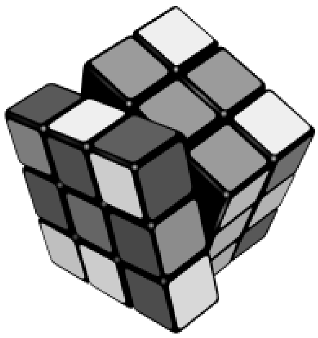
戲說數學 序

許志農／臺灣師大數學系

在智慧型手機與平板電腦逐漸普及的今日，開發老少咸宜、雅俗共賞的益智遊戲成為賺錢的大商機，憤怒鳥遊戲（Angry Birds）就是一款非常成功的範例：

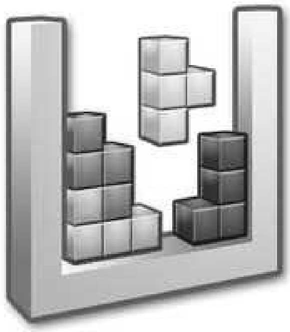
拋物線是憤怒鳥遊戲的精髓，也是這道遊戲唯一所需要掌握的數學，掌握得好就可以過關斬將，進入更高階的關卡。

在 1974 年，匈牙利的建築學和雕塑學教授魯比克發明了第一個魔術方塊（Rubik's Cube），從此魔術方塊熱快速的傳播到全世界，據說魔術方塊的權利金讓魯比克一度成為匈牙利的首富：



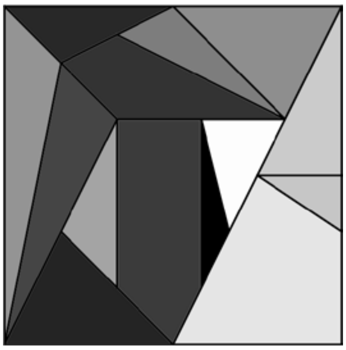
空間中的旋轉與變化是魔術方塊的數學基礎，這些都是透過中心的轉軸來完成。在更早之前，西方的 14-15 滑板遊戲與中國的華容道遊戲也是跟魔術方塊類似的遊戲，差別在於它們是平面的轉換，不是立體的變換。人們所處的環境是三維的世界，立體的魔術方塊會更吸引我們。本質上，這些遊戲都跟代數學的群論有很大的關聯，只是外行的玩出熱鬧來，而內行的探究其數學道理。

前蘇聯科學家阿列克謝在 1984 年利用空閒時間所編寫的俄羅斯方塊遊戲（Tetris），是風靡全世界的電腦遊戲，也是落下型益智遊戲的始祖：



在第一次波斯灣戰爭期間，俄羅斯方塊遊戲是前線美軍最常拿來消磨時間的遊戲之一。遊戲中所落下的四方連塊都是由四塊正方形相連所構成的，排除旋轉與鏡射外，一共只有五種四方連塊。由於俄羅斯方塊具有數學性、動態性與知名度，也經常被用來作為遊戲程式設計的練習題材。

遠在兩千兩百多年前，希臘科學家阿基米得也發明過有趣的拼圖遊戲，稱它為胃痛拼圖，其目的是要把十四塊多邊形拼成一整塊正方形：



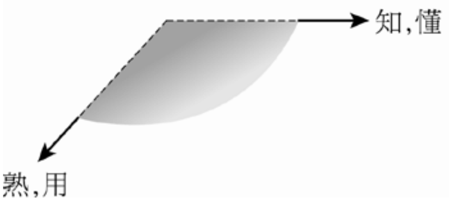
胃痛拼圖的奧妙之處在於它多達 17152 種拼法，除了對阿基米得的巧思切割感到吃驚外，更要感謝平面幾何帶來的美學。

以上所簡介的四道膾炙人口的遊戲，都是以某種數學基礎架構而成，而且又具有很棒的美學效果，究竟這些有趣的數學遊戲是如何誕生的呢？讓我們作更進一步的探索。

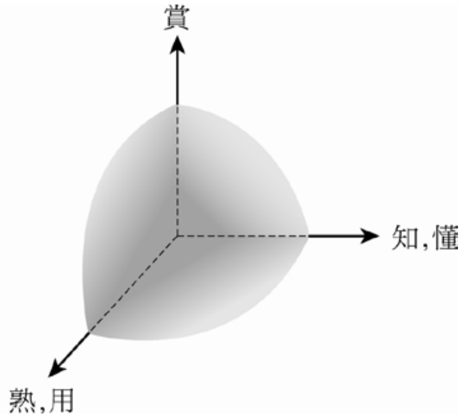
匈牙利數學家喬治・波利亞寫過一本名著《如何解題》，教導人們透過各種數學概念，思維與工具來進行解題；但是，波利亞似乎沒有寫過《如何命題》這方面的書籍，無論是憤怒鳥遊戲、魔術方塊、俄羅斯方塊、胃痛拼圖或者教科書裡的數學題目，它們都是屬於「如何命一道有意思的數學題目」的範疇。解題牽涉到的僅是數學知識的策略應用與組合方法，而命題卻含有相當主觀的成分，甚至命題與數學素養極為相關。到底該如何界定數學素養呢？我們可以用「知、懂、熟、用、賞」這五個字來概括，「知、懂」的程度在要求知道或讀懂數學知識；「熟、用」的深度是指熟練跟會使用數學知識進行解題；而「賞」的境界則較為深奧，意指在生活中遇到與數學相關的事物都能辨識，連結與欣賞。

如果用 x 軸度「知、懂」的程度，y 軸量「熟、用」的深度，那麼學過或讀懂的數學書籍越多，x 軸就越長；能使用的數學技巧或熟悉的數學工具越多，y 軸就越深。如此，將 x 代表學過的數學知識，y 表示使用此知識的能力，就可以在 xy 平面上畫出一塊對應的區域，這塊區域就呈現出解題的策略與組合的情形，面積越大代表解題能力越強。當我們進一步在這塊

解題區域的每一個點畫上「辨識，連結與欣賞數學事物」的高度（即用 z 來度量「賞」的素養）時，就形成一座高山，這座高山就是數學素養，體積越大代表著命題水準越高。



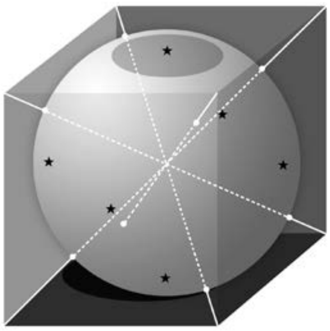
解題能力



命題水準

就以憤怒鳥遊戲為例，它是以拋物線為數學背景所設計出來的遊戲，設計者在拋物線這個點的鑑賞能力很高，才能想到與設計出這道遊戲。同樣地，魔術方塊、俄羅斯方塊與胃痛拼圖，他們分別以立體幾何的變換，四方連塊的變化與多邊形的貼合為數學背景，所設計出來很吸睛的遊戲。

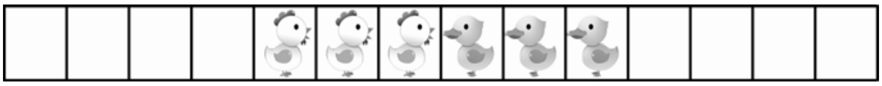
這裡所要表達的是「解題能力可以用 xy 平面上的一塊區域的面積來計算，而命題水準是素養的問題，必須用立體空間上的體積來衡量；解題跟『知、懂、熟、用』的能力有關，命題還要考慮『賞』的素養。」最後以 乾隆 皇帝收藏的一件藝術精品「雕象牙透花人物套球」作結尾：



