 4a & \Delta_2\\ 0 & b & \Delta_3\end{vmatrix}=b^2\Delta_1-4ab\Delta_2+16a^2\Delta_3$，

$$\begin{aligned}\Phi&=\begin{vmatrix}3 & -8\left(\Delta_1{}^2+3M\right)\\ 4\Delta_1 & -16\cdot\left[\left(4a\Delta_2-2b\Delta_1\right)^2+\Delta_1{}^3-\Delta_1 M\right]\end{vmatrix}\\ &=-16\cdot\left[48a^2\Delta_2{}^2-48ab\Delta_1\Delta_2+12b^2\Delta_1{}^2+\left(8ac-3b^2\right)\Delta_1{}^2-9\cdot\left(b^2\Delta_1{}^2-4ab\Delta_1\Delta_2+16a^2\Delta_1\Delta_3\right)\right]\\ &=-64a\cdot\left(12a\Delta_2{}^2-3b\Delta_1\Delta_2+2c\Delta_1{}^2-36a\Delta_1\Delta_3\right)\\ &=-64a\cdot\begin{vmatrix}4a & \Delta_1 & 0\\ 3b & 3\Delta_2 & \Delta_1\\ 2c & 9\Delta_3 & \Delta_2\end{vmatrix}。\end{aligned}$$

再由卡丹諾解法，解上述三次方程式相當於解下列二次方程式

$$z^2+\Phi\cdot z+\left(4\Delta_1{}^2+12M\right)^3=0，$$

而此方程式的判別式為$\Re=\Phi^2-4\cdot\left(4\Delta_1{}^2+12M\right)^3$，由此可得預解方程式(＊＊)的三根，並解出四次方程式。

接著，我們寫出判別式$\Re=\Phi^2-4\cdot\left(4\Delta_1{}^2+12M\right)^3$的行列式表示。

**引理 1：**

延續前面$\Delta_k$（$k=1,2,3$）的符號，

設$M=\begin{vmatrix}4a & 0 & \Delta_1\\ b & 4a & \Delta_2\\ 0 & b & \Delta_3\end{vmatrix},\Phi=-64a\cdot\begin{vmatrix}4a & \Delta_1 & 0\\ 3b & 3\Delta_2 & \Delta_1\\ 2c & 9\Delta_3 & \Delta_2\end{vmatrix}$，及判別式$\Re=\Phi^2-4\cdot\left(4\Delta_1{}^2+12M\right)^3$，

則$\Re=-2^{16}\cdot 3^3\cdot a^4\cdot\begin{vmatrix}4a & 0 & \Delta_1 & 0 & 0\\ 3b & 4a & \Delta_2 & \Delta_1 & 0\\ 2c & 3b & \Delta_3 & \Delta_2 & \Delta_1\\ d & 2c & 0 & \Delta_3 & \Delta_2\\ 0 & d & 0 & 0 & \Delta_3\end{vmatrix}$。（證明請參閱附錄的説明）

説得更明確些，若$\Delta_1\neq 0$，則$\Re=-2^{16}\cdot 3^3\cdot a^4\cdot\dfrac{1}{\Delta_1{}^2}\cdot\begin{vmatrix}\Delta_1 & \Omega_1 & 0\\ \Delta_2 & \Omega_2 & \Omega_1\\ \Delta_3 & 0 & \Omega_2\end{vmatrix}$，其中$\Omega_k$為下列表達式第 1 列、

第 2 列與第 $k+2$ 列所成之三階行列式：$\begin{pmatrix} 4a & \Delta_1 & 0 \\ 3b & \Delta_2 & \Delta_1 \\ 2c & \Delta_3 & \Delta_2 \\ d & 0 & \Delta_3 \end{pmatrix}$，即 $\Omega_1 = \begin{vmatrix} 4a & \Delta_1 & 0 \\ 3b & \Delta_2 & \Delta_1 \\ 2c & \Delta_3 & \Delta_2 \end{vmatrix}$ 且

$\Omega_2 = \begin{vmatrix} 4a & \Delta_1 & 0 \\ 3b & \Delta_2 & \Delta_1 \\ d & 0 & \Delta_3 \end{vmatrix}$。③

由實係數**三次方程式根的判別定理**，知判別式 $\Re$ 的正負或為 0 可決定三次方程式根的性質 ④；再根據解四次方程式的討論，預解方程式三根的性質也決定了原四次方程式四根的性質 ⑤。利用上述引理中判別式 $\Re$ 的表示法及解四次方程式的討論，我們有下面的結論：

## 定理一（四次方程式根的判別）：

設 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 為實係數四次多項式函數，符號 $\Delta_k$（$k = 1,2,3$）如前所述，並令

$\Re^* = \begin{vmatrix} 4a & 0 & \Delta_1 & 0 & 0 \\ 3b & 4a & \Delta_2 & \Delta_1 & 0 \\ 2c & 3b & \Delta_3 & \Delta_2 & \Delta_1 \\ d & 2c & 0 & \Delta_3 & \Delta_2 \\ 0 & d & 0 & 0 & \Delta_3 \end{vmatrix}$，則我們有下列方程式實根個數的判別：⑥

(1) $f(x) = 0$ 有重根 $\Leftrightarrow \Re^* = 0$。

(2) $f(x) = 0$ 有 4 個相異實根或 4 個虛根 $\Leftrightarrow \Re^* > 0$。

(3) $f(x) = 0$ 有 2 個相異實根與 2 個虛根 $\Leftrightarrow \Re^* < 0$。

---

註 3：關於 $\Omega_k$ 之選取：四次函數 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 除以其導函數 $f'(x)$ 的餘式為

$r(x) = \dfrac{1}{16a} \cdot \left(\Delta_1 x^2 + \Delta_2 x + \Delta_3\right)$；$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ 除以 $r(x)$ 的餘式為 $\dfrac{1}{\left(\Delta_1\right)^2} \cdot \left(\Omega_1 x + \Omega_2\right)$。

註 4：$\Re = 0$ 預解方程式有重根；$\Re < 0$ 預解方程式有三個相異實根；$\Re > 0$ 預解方程式有一個實根及兩個共軛虛根。

註 5：若預解方程式有重根，則四次方程式有重根；若預解方程式有三個相異實根，則四次方程式有四個相異實根或四個虛根；若預解方程式有一個實根及兩個共軛虛根，則四次方程式有兩個相異實根及兩個共軛虛根。

註 6：在附錄我們推導：$\Re^* = 256a \times R(f, f') = 256a^2 \times D(f)$，讀者亦可經由網頁 http://www.wolframalpha.com/計算引擎來驗證。

**定理二（四次方程式有四個相異實根的條件）：**

設 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 為實係數四次多項式函數，符號 $\Delta_k$（$k=1,2,3$），$\Omega_j$（$j=1,2$）

如前所述，則 $f(x)=0$ 有四個相異實根 $\Leftrightarrow \Delta_1<0, a\Omega_1<0$ 且 $\begin{vmatrix}\Delta_1 & \Omega_1 & 0\\ \Delta_2 & \Omega_2 & \Omega_1\\ \Delta_3 & 0 & \Omega_2\end{vmatrix}>0$。⑦

首先，我們列出兩個證明需要引用的預備引理。

**預備引理 1：**

若實係數三次方程式 $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ 的三根為相異非負實數，則 $AB-9C<0$。⑧

將此結果應用：

若三次方程式 $x^3+4\Delta_1x^2+\left(4{\Delta_1}^2-4\cdot\begin{vmatrix}4a & 0 & \Delta_1\\ b & 4a & \Delta_2\\ 0 & b & \Delta_3\end{vmatrix}\right)\cdot x-\frac{16}{9}\cdot\left(\begin{vmatrix}4a & \Delta_1\\ 2b & \Delta_2\end{vmatrix}\right)^2=0$ 的三根為相異非負實數，則 $4\Delta_1\cdot\left(4{\Delta_1}^2-4\cdot\begin{vmatrix}4a & 0 & \Delta_1\\ b & 4a & \Delta_2\\ 0 & b & \Delta_3\end{vmatrix}\right)+16\cdot\left(\begin{vmatrix}4a & \Delta_1\\ 2b & \Delta_2\end{vmatrix}\right)^2$

$$=16\cdot\left[\left(8ac-3b^2\right){\Delta_1}^2-\Delta_1\cdot\left(b^2\Delta_1-4ab\Delta_2+16a^2\Delta_3\right)+16a^2{\Delta_2}^2-16ab\Delta_1\Delta_2+4b^2{\Delta_1}^2\right]$$

$$=16\cdot 4a\cdot\left(2c{\Delta_1}^2-3b\Delta_1\Delta_2-4a\Delta_1\Delta_3+4a{\Delta_2}^2\right)$$

$$=64a\cdot\begin{vmatrix}4a & \Delta_1 & 0\\ 3b & \Delta_2 & \Delta_1\\ 2c & \Delta_3 & \Delta_2\end{vmatrix}=64a\Omega_1<0\text{ 。}$$

**預備引理 2：**

若實係數三次方程式 $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ 有三個相異實根滿足 $A<0, B>0$ 且 $C\le 0$，則 $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ 的三根為相異非負實數。⑨

---

註 7：此結論亦可由 Sturm 法則推得，關於 Sturm 法則請參考臺大數學系網站，微積分經典範例 http://scicomp.math.ntu.edu.tw/calculus/。

註 8：設方程式 $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ 的三根為 $\alpha,\beta,\gamma$，因此三數為相異非負實數，由算幾不等式得 $6\alpha\beta\gamma<\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta\gamma^2$，即 $9\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)<0$，再由根與係數的關係得 $AB-9C<0$。

註 9：設方程式的三根為 $\alpha,\beta,\gamma$，由 $C\le 0$ 知三根為：三正根或「一正根兩負根」或有一根為 0，

(1)若三根有一根為 0，則由 $B>0$ 知另兩根同正或同負，並由 $A<0$ 知該兩根同正。

(2)若三根為一正根 $\alpha$ 與兩負根 $\beta,\gamma$，則由 $A=-(\alpha+\beta+\gamma)<0$ 知 $\alpha>-(\beta+\gamma)>0$，得

$$B=\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma<-(\beta+\gamma)^2+\beta\gamma=-\left(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2\right)<0 \text{ 與 } B>0 \text{ 不合。}$$

故由(1)(2)得方程式的三根為相異非負實數。

定理證明：

當 $f(x)=0$ 有四個相異實根時，則根據解四次方程式的討論，

預解式 $x^3+4\Delta_1x^2+\left(4\Delta_1{}^2-4\cdot\begin{vmatrix}4a & 0 & \Delta_1\\ b & 4a & \Delta_2\\ 0 & b & \Delta_3\end{vmatrix}\right)\cdot x-\frac{16}{9}\cdot\left(\begin{vmatrix}4a & \Delta_1\\ 2b & \Delta_2\end{vmatrix}\right)^2=0$ 有三個相異非負實根，

此時判別式 $\Re<0$；另由三根和為 $-4\Delta_1$（需為正數）得 $\Delta_1<0$，且由預備引理 1 之應用得 $a\Omega_1<0$；

再由 $\Delta_1\neq 0$ 及引理 1 得 $\begin{vmatrix}\Delta_1 & \Omega_1 & 0\\ \Delta_2 & \Omega_2 & \Omega_1\\ \Delta_3 & 0 & \Omega_2\end{vmatrix}>0$。

反之，由 $\Delta_1\neq 0$ 與 $\begin{vmatrix}\Delta_1 & \Omega_1 & 0\\ \Delta_2 & \Omega_2 & \Omega_1\\ \Delta_3 & 0 & \Omega_2\end{vmatrix}>0$ 及引理 1 得判別式 $\Re<0$，得預解方程式有三個相異實根；

再由 $64a\cdot\Omega_1=4\Delta_1\cdot\left(4\Delta_1{}^2-4\cdot\begin{vmatrix}4a & 0 & \Delta_1\\ b & 4a & \Delta_2\\ 0 & b & \Delta_3\end{vmatrix}\right)+16\cdot\left(\begin{vmatrix}4a & \Delta_1\\ 2b & \Delta_2\end{vmatrix}\right)^2<0$，得

$4\Delta_1\cdot\left(4\Delta_1{}^2-4\cdot\begin{vmatrix}4a & 0 & \Delta_1\\ b & 4a & \Delta_2\\ 0 & b & \Delta_3\end{vmatrix}\right)<0$，並由已知 $\Delta_1<0$ 得 $4\Delta_1{}^2-4\cdot\begin{vmatrix}4a & 0 & \Delta_1\\ b & 4a & \Delta_2\\ 0 & b & \Delta_3\end{vmatrix}>0$，

於是根據預備引理 2，知預解方程式的三根為三相異非負實數，故根據解四次方程式的討論，知 $f(x)=0$ 有四個相異實根。

**推論（四次方程式沒有實根的條件）：**

設 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 為實係數四次多項式函數，符號 $\Delta_k$ 與 $\Omega_j$ 同上，則

$$f(x)=0\text{ 沒有實根}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}4a & 0 & \Delta_1 & 0 & 0\\ 3b & 4a & \Delta_2 & \Delta_1 & 0\\ 2c & 3b & \Delta_3 & \Delta_2 & \Delta_1\\ d & 2c & 0 & \Delta_3 & \Delta_2\\ 0 & d & 0 & 0 & \Delta_3\end{vmatrix}>0\text{ 且（}\Delta_1\geq 0\text{ 或 }a\Omega_1\geq 0\text{）。}$$

底下，我們舉些實例來說明上述定理的應用。

**實例 1 》**試就 $k$ 值討論方程式 $3x^4-8x^3-6x^2+24x-k=0$ 實根的分布。⑩

註 10：若令 $g(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$，則 $g'(x)=12\left(x^3-2x^2-x+2\right)$。

(1)令 $g'(x)=0$ 得臨界點 $1,2,-1$；(2)函數 $g(x)$ 在臨界點 $1,2,-1$ 的值分別為 $13,8,-19$。

可透過函數 $y=g(x)$ 圖形與水平線相交狀況，判別原四次方程式的實根個數。

令 $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-k, f'(x)=12\left(x^3-2x^2-x+2\right)$，