這玲瓏精緻的象牙套球目前收藏在 臺北 故宮博物館，它是由十七層可以靈活轉動的球體所構造完成，從最外層的球體往內挖，必須連挖十六層，而且每層球體的表面都鏤雕人物或雕有幾何花紋。幫 乾隆 完成這件手上玩物的能工巧匠，必定具有精確計算的幾何概念。仔細觀察套球，可以發現它有十四個孔，這關鍵的十四孔是如何分布，才能往下穿鑿十六層呢？當我們把最外層的球體擺在一個正立方體內，讓立方體的六個面都與球體相切，再從球體的中心畫出與正立方體頂點相連的連線，這八條連線與球體表面剛好交八個點。這相切的六點加上相交的八個點，一共十四個點，就是套球上十四個孔的中心位置。在數代能工巧匠的實驗嘗試後，終於發現這關鍵的十四孔扮演著相當重要的角色。乾隆 皇帝手上把玩的這象牙套球就是以立體幾何上的這十四孔為背景，所構造完成的藝術精品，把它算成數學藝術也不為過。

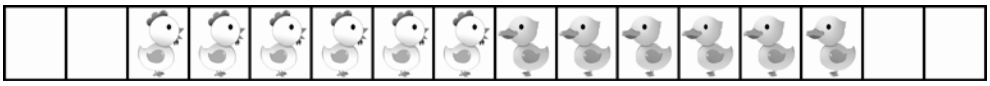
雞同鴨講…相間何太急

這裡所要介紹的遊戲是改編自 香港 網站上「機靈金幣」的遊戲。在下圖中，有三隻雞與三隻鴨排成一列，中間沒有空格，而且左邊三隻為雞，右邊三隻為鴨。每次只能抓取相鄰的兩隻，並將牠們移動到其他相鄰的兩個空格上，不可以交換雞與鴨的左右次序。當三隻雞、鴨（即三隻雞與三隻鴨）相鄰地排成一排，而且雞與鴨剛好相間（雞與鴨相鄰）時，完成遊戲：



要完成三對雞、鴨相間的排列並不困難，我們的要求是：最少可以在多少次的抓取內完成它。經過練習之後，相信讀者可以找到三次的抓取方法。這裡把抓取遊戲延伸為

當雞與鴨改為六對時，也就是說，有 6 隻雞與 6 隻鴨排成一列，任兩隻中間沒有空格，而且左邊 6 隻為雞、右邊 6 隻為鴨，至少需要幾次的抓取，方能讓這 12 隻雞與鴨完全相鄰，而且雞與鴨相間。



從比較少的對數嘗試起，是一個可行的方法；從少隻雞鴨的抓取中累積經驗或者看出策略，是進行數學思考相當重要的步驟。

師大數學系 李曉玫 同學針對六對雞、鴨情形提出 7 次的抓取方法，如下圖所示：

她也預期這是最少次的抓取方法，並給n對雞、鴨的一般情形提出最少抓取次數的猜測如下：

①當$n=1$時，0 次（雞與鴨已經相鄰且相間）。

②當$n=2$時，無法完成。

③當$n=4k+2$（即$n=6,10,14,\cdots$）時，至少需要$n+1$次。

④當n不是上述情形時，都是n次。

以上的數據只是臆測，需要透過數學給予嚴密的證明，才算正確的答案。

趣談數學

算幾大戰…時間與智慧的累積

在時間長河的緩慢流動與人類智慧的加速累積下，很多重要的數學定理一再地被挖掘與找到各種不同型式的證明方法。幾何學的「勾股定理」與代數學的「質數有無窮多個」就是經典的兩個代表。在十九世紀初，高斯曾對數論裡的一個定理，現稱為高斯互反定理，一連給了五種不同的證明。

中學的「算幾不等式」、「柯西不等式」與「正、餘弦定理」也是數學愛好者尋找各種不同證明方法的好題材，甚至有些證明方法大同小異或者重複地被提出來。

吳建生老師與張海潮教授對算幾不等式討論出一種簡單的證明方法，介紹如下：

給定任意 n 個正數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，它們的算術平均數

$$\mu = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

大於或等於它們的幾何平均數

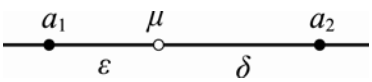
$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\ ,$$

而且等號成立的條件為 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 這 n 個數中，當每一個數都跟算術平均數 μ 相等時，容易得到

$$\mu = g\ .$$

另外，在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 這 n 個數中，當有一個比算術平均數 μ 小時，代表至少有一數比 μ 大，設比 μ 小的數為 a_1，比 μ 大的數為 a_2，並令它們與 μ 的差分別為 ε 與 δ，如下圖所示：



不妨假設 $\varepsilon \le \delta$，此時造 n 個新的正數如下：

$$A_1 = a_1 + \varepsilon, A_2 = a_2 - \varepsilon, A_3 = a_3, A_4 = a_4, \cdots, A_n = a_n\ .$$

這新造的n個數有以下的性質：

①它們的算術平均數也是μ：

因為從第三項起都一樣，又

$$A_1 + A_2 = (a_1 + \varepsilon) + (a_2 - \varepsilon) = a_1 + a_2 ,$$

所以算術平均數也是μ。

②它們的幾何平均數g_1比原來的幾何平均數g大：

因為從第三項起都一樣，所以只需比較前兩項的乘積即可。由

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= (a_1 + \varepsilon)(a_2 - \varepsilon) \\ &= a_1a_2 + \varepsilon(a_2 - a_1 - \varepsilon) \\ &= a_1a_2 + \varepsilon\delta > a_1a_2 . \end{aligned}$$

知$g_1 > g$。

如果把上述過程稱為一次操作，那麼繼續操作下去，我們每回得到的算術平均數都是μ，而幾何平均數$g_1, g_2, g_3, \cdots$會滿足

$$\cdots > g_3 > g_2 > g_1 > g \ .$$

但是，至多操作n次，就會讓每個數都調整成μ，即此時的幾何平均數為μ，又

$$\mu > \cdots > g_3 > g_2 > g_1 > g \ .$$

因此，在$a_1, a_2, \cdots, a_n$這n個數中，當有一個比算術平均數μ小時，我們有

$$\mu > g \ .$$

亂點鴛鴦譜…圓圈數

每個人都有兩隻手，在亂點鴛鴦譜的活動中，每人的每一隻手都恰與另一隻手（可以是自己的另一隻手或他人的手）握住。這時所有人的手交錯揪成一團，但是仔細辨識，還是可以區分哪幾個人是相連在一塊的，這些相連在一塊的人剛好圍成一個圓圈。最小的圓圈就是自己的兩隻手握在一起，再來就是兩個人的兩隻手互相握在一起，形成兩個人的圓圈，…。

如果只有三個人，那麼圍出的圓圈數之期望值是多少呢？

這道問題也可以抽象為：隨手取出 n 條線，共計有 $2n$ 個端點，首先將兩個端點綁在一塊，再將另兩個端點綁在一塊，如此進行下去，把最後的兩個端點也綁在一塊。此時，這 n 條直線會圍成數個圓圈；令 E_n 代表所結圓圈數的期望值，

(1) 求 E_1 的值。

(2) 證明 E_n 滿足遞迴關係

$$E_n = E_{n-1} + \frac{1}{2n-1}\ .$$

(3) 求 E_2, E_3, E_4 的值。

我們分析如下：

(1) 當 1 條繩子時，剛好圍成一個圓圈，即 $E_1 = 1$。

(2) 在 n 條繩子的情況：

①第一次選取的兩點剛好是同一條繩子的端點之機率為 $\dfrac{n}{C_2^{2n}} = \dfrac{n}{\frac{(2n)(2n-1)}{2}} = \dfrac{1}{2n-1}$，

此時所圍成的圓圈數為 $1 + E_{n-1}$。

②第一次選取的兩點剛好是不同條繩子的端點之機率為$1-\dfrac{1}{2n-1}=\dfrac{2n-2}{2n-1}$，

此時所圍成的圓圈數為 E_{n-1} 。

綜合 ①與 ②，我們有

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2n-1}\times\left(1+E_{n-1}\right)+\frac{2n-2}{2n-1}\times E_{n-1} \\ &= E_{n-1}+\frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

(3) 利用 $E_1=1$及遞迴關係

$$E_n = E_{n-1}+\frac{1}{2n-1},$$

我們得

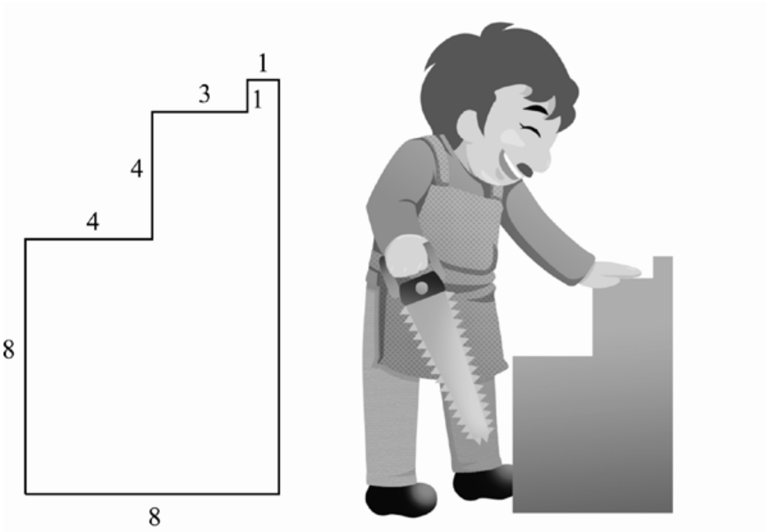
$$E_2 = E_1+\frac{1}{2\cdot 2-1}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\ ;$$

$$E_3 = E_2+\frac{1}{2\cdot 3-1}=\frac{4}{3}+\frac{1}{5}=\frac{23}{15}\ ;$$

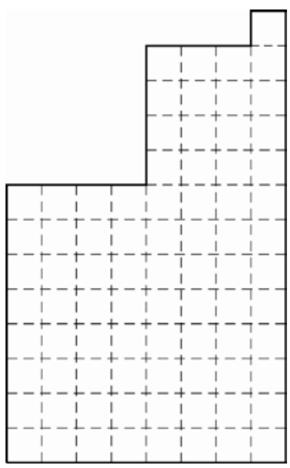
$$E_4 = E_3+\frac{1}{2\cdot 4-1}=\frac{23}{15}+\frac{1}{7}=\frac{176}{105}\ .$$

鋸木為方…如何拼出正方形

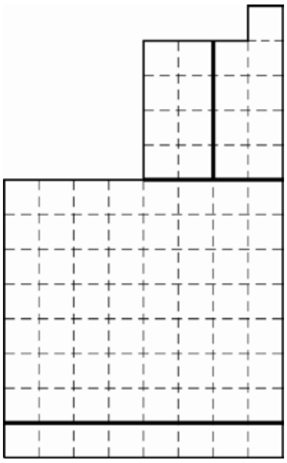
建中九十年度推甄科學能力試題的第十五題，是一道益智遊戲題，大意是說：木匠有一塊木板，他想沿著虛線將它鋸成若干塊，然後拼成一張正方形的桌面。鋸成的塊數越少，表示使用的方法越好，最棒的鋸法是幾塊呢？

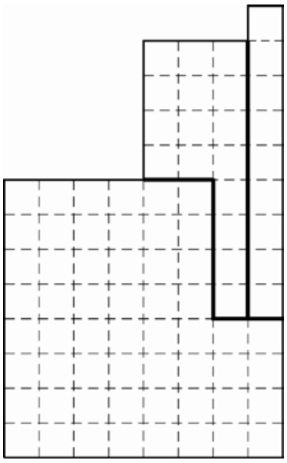


這問題有許多種不同的鋸法，找出自己的鋸法。



以下提供兩種鋸法，試著拼看看：

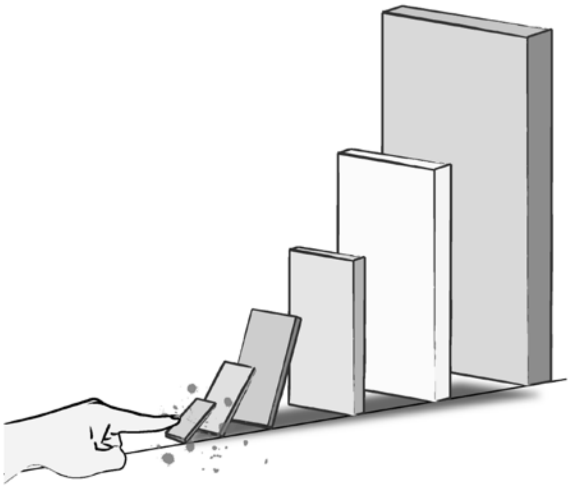




這兩種方法都是昌爸工作坊的方法，其中的第二種方法是 臺北市 和平高中 林慶達 老師提供的，三塊完成，但需要鋸四次；第一種方法可以鋸三次完成，但會有四塊。

多米諾骨牌效應…牽一髮而動全身

根據研究：每一張骨牌倒下時能推倒一張 1.5 倍體積的骨牌。英國 哥倫比亞大學物理學家 懷特海德 依據這個原理，製作了一組骨牌，第一張重 1 公克最輕，以後每張重量擴大為前一張的 1.5 倍，把這套骨牌按適當間距排好，輕輕推倒第一張，必然會波及到下一張及推倒以後的骨牌。



根據萬有引力定律測得：地球質量為 5.976×10^{27} 公克，試問：懷特海德 所排的骨牌中，第幾張的重量會比地球還重？

多米諾骨牌效應常指一系列的連鎖反應，即「牽一髮而動全身」，類似的情況有蝴蝶效應，蝴蝶效應起源於氣象學家 洛倫茨 所提出的一篇名叫「亞馬遜雨林的一隻蝴蝶拍一下翅膀會不會在 德州 引起龍捲風？」的論文。

設第 n 張的重量會比地球還重，根據題意可得

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\geq 5.976\times10^{27}\ .$$

將兩邊取對數，得

$$(\log3-\log2)(n-1)\geq 27+\log5.976\ .$$

將對數表的數據 $\log2=0.3010$， $\log3=0.4771$， $\log5.976=0.7764$ 代入，得

$$(0.4771-0.3010)(n-1)\geq 0.7764+27\ ,$$

解得

$$n-1\geq 157.7308\cdots,$$

即第 159 張的重量會比地球還重。

一道TRML試題的解析

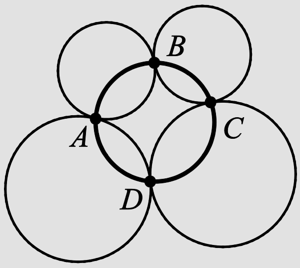
林恆理／臺北市立大安高工

日前，學校同事向我詢問一道 TRML（臺灣區高中數學競賽）的試題，他覺得答案有錯，而且覺得為什麼這個圓半徑是個定值？題目如下：

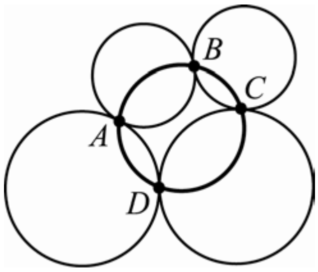
2003TRML 接力賽：

如右圖，四個圓相互切於四個點 A,B,C,D ，上兩圓半徑為 4，下兩圓半徑為 6，此四個切點會落在一個半徑為 r 的圓上，試求 r 之值。

參考答案： $4\sqrt{6}$



這個題目的條件非常簡潔，結果卻非常漂亮。我們透過 GeoGebra 的動態模擬，確實發現無論四個圓如何移動（如圖一），四個切點一定共圓，而且這個圓面積為定值 24π ，所以答案應為 $2\sqrt{6}$ 。於是著手開始進行這個題目的研究。