由 $\Delta_k$ 的表達式 $12\cdot\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & -12\\ -1 & 72\\ 2 & -4k\end{pmatrix}$，得

$$\Delta_1=12\cdot(-28),\Delta_2=12\cdot 64,\Delta_3=12\cdot(-4k+16)\text{；}$$

由 $\Omega_k$ 的表達式 $12\cdot(-48)^2\cdot\begin{pmatrix}1 & 7 & 0\\ -2 & -16 & 7\\ -1 & k-4 & -16\\ 2 & 0 & k-4\end{pmatrix}$，得

$$\Omega_1=12\cdot 48^2\cdot(-7k+11),\Omega_2=12\cdot 48^2\cdot(-2k+106)\text{；}$$

計算判別式

$$\begin{aligned}\Re^*&=\frac{1}{{\Delta_1}^2}\cdot\begin{vmatrix}\Delta_1 & \Omega_1 & 0\\ \Delta_2 & \Omega_2 & \Omega_1\\ \Delta_3 & 0 & \Omega_2\end{vmatrix}=\frac{12\times(-4)\times\left(-12\times 48^2\right)^2}{12^2\times 28^2}\cdot\begin{vmatrix}7 & 7k-11 & 0\\ -16 & 2k-106 & 7k-11\\ k-4 & 0 & 2k-106\end{vmatrix}\\&=-2^{16}\times 3^5\times(k-8)(k-13)(k+19)\text{。}\end{aligned}$$

根據四次方程式實根個數的判別定理，我們有

(1) 當 $f(x)=0$ 有重根時：由 $\Re^*=0$，得 $k=8,13$ 或 $-19$ ⑪

若 $k=8$，則方程式的四根為 2（重根）與兩實根 $\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$。

若 $k=13$，則方程式的四根為 1（重根）與兩實根 $\dfrac{1\pm 2\sqrt{10}}{3}$。

若 $k=-19$，則方程式的四根為 $-1$（重根）與兩共軛虛根 $\dfrac{7\pm 2\sqrt{2}i}{3}$。

(2) 當 $f(x)=0$ 有四個相異實根時：由 $\Re^*>0,\Delta_1<0$ 且 $3\Omega_1<0$，得 $8<k<13$。

(3) 當 $f(x)=0$ 沒有實根，即 $f(x)=0$ 有四個虛根時：由 $\Re^*>0$ 且 $3\Omega_1\ge 0$，得 $k<-19$。

(4) 當 $f(x)=0$ 有兩個相異實根與兩個共軛虛根時：由 $\Re^*<0$，得 $-19<k<8$ 或 $13<k$。

---

註 11：經移根 $x-\frac{2}{3}$ 調整，原方程式成為 $\left(x-\frac{2}{3}\right)^4-\frac{14}{3}\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{80}{27}\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{104-9k}{27}=0$，其預解方程式為 $y^3-\frac{28}{3}y^2+\frac{36k+172}{27}y-\frac{6400}{729}=0$。當 $k=8$ 時，三根為 $\frac{10}{9}$（重根），$\frac{64}{9}$；當 $k=13$ 時，三根為 $\frac{40}{9}$（重根），$\frac{4}{9}$；當 $k=-19$ 時，三根為 $-\frac{8}{9}$（重根），$\frac{100}{9}$。

**實例 2 》**試就 $k$ 值討論方程式 $x^4-4x^2+kx-1=0$ 實根的分布。

令 $f(x)=x^4-4x^2+kx-1, f'(x)=4x^3-8x+k$ ，得

$$\Delta_1=-32,\Delta_2=12k,\Delta_3=-16 \text{ ；} \Omega_1=4^2\cdot 4\cdot\left(9k^2-160\right),\Omega_2=4^2\cdot 16k \text{ ；}$$

計算判別式

$$\Re^*=\frac{1}{{\Delta_1}^2}\cdot\begin{vmatrix}\Delta_1 & \Omega_1 & 0\\ \Delta_2 & \Omega_2 & \Omega_1\\ \Delta_3 & 0 & \Omega_2\end{vmatrix}=\frac{-4\cdot\left(4^3\right)^2}{2^{10}}\cdot\begin{vmatrix}8 & 9k^2-160 & 0\\ -3k & 4k & 9k^2-160\\ 4 & 0 & 4k\end{vmatrix}$$

$$=-2^8\cdot(k-4)(k+4)\left(27k^2-400\right) \text{ 。}$$

根據四次方程式實根個數的判別定理，我們有

(1) 當 $f(x)=0$ 有重根時：由 $\Re^*=0$ ，得 $k=\pm 4$ 或 $\pm\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$ 。⑫

若 $k=4$ ，則方程式的四根為 1（重根）與兩實根 $-1\pm\sqrt{2}$ 。

若 $k=-4$ ，則方程式的四根為 $-1$（重根）與兩實根 $1\pm\sqrt{2}$ 。

若 $k=\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$ ，則方程式的四根為 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（重根）與兩實根 $\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{30}}{3}$ 。

若 $k=-\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$ ，則方程式的四根為 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（重根）與兩實根 $\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{30}}{3}$ 。

(2) 當 $f(x)=0$ 有四個相異實根時：由 $\Re^*>0,\Delta_1<0$ 且 $\Omega_1<0$ ，

得 $\begin{cases}(k+4)(k-4)\left(27k^2-400\right)<0\\ 9k^2-160<0\end{cases}$ ，取 $-4<k<-\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$ 或 $\dfrac{20\sqrt{3}}{9}<k<4$ 。

(3) 當 $f(x)=0$ 沒有實根時：由 $\Re^*>0$ 且 $\Omega_1\geq 0$ ，

得 $(k+4)(k-4)\left(27k^2-400\right)<0$ 且 $9k^2-160\geq 0$ ，此時 $k$ 無實數解。

也就是說，不論 $k$ 為何實數值， $f(x)=0$ 恆有實根。

(4) 當 $f(x)=0$ 有兩個相異實根與兩個共軛虛根時：由 $\Re^*<0$ ，

得 $k<-4,-\dfrac{20\sqrt{3}}{9}<k<\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$ 或 $4<k$ 。

---

註 12：預解方程式為 $y^3-8y^2+20y-k^2=0$ 。

當 $k=\pm 4$ 時，三根為 2（重根），4；當 $k=\pm\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$ 時，三根為 $\dfrac{10}{3}$ （重根）， $\dfrac{4}{3}$ 。

**實例 3 》**討論方程式$3x^4-4kx^3+1=0$實根的分布。⑬（取材自 91 年指考數甲考題）

**方法一：**

令 $f(x)=3x^4-4kx^3+1, f'(x)=12x^3-12kx^2$ ，得

$$\Delta_1=-48k^2,\Delta_2=0,\Delta_3=48\text{ ；}\Omega_1=2^{10}\cdot 3^3\cdot k^2,\Omega_2=-2^{10}\cdot 3^3\cdot k^3\text{ 。}$$

就$\Delta_1$是否為 0 討論：

情形 1：當$k=0$時，方程式$3x^4-4kx^3+1=0$沒有實根。

情形 2：當$k\neq 0$時，$\Delta_1\neq 0$ ，計算判別式

$$\Re^*=\frac{1}{{\Delta_1}^2}\cdot\begin{vmatrix}\Delta_1 & \Omega_1 & 0\\ \Delta_2 & \Omega_2 & \Omega_1\\ \Delta_3 & 0 & \Omega_2\end{vmatrix}=\frac{-48\cdot\left(2^{10}\cdot 3^3\cdot k^2\right)^2}{\left(48k^2\right)^2}\cdot\begin{vmatrix}k^2 & 1 & 0\\ 0 & -k & 1\\ -1 & 0 & -k\end{vmatrix}=-2^{16}\cdot 3^5\cdot\left(k^4-1\right)\text{ 。}$$

根據四次方程式實根個數的判別定理，我們有

(1) 當 $f(x)=0$有重根時：由$\Re^*=0$ ，得$k=\pm 1$，

若$k=1$ ，則方程式的四根為 1（重根）與兩共軛虛根$\dfrac{-1\pm\sqrt{2}i}{3}$ 。

若$k=-1$，則方程式的四根為$-1$（重根）與兩共軛虛根$\dfrac{1\pm\sqrt{2}i}{3}$ 。

(2) 當 $f(x)=0$有四個相異實根時：由$\Re^*>0,\Delta_1<0$且$3\Omega_1<0$ ，得$\begin{cases}(k+1)(k-1)\left(k^2+1\right)<0\\ k^2<0\end{cases}$ ，

此時$k$無解。也就是說，不論$k$為何實數值， $f(x)=0$都不會有四個相異實根。

(3) 當 $f(x)=0$沒有實根時：

情形 1：當$k=0$時，方程式$3x^4-4kx^3+1=0$沒有實根。

情形 2：當$k\neq 0$時， $\Delta_1\neq 0$ ，由$\Re^*>0$且$\Delta_1\geq 0$或$\Omega_1\geq 0$ ，

得$\begin{cases}(k+1)(k-1)\left(k^2+1\right)<0\\ k^2\geq 0,\text{且}k\neq 0\end{cases}$ ，取$-1<k<1$但$k\neq 0$ 。合併上述結果，取$-1<k<1$ 。

(4) 當 $f(x)=0$有兩個相異實根與兩個共軛虛根時：由$\Re^*<0$ ，得$k<-1$或$1<k$ 。

---

註 13：經移根$x-\dfrac{k}{3}$調整，原方程式成為$\left(x-\dfrac{k}{3}\right)^4-\dfrac{2k^2}{3}\cdot\left(x-\dfrac{k}{3}\right)^2-\dfrac{8k^3}{27}\cdot\left(x-\dfrac{k}{3}\right)+\dfrac{9-k^4}{27}=0$ ，

其預解方程式為$y^3-\dfrac{4k^2}{3}y^2+\dfrac{16k^4-36}{27}y-\dfrac{64k^6}{729}=0$ ，當$k=\pm 1$時，三根為$-\dfrac{2}{9}$（重根）， $\dfrac{16}{9}$ 。

**方法二**：作倒根變換

方程式$3x^4-4kx^3+1=0$實根的分布相當於方程式$x^4-4kx+3=0$實根的分布。

令$g(x)=x^4-4kx+3, g'(x)=4x^3-4k$，得$\Delta_1=0,\Delta_2=-48k,\Delta_3=48$；計算判別式⑭

$$\Re^*=\begin{vmatrix}4a&0&\Delta_1&0&0\\3b&4a&\Delta_2&\Delta_1&0\\2c&3b&\Delta_3&\Delta_2&\Delta_1\\d&2c&0&\Delta_3&\Delta_2\\0&d&0&0&\Delta_3\end{vmatrix}=4^2\cdot48^3\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&-k&0&0\\0&0&1&-k&0\\-k&0&0&1&-k\\0&-k&0&0&1\end{vmatrix}=2^{16}\cdot3^3\cdot\left(1-k^4\right)。$$

根據四次方程式實根個數的判別定理，我們有

(1) 當$g(x)=0$有重根時：由$\Re^*=0$，得$k=\pm1$。

(2) 不論$k$為何實數值，$g(x)=0$都不會有四個相異實根（因$\Delta_1=0$）。

(3) 當$g(x)=0$沒有實根時：由$\Re^*>0$（因$\Delta_1=0$），得$(k+1)(k-1)(k^2+1)<0$，取$-1<k<1$。

(4) 當$g(x)=0$有兩個相異實根與兩個共軛虛根時：

由$\Re^*<0$，得$(k+1)(k-1)(k^2+1)>0$，取$k<-1$或$1<k$。

《附錄一》說明$\Re=\Phi^2-4\cdot\left(4\Delta_1{}^2+12M\right)^3=2^{16}\cdot(-3)^3\cdot a^4\cdot\Re^*$。

1. 將5階行列式展開化簡：

$$\Re^*=\begin{vmatrix}4a&0&\Delta_1&0&0\\3b&4a&\Delta_2&\Delta_1&0\\2c&3b&\Delta_3&\Delta_2&\Delta_1\\d&2c&0&\Delta_3&\Delta_2\\0&d&0&0&\Delta_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(d^2\Delta_1{}^3-4ad\Delta_2{}^3+16a^2\Delta_3{}^3\right)+\left(3bd\Delta_1\Delta_2{}^2-2cd\Delta_1{}^2\Delta_2\right)+\left(9b^2-16ac\right)\Delta_1\Delta_3{}^2$$
$$+\left(4c^2-6bd\right)\Delta_1{}^2\Delta_3+\left(-12ab\Delta_2\Delta_3{}^2+8ac\Delta_2{}^2\Delta_3\right)+\left(12ad-6bc\right)\Delta_1\Delta_2\Delta_3。$$

2. 計算判別式$\Re=\Phi^2-4\cdot\left(4\Delta_1{}^2+12M\right)^3$：

(1) $\Phi=-64a\cdot\begin{vmatrix}4a&\Delta_1&0\\3b&3\Delta_2&\Delta_1\\2c&9\Delta_3&\Delta_2\end{vmatrix}=-2^8a^2\cdot\left(3\Delta_2{}^2-9\Delta_1\Delta_3+4c^2\Delta_1-9bd\Delta_1\right)$

(2) $4\Delta_1{}^2+12M=16a\cdot\left(2c\Delta_1-3b\Delta_2+12a\Delta_3\right)=16a\cdot4a\cdot\left(4c^2-9bd+3\Delta_3\right)$