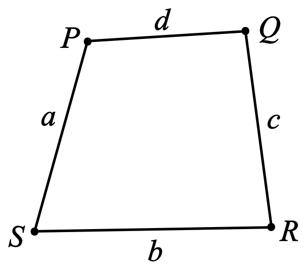
《圖一》

在證明的過程中需要一個定理，就是 Bretschneider 在 1842 年提出的「四邊形面積公式」，其內容如下：

如右圖，若四邊形 $PQRS$ 的邊長為 a,b,c,d ，

令 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ ，Δ 為此四邊形的面積，則

$$\Delta^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\times\cos^2\left(\frac{\angle S+\angle Q}{2}\right)$$ 。



證明的過程請見 http://scicomp.math.ntu.edu.tw/calculus/question_17.php 或蔡聰明的《數學的發現趣談》(2002)。

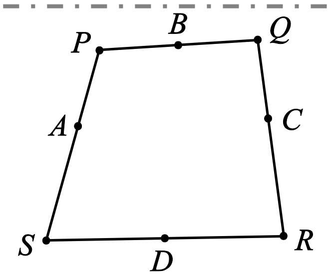
筆者將題目重新改寫如下：

如右圖，有一四邊形 $PQRS$， A,B,C,D 分別在四個邊上，

其中 $\overline{SA}=\overline{SD}=\overline{RD}=\overline{RC}=6$ ， $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{QB}=\overline{QC}=4$ ，試證

(1) A,B,C,D 四點共圓。

(2) 承上，此圓的半徑為 $2\sqrt{6}$ 。



(1) 連接 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}$（如圖二），令 $\angle PAB=x_1,\angle QBC=x_2,\angle RCD=x_3,\angle SDA=x_4$,

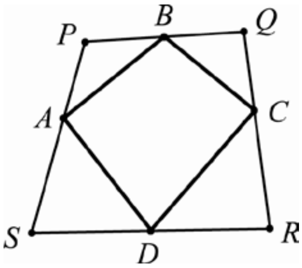
因為△PAB 為等腰三角形，所以 $\angle P=\pi-2x_1$ ，

同理， $\angle Q=\pi-2x_2,\angle R=\pi-2x_3,\angle S=\pi-2x_4$ 。

因為四邊形內角和為 2π ，

所以 $\angle P+\angle Q+\angle R+\angle S=4\pi-2\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)=2\pi$ ，

得 $x_1+x_2+x_3+x_4=\pi$ 。



《圖二》

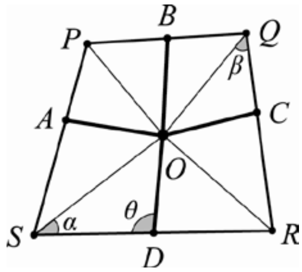
由於 $\angle ABC=\pi-x_1-x_2,\angle ADC=\pi-x_3-x_4$ ，

所以 $\angle ABC+\angle ADC=2\pi-x_1-x_2-x_3-x_4=\pi$ ，

故 A,B,C,D 四點共圓。

(2) 令 A,B,C,D 共圓的圓心為 O，半徑為 r，連接 $\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC},\overline{OD},\overline{OP},\overline{OQ},\overline{OR},\overline{OS}$ ，

令 $\angle ODS=\theta,\angle OSD=\alpha,\angle OQC=\beta$（如圖三），$\Delta$ 為 $PQRS$ 的面積。



《圖三》

2.1 因為△$OSD\cong$△OSA（SSS 全等），

△OSD 的面積為 $\frac{1}{2}\times6\times r\sin\theta=3r\sin\theta$ ，

故四邊形 $OASD$ 的面積為 $6r\sin\theta$ ，

同理，四邊形 $ODRC$ 的面積為 $6r\sin\theta$ ，

四邊形 $OCQB$ 的面積為 $4r\sin\theta$ ，

四邊形 $OBPA$ 的面積為 $4r\sin\theta$ ，

因此，$\Delta=6r\sin\theta\times2+4r\sin\theta\times2=20r\sin\theta$ 。

2.2 考慮 $PQRS$ 的面積，由「四邊形面積公式」，$s=\dfrac{8+10+10+12}{2}=20$ ，

$$\begin{aligned}\Delta^2&=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\times\cos^2\left(\frac{\angle S+\angle Q}{2}\right)\\&=12\times10\times10\times8-12\times10\times10\times8\times\cos^2(\alpha+\beta)\\&=9600\left(1-\cos^2(\alpha+\beta)\right)\\&=9600\sin^2(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

因此，$\Delta=40\sqrt{6}\left|\sin(\alpha+\beta)\right|=40\sqrt{6}\sin(\alpha+\beta)$（$\because 0<\alpha+\beta<\pi$），

在△OSD 中，由餘弦定理，$\overline{OS}=\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}$,

$$\cos\alpha=\frac{r^2+36-12r\cos\theta+36-r^2}{12\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}}=\frac{6-r\cos\theta}{\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}}\ ,$$

再由正弦定理，$\sin\alpha=\dfrac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}}$ 。

同理，在$\triangle OCQ$ 中，$\cos\beta=\dfrac{4-r\cos\theta}{\sqrt{r^2+16-8r\cos\theta}},\sin\beta=\dfrac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2+16-8r\cos\theta}}$ ，

因此，$\Delta=40\sqrt{6}\sin(\alpha+\beta)=40\sqrt{6}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$$=\frac{80\sqrt{6}r\sin\theta(5-r\cos\theta)}{\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}\times\sqrt{r^2+16-8r\cos\theta}}\text{ 。}$$

2.3 由 2.1 和 2.2 可得$\Delta=20r\sin\theta=\dfrac{80\sqrt{6}r\sin\theta(5-r\cos\theta)}{\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}\times\sqrt{r^2+16-8r\cos\theta}}$

$$\Rightarrow 1=\frac{4\sqrt{6}(5-r\cos\theta)}{\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}\times\sqrt{r^2+16-8r\cos\theta}}\text{ ，}$$

兩邊同時平方後，$(r^2+36-12r\cos\theta)(r^2+16-8r\cos\theta)=96(5-r\cos\theta)^2$ ，

展開後，$r^4+52r^2-20r^3\cos\theta-480r\cos\theta+96r^2\cos^2\theta+576$

$$=2400-960r\cos\theta+96r^2\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow r^4+52r^2-1824=20r^3\cos\theta-480r\cos\theta$$

$$\Rightarrow (r^2-24)(r^2+76)=20r\cos\theta(r^2-24)$$

$\Rightarrow r^2-24=0$ 或 $r^2+76=20r\cos\theta$ 。

2.3.1 當$r^2+76=20r\cos\theta$時，由 2.3 的第二行可得

$$(5-r\cos\theta)>0\Rightarrow\left(5-\frac{r^2+76}{20}\right)>0\Rightarrow r^2<24\text{ ，}$$

又$\overline{OS}=\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}>0\Rightarrow r^2+36-12\cdot\dfrac{r^2+76}{20}>0\Rightarrow r^2>24$（$\rightarrow\leftarrow$）。

2.3.2 當$r^2=24$時，$r=2\sqrt{6}$ ，故得證。

整個證明過程中，雖然用到四個未知數，但是α,β 可用r,θ表示，再利用兩種面積的算法，得到r,θ的恆等式，最後很神奇的分解出只有 r 的因式，才得到答案。這個題目放在接力賽中，個人認為不太可能用上述的方法解出來（除非還有更簡潔的作法），但是如果學生知道用特殊化的方法，就是假定這四邊形為等腰梯形，應該是有可能在時間內解出來。

一題多解數學思考的呈現

鄭金樹 洪瑞英／臺北市立中山女高

題目：已知α為銳角，$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，求$\sin\alpha$之值。

看似單純的題目，透過學生的思考呈現，至少有十種不同的解法，讓身為教師的我們，再一次感受到學生的無窮潛力。以下為學生呈現的十種解法！

〔解法一〕

因為α為銳角，$-\dfrac{\pi}{6}<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，所以$\alpha-\dfrac{\pi}{6}$為銳角，可得$\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，

$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，得$\cos\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha-\dfrac{6}{5}$，

代入$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow 100\sin^2\alpha-60\sqrt{3}\sin\alpha+11=0\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{60\sqrt{3}\pm 80}{200}=\dfrac{3\sqrt{3}\pm 4}{10}$，

因為$\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\alpha>\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，所以取$\sin\alpha=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$。

說明 **學生直觀上利用和角公式展開，將所得關係式代入平方關係解方程式。**

〔解法二〕

因為α為銳角，$-\dfrac{\pi}{6}<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，所以$\alpha-\dfrac{\pi}{6}$為銳角，可得$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$，

$$\begin{cases}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{3}{5}\cdots\cdots①\\ \cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\cdots\cdots②\end{cases}$$

將 ①$\times\sqrt{3}+$②得$2\sin\alpha=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$。

說明 **求出$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$與$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$之值，再透過其和角公式展開，解聯立方程式即可得所求之值。**

〔解法三〕

因為α為銳角，$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，所以$\alpha-\frac{\pi}{6}$為銳角，可得$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$，

$$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{4}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{4+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3}\ ,$$

因為α為銳角，所以$\sin\alpha=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$。

說明　因為正弦函數的和角公式展開有正弦、餘弦兩種函數，藉由角度的決定將之轉成正切函數，利用正切函數的和角公式展開，解正切值，再進而求出正弦值。

〔解法四〕

因為α為銳角，$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，所以$\alpha-\frac{\pi}{6}$為銳角，

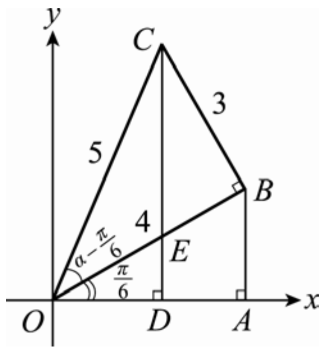
$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}\ 。$$

說明　加上一角$\frac{\pi}{6}$，再利用和角公式展開，立即可得所求之值，雖是一樣利用和角公式，但此想法較漂亮，也許我們可以多提醒學生逆向的思考。

〔解法五〕

因為α為銳角，$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，所以$\alpha-\frac{\pi}{6}$為銳角，

如圖可知$\triangle CEB\sim\triangle OED$



$$\Rightarrow\overline{CE}=3\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3},\overline{BE}=3\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

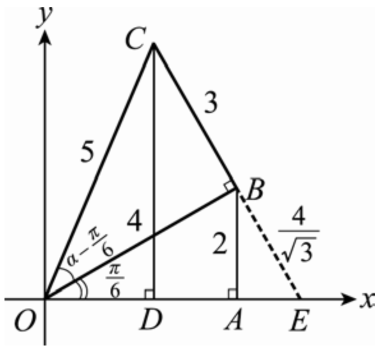
$$\overline{OE}=4-\sqrt{3},\overline{ED}=\frac{1}{2}\overline{OE}=\frac{4-\sqrt{3}}{2}\ ,$$

所以$\overline{CD}=\overline{CE}+\overline{ED}=2\sqrt{3}+\frac{4-\sqrt{3}}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\frac{4+3\sqrt{3}}{2}}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}\ 。$$

說明　此解法是以幾何概念為基礎，利用圖形解之，其概念較接近國中所習數學。

〔解法六〕



如圖，延長 $\overline{BC}$ 交 x 軸於 E 點，

由圖可知，$\angle ABE=\dfrac{\pi}{6},\overline{AB}=2\Rightarrow\overline{BE}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，

所以 $\overline{CD}=\overline{CE}\times\cos\dfrac{\pi}{6}=\left(3+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{\overline{CD}}{5}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$。

說明 延長線使得圖形單純化，所求更簡單、明瞭。此種想法的學生或許比解法五的學生更有創意！

〔解法七〕

因為 α 為銳角，$-\dfrac{\pi}{6}<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，又 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，所以 $\alpha-\dfrac{\pi}{6}$ 為銳角，可得 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$，

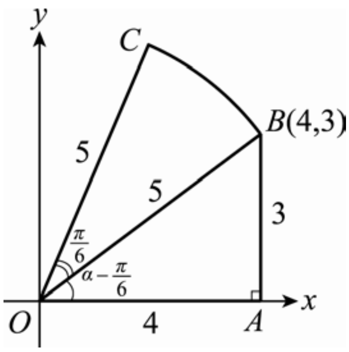
$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\Rightarrow\cos\alpha+i\sin\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right),$$

對照虛部可得 $\sin\alpha=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$。

說明 漂亮地利用二複數之極式乘除，其幅角加減的特性，即可得所求。

〔解法八〕

因為 α 為銳角，$-\dfrac{\pi}{6}<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，又 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，所以 $\alpha-\dfrac{\pi}{6}$ 為銳角，



如圖，將 $\overline{OB}$ 逆時針旋轉 $\dfrac{\pi}{6}$ 至 $\overline{OC}$，

利用二複數極式相乘，

$$(4+3i)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}-3}{2}+i\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right),$$

得出 C 點坐標 $\left(\dfrac{4\sqrt{3}-3}{2},\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以 $\sin\alpha=\dfrac{\frac{4+3\sqrt{3}}{2}}{5}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$。

說明 利用圖形旋轉、複數相乘來解題，此種想法是對幾何圖象較強的學生容易呈現並使用的學習結果。由此想法對現行 99 課綱高二自然組學生，可衍生出利用旋轉矩陣的想法。

〔解法九〕

因為α為銳角，$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，所以$\alpha-\frac{\pi}{6}$為銳角，

將$\alpha-\frac{\pi}{6}$逆時針旋轉$\frac{\pi}{6}$得角α，利用旋轉矩陣可得

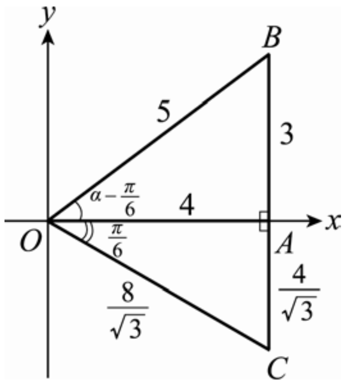
$$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\\ \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$$ 。

說明　由解法八，既為利用旋轉的概念，以矩陣處理而得解法九。

〔解法十〕

因為α為銳角，$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，所以$\alpha-\frac{\pi}{6}$為銳角，

如圖，$\angle BOC=\alpha$，



利用餘弦定理求出$\cos\alpha=\dfrac{5^2+\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(3+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\times5\times\frac{8}{\sqrt{3}}}=\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$，

得出$\sin\alpha=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ 。

說明　與解法八的構思相似，進而利用餘弦定理解題。

心得 》

大多數的學生會從解法一、二切入，少數學生會想到其他解法，其中解法六、七、八、九實為一致的，皆是利用旋轉的概念，少數思考較靈活的學生能從此角度切入。從教學觀點視之，也許正是我們教學上可以多努力的地方。此題不失為好題，因為學生不難找到思考的出路，而教師亦能透過學生之解題過程更加了解學生思考的觸角與深度。