---

註14：當$\Delta_1=0$時，判別方程式根的分布不需計算$\Omega_k$。

(3) $\Re = 2^{16}a^4\cdot\left[\left(3\Delta_2^{\ 2}-9\Delta_1\Delta_3+\left(4c^2-9bd\right)\Delta_1\right)^2-16a^2\cdot\left(\left(4c^2-9bd\right)+3\Delta_3\right)^3\right]$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{16}a^4\cdot\Big[9\Delta_2^{\ 4}-54\Delta_1\Delta_2^{\ 2}\Delta_3+81\Delta_1^{\ 2}\Delta_3^{\ 2}+6\cdot\left(4c^2-9bd\right)\Delta_1\Delta_2^{\ 2}-18\cdot\left(4c^2-9bd\right)\Delta_1^{\ 2}\Delta_3\\
&\qquad+\left(4c^2-9bd\right)^2\Delta_1^{\ 2}-27\cdot(4a)^2\Delta_3^{\ 3}-27\cdot4a\cdot\left(2c\Delta_1-3b\Delta_2\right)\Delta_3^{\ 2}\\
&\qquad-9\cdot\left(4c^2\Delta_1^{\ 2}-12bc\Delta_1\Delta_2+9b^2\Delta_2^{\ 2}\right)\Delta_3\\
&\qquad-\left(4c^2-9bd\right)\left(4c^2\Delta_1^{\ 2}-12bc\Delta_1\Delta_2+9b^2\Delta_2^{\ 2}\right)\Big]\\
&= 2^{16}a^4\cdot\Big[9\Delta_2^{\ 4}-54\Delta_1\Delta_2^{\ 2}\Delta_3+81\Delta_1^{\ 2}\Delta_3^{\ 2}+\left(24c^2-54bd\right)\Delta_1\Delta_2^{\ 2}+\left(-108c^2+162bd\right)\Delta_1^{\ 2}\Delta_3\\
&\qquad+\left(-36bc^2d+81b^2d^2\right)\Delta_1^{\ 2}-432a^2\Delta_3^{\ 3}-216ac\Delta_1\Delta_3^{\ 2}\\
&\qquad+324ab\Delta_2\Delta_3^{\ 2}+108bc\Delta_1\Delta_2\Delta_3-81b^2\Delta_2^{\ 2}\Delta_3\\
&\qquad+\left(4c^2-9bd\right)\cdot12bc\Delta_1\Delta_2-\left(4c^2-9bd\right)\cdot9b^2\Delta_2^{\ 2}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{16}a^4\cdot\Big[\left(108ad\Delta_2^{\ 3}+36b^2c^2\Delta_2^{\ 2}-216abcd\Delta_2^{\ 2}\right)+\left(108bc-648ad\right)\Delta_1\Delta_2\Delta_3\\
&\qquad+\left(648ac-243b^2\right)\Delta_1\Delta_3^{\ 2}+\left(24c^2-54bd\right)\Delta_1\Delta_2^{\ 2}+\left(-108c^2+162bd\right)\Delta_1^{\ 2}\Delta_3\\
&\qquad+\left(-36bc^2d+216acd^2\right)\Delta_1^{\ 2}-27d^2\Delta_1^{\ 3}-432a^2\Delta_3^{\ 3}-216ac\Delta_1\Delta_3^{\ 2}+324ab\Delta_2\Delta_3^{\ 2}\\
&\qquad+108bc\Delta_1\Delta_2\Delta_3+\left(324ad\Delta_1\Delta_2\Delta_3-54bc\Delta_1\Delta_2\Delta_3-216ac\Delta_2^{\ 2}\Delta_3\right)\\
&\qquad+\left(36cd\Delta_1^{\ 2}\Delta_2-24c^2\Delta_1\Delta_2^{\ 2}\right)+\left(81b^3d-36b^2c^2\right)\Delta_2^{\ 2}\Big]\\
&= 2^{16}a^4\cdot\Big[108ad\Delta_2^{\ 3}-27d^2\Delta_1^{\ 3}-432a^2\Delta_3^{\ 3}+36cd\Delta_1^{\ 2}\Delta_2-54bd\Delta_1\Delta_2^{\ 2}+\left(162bd-108c^2\right)\Delta_1^{\ 2}\Delta_3\\
&\qquad+\left(432ac-243b^2\right)\Delta_1\Delta_3^{\ 2}-216ac\Delta_2^{\ 2}\Delta_3+324ab\Delta_2\Delta_3^{\ 2}+\left(162bc-324ad\right)\Delta_1\Delta_2\Delta_3\\
&\qquad+\left(81b^3d-216abcd\right)\Delta_2^{\ 2}+\left(-36bc^2d+216acd^2\right)\Delta_1^{\ 2}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{16}a^4\cdot\Big[-27d^2\Delta_1^{\ 3}+108ad\Delta_2^{\ 3}-432a^2\Delta_3^{\ 3}-54bd\Delta_1\Delta_2^{\ 2}+36cd\Delta_1^{\ 2}\Delta_2+\left(432ac-243b^2\right)\Delta_1\Delta_3^{\ 2}\\
&\qquad+\left(162bd-108c^2\right)\Delta_1^{\ 2}\Delta_3+324ab\Delta_2\Delta_3^{\ 2}-216ac\Delta_2^{\ 2}\Delta_3+\left(162bc-324ad\right)\Delta_1\Delta_2\Delta_3\\
&\qquad-27bd\Delta_1\Delta_2^{\ 2}+18cd\Delta_1^{\ 2}\Delta_2\Big]\\
&= 2^{16}a^4\cdot(-3)^3\cdot\Big[\left(d^2\Delta_1^{\ 3}-4ad\Delta_2^{\ 3}+16a^2\Delta_3^{\ 3}\right)+\left(3bd\Delta_1\Delta_2^{\ 2}-2cd\Delta_1^{\ 2}\Delta_2\right)+\left(9b^2-16ac\right)\Delta_1\Delta_3^{\ 2}\\
&\qquad+\left(4c^2-6bd\right)\Delta_1^{\ 2}\Delta_3+\left(-12ab\Delta_2\Delta_3^{\ 2}+8ac\Delta_2^{\ 2}\Delta_3\right)+\left(12ad-6bc\right)\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Big]
\end{aligned}
$$

所以$\Re=\Phi^2-4\cdot\left(4\Delta_1^{\ 2}+12M\right)^3=2^{16}\cdot(-3)^3\cdot a^4\cdot\Re^*$。

《附錄二》說明行列式轉換。

1. 行列式性質 I（三階轉換成五階）:

令$\Omega_k$為下列表達式第 1 列、第 2 列與第$k+2$列所成之三階行列式：

$$\begin{pmatrix} A & X & 0 \\ B & Y & X \\ C & Z & Y \\ D & 0 & Z \end{pmatrix}，即\Omega_1=\begin{vmatrix} A & X & 0 \\ B & Y & X \\ C & Z & Y \end{vmatrix}且\Omega_2=\begin{vmatrix} A & X & 0 \\ B & Y & X \\ D & 0 & Z \end{vmatrix}，若X\neq 0，$$

$$則\begin{vmatrix} X & \Omega_1 & 0 \\ Y & \Omega_2 & \Omega_1 \\ Z & 0 & \Omega_2 \end{vmatrix}=X^2\cdot\begin{vmatrix} A & 0 & X & 0 & 0 \\ B & A & Y & X & 0 \\ C & B & Z & Y & X \\ D & C & 0 & Z & Y \\ 0 & D & 0 & 0 & Z \end{vmatrix}。$$

說明：

$$(1)\begin{vmatrix} 0 & A & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & Y & X & 0 & 0 & 0 \\ X & C & Z & Y & 0 & 0 & 0 \\ Y & D & 0 & Z & C & Z & Y \\ Z & 0 & 0 & 0 & D & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & Y & X \end{vmatrix}$$

$$=X\cdot\begin{vmatrix} A & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & Y & X & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & Z & C & Z & Y \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & A & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & Y & X \end{vmatrix}-Y\cdot\begin{vmatrix} A & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & Y & X & 0 & 0 & 0 \\ C & Z & Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & A & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & Y & X \end{vmatrix}+Z\cdot\begin{vmatrix} A & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & Y & X & 0 & 0 & 0 \\ C & Z & Y & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & C & Z & Y \\ 0 & 0 & 0 & A & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & Y & X \end{vmatrix}$$

$$=X\cdot\Omega_2\cdot\Omega_2-Y\cdot\Omega_1\cdot\Omega_2+Z\cdot\Omega_1\cdot\Omega_1=\begin{vmatrix} X & \Omega_1 & 0 \\ Y & \Omega_2 & \Omega_1 \\ Z & 0 & \Omega_2 \end{vmatrix}$$

$$(2)\begin{vmatrix} X & \Omega_1 & 0 \\ Y & \Omega_2 & \Omega_1 \\ Z & 0 & \Omega_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & A & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & Y & X & 0 & 0 & 0 \\ X & C & Z & Y & 0 & 0 & 0 \\ Y & D & 0 & Z & C & Z & Y \\ Z & 0 & 0 & 0 & D & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & Y & X \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & A & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & Y & X & 0 & 0 & 0 \\ X & C & Z & Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & Z & C & Z & Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & X & 0 \\ -X & 0 & 0 & 0 & B & Y & X \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & A & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & Y & X & 0 & 0 & 0 \\ X & C & Z & Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & Z & C & Z & Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & X & 0 \\ 0 & C & Z & Y & B & Y & X \end{vmatrix} = X\cdot\begin{vmatrix} A & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & Y & X & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & Z & C & Z & Y \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & A & X & 0 \\ C & Z & Y & B & Y & X \end{vmatrix} = X\cdot\begin{vmatrix} A & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & Y & X & 0 & -X & 0 \\ D & 0 & Z & C & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & A & X & 0 \\ C & Z & Y & B & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$= X\cdot\begin{vmatrix} A & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & Y & X & A & 0 & 0 \\ D & 0 & Z & C & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & A & X & 0 \\ C & Z & Y & B & 0 & X \end{vmatrix} = X^2\cdot\begin{vmatrix} A & X & 0 & 0 & 0 \\ B & Y & X & A & 0 \\ D & 0 & Z & C & Y \\ 0 & 0 & 0 & D & Z \\ C & Z & Y & B & X \end{vmatrix} = X^2\cdot\begin{vmatrix} A & 0 & X & 0 & 0 \\ B & A & Y & X & 0 \\ C & B & Z & Y & X \\ D & C & 0 & Z & Y \\ 0 & D & 0 & 0 & Z \end{vmatrix}$$

例如，在四次方程式中，

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 & \Omega_1 & 0 \\ \Delta_2 & \Omega_2 & \Omega_1 \\ \Delta_3 & 0 & \Omega_2 \end{vmatrix} = \left(\Delta_1\right)^2\cdot\begin{vmatrix} 4a & 0 & \Delta_1 & 0 & 0 \\ 3b & 4a & \Delta_2 & \Delta_1 & 0 \\ 2c & 3b & \Delta_3 & \Delta_2 & \Delta_1 \\ d & 2c & 0 & \Delta_3 & \Delta_2 \\ 0 & d & 0 & 0 & \Delta_3 \end{vmatrix} = \left(\Delta_1\right)^2\cdot\Re^{*}$$ 。

2. 行列式性質 II（五階轉換成七階）：

令 $\Omega_k$ 為下列表達式第 1 列、第 2 列與第 $k+2$ 列所成之三階行列式：

$$\begin{pmatrix} A & W & 0 \\ B & X & W \\ C & Y & X \\ D & Z & Y \\ E & 0 & Z \end{pmatrix}$$，即 $\Omega_1=\begin{vmatrix} A & W & 0 \\ B & X & W \\ C & Y & X \end{vmatrix}$，$\Omega_2=\begin{vmatrix} A & W & 0 \\ B & X & W \\ D & Z & Y \end{vmatrix}$，且 $\Omega_3=\begin{vmatrix} A & W & 0 \\ B & X & W \\ E & 0 & Z \end{vmatrix}$，

若 $W\neq 0$，則 $\begin{vmatrix} W & 0 & \Omega_1 & 0 & 0 \\ X & W & \Omega_2 & \Omega_1 & 0 \\ Y & X & \Omega_3 & \Omega_2 & \Omega_1 \\ Z & Y & 0 & \Omega_3 & \Omega_2 \\ 0 & Z & 0 & 0 & \Omega_3 \end{vmatrix} = W^4\cdot\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & W & 0 & 0 & 0 \\ B & A & 0 & X & W & 0 & 0 \\ C & B & A & Y & X & W & 0 \\ D & C & B & Z & Y & X & W \\ E & D & C & 0 & Z & Y & X \\ 0 & E & D & 0 & 0 & Z & Y \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & Z \end{vmatrix}$。

說明：

$$\begin{vmatrix} W & 0 & \Omega_1 & 0 & 0 \\ X & W & \Omega_2 & \Omega_1 & 0 \\ Y & X & \Omega_3 & \Omega_2 & \Omega_1 \\ Z & Y & 0 & \Omega_3 & \Omega_2 \\ 0 & Z & 0 & 0 & \Omega_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A & W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & X & W & 0 & 0 \\ W & 0 & C & Y & X & 0 & 0 \\ X & W & D & Z & Y & \Omega_1 & 0 \\ Y & X & E & 0 & Z & \Omega_2 & \Omega_1 \\ Z & Y & 0 & 0 & 0 & \Omega_3 & \Omega_2 \\ 0 & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A & W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & X & W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W & 0 & C & Y & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & W & D & Z & Y & C & Y & X & 0 \\ Y & X & E & 0 & Z & D & Z & Y & \Omega_1 \\ Z & Y & 0 & 0 & 0 & E & 0 & Z & \Omega_2 \\ 0 & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & X & W & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & A & W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & X & W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W & 0 & C & Y & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & W & D & Z & Y & C & Y & X & 0 & 0 & 0 \\ Y & X & E & 0 & Z & D & Z & Y & C & Y & X \\ Z & Y & 0 & 0 & 0 & E & 0 & Z & D & Z & Y \\ 0 & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & X & W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & X & W \end{vmatrix} = W^4 \cdot \begin{vmatrix} A & 0 & 0 & W & 0 & 0 & 0 \\ B & A & 0 & X & W & 0 & 0 \\ C & B & A & Y & X & W & 0 \\ D & C & B & Z & Y & X & W \\ E & D & C & 0 & Z & Y & X \\ 0 & E & D & 0 & 0 & Z & Y \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & Z \end{vmatrix}$$

例如，在四次方程式中，

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4a & b \\ 3b & 2c \end{vmatrix}$，$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4a & b \\ 2c & 3d \end{vmatrix}$，$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4a & b \\ d & 4e \end{vmatrix}$的三階表示法為

$\Delta_1 = \dfrac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} a & 4a & 0 \\ b & 3b & 4a \\ c & 2c & 3b \end{vmatrix}$，$\Delta_2 = \dfrac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} a & 4a & 0 \\ b & 3b & 4a \\ d & d & 2c \end{vmatrix}$，且$\Delta_3 = \dfrac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} a & 4a & 0 \\ b & 3b & 4a \\ e & 0 & d \end{vmatrix}$。

因此，

$$\Re^* = \begin{vmatrix} 4a & 0 & \Delta_1 & 0 & 0 \\ 3b & 4a & \Delta_2 & \Delta_1 & 0 \\ 2c & 3b & \Delta_3 & \Delta_2 & \Delta_1 \\ d & 2c & 0 & \Delta_3 & \Delta_2 \\ 0 & d & 0 & 0 & \Delta_3 \end{vmatrix} = \frac{(4a)^4}{a^3} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 4a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 3b & 4a & 0 & 0 \\ c & b & a & 2c & 3b & 4a & 0 \\ d & c & b & d & 2c & 3b & 4a \\ e & d & c & 0 & d & 2c & 3b \\ 0 & e & d & 0 & 0 & d & 2c \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= 256a \cdot R(f, f') = 256a^2 \cdot D(f)$$

**參考資料：**

1. 康明昌，幾個有名的數學問題，數學傳播季刊選輯（1985）。
2. 北京大學數學科學學院 http://www.math.pku.edu.cn:8000/misc/course/algebra/。
3. 臺大數學系，微積分經典範例 http://scicomp.math.ntu.edu.tw/calculus/。
4. 葉善雲，三次方程式根的行列式判別，龍騰數亦優，第 14 期，P.5～14。
5. 葉善雲，解四次方程式，龍騰數亦優，第 16 期，P.37～45。

# 利用最小成本法求運輸問題

鍾國華／臺北市祐德高中

## 一、前言 》

針對高中數學第三冊 2-2 節「線性規劃」中，利用圖解法（Graph method）求運輸問題（Transportation problem）的解題過程，因計算過程繁瑣，學生學習效果較差，本文提出更簡易的計算方法—最小成本法（Least-cost method），以改善學生的學習狀況。

## 二、運輸問題(Transportation problem) 》

1. 沿革：運輸問題係於西元 1941 年由希齊喀克（F.L.Hitch cock）所創，後經庫蒲曼茲（T.C.Koopmans）予以發揚，直至西元 1951 年始由丹奇格（G.D.Dantzig）依據線性規劃之理論解釋運輸問題，改由單形法（Simplex method）求解。

2. 定義：假設有 $m$ 個不同的起點（工廠），每一個起點均有已知的供給量 $s_i$ ，供應到 $n$ 個不同的終點（倉庫或零售店），而每一個終點之需求量 $d_j$ 亦為已知，若我們知道由每一個起點至每一個終點的運輸成本為 $c_{ij}$ ，試問應如何將物品在限制條件下運至目的地而能使總成本最少。

3. 運輸模式：

(1) 建立運輸矩陣，如下表：

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="5">終　　點</td><td rowspan="2">供給量</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>⋯</td><td>$n$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">起<br>點</td><td>1</td><td>$c_{11}$</td><td>$c_{12}$</td><td>$c_{13}$</td><td>⋯</td><td>$c_{1n}$</td><td>$s_1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$c_{21}$</td><td>$c_{22}$</td><td>$c_{23}$</td><td>⋯</td><td>$c_{2n}$</td><td>$s_2$</td></tr>
<tr><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td></tr>
<tr><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td></tr>
<tr><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td><td>⋯</td></tr>
<tr><td>$m$</td><td>$c_{m1}$</td><td>$c_{m2}$</td><td>$c_{m3}$</td><td>⋯</td><td>$c_{mn}$</td><td>$s_m$</td></tr>
<tr><td colspan="2">需求量</td><td>$d_1$</td><td>$d_2$</td><td>$d_3$</td><td>⋯</td><td>$d_n$</td><td></td></tr>
</table>

$c_{ij}$ ：表示自第 $i$ 個起點（供應點）至第 $j$ 個終點（需求點）之單位運輸成本（或單位利潤）。

$s_i$ ：表示第 $i$ 個起點（供應點）之供給量。

$d_j$ ：表示第 $j$ 個終點（需求點）之需求量。

(2) 假設 $x_{ij}$ 為自第 $i$ 個起點運送至第 $j$ 個終點的數量，並假設總供給量等於總需求量，即

$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$ ，則其運輸模式為：

Min $\quad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Subject to $\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$

$x_{ij}, s_i, d_j \geq 0,\ i = 1, 2, 3, \cdots, m$ ， $j = 1, 2, 3, \cdots, n$

此一模式中有 $m+n$ 個限制條件，變數有 $m \cdot n$ 個。由此模式中可發現運輸模式與線性規劃的模式，其決策變數 $x$ 均為一次方，但運輸模式中的技術係數 $a_{ij} = 0$ 或 1，且限制條件的右手方常量 $b_i = s_i$ （或 $d_j$ ）均為非負整數。

## 三、運輸模式的解法 》

1. 判別：總供給量（supply）是否等於總需求量（demand）？

 (1) 若 $\sum_{i=1}^{m} s_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$ ，則增加一個虛擬之終點 $d_{j+1}$ （dummy destination），其需求量為

 $\sum_{i=1}^{m} s_i - \sum_{j=1}^{n} d_j$ ，代表不運送的數量，其所加之行成本為 $m$，$m$ 是無窮大的數值。

 (2) 若 $\sum_{i=1}^{m} s_i < \sum_{j=1}^{n} d_j$ ，則增加一個虛擬之起點 $s_{i+1}$（dummy origin），其供給量為 $\sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} s_i$ ，

 代表缺貨而未能運送的數量，其所加之列成本為 $m$，$m$ 是無窮大的數值。

 (3) 若某一起點不能運送到某一終點時，因運輸路線有所限制，則 Min 的問題設其單位成本

 為 $m$（Max 設為 $-m$ ）。

2. 找起始解：分配 $x_{ij}$ 之資源，Min 取最小單位成本（Max 取最大利潤）。其方法有：西北角法（Northwest-corner method）、最小成本法（Least-cost method）、Vogel 近似法（Vogel's approximation method）、Russell 法（Russell method）…等，本文僅探討簡易的最小成本法。

3. 最佳解的檢定：Min 的問題中，當所有非基本變數的 $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ 時（Max 為 $c_{ij} - u_i - v_j \leq 0$ ）有最佳解；若否，再找較佳解。其方法有：階石法（Stepping-stone method）、修正分配法（Modified distribution method）…等，本文僅探討簡易的階石法。

## 四、運輸模式求解：找一個起始解 》

最小成本法找起始解，是從所有單位成本（$c_{ij}$）中，選擇最小單位成本為基本變數（Basic variable），其步驟是：

第 1 步：從運輸矩陣表中，選擇最小單位成本（$c_{ij}$）為基本變數，並分配資源：$x_{ij}=\mathrm{Min}(s_i,d_j)$。

注意：若單位成本為 $m$，則不考量分配資源。

第 2 步：將基本變數（B.V）所對應的列供給量與行需求量均減去該最小值 $x_{ij}$。

第 3 步：刪去供應量或需求量已經降為零的行或列。

第 4 步：判別每一個需求量 $d_j$ 是否等於零，若否，則回到第一步驟；若是，得起始解。

## 五、運輸模式求解：找最佳解 》

採用階石法來檢查現有解中是否為最佳解，如果不是，再找一個更好的解，其步驟是：

第 1 步：計算基本變數的 $c_{ij}=u_i+v_j$；先令 $u_1=0$，再求其他 $u_i$、$v_j$。

第 2 步：計算非基本變數（N.B.V）的 $c_{ij}-\left(u_i+v_j\right)$。

第 3 步：判別是否有最佳解：

(1) Min 的問題，當所有非基本變數的 $c_{ij}-u_i-v_j\geq 0$，就有最佳解。

註：若所有非基本變數的 $c_{ij}-u_i-v_j>0$ 表示恰有一組解，若有 $c_{ij}-u_i-v_j=0$ 表示有多組解。

(2) 若否，則回到第四步驟。

第 4 步：進入基本變數：

Min 問題，先取非基本變數的 $c_{ij}-u_i-v_j$ 為負值最小者，令其 $x_{ij}=\theta$（Max 問題取 $c_{ij}-u_i-v_j$ 為正值最大者，令其 $x_{ij}=\theta$）。

第 5 步：退出基本變數：

(1) 利用階石法：$\theta$、$-\theta$、$\theta$、$-\theta$、……的方式組成迴路，此迴路只能有一個非基本變數（N.B.V），其他為基本變數（B.V）組成環狀迴路，且每一行、每一列只能有一個 $\theta$ 或 $-\theta$。

(2) 在此迴路中，選取 $\mathrm{Min}[(x_{ij}-\theta)=0]$，求出 $\theta$ 值。

第 6 步：樞運算，將 $\theta$ 值代入，重新計算基本變數，再回到第一步驟。

註 1：階石法是針對未分配資源的非基本變數（即不在解答中的運輸途徑），考慮進入基本變數後對於成本的淨影響。

註 2：利用階石法可得到一條正負相間的封閉路線（Closed path）。

## 六、運輸問題的例題與求解 》

在高中數學課本第二冊 2-2 節之例題：某公司所生產的產品，存放在甲、乙兩倉庫分別有 40 單位、50 單位，現在市場 $A$、市場 $B$ 的需求量分別是 30 單位、40 單位。若自甲倉庫運送物品至 $A$ 市場、$B$ 市場之每單位的運費分別為 100 元、140 元；自乙倉庫運送物品至 $A$ 市場、$B$ 市場之每單位的運費分別為 120 元、150 元。在滿足 $A$、$B$ 市場的需求下，應如何分配才能使運費最低？

**【第一種解法：圖解法】**

第 1 步：建立運輸矩陣表。

| | $A$ 市場 | $B$ 市場 | 供給量 |
|---|---|---|---|
| 甲倉庫 | 100 | 140 | 40 |
| 乙倉庫 | 120 | 150 | 50 |
| 需求量 | 30 | 40 | |

第 2 步：建立運輸模式。

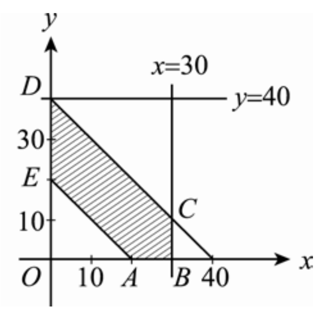
設甲倉庫運送 $x$ 單位到 $A$ 市場，$y$ 單位到 $B$ 市場，乙倉庫運送 $30-x$ 單位到 $A$ 市場，$40-y$ 單位到 $B$ 市場。

$$\text{Min} \quad Z = 100x + 120(30-x) + 140y + 150(40-y) = -20x - 10y + 9600$$

$$s.t \begin{cases} x + y \le 40 \\ (30-x) + (40-y) \le 50 \\ 30 - x \ge 0 \\ 40 - y \ge 0 \end{cases}, \ x \ge 0,\ y \ge 0$$

第 3 步：利用直角坐標系之圖解找出可行解區域及端點。

整理限制條件：$20 \le x + y \le 40,\ 0 \le x \le 30,\ 0 \le y \le 40$，作可行解區域如下圖。




端點：$A(20,0)$，$B(30,0)$，$C(30,10)$，$D(0,40)$，$E(0,20)$。

第 4 步：運輸模式的最佳解，必在端點上。將此五點代入目標函數 $Z=-20x-10y+9600$ ：

| $(x,y)$ | $(20,0)$ | $(30,0)$ | $(30,10)$ | $(0,40)$ | $(0,20)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z=-20x-10y+9600$ | 9200 | 9000 | 8900 | 9200 | 9400 |

在 $x=30$ ， $y=10$ 時， $Z=8900$ 為最小值。

最佳解：甲倉庫運送 30 單位到 $A$ 市場，10 單位到 $B$ 市場，乙倉庫運送 0 單位到 $A$ 市場，30 單位到 $B$ 市場，最低運費為 8900 元。

**【第二種解法：最小成本法】**

先建立運輸矩陣表，因總供給量大於總需求量，因此增加一個虛擬之終點 $C$ 市場，其需求量為 $90-70=20$ ，代表不運送的數量為 20 單位，其所加之行成本為 $m$，$m$ 是無窮大的數值，如表(1)。

| | $A$ 市場 | $B$ 市場 | $C$ 市場 | 供給量 |
|---|---|---|---|---|
| 甲倉庫 | 100 | 140 | $m$ | 40 |
| 乙倉庫 | 120 | 150 | $m$ | 50 |
| 需求量 | 30 | 40 | 20 | |

表(1)

第 1 步：從運輸矩陣表中，選擇最小單位成本（ $c_{11}=100$ 元）為基本變數（B.V），並分配資源：$x_{11}=\mathrm{Min}(40,30)=30$ ，寫在表格中的右下角。

第 2 步：將基本變數（B.V）所對應的列供給量與行需求量均減去該最小值 $x_{11}=30$ 。

第 3 步：刪去需求量已經降為零的第 1 行，如表(2)。

| | $A$ 市場 | $B$ 市場 | $C$ 市場 | $s_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 甲倉庫 | 100<br>30 | 140 | $m$ | 10 |
| 乙倉庫 | 120 | 150 | $m$ | 50 |
| $D_i$ | 0 | 40 | 20 | |

表(2)

第 4 步：重複第 1 步驟，選擇剩餘的最小單位成本（ $c_{12}=140$ 元）為基本變數，並分配資源：

$x_{12}=\mathrm{Min}(10,40)=10$ ，寫在表格中的右下角。

第 5 步：將基本變數（B.V）所對應的列供給量與行需求量均減去該最小值 $x_{12}=10$ 。

第 6 步：刪去供給量已經降為零的第 1 列，如表(3)。

| | *A* 市場 | *B* 市場 | *C* 市場 | $s_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 甲倉庫 | 100<br>30 | 140<br>10 | $m$ | 0 |
| 乙倉庫 | 120 | 150 | $m$ | 50 |
| $D_i$ | 0 | 30 | 20 | |

表(3)

第 7 步：重複第 1 步驟，選擇剩餘的最小單位成本（ $c_{22}=150$ 元）為基本變數，並分配資源：

$x_{22}=\mathrm{Min}(50,30)=30$ ，寫在表格中的右下角。

第 8 步：將基本變數所對應的列供給量與行需求量均減去該最小值 $x_{22}=30$ 。

第 9 步：刪去需求量已經降為零的第 2 行，如表(4)。

因每一個需求量 $d_j=0$ ，得起始解。注意，單位成本為 $m$ 者，不考量分配資源。

| | *A* 市場 | *B* 市場 | *C* 市場 | $s_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 甲倉庫 | 100<br>30 | 140<br>10 | $m$ | 0 |
| 乙倉庫 | 120 | 150<br>30 | $m$ | 20 |
| $D_i$ | 0 | 0 | 20 | |

表(4)

第 10 步：利用階石法檢查現有解中是否為最佳解，計算基本變數的 $c_{ij}=u_i+v_j$ ；先令 $u_1=0$ ，再求其他 $u_i$ 、 $v_j$ 。