教師若能適時地引入一題多解的解法與學生分享討論，必能激盪出意想不到的火花，如解法十，不論教師或學生，透過此種互動思考過程，較不會只在框框中思考，跳脫框框，宏觀的看數學，更能體會數學之美。

鴿籠原理

江慶昱／臺中市衛道中學退休教師

※ 楔子 》

十幾年前，我有一個數學向來不錯的學生，他參加數學系甄試，據說當時教授問他：為什麼$\frac{7}{23}$一定可以化為循環小數？這基本的數學原理課本不提、考試不考，老師當然不教，於是他被打敗了！

那些年，有一本熱賣書籍叫《聖經密碼》，作者 Michael Drosnin 把某一版本的聖經用電腦每隔幾個字母選取一個後排成一列，叫做等距密碼；結果發現許多諸如「拉賓遇刺」這樣的句子。Drosnin 在這本書裡宣稱：上帝在聖經裡預警了幾千年後的災難。言之鑿鑿、似有所本，真教人害怕。

培根 說：所謂預言家，就是事後能解釋為什麼預言沒有實現。那麼，到底所謂《聖經密碼》是怎麼一回事？

※ 鴿籠原理 》

我們用一個淺顯的釋例說明鴿籠原理：七隻鴿子飛回鴿籠，如果鴿籠只有六個，則會有一個籠子裡至少有兩隻鴿子。

鴿籠原理也稱為抽屜原理或 Dirichlet 原理（P.G.L.Dirichlet 1805~1859），比較數學化的說法是：若把$kn+1$個物件放入n個盒子，那麼一定有一個盒子中至少有$k+1$個物件。

我們先看第一個故事：為什麼$\frac{7}{23}$一定可以化為循環小數？

根據 **除法原理：被除數＝除數×商＋餘數**，因為餘數一定小於除數，所以把 7 除以 23，多除幾次，就 23 次吧！假如餘數都不相同，則餘數是$1,2,3,\cdots,22$；但是鴿籠原理說，這是不可能的，其中一定至少有兩個餘數相同（就是說，現在有 23 隻鴿子飛回 22 個籠子），餘數相同的地方就產生循環！因此，$\frac{7}{23}$一定可以化為循環小數。

如果我們「認定」有限小數也是一種循環小數，則我們可以說所有的分數都是循環小數，所有的循環小數都是分數。

※ 鴿籠原理的推廣 》

第二個故事跟 Ramsey 定理有關。在平面上隨便畫 5 個點，任 3 點不共線，則其中一定會有 4 個點形成一凸四邊形，這是 匈牙利 數學家 Paul Erdos 小時候玩的遊戲。1935 年，他和 George Szekeres 證明了只要點數夠多，就可以找到任意的凸n邊形，並且發現他的定理只不過是 Ramsey 定理的特例。

Ramsey 定理說：不可能完全無序。意思就是說，只要點數夠多，我們就可以在裡面「看出」

有意義的圖像，所以你可以在夜空中看到各種星座。同理，叫一隻猩猩在打字機上亂打，只要字母夠長，你可以找到有意義的句子。

Drosnin 用電腦作所謂等距密碼，其實道理是一樣的。換句話說，你用其他書也可以找到「密碼」，例如《莎士比亞全集》或《白鯨記》。

※ 何謂 Ramsey 定理？ 》

集合 S 的子集 T 若有 m 個元素，稱 T 為 S 的 $m-$子集。將 S 中的 $m-$子集分為 $S_1,S_2,\cdots,S_t$ 等互不相交的 t 類，任意給定不小於 m 的 t 個整數 $q_1,q_2,\cdots,q_t$ ，一定可以找到一個最小整數 $N(q_1,q_2,\cdots,q_t;m)$ ，只要 S 的元素個數 $n\ge N(q_1,q_2,\cdots,q_t;m)$ ，則 S 中必定有一子集 T ，其元素個數為某一個 q_k ，且所有 T 的 $m-$子集都屬於 S_k 。

拉姆西（Frank Plumpton Ramsey 1903~1930）是一個非常聰明的英國數學家，不幸年輕早逝。Ramsey 定理的數學形式很抽象，他本人倒是舉了一個有名的例子：世界上任意六個人中，總有三個人相互認識，或互相皆不認識。（習作 6）

※ 無用之用 》

數學有什麼用？這是許多人的疑問；另一方面，許多數學營喜歡把鴿籠原理當作一個主題。這兩者之間的平衡點在哪裡？我想舉一個故事，也許值得參考。

1999 年，我當數學科召集人，我拿「建中通訊徵答（中學生通訊解題第三期 88301）」給學生做，當作校內有獎徵答。其中有一題如下：坐標平面上有相異的 10 個點，其中沒有 3 點在同一條直線上，每一點均為格子點，試證明這 10 個點兩兩之間的連接線段中，必有一個異於這 10 個點的格子點。（點 A 為格子點的意思，就是點 A 坐標 (m,n) 中， m,n 均為整數）

因為 10 個點坐標均為格子點，根據整數的奇偶性來分類，可分為 (奇, 偶) 、(偶, 奇) 、(奇, 奇) 、(偶, 偶) 四個情形，故必有兩個頂點的坐標其奇偶性一樣；設這兩個點為 A,B ，則線段 $\overline{AB}$ 的中點 M 必為格子點，因為 10 點中任 3 點不共線，所以 M 必異於這 10 點。

這一題有兩個學生做對，其中一個是高一的學生，後來進了臺大醫學系。我的意思是說：所謂「無用」的數學中所表現的「數學成熟度」，或者說「抽象能力」，其實是人類智力的重要因素。鴿籠原理有許多極具挑戰性的習作，因此也受到一些數學營的青睞。

※ 後記 》

李國偉先生在《一條畫不清的界線》一書中闡述：在科學與偽科學之間畫一條清楚的界線不是一件容易的事。如《聖經密碼》一書是偽科學，可由 Ramsey 定理破解。

Ramsey 定理是鴿籠原理的推廣，這是組合學的範疇。可別小看了組合學，李國偉先生先專攻數理邏輯，後來轉攻組合學，使臺灣成為一個堅強的組合學研究團隊而揚名國際。
相關網站 http://combinatorics.math.sinica.edu.tw/comb_act/

※ 習作 》

1. 將 9 個正整數 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 重排成為 $b_1,b_2,\cdots,b_9$ ，則 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_9-b_9)$ 必為偶數。（數學的發現趣談，P.28）

2. 任給 7 個相異整數，求證其中必有兩數其和或差是 10 的倍數。

3. 在邊長為 1 的正方形內任取 5 個點，試證至少有兩個點的距離小於或等於 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

4. 從 1~100 的正整數中任取 51 個數，則其中會有 1 個數是另外 1 個數的倍數（然後改成從 1 到 $2n$ 的正整數中任取 $n+1$ 個數）。

5. 有一袋糖果隨意分給 15 個小孩，每個小孩至少分到 1 個，證明其中必有一些小孩所得的糖果數之和為 15 的倍數。（通訊解題）

6. 在一圓上取 6 個點，在每兩點間作連線段，如果把每個線段任意地塗成咖啡色或藍色，則有一個三角形的三邊同色。世界上任意六個人中，總有三個人相互認識，或互相皆不認識。

7. Paul Erdos 1913~1996，在前 n^2+1 個自然數中，至少必定有 $n+1$ 個是有序的（由小到大或由大到小），例如把 $1,2,3,4,5$ 作任意重排，則其中至少有 3 個數是遞增或遞減，如排成 $1,4,5,3,2$，則 $1,4,5$ 是遞增。