$c_{11}=u_1+v_1$ ： $100=0+v_1$ ，得 $v_1=100$ ；

$c_{12}=u_1+v_2$ ： $140=0+v_2$ ，得 $v_2=140$ ；

$c_{22}=u_2+v_2$ ： $150=u_2+140$ ，得 $u_2=10$ ；如表(5)。

| | | $v_1=100$ | $v_2=140$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | *A* 市場 | *B* 市場 | *C* 市場 |
| $u_1=0$ | 甲倉庫 | 100<br>30 | 140<br>10 | *m* |
| $u_2=10$ | 乙倉庫 | 120 | 150<br>30 | *m* |

表(5)

第 11 步：計算非基本變數（N.B.V）的 $c_{ij}-\left(u_i+v_j\right)$。

$c_{21}-\left(u_2+v_1\right)=120-10-100=10$，寫在表格中右上角，如表(6)。

第 12 步：所有非基本變數的 $c_{ij}-u_i-v_j\geq 0$，則有最佳解。

| | | $v_1=100$ | $v_2=140$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | *A* 市場 | *B* 市場 | *C* 市場 |
| $u_1=0$ | 甲倉庫 | 100<br>30 | 140<br>10 | *m* |
| $u_2=10$ | 乙倉庫 | 120 $\boxed{10}$ | 150<br>30 | *m* |

表(6)

最佳解：甲倉庫運送 30 單位到 *A* 市場，10 單位到 *B* 市場，乙倉庫運送 0 單位到 *A* 市場，30 單位到 *B* 市場，最低運費為 $100\times 30+140\times 10+150\times 30=8900$（元）。

由上述求解過程中，可發現在最小成本法求起始解的過程中，只要表(4)即可，其餘表格皆可省略；而在階石法檢驗最佳解的過程中，只要表(6)即可。事實上，在高中數學課本中，因只教二元一次不等式的運輸模式，其起始解就是最佳解，所以只要表(4)就可得到最佳解，因此採用最小成本法求運輸問題，顯然較圖解法更簡潔有效率。

## 七、結論 》

由於高中學測沒有計算題，利用圖解法求運輸問題，因計算過程太過繁瑣，改用最小成本法求解，反而讓學生更容易了解與學習，有助於教學內容的改善，值得教學上的參考與運用。最小成本法可運用在三個未知數以上的運輸問題，而圖解法不適用。

**參考資料：**


1. 高孔廉、張緯良，作業研究，五南圖書出版公司（1993）。
2. 陳文賢，管理科學—作業研究與數量方法，三民書局（1991）。

# 膾炙人口的Morley角三等分線定理

## (一)三內角的情形

趙文敏／臺灣師大數學系

在平面幾何所探討的所有圖形中，三角形是最受青睞、也擁有最多定理的一種。遠在古希臘時代，Euclid 在幾何原本（Elements）中就已證明三角形的許多性質。在十八世紀末年與十九世紀前半世紀裡，一群排斥坐標方法的幾何學者們大力鼓吹幾何方法應該復古，遂使得古希臘的幾何方法再度受到重視，而以近代初等幾何（modern elementary geometry）的面目成為許多學者的探討對象。在這段期間裡，三角形的其它性質又大量被發現，如 Gergonne 點、Napel 點、Euler 線、Simson 線、九點圓，等等。由於不斷地開採，「三角形的幾何」這座寶藏，在 1860 年代時就已被認定為開採淨盡。出人意料之外地，在四十年後的 1899 年，Frank Morley 卻發現一個令人大為驚奇的定理，它就是 Morley 角三等分線定理（Morley trisector theorem）。本文的目的，就是要介紹這個定理以及它的一些不同證法。

### 角三等分線定理 》

所謂 Morley 角三等分線定理，可分成三種情形而寫成三個定理，分別在本文的（一）、（二）、（三）中加以討論。

**定理 1 (三內角的情形)：**

設$\triangle ABC$ 為一個三角形。若 $\angle B$ 與 $\angle C$ 較靠近 $\overline{BC}$ 的兩條角三等分線交於點 $P$、$\angle C$ 與 $\angle A$ 較靠近 $\overline{CA}$ 的兩條角三等分線交於點 $Q$、 $\angle A$ 與 $\angle B$ 較靠近 $\overline{AB}$ 的兩條角三等分線交於點 $R$，則 $\triangle PQR$ 是正三角形。

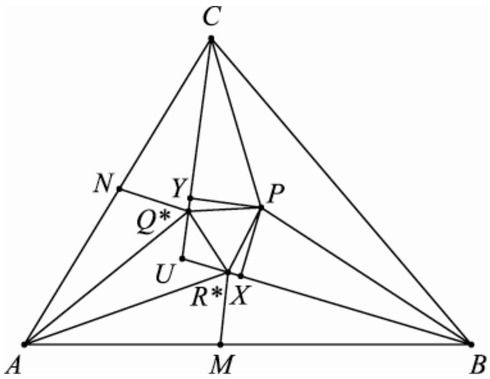
前述的角三等分線定理，乃是 Frank Morley（1860～1937, 英國人）在 1899 年研究某幾何問題時附帶發現的。在該研究成果的論文中，他只提出這個性質，卻沒有給以證明。事實上，在 Frank Morley 的著作中，這個定理的證明直到 1924 年的一篇文章裡才出現。在發現這個定理的那段期間，Frank Morley 只將他的發現告訴友人，卻因此傳遍各地而成為數學家們閒聊的話題。西元 1908 年，倫敦的 The Edmcational Times 和布魯賽爾的 Mathesis 兩家刊物，先後將這個性質列入徵答的問題中，前者編號是 16381，後者編號是 1655。有趣的是兩家刊物都沒有提到 Frank Morley，這兩個問題的出題者 E. T. Ebden 甚至以為此題是他本人的創見。由於問題在

刊物中公開出現，所以，解答者與探討者也日益增多。在 1978 年 Cletus O. Oakley 與 Justine C. Baker 對角三等分線定理做總結性討論時，列出來的相關作品居然高達 150 份之多。可見在問題公開出現之後的七十年間，它是多麼吸引人了。

對於 Morley 角三等分線定理，學者們所給出的證法甚多。本文的後面部分，就是要分別對三種情形各提出兩個幾何證法及一個三角證法供讀者們參考。在三角方法中，我們進一步將相關圖形中的線段長與角度都寫出表示式。

為方便起見，在下文中，我們將$\triangle ABC$中$\angle A$、$\angle B$與$\angle C$的度數分別表成$3\alpha$、$3\beta$與$3\gamma$，也就是說，$\alpha$、$\beta$與$\gamma$分別表示$\angle A$、$\angle B$與$\angle C$之度數的三分之一。於是，$\alpha+\beta+\gamma=60^\circ$。

**【幾何證法之一】**




▲圖 1

在$\angle B$較靠近$\overline{AB}$的角三等分線上作點$R^*$、在$\angle C$較靠近$\overline{CA}$的角三等分線上作點$Q^*$使得

$$\angle BR^*P=\angle CQ^*P=60^\circ+\alpha \text{ 。}$$

其次，設直線$BR^*$與直線$CQ^*$交於點$U$，則點$P$是$\triangle UBC$的內心。於是，若點$P$至直線$BR^*$與直線$CQ^*$的垂足分別為點$X$與點$Y$，則$\overline{PX}=\overline{PY}$。更進一步地，當$\angle A=90^\circ$時，$X=R^*$且$Y=Q^*$；當$\angle A\neq 90^\circ$時，因為$\angle BR^*P=\angle CQ^*P$，所以，可得$\angle XR^*P=\angle YQ^*P$，$\triangle XR^*P\cong\triangle YQ^*P$。不論哪種情形，都可得$\overline{PQ^*}=\overline{PR^*}$。另一方面，因為

$$\begin{aligned}\angle Q^*PR^* &= 360^\circ-\angle BUC-\angle PQ^*U-\angle PR^*U\\ &=360^\circ-\left(180^\circ-2\beta-2\gamma\right)-2\left(120^\circ-\alpha\right)\\ &=2\left(\alpha+\beta+\gamma\right)-60^\circ=60^\circ \text{ 。}\end{aligned}$$

所以，$\triangle PQ^*R^*$ 是正三角形。我們只需再證明：射線 $\overrightarrow{AQ^*}$ 與射線 $\overrightarrow{AR^*}$ 是 $\angle A$ 的三等分線。

在 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 上分別選取點 $M$ 與 $N$ 使得 $\overline{BM}=\overline{BP}$ 且 $\overline{CN}=\overline{CP}$，由此立即可知 $\triangle BPR^* \cong \triangle BMR^*$ 及 $\triangle CPQ^* \cong \triangle CNQ^*$。於是，得

$$\overline{MR^*}=\overline{PR^*}=\overline{PQ^*}=\overline{NQ^*}=\overline{Q^*R^*}\ ,$$

$$\angle MR^*Q^*=\angle NQ^*R^*=360^\circ-2\ (60^\circ+\alpha)-60^\circ=180^\circ-2\alpha\ 。$$

由此可知：在通過點 $M$、點 $R^*$ 與點 $Q^*$ 的圓上，弧 $MR^*Q^*$ 的度數是 $4\alpha$。因為 $\overline{MR^*}=\overline{Q^*R^*}$，所以，在此圓上，弧 $Q^*R^*$ 的度數是 $2\alpha$。於是，$\angle Q^*MR^*=\alpha$。同理，在通過點 $N$、點 $Q^*$ 與點 $R^*$ 的圓上，弧 $Q^*R^*$ 的度數也是 $2\alpha$。於是，也得 $\angle Q^*NR^*=\alpha$。由此可知：點 $M$、點 $R^*$、點 $Q^*$ 與點 $N$ 共圓。在此圓上，弧 $MR^*$、弧 $R^*Q^*$ 與弧 $Q^*N$ 的度數都是 $2\alpha$，所以，弧 $MR^*Q^*N$ 的度數是 $2\angle A$。由此可知：點 $A$ 也在此圓上，亦即：點 $A$、點 $M$、點 $R^*$、點 $Q^*$ 與點 $N$ 五點共圓，而且 $\angle MAR^*$、$\angle R^*AQ^*$ 與 $\angle Q^*AN$ 都等於 $\alpha$。於是，射線 $\overrightarrow{AQ^*}$ 與射線 $\overrightarrow{AR^*}$ 是 $\angle A$ 的三等分線。

因為點 $Q^*$ 是 $\angle C$ 與 $\angle A$ 較靠近 $\overline{CA}$ 的兩條角三等分線的交點，所以，點 $Q^*$ 與點 $Q$ 是同一點。同理，點 $R^*$ 與點 $R$ 也是同一點。於是，$\triangle PQR$ 是正三角形。

上述證明的後半段附帶得出下述系理 1，而證明的前半段則可以推廣成下述系理 2。

**系理 1**：設 $\triangle ABC$ 為一個三角形。若 $P$、$Q$ 與 $R$ 是定理 1 中所提的三個點，又設點 $M$ 是點 $P$ 對直線 $BR$ 的對稱點、點 $N$ 是點 $P$ 對直線 $CQ$ 的對稱點，則點 $M$ 在 $\overline{AB}$ 上、點 $N$ 在 $\overline{AC}$ 上、而且 $A$、$M$、$N$、$Q$ 與 $R$ 五點共圓。

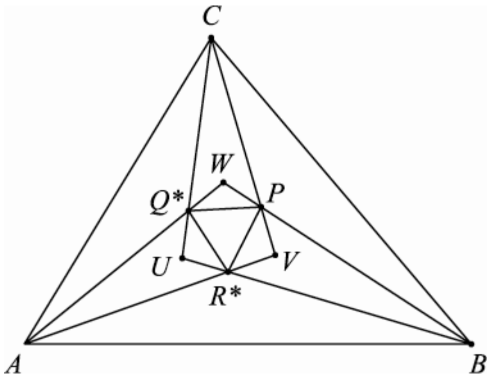
**系理 2**：設 $\triangle ABC$ 為一個三角形。若 $P$、$Q$ 與 $R$ 是定理 1 中所提的三個點，則

$$\angle BRP=\angle CQP=60^\circ+\alpha\ ,$$

$$\angle CPQ=\angle ARQ=60^\circ+\beta\ ,$$

$$\angle AQR=\angle BPR=60^\circ+\gamma\ 。$$

**【幾何證法之二】**




▲圖 2

在 $\angle B$ 較靠近 $\overline{AB}$ 的角三等分線上作點 $R^*$、在 $\angle C$ 較靠近 $\overline{CA}$ 的角三等分線上作點 $Q^*$ 使得

$$\angle BPR^* = 60^\circ + \gamma \text{ ，} \angle CPQ^* = 60^\circ + \beta \text{ 。}$$

於是，可得

$$\begin{aligned}\angle Q^*PR^* &= 360^\circ - \angle BPC - \angle BPR^* - \angle CPQ^* \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \beta - \gamma) - (60^\circ + \gamma) - (60^\circ + \beta) = 60^\circ \text{ ，}\end{aligned}$$

$$\angle BR^*P = 180^\circ - \beta - \angle BPR^* = 180^\circ - \beta - (60^\circ + \gamma) = 60^\circ + \alpha \text{ ，}$$

$$\angle CQ^*P = 180^\circ - \gamma - \angle CPQ^* = 180^\circ - \gamma - (60^\circ + \beta) = 60^\circ + \alpha \text{ 。}$$

仿照前一證明的前半段，可知△ $PQ^*R^*$ 是正三角形。我們只需再證明：射線 $\overrightarrow{AQ^*}$ 與射線 $\overrightarrow{AR^*}$ 是 $\angle A$ 的三等分線。

在直線 $BP$ 上作點 $W$ 使得點 $P$ 介於點 $B$ 與點 $W$ 之間而且 $\overline{WP} = \overline{WQ^*}$ ，在直線 $CP$ 上作點 $V$ 使得點 $P$ 介於點 $C$ 與點 $V$ 之間而且 $\overline{VP} = \overline{VR^*}$ 。於是，可知

$$\angle PR^*V = \angle R^*PV = 180^\circ - 60^\circ - (60^\circ + \beta) = 60^\circ - \beta \text{ ，}$$

$$\angle PQ^*W = \angle Q^*PW = 180^\circ - 60^\circ - (60^\circ + \gamma) = 60^\circ - \gamma \text{ ，}$$

$$\angle BR^*V = \angle BR^*P - \angle PR^*V = (60^\circ + \alpha) - (60^\circ - \beta) = \alpha + \beta \text{ ；}$$

$$\angle CQ^*W = \angle CQ^*P - \angle PQ^*W = (60^\circ + \alpha) - (60^\circ - \gamma) = \alpha + \gamma \text{ ；}$$

$$\angle PVR^* = 180^\circ - 2\ (60^\circ - \beta) = 60^\circ + 2\beta \text{ ，}$$

$$\angle PWQ^* = 180^\circ - 2\ (60^\circ - \gamma) = 60^\circ + 2\gamma \text{ 。}$$