8. 設 m 是任一偶數， m 個整數 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 滿足 $1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_m\le ma_1+a_2+\cdots+a_m=2m$ ，試證：一定可以把這 m 個數分成兩組，使得每一組的和都是 m 。（抽屜原則及其他，P.66）

9. 對於任一實數 r ，存在一分數 $\frac{p}{q}$ ，使得 $\left|r-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$ （P.G.L.Dirichlet 原理）。

Sol

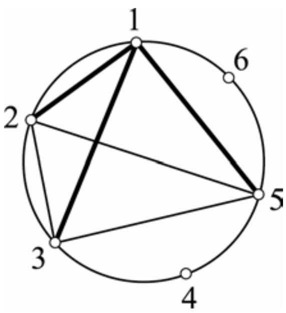
1. 如果 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_9-b_9)$ 是奇數，則對 $i=1,\cdots,9, a_i-b_i$ 是奇數，則 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 中奇數與偶數個數一樣多，矛盾！

2. 考慮 $10k,\{10k+1,10k-1\},\cdots,\{10k+5,10k-5\}$ ，6 個「巢」則至少有兩個數在同一巢。

3. 把原正方形切成 4 個全等的小正方形。

4. 1~100 之間奇數與偶數各有 50 個，把它們寫成 $a_i=2^m b_i$，其中若 a_i 是奇數，則 $m=0$；又 b_i 是 $1,3,5,\cdots,99$ 裡面的數，今任取 51 個數，由鴿籠原理，存在兩個數長成 $2^m b_k, 2^n b_k$ 的樣子，亦即此兩數有倍數關係。

5. 假設 15 個小孩分得的糖果數為 $x_i, i=1,2,\cdots,15$ ，
令 $f(k)=x_1+x_2+\cdots+x_k$ ，考慮同餘類 $[1],[2],\cdots,[14]$（如果某一 $f(k)$ 落在 $[0]$ 內，則得證）；由鴿籠原理，存在某兩個數 m,n ， $f(m),f(n)$ 落在同一個籠子內，即 $f(m)\equiv f(n)(\bmod 15)$ ，假設 $m>n$ ，則 $x_{n+1}+\cdots+x_m$ 是 15 的倍數，得證。



6. 考慮由點 1 與其他 5 點所連之線段，因為有 5 個線段，由鴿籠原理至少會有 3 個線段同色（圖中之粗線段），假設是 1-2，1-3，1-5；假設任 3 點所構成三角形的三邊皆不同色，所以 2-3 為藍色；同理，3-5 為藍色，則在考慮 2-5 時得到矛盾！

7. 抽屜原理及其他，凡異出版社，P.14

8. 抽屜原理及其他，凡異出版社，P.66

9. 數學探奇，P.87

參考資料

1. 抽屜原理及其他，凡異出版社，P.97
2. 黃光明，組合學漫談，數學傳播季刊，第 4 期第 1 卷
3. 數學傳播季刊，第 4 期第 14 卷，P.100
4. 棋盤染色問題與二部 Ramsey 數，數學傳播季刊，第 3 期第 21 卷，P.63
5. 張鎮華，幸福結局問題—鴿籠原理與拉姆西定理，數學傳播季刊，第 2 期第 28 卷，P.28
6. 通過問題學解題，九章出版社，P.97
7. 米蓋爾・德・古斯曼，數學探奇，P.87
8. 不只一點瘋狂，P.109
9. 蔡聰明，數學的發現趣談，P.28
10. 科學教育月刊，第 232 期
11. 李國偉，一條畫不清的界線
12. 謝聰智，鴿籠原理 http://w3.math.sinica.edu.tw/media/media.jsp?voln=24
13. 宴會問題 $R(3,3)=6, R(4,4)=18, R(5,5)=?$
    http://www.sciencenews.org/sn_arc99/12_4_99/mathland.htm
14. 許志農，算術講義，http://math.ntnu.edu.tw/~maco/

Apollonius 問題—

兼談三條件決定圓(五)

趙文敏／臺灣師大數學系

⑩ 圓圓圓問題（續）

四、 圓$O_2(r_2)$與圓$O_3(r_3)$是位於圓$O_1(r_1)$內部且半徑不相等的一對外離圓（設 $r_1 > r_2 > r_3$），又圓心O_1 、O_2與O_3不共線。

《作圖法》

在此情形中，所求圓共有八個解（如圖 70 所示），依相切狀況分成四組。

第一組兩解：（如圖 71 所示）

兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切，與圓$O_2(r_2)$都內切，與圓$O_3(r_3)$都內切；

而且兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而都將圓$O_2(r_2)$與圓$O_3(r_3)$包在其內部（切點除外）。

第二組兩解：（如圖 72 所示）

兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切，與圓$O_2(r_2)$都內切，與圓$O_3(r_3)$都外切；

而且兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而都將圓$O_2(r_2)$包在其內部（切點除外）。

第三組兩解：（如圖 73 所示）

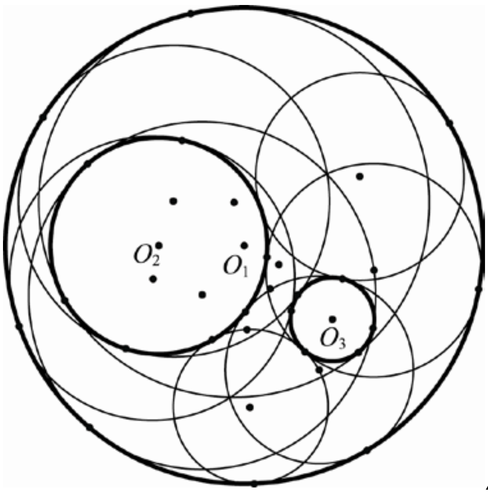
兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切，與圓$O_2(r_2)$都外切，與圓$O_3(r_3)$都內切；

而且兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而都將圓$O_3(r_3)$包在其內部（切點除外）。

第四組兩解：（如圖 74 所示）

兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切，與圓$O_2(r_2)$都外切，與圓$O_3(r_3)$都外切；

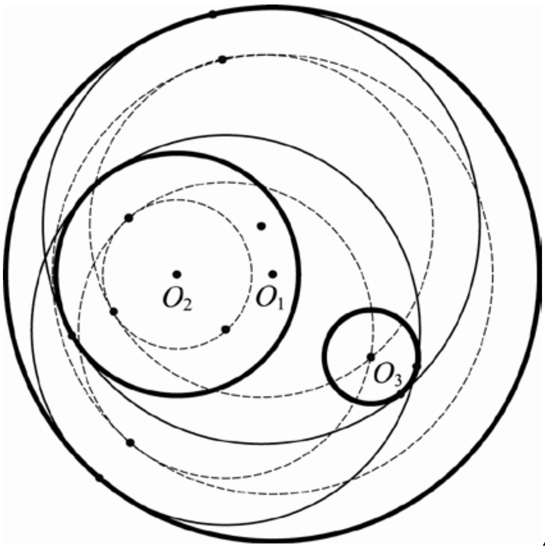
而且兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外）。



▲圖 70

＊ 第一組：與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$都內切的圓

1. 因為圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$為內離且半徑不相等；點O_3在圓$O_1(r_1-r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2-r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$的連心線上。所以，可仿照「點圓圓」問題第十種情形的作圖法（利用圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$的外相似中心），作出過點O_3且與$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$都內切的圓。依「點圓圓」問題第十種情形第一組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑增長r_3後為半徑作圓，即可得出與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$都內切的兩個圓。此兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而都將圓$O_2(r_2)$與圓$O_3(r_3)$包在其內部（切點除外）。