設直線 $R^*V$ 與直線 $AB$ 交於點 $A_1$ 、直線 $Q^*W$ 與直線 $AB$ 交於點 $A_2$ ，則得

$$\angle BA_1R^* = \angle BR^*V - \angle R^*BA_1 = (\alpha + \beta) - \beta = \alpha \text{ ，}$$

$$\angle BA_2W = 180^\circ - \angle BWA_2 - \angle WBA_2 = 180^\circ - (60^\circ + 2\gamma) - 2\beta = 2\alpha \text{ 。}$$

另一方面，因為△ $R^*PQ^*$ 與△ $WPQ^*$ 都是等腰三角形，所以，$\overrightarrow{WR^*}$ 是 $\angle BWA_2$ 的平分線，進一步知點 $R^*$ 是△ $BWA_2$ 的內心。於是，得

$$\angle BA_2R^* = \angle R^*A_2Q^* = \alpha \text{ 。}$$

因為點 $A_1$、點 $A_2$ 與點 $B$ 共線且位於點 $B$ 的同側，所以，由 $\angle BA_1R^* = \angle BA_2R^*$ 可得 $A_1 = A_2$，亦即：直線 $AB$、直線 $R^*V$ 、直線 $Q^*W$ 共點。

同理，設直線 $Q^*W$ 與直線 $AC$ 交於點 $A_3$ 、直線 $R^*V$ 與直線 $AC$ 交於點 $A_4$ ，則得

$$\angle CA_3Q^* = \angle CQ^*W - \angle Q^*CA_3 = (\alpha + \gamma) - \gamma = \alpha \text{ ，}$$

$$\angle CA_4V = 180^\circ - \angle CVA_4 - \angle VCA_4 = 180^\circ - (60^\circ + 2\beta) - 2\gamma = 2\alpha \text{ 。}$$

另一方面，因為△ $Q^*PR^*$ 與△ $VPR^*$ 都是等腰三角形，所以，$\overrightarrow{VQ^*}$ 是 $\angle CVA_4$ 的平分線，進一步知點 $Q^*$ 是△ $CVA_4$ 的內心。於是，得

$$\angle CA_4Q^* = \angle Q^*A_4R^* = \alpha \text{ 。}$$

因為點 $A_3$ 、點 $A_4$ 與點 $C$ 共線且位於點 $C$ 的同側，所以，由 $\angle CA_3Q^* = \angle CA_4Q^*$ 可得 $A_3 = A_4$ ，亦即：直線 $AC$、直線 $R^*V$ 、直線 $Q^*W$ 共點。

由此可知：直線 $R^*V$ 與直線 $Q^*W$ 都通過點 $A$，亦即： $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$ 。於是，得

$$\angle BAR^* = \angle R^*AQ^* = \angle Q^*AC = \alpha \text{ ，}$$

亦即：射線 $\overrightarrow{AQ^*}$ 與射線 $\overrightarrow{AR^*}$ 是 $\angle A$ 的三等分線。

因為點 $Q^*$ 是 $\angle C$ 與 $\angle A$ 較靠近 $\overline{CA}$ 的兩條角三等分線的交點，所以，點 $Q^*$ 與點 $Q$ 是同一點。同理，點 $R^*$ 與點 $R$ 也是同一點。於是，$\triangle PQR$ 是正三角形。

上述證明中附帶得出下述性質。

**系理 3：** 設 $\triangle ABC$ 為一個三角形。若 $P$、$Q$ 與 $R$ 是定理 1 中所提的三個點，又設直線 $BR$ 與直線 $CQ$ 交於點 $U$、直線 $CP$ 與直線 $AR$ 交於點 $V$、直線 $AQ$ 與直線 $BP$ 交於點 $W$，則 $\triangle UQR$、$\triangle VRP$ 與 $\triangle WPQ$ 都是等腰三角形，而且

$$\angle QUR = 60^\circ + 2\alpha \text{ ，} \angle UQR = \angle URQ = 60^\circ - \alpha \text{ ；}$$

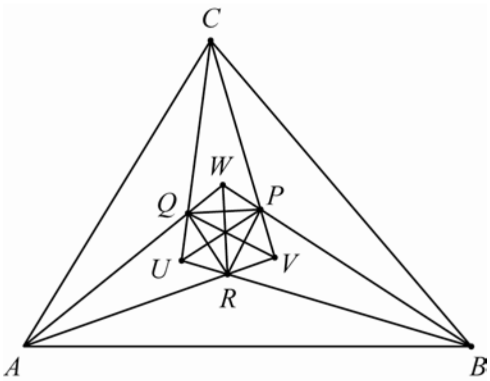
$$\angle RVP = 60^\circ + 2\beta \text{ ，} \angle VRP = \angle VPR = 60^\circ - \beta \text{ ；}$$

$$\angle PWQ = 60^\circ + 2\gamma \text{ ，} \angle WPQ = \angle WQP = 60^\circ - \gamma \text{ 。}$$

**【三角證法】**

利用三角方法證明 Morley 角三等分線定理，乃是直接使用三角學中的有關性質，實際求出 Morley 三角形各邊的長，確定它是正三角形。

在下文中，我們令 $d$ 表示 $\triangle ABC$ 的外接圓直徑。




▲圖 3

在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BCP$ 中使用正弦定律，可得

$$\overline{BP} = \frac{\overline{BC}\sin\angle BCP}{\sin\angle BPC} = \frac{\overline{BC}\sin\gamma}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{\overline{BC}\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{d\sin 3\alpha\sin\gamma}{\sin(60^\circ - \alpha)} \text{ ，}$$

$$\overline{CP} = \frac{\overline{BC}\sin\angle CBP}{\sin\angle BPC} = \frac{\overline{BC}\sin\beta}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{\overline{BC}\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{d\sin 3\alpha\sin\beta}{\sin(60^\circ - \alpha)} \text{ 。}$$

因為

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin\alpha\ (3-4\sin^2\alpha) = \sin\alpha\ (3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\\ &= 4\sin\alpha\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)\\ &= 4\sin\alpha\ \sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha)\end{aligned}$$ ，

所以，可得

$$\overline{BP} = 4d\sin\alpha\sin\gamma\sin(60^\circ + \alpha)$$ ，

$$\overline{CP} = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin(60^\circ + \alpha)$$ 。

同理，在$\triangle ABC$與$\triangle CAQ$中使用正弦定律，可得

$$\overline{AQ} = \frac{\overline{AC}\sin\angle ACQ}{\sin\angle AQC} = \frac{\overline{AC}\sin\gamma}{\sin(180^\circ - \gamma - \alpha)} = \frac{\overline{AC}\sin\gamma}{\sin(\gamma + \alpha)} = \frac{d\sin 3\beta\sin\gamma}{\sin(60^\circ - \beta)}$$ ，

$$\overline{CQ} = \frac{\overline{AC}\sin\angle CAQ}{\sin\angle AQC} = \frac{\overline{AC}\sin\alpha}{\sin(180^\circ - \gamma - \alpha)} = \frac{\overline{AC}\sin\alpha}{\sin(\gamma + \alpha)} = \frac{d\sin 3\beta\sin\alpha}{\sin(60^\circ - \beta)}$$ 。

因為

$$\sin 3\beta = 4\sin\beta\ \sin(60^\circ - \beta)\sin(60^\circ + \beta)$$ ，

所以，可得

$$\overline{AQ} = 4d\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ + \beta)$$ ，

$$\overline{CQ} = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin(60^\circ + \beta)$$ 。

同理，在$\triangle ABC$與$\triangle ABR$中使用正弦定律，可得

$$\overline{AR} = \frac{\overline{AB}\sin\angle ABR}{\sin\angle ARB} = \frac{\overline{AB}\sin\beta}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{\overline{AB}\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{d\sin 3\gamma\sin\beta}{\sin(60^\circ - \gamma)}$$ ，

$$\overline{BR} = \frac{\overline{AB}\sin\angle BAR}{\sin\angle ARB} = \frac{\overline{AB}\sin\alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{\overline{AB}\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{d\sin 3\gamma\sin\alpha}{\sin(60^\circ - \gamma)}$$ 。

因為

$$\sin 3\gamma = 4\sin\gamma\ \sin(60^\circ - \gamma)\sin(60^\circ + \gamma)$$

所以，可得

$$\overline{AR}=4d\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ+\gamma)\text{ ，}$$

$$\overline{BR}=4d\sin\alpha\sin\gamma\sin(60^\circ+\gamma)\text{ 。}$$

其次，在△$AQR$ 中使用餘弦定律，可得

$$\begin{aligned}\frac{\overline{QR}^2}{16d^2\sin^2\beta\sin^2\gamma}&=\frac{\overline{AQ}^2+\overline{AR}^2-2\overline{AQ}\times\overline{AR}\times\cos\angle QAR}{16d^2\sin^2\beta\sin^2\gamma}\\&=\sin^2(60^\circ+\beta)+\sin^2(60^\circ+\gamma)-2\sin(60^\circ+\beta)\sin(60^\circ+\gamma)\cos\alpha\text{ 。}\end{aligned}$$

為了化簡上式右端的式子，我們考慮一個外接圓直徑等於 1 而三內角分別為 $\alpha$、$60^\circ+\beta$ 與 $60^\circ+\gamma$ 的三角形。根據正弦定律，這個三角形的三邊長分別為 $\sin\alpha$ 、 $\sin(60^\circ+\beta)$ 與 $\sin(60^\circ+\gamma)$ 。於是，根據餘弦定律，可得

$$\sin^2(60^\circ+\beta)+\sin^2(60^\circ+\gamma)-2\sin(60^\circ+\beta)\sin(60^\circ+\gamma)\cos\alpha=\sin^2\alpha\text{ 。}$$

由此即得

$$\overline{QR}^2=16d^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\text{ ，}$$

$$\overline{QR}=4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\text{ 。}$$

同理，在△$BRP$ 中使用餘弦定律，可得

$$\begin{aligned}\frac{\overline{RP}^2}{16d^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma}&=\frac{\overline{BR}^2+\overline{BP}^2-2\overline{BR}\times\overline{BP}\times\cos\angle RBP}{16d^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma}\\&=\sin^2(60^\circ+\gamma)+\sin^2(60^\circ+\alpha)-2\sin(60^\circ+\gamma)\sin(60^\circ+\alpha)\cos\beta\text{ 。}\end{aligned}$$

考慮一個外接圓直徑等於 1 而三內角分別為 $60^\circ+\alpha$ 、 $\beta$ 與 $60^\circ+\gamma$ 的三角形。根據正弦定律與餘弦定律，可得

$$\sin^2(60^\circ+\gamma)+\sin^2(60^\circ+\alpha)-2\sin(60^\circ+\gamma)\sin(60^\circ+\alpha)\cos\beta=\sin^2\beta\text{ 。}$$

由此即得

$$\overline{RP}^2=16d^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\text{ ，}$$

$$\overline{RP} = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \text{ 。}$$

同理，在△*CPQ* 中使用餘弦定律，可得

$$\frac{\overline{PQ}^2}{16d^2\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \frac{\overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 - 2\overline{CP}\times\overline{CQ}\times\cos\angle PCQ}{16d^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$
$$= \sin^2(60^\circ+\alpha) + \sin^2(60^\circ+\beta) - 2\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ+\beta)\cos\gamma \text{ 。}$$

考慮一個外接圓直徑等於 1 而三內角分別為 $60^\circ+\alpha$ 、$60^\circ+\beta$ 與 $\gamma$ 的三角形。根據正弦定律與餘弦定律，可得

$$\sin^2(60^\circ+\alpha) + \sin^2(60^\circ+\beta) - 2\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ+\beta)\cos\gamma = \sin^2\gamma \text{ 。}$$

由此即得

$$\overline{PQ}^2 = 16d^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma \text{ ，}$$

$$\overline{PQ} = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \text{ 。}$$

因此，△*PQR* 是正三角形。這就完成了 Morley 角三等分線定理中的三內角情形的證明。

上述證明中附帶得出下述性質。

**系理 4：**設△*ABC* 為一個三角形。若 *P*、*Q* 與 *R* 是定理 1 中所提的三個點，又設直線 *BR* 與直線 *CQ* 交於點 *U*、直線 *CP* 與直線 *AR* 交於點 *V*、直線 *AQ* 與直線 *BP* 交於點 *W*，又設 *d* 表示△*ABC* 的外接圓直徑，則

(1) $\overline{AQ} = 4d\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ+\beta)$ ，$\overline{AR} = 4d\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ+\gamma)$ ，

$\overline{BR} = 4d\sin\alpha\sin\gamma\sin(60^\circ+\gamma)$ ，$\overline{BP} = 4d\sin\alpha\sin\gamma\sin(60^\circ+\alpha)$ ，

$\overline{CP} = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin(60^\circ+\alpha)$ ，$\overline{CQ} = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin(60^\circ+\beta)$ 。

(2) $\overline{QR} = \overline{RP} = \overline{PQ} = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ 。

系理 2 所敘述的等式，在幾何證法中並非直接證明而得。下面我們利用三角方法直接證明這些角的等式。

**系理 2 的三角證法：**

因為 $\overline{AQ} = 4d\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ+\beta)$ 且 $\overline{AR} = 4d\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ+\gamma)$ ，所以，在△*AQR* 中使

用正弦定律，即得

$$\frac{\sin\angle AQR}{\sin\angle ARQ}=\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}}=\frac{\sin(60^\circ+\gamma)}{\sin(60^\circ+\beta)} \text{，}$$

$$\sin\angle AQR\times\sin(60^\circ+\beta)=\sin\angle ARQ\times\sin(60^\circ+\gamma) \text{。}$$

兩端積化和差，即得

$$\begin{aligned}&\cos(\angle AQR-60^\circ-\beta)-\cos(\angle AQR+60^\circ+\beta)\\&=\cos(\angle ARQ-60^\circ-\gamma)-\cos(\angle ARQ+60^\circ+\gamma) \text{。}\end{aligned}$$

因為

$$\angle AQR+\angle ARQ=180^\circ-\alpha=120^\circ+\beta+\gamma=(60^\circ+\beta)+(60^\circ+\gamma) \text{，}$$

$$\angle AQR-60^\circ-\beta=-(\angle ARQ-60^\circ-\gamma) \text{，}$$

$$\cos(\angle AQR-60^\circ-\beta)=\cos(\angle ARQ-60^\circ-\gamma) \text{，}$$

所以，與前述積化和差所得等式比較，即得

$$\cos(\angle AQR+60^\circ+\beta)=\cos(\angle ARQ+60^\circ+\gamma) \text{。}$$

因為

$$\begin{aligned}&(\angle AQR+60^\circ+\beta)+(\angle ARQ+60^\circ+\gamma)\\&=(\angle AQR+\angle ARQ)+120^\circ+(\beta+\gamma)<180^\circ+120^\circ+60^\circ=360^\circ \text{，}\end{aligned}$$

所以，由 $\cos(\angle AQR+60^\circ+\beta)=\cos(\angle ARQ+60^\circ+\gamma)$ 可得

$$\angle AQR+60^\circ+\beta=\angle ARQ+60^\circ+\gamma \text{。}$$

再與等式 $\angle AQR-60^\circ-\beta=-(\angle ARQ-60^\circ-\gamma)$ 比較，即得

$$\angle AQR=60^\circ+\gamma \text{，} \angle ARQ=60^\circ+\beta \text{。}$$

同理，在△$BRP$ 中使用正弦定律，可得

$$\angle BRP=60^\circ+\alpha \text{，} \angle BPR=60^\circ+\gamma \text{。}$$

在△$CPQ$ 中使用正弦定律，可得

$$\angle CPQ = 60^\circ + \beta \text{ ， } \angle CQP = 60^\circ + \alpha \text{ 。}$$

下面三個問題，是本文內容的一些延伸。

**性質 1**：在圖 1 中，試證：

(1) 直線 $PQ$ 與直線 $BC$ 的一個夾角為 $60^\circ + (\beta - \gamma)$ 。

(2) 直線 $PR$ 與直線 $BC$ 的一個夾角為 $60^\circ - (\beta - \gamma)$ 。

(3) 直線 $QR$ 與直線 $BC$ 的一個夾角為 $|\ \beta - \gamma\ |$ 。

**性質 2**：設△$ABC$ 為一個三角形。若 $P$、$Q$ 與 $R$ 是定理 1 中所提的三個點，又設點 $M$ 是點 $P$ 對直線 $BR$ 的對稱點、點 $N$ 是點 $P$ 對直線 $CQ$ 的對稱點，則

(1) $\angle QMP = \angle RNP = 30^\circ$ 。

(2) 直線 $MQ$、直線 $NR$ 都與△$UBC$ 的內切圓相切，其中，點 $U$ 是直線 $BR$ 與直線 $CQ$ 的交點。

**性質 3**：設△$ABC$ 為一個三角形。若 $P$、$Q$ 與 $R$ 是定理 1 中所提的三個點，又設直線 $BR$ 與直線 $CQ$ 交於點 $U$、直線 $CP$ 與直線 $AR$ 交於點 $V$、直線 $AQ$ 與直線 $BP$ 交於點 $W$，又設 $d$ 表示△$ABC$ 的外接圓直徑，則下述等式成立：

(1) $\overline{AQ} \times \overline{BR} \times \overline{CP} = \overline{AR} \times \overline{BP} \times \overline{CQ}$
$= 64d^3 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma \sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ + \beta)\sin(60^\circ + \gamma)$ 。

(2) $\overline{UB} = \dfrac{4d\sin\alpha\ \sin\gamma\cos\gamma\ \sin(60^\circ + \alpha)}{\cos(60^\circ - \alpha)}$ ， $\overline{UC} = \dfrac{4d\sin\alpha\ \sin\beta\cos\beta\ \sin(60^\circ + \alpha)}{\cos(60^\circ - \alpha)}$ ，

$\overline{VC} = \dfrac{4d\sin\alpha\ \sin\beta\cos\alpha\ \sin(60^\circ + \beta)}{\cos(60^\circ - \beta)}$ ， $\overline{VA} = \dfrac{4d\sin\beta\ \sin\gamma\cos\gamma\ \sin(60^\circ + \beta)}{\cos(60^\circ - \beta)}$ ，

$\overline{WA} = \dfrac{4d\sin\beta\ \sin\gamma\cos\beta\ \sin(60^\circ + \gamma)}{\cos(60^\circ - \gamma)}$ ， $\overline{WB} = \dfrac{4d\sin\alpha\ \sin\gamma\cos\alpha\ \sin(60^\circ + \gamma)}{\cos(60^\circ - \gamma)}$ 。

(3) $\overline{UQ} = \overline{UR} = \dfrac{2d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos(60^\circ - \alpha)}$ ，$\overline{VR} = \overline{VP} = \dfrac{2d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos(60^\circ - \beta)}$ ，

$\overline{WP} = \overline{WQ} = \dfrac{2d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos(60^\circ - \gamma)}$ 。

## 國立臺灣師範大學數學系

# 101學年度大學甄選入學指定項目甄試試題

## 筆試一、計算證明題（考試時間：2 小時）

1. (1) 請將 $x^8+x^6+x^4+x^2+1$ 因式分解成（或直接寫成）兩個整係數四次多項式的乘積。（8 分）

   (2) 試證：對任意正整數 $n$，$1+5^{2n}+5^{4n}+5^{6n}+5^{8n}$ 都是合數（即都不是質數）。（8 分）

2. 樂透四星彩一共分成「正彩」與「組彩」兩種玩法，每期開出一組四位數字（0000~9999）的中獎號碼，正彩是玩家下注的四位數與開獎號碼相同且順序完全一致才有中獎，而組彩只要下注的四位數與開獎號碼相同（不計順序）即可中獎。例如：開獎號碼為 0717 時，下注購買 1707 正彩的玩家沒有中獎，而下注購買 1707 組彩的玩家則可中獎。假設每一組號碼開出的機率都相同，並設下一期的四星彩開獎號碼中恰好出現一次數字 1，試在此條件下求下列各機率：

   (1) 購買下期四星彩一注 1323「正彩」可中獎的機率。（8 分）

   (2) 購買下期四星彩一注 1323「組彩」可中獎的機率。（8 分）

3. 坐標空間中，給定一直線 $L: x=y=z-1$。已知點 $P$ 在 $xy$ 平面上，且點 $P$ 到 $x$ 軸、$y$ 軸及直線 $L$ 的距離都相等，試求此共同的距離。（20 分）

4. 設兩數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{100}$ 及 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{100}$ 滿足

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n-2b_{n+1} \\ b_{n+1}=a_{n+1}-3b_n \end{cases},\ n=1, 2, 3, \cdots, 99\text{ 。}$$

   (1) 試求 $2\times 2$ 階矩陣 $A$，使得 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，$n=1, 2, 3, \cdots, 99$。（10 分）

   (2) 已知 $a_{99}=3^{50}$，$b_{100}=4\cdot 3^{49}$，試求 $a_1$ 及 $b_1$ 之值。（14 分）

5. 設△$ABC$ 的三邊長分別為 $a, b, c$，而 $\Delta$ 是此三角形的面積。試證：

   (1) $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\Delta$。（12 分）

   (2) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq \dfrac{9}{4}$。（12 分）

## 筆試二、填充題（考試時間：1.5 小時）

1. 若$i^2=-1$，則$\sum_{k=0}^{30} i^k \sin\left(60+120k\right)^\circ=$________。

2. 滿足方程式$1+\log_9\left(x-2\right)=\log_3\left(x-6\right)$的所有實數解為________。

3. 函數$f\left(x\right)=x^{\log\left(x^2\right)-1}$在範圍$1\le x\le 100$中的最小值為________。

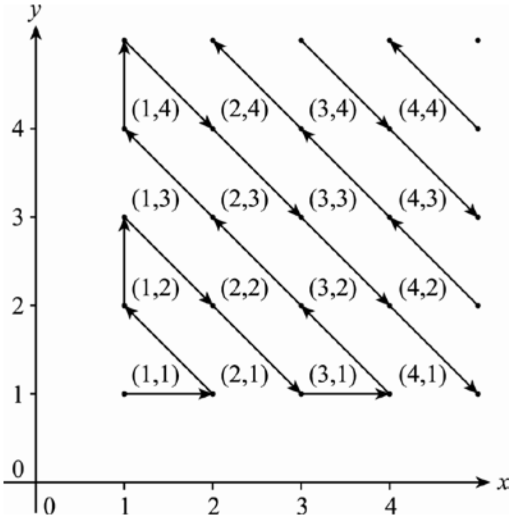
4. 若數列$\langle\theta_n\rangle$滿足$\cos\theta_n=1-\frac{1}{2n^2}$，則$\sum_{n=1}^{\infty}\tan^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right)=$________。

5. 方程式$x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$的所有**實數根**之和為________。

6. 設矩陣$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，求$A^{2012}=$________。

7. 一個正立方體的六個面的面中心可以形成一個以此六個中心為頂點的正八面體，而此正面體的八個面的面中心又可以形成一個以此八個中心為頂點的正立方體。試問原立方體與新形成立方體的體積比值為________。

8. 根據右圖的規律，將坐標平面在第一象限內 $x, y$ 坐標都是整數的點依次排序而不遺漏，例如：第 1 點$(1,1)$、第 2 點$(2,1)$、第 3 點$(1,2)$、第 4 點$(1,3)$、第 5 點$(2,2)$、第 6 點$(3,1)$、第 7 點$(4,1)\cdots$。試問第 1000 點的坐標為________。




9. 有 6 個外型相同的硬幣，其中 2 個是均勻的，出現正、反面的機率相等；另外 4 個是不均勻的，出現正面的機率是$\frac{1}{3}$、反面的機率是$\frac{2}{3}$。今隨機取出一個硬幣拋擲，在每一硬幣被取出的機率相同且出現反面的條件下，所拋擲的是不均勻硬幣的機率為________。

10. 假設某一學校學生每天攝取牛奶的量呈現常態分布，今調查發現每人每天平均攝取的量為 120*ml*，標準差為 10*ml*。如果攝取量超過 140*ml* 的學生人數為 55 人，那麼全校的學生人數為__________。（註：常態分布的機率分布有 68-95-99.7 法則）

## 筆試一、計算證明題

1. (1) 此為 Aurifeuillian 多項式因式分解

$$x^8+x^6+x^4+x^2+1=\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)。$$

(2) 將等式

$$x^8+x^6+x^4+x^2+1=\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)$$

中的未知數 $x$ 代入 $5^n$ ，得 $1+5^{2n}+5^{4n}+5^{6n}+5^{8n}$ 可表為

$$\left(5^{4n}+5^{3n}+5^{2n}+5^n+1\right)\left(5^{4n}-5^{3n}+5^{2n}-5^n+1\right)，$$

又因為

$5^{4n}+5^{3n}+5^{2n}+5^n+1>1$ ，$5^{4n}>5^{3n}$ ，$5^{2n}>5^n$ $\Rightarrow$ $5^{4n}-5^{3n}+5^{2n}-5^n+1>1$ ，

即這兩個數都超過 1，所以自然數

$$1+5^{2n}+5^{4n}+5^{6n}+5^{8n}$$

是合成數。

2. 恰出現一次數字「1」的號碼共有 $C_1^4\times 9^3$ 種：

(1) 因為開獎號碼必須恰為「1323」才能中獎，所以中獎機率 $=\dfrac{1}{C_1^4\times 9^3}$ 。

(2) 因為開獎號碼必須為「1323」的排列情形才能中獎，所以中獎機率 $=\dfrac{\frac{4!}{2!}}{C_1^4\times 9^3}$ 。

3. 因為點 $P$ 在 $xy$ 平面上且 $P$ 到 $x$ 軸、$y$ 軸的距離相等，所以 $P$ 在直線 $L':\begin{cases}x=y\\z=0\end{cases}$ 上，可假設 $P$ 的坐標 $(t,t,0)$ , $t\in\mathbb{R}$ ，此時 $P$ 到 $x$ 軸、$y$ 軸的距離為 $|t|$，又直線 $L':\begin{cases}x=y\\z=0\end{cases}$ 與直線 $L:x=y=z-1$ 交於點 $Q(-1,-1,0)$ ，令 $R$ 為點 $P$ 對直線 $L$ 的垂足，則 $\overline{PQ}=|t+1|\sqrt{2},\ \overline{PR}=|t|$ 。

設 $\angle PQR=\theta$ ，$L$ 和 $L'$ 的方向向量分別為 $(1,1,1),\ (1,1,0)$ ，由此可算得

$$\cos\theta=\frac{(1,1,0)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\ \Rightarrow\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\ 。$$

在△$PQR$ 中，

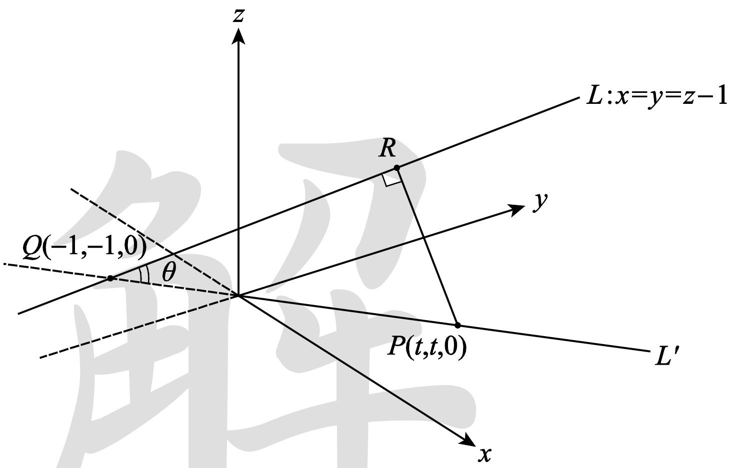
$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\sin\theta=\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\frac{|t|}{|t+1|\sqrt{2}}\ ，$$

解得

$$t=2\pm\sqrt{6}\ 。$$

故所求的距離為 $2+\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{6}-2$ 。

註：下圖為參考圖




4. (1) 將 $b_{n+1}=a_{n+1}-3b_n$ 代回 $a_{n+1}=3a_n-2b_{n+1}$ 得

$$a_{n+1}=3a_n-2\left(a_{n+1}-3b_n\right)\Rightarrow a_{n+1}=a_n+2b_n \text{ 。}$$

將 $a_{n+1}=3a_n-2b_{n+1}$ 代回 $b_{n+1}=a_{n+1}-3b_n$ 得

$$b_{n+1}=\left(3a_n-2b_{n+1}\right)-3b_n\Rightarrow b_{n+1}=a_n-b_n \text{ 。}$$

綜合得

$$\begin{cases}a_{n+1}=a_n+2b_n\\ b_{n+1}=a_n-b_n\end{cases},$$

以矩陣表示，得

$$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix} \text{。}$$

(2) 將 $a_{99}=3^{50}$, $b_{100}=4\cdot3^{49}$ 代入 $a_{n+1}=3a_n-2b_{n+1}$ 得 $a_{100}=3^{49}$ ，又

$$\begin{bmatrix}a_{100}\\ b_{100}\end{bmatrix}=A^{99}\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3^{49}\\ 4\cdot3^{49}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}^{99}\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix} \text{ 。}$$

因為 $A^2=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}$ ，所以

$$\begin{bmatrix}3^{49}\\ 4\cdot3^{49}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}^{99}\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}^{49}\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^{49}&0\\0&3^{49}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1+2b_1\\ a_1-b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^{49}\left(a_1+2b_1\right)\\ 3^{49}\left(a_1-b_1\right)\end{bmatrix},$$

解得

$$a_1=3,\ b_1=-1 \text{ 。}$$

5. (1) 由面積公式$\Delta=\dfrac{1}{2}ab\sin C$及餘弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$知

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\Delta=a^2+b^2+(a^2+b^2-2ab\cos C)-4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$=2\left[a^2+b^2-2ab\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\geq 2\left(a-b\right)^2\geq 0\text{ 。}$$

(2) 不失一般性，假設$\angle C$為銳角，利用倍角公式可知

$$\begin{aligned}
&\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\\
&=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\left(1-\cos^2 C\right)\\
&=1-\frac{1}{2}\left(\cos 2A+\cos 2B\right)+\left(1-\cos^2 C\right)\\
&=2-\cos\left(A+B\right)\cos\left(A-B\right)-\cos^2 C\\
&=2+\cos C\cdot\cos\left(A-B\right)-\cos^2 C\\
&\leq 2+\cos C-\cos^2 C\left(\text{因為}\cos\left(A-B\right)\leq 1,0\leq\cos C\leq 1\right)\\
&=-\left(\cos C-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\leq\frac{9}{4},
\end{aligned}$$

得證。

## 筆試二、填充題

### 參考答案

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\sqrt{3}$ | 18 | $10^{-\frac{1}{8}}$ | $\frac{1}{2}$ | 3 | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **7.** | **8.** | **9.** | **10.** | | |
| 27 | $(10,36)$ | $\frac{8}{11}$ | 2200 | | |

1. 化簡得

$$\sum_{k=0}^{30} i^k \sin(60+120k)^\circ = \sum_{k=0}^{30} i^k (\sin 60^\circ \cos 120k^\circ + \cos 60^\circ \sin 120k^\circ)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=0}^{30} i^k \cos 120k^\circ + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{30} i^k \sin 120k^\circ$$

因為 $i^k \cos 120k^\circ,\ i^k \sin 120k^\circ$ 每 12 個一循環，即

$$\sum_{k=0}^{11} i^k \cos 120k^\circ = \sum_{k=12}^{23} i^k \cos 120k^\circ = \sum_{k=0}^{11} i^k \sin 120k^\circ = \sum_{k=12}^{23} i^k \sin 120k^\circ = 0\ ,$$

所以

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=24}^{30} i^k \cos 120k^\circ + \frac{1}{2}\sum_{k=24}^{30} i^k \sin 120k^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=1}^{7} i^k \cos 120k^\circ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7} i^k \sin 120k^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times(-2i) + \frac{1}{2}\times\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}i\ 。$$

故

$$\sum_{k=0}^{30} i^k \sin(60+120k)^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}i\ 。$$

2. 因為真數恆正，所以 $x$ 必須滿足 $x>6$ 。解方程式，得 $1+\log_9(x-2)=\log_9(x-6)^2$ ，即 $\log_9\left[9(x-2)\right]=\log_9(x-6)^2$ ，故 $9(x-2)=(x-6)^2$ 。整理二次方程式，得

$$x^2-21x+54=0 \Rightarrow (x-3)(x-18)=0\ ,$$

因為 $x>6$ ，所以 $x=18$ 。

3. 將等式兩邊取 log，得

$$\log f(x)=\log\left(x^{\log(x^2)-1}\right)=\left(\log\left(x^2\right)-1\right)\left(\log x\right)=\left(2\log x-1\right)\left(\log x\right)\text{，}$$

令 $t=\log x\left(0\le t\le 2\right)$，代入上式，得

$$\log f(x)=\left(2t-1\right)t=2t^2-t=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\text{。}$$

當 $t=\frac{1}{4}$ 時，$\log f(x)$ 有最小值 $-\frac{1}{8}$，即此時 $f(x)$ 有最小值 $10^{-\frac{1}{8}}$。

4. 利用兩倍角公式 $\cos\theta_n=2\cos^2\frac{\theta_n}{2}-1$ 可得 $\cos\frac{\theta_n}{2}=\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n}$ 及

$$\tan\frac{\theta_n}{2}=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}\text{，}\tan^2\frac{\theta_n}{2}=\frac{1}{4n^2-1}\text{。}$$

所求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tan^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\text{。}$$

5. 化原方程式 $x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$ 為 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$，並令 $t=x+\frac{1}{x}$ $(t\ge 2)$，代入上式，得

$$t^2-2t-3=0\Rightarrow t=3\text{。}$$

原方程式的實數根即 $x+\frac{1}{x}=3$ 的實數根，整理 $x+\frac{1}{x}=3$，得

$$x^2-3x+1=0\text{，}$$

故兩根和為 3。

6. 計算 $A$ 矩陣平方，得

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix};$$

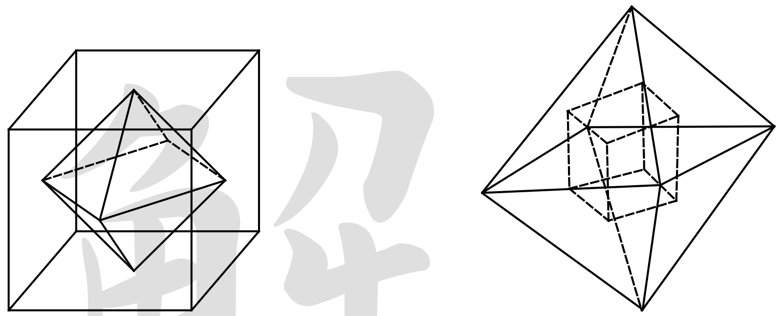
計算 $A$ 矩陣三次方，得

$$A^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I\text{。}$$

故

$$A^{2012}=\left(A^3\right)^{670}A^2=A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\text{。}$$

7. 如下圖，因為正立方體與其內的正八面體其邊長比為$1:\frac{\sqrt{2}}{2}$；又正八面體與其內嵌的正立方體其邊長比為$1:\frac{\sqrt{2}}{3}$，所以原立方體與新形成立方體的邊長比為$3:1$，體積比為$27:1$。



8. 將點用以下形式分組：

$$\{(1,1)\},\ \{(2,1),(1,2)\},\ \{(1,3),(2,2),(3,1)\},\{(4,1),(3,2),(2,3),(1,4)\},\cdots,$$

當中第 $k$ 組有 $k$ 個點，且點的 $x,y$ 坐標和為 $k+1$。當 $k$ 為奇數時 $x$ 坐標從 1 遞增；$k$ 為偶數時 $x$ 坐標從 $k$ 遞減。

因為前 44 組共有$1+2+3+\cdots+44=990$個數，所以第 1000 個點落在第 45 組內，這組的第一個數從編號 991 的$(1,45)$開始。往上累加可知第 1000 個點坐標為$(10,36)$。

9. $P(\text{不均勻硬幣}|\text{出現反面})=\dfrac{P(\text{不均勻硬幣且出現反面})}{P(\text{出現反面})}=\dfrac{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}=\dfrac{8}{11}$。

10. 根據 68-95-99.7 法則，在兩個標準差之上的人數占 2.5%，
所以全校人數為

$$55\div 2.5\%=2200\ 。$$

# 專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 69

☆☆☆☆

觀察下列等式：

$$\frac{5^3+2^3}{5^3+3^3}=\frac{5+2}{5+3}$$

$$\frac{6^3+1^3}{6^3+5^3}=\frac{6+1}{6+5}$$

$$\frac{7^3+4^3}{7^3+3^3}=\frac{7+4}{7+3}$$

$$\frac{9^3+5^3}{9^3+4^3}=\frac{9+5}{9+4}$$

$$\vdots$$

(1) 請用代數寫出你所觀察到的恆等式。

(2) 證明你的恆等式。

〔玩鎖・玩索〕

這是一道有趣的規律發現，值得思考。

遊戲 70

☆☆

宇富每天用紙 4 張，他的妹妹茗茹每天用紙 3 張，每人每次均向爸爸要紙 25 張。他們每逢發現翌日不夠紙用時，便會去跟爸爸要紙。

今天宇富與茗茹都跟爸爸要紙，下一次一同跟爸爸要紙是哪一天？

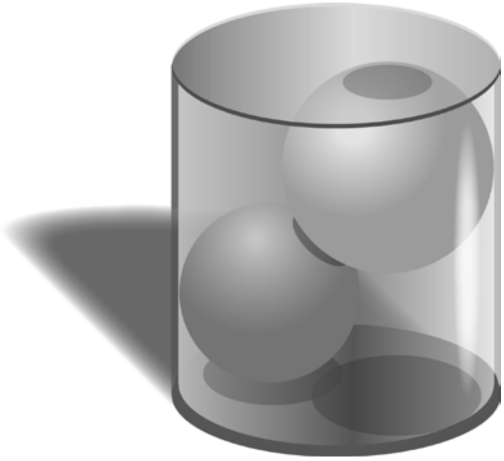
〔玩鎖・玩索〕

題意是說「不夠紙用的前一天去跟爸爸要紙」，是否有跟這題意相關聯的數學概念呢？

遊戲 71

☆☆☆☆

設圓柱形罐頭內擺放兩顆半徑相同的球體，堆在上面的球體的最高點剛好與罐頭的上蓋一樣高度，如下圖所示：



已知圓柱形的底面直徑為16、高18，求球體的半徑。

〔**玩鎖・玩索**〕

這是<u>香港</u>青少年數學菁英選拔賽試題。

遊戲 72

☆☆☆

咖啡館每週進口咖啡生豆甲型125磅、乙型75磅，烘焙過後均減重20%。烘焙過後的甲、乙型咖啡豆以2：1的比例混合製成$A$品牌咖啡，以2：3的比例混合製成$B$品牌咖啡；$A$品牌每磅售出可獲利70元，$B$品牌每磅售出可獲利90元。每週$A$、$B$品牌咖啡均售完，無庫存。


試問：每週要生產$A$、$B$品牌咖啡各多少磅，才能獲得最高利潤？

〔**玩鎖・玩索**〕

這是典型的線性規劃問題。

# 動手玩數學~破解秘笈 第17期

**遊戲 65**

設 $P$ 點的坐標為 $(a,a^2)$，因為 $x^2$ 的導式為 $2x$，所以直線 $PA$ 的斜率為 $2a$，即直線 $PA$ 的方程式為 $\left(y-a^2\right)=2a\left(x-a\right)$，或 $y=2ax-a^2$。因此 $A$ 點坐標為 $(0,-a^2)$。

拋物線、直線 $PB$ 與 $y$ 軸所圍的區域面積為

$$\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2}{3}a^3 \ ;$$

而△ $PAB$ 的面積為

$$\frac{a\cdot\left(a^2-\left(-a^2\right)\right)}{2}=a^3 \ .$$

此時，拋物線、直線 $PB$ 與 $y$ 軸所圍的區域面積與△ $PAB$ 的面積之比值為

$$\frac{\frac{2}{3}a^3}{a^3}=\frac{2}{3},$$

此值與 $a$ 無關，故是一個常數。

**遊戲 66**

設正立方體箱子的八個頂點之坐標為

$$(0,0,0),(2,0,0),(0,2,0),(2,2,0),$$
$$(0,0,2),(2,0,2),(0,2,2),(2,2,2).$$

此時黃球的球心坐標為 $(1,1,1)$，並令離原點最近的小紅球之球心坐標為 $(r,r,r)$。因為此小紅球與 $xy-$平面相切，所以此小紅球的半徑為 $r$。又因為 $(1,1,1)$ 與 $(r,r,r)$ 的距離剛好是黃球與小紅球的半徑之和，所以

$$\sqrt{(r-1)^2+(r-1)^2+(r-1)^2}=1+r$$

$$\Rightarrow r^2-4r+1=0 \ ,$$

解得 $r=2-\sqrt{3}$ 或 $2+\sqrt{3}$（不合）。

故小紅球的最大半徑為 $2-\sqrt{3}$。

**遊戲 67**

設水流的速度為 $w$，當船的速度為 $v$ 時，在與圓木相遇一小時後，船逆行 $v-w$ 公里，而圓木往下漂流 $w$ 公里，即當船要掉頭時，船與圓木相距 $\left(v-w\right)+w=v$ 公里。在掉頭一小時後，船順行了 $v+w$ 公里，而圓木又往下漂流 $w$ 公里，加上原本的距離 $v$ 公里，也是離船掉頭處 $v+w$ 公里。因此，船在掉頭一個小時後就會到達圓木的位置，而且這與船的速度無關。

因此，三艘船會同時抵達圓木漂流處，一起救起小孩。

**遊戲 68**

首先，1分鐘與2分鐘的傷兵一起過橋，然後1分鐘傷兵把手電筒帶回；接著4分鐘與6分鐘的傷兵一起過橋，然後2分鐘傷兵再把手電筒帶回；最後，1分鐘與2分鐘的傷兵一起過橋，完成過橋任務。這樣一共需要

$$2+1+6+2+2=13$$

分鐘。其餘的情形都比13分鐘多，所以13分鐘是最少的。

註：很多人會以為14分鐘，這不是最少的。