▲圖 71

《證明》

若一圓$X(t)$與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$都內切，又圓$X(t)$被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而將圓$O_2(r_2)$與圓$O_3(r_3)$都包在其內部（切點除外），則其圓心X必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1}=r_1-t\ ,\ \ \overline{XO_2}=t-r_2\ ,\ \ \overline{XO_3}=t-r_3\ \ .$$

消去t後得

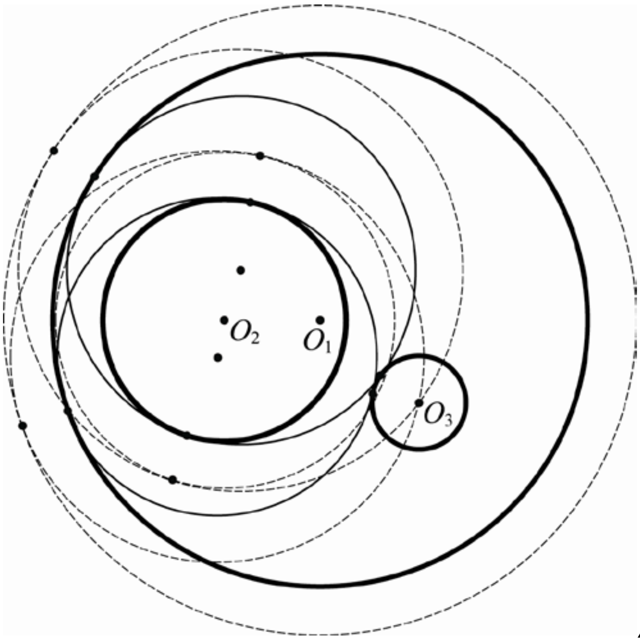
$$\overline{XO_1}+\overline{XO_3}=r_1-r_3\ ,\ \ \overline{XO_2}-\overline{XO_3}=-(r_2-r_3)\ \ .$$

由此可知：圓心X是橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$較靠近焦點O_2的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點X也是過點O_3且與$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$都內切之圓的圓心。

因為圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$內離且半徑不相等，點O_3在圓$O_1(r_1-r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2-r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$的連心線上。所以，橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$有四個交點。但因為前段所提的交點，只限定是雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$的其中一支與橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$的交點；所以，所得的交點只有兩點。

＊ 第二組：與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$內切而與圓$O_3(r_3)$外切的圓

1. 因為圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$內離且半徑不相等；點O_3在圓$O_1(r_1+r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2+r_3)$的外部，但不在圓$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$的連心線上。所以，可仿照「點圓圓」問題第十種情形的作圖法（利用圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$的外相似中心），作出過點O_3且與$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$都內切的圓。依「點圓圓」問題第十種情形第一組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第1點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑減短r_3後為半徑作圓，即可得出與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$內切而與圓$O_3(r_3)$外切的兩個圓。



▲圖 72

《證明》

若一圓$X(t)$與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$內切而與圓$O_3(r_3)$外切，又圓$X(t)$被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而將圓$O_2(r_2)$包在其內部（切點除外），則其圓心X必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1}=r_1-t\ ,\ \ \overline{XO_2}=t-r_2\ ,\ \ \overline{XO_3}=r_3+t\ \ .$$

消去t後得

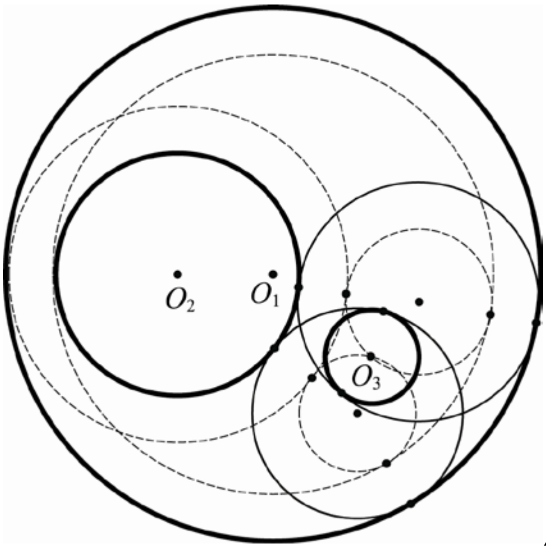
$$\overline{XO_1}+\overline{XO_3}=r_1+r_3\ ,\ \ \overline{XO_2}-\overline{XO_3}=-(r_2+r_3)\ \ .$$

由此可知：圓心X是橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$較靠近焦點O_2的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點X也是過點O_3且與$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$都內切之圓的圓心。

因為圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$內離且半徑不相等，點O_3在圓$O_1(r_1+r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2+r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$的連心線上。所以，橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$有四個交點。但因為前段所提的交點，只限定是雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$的其中一支與橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$的交點；所以，所得的交點只有兩點。

＊ 第三組：與圓$O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$內切而與圓$O_2(r_2)$外切的圓

1. 因為圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$相交於兩點或內切或內離，點O_3在圓$O_1(r_1-r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2+r_3)$的外部，但不在圓$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$的連心線上。所以，可仿照「點圓圓」問題第五、八、十等三種情形的作圖法（利用圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$的內相似中心），作出過點O_3且與$O_1(r_1-r_3)$內切而與$O_2(r_2+r_3)$外切的圓。依「點圓圓」問題第五、八、十等三種情形第二組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑增長r_3後為半徑作圓，即可得出與圓$O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$內切而與圓$O_2(r_2)$外切的兩個圓。



▲圖 73

《證明》

若一圓$X(t)$與圓$O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$內切而與圓$O_2(r_2)$外切，又圓$X(t)$被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而將圓$O_3(r_3)$包在其內部（切點除外），則其圓心X必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1}=r_1-t\ ,\ \ \overline{XO_2}=t+r_2\ ,\ \ \overline{XO_3}=t-r_3\ \ .$$

消去t後得

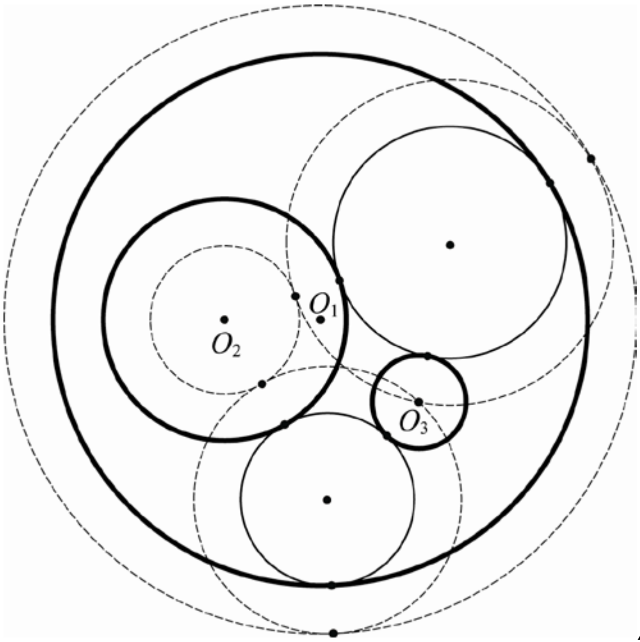
$$\overline{XO_1}+\overline{XO_3}=r_1-r_3\ ,\ \ \overline{XO_2}-\overline{XO_3}=r_2+r_3\ \ .$$

由此可知：圓心X是橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$較靠近焦點O_3的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點X也是過點O_3且與$O_1(r_1-r_3)$內切，與$O_2(r_2+r_3)$外切之圓的圓心。

因為圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$相交於兩點或內切或內離，點O_3在圓$O_1(r_1-r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2+r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$的連心線上。所以，橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$有四個交點。但因為前段所提的交點，只限定是雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$的其中一支與橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$的交點；所以，所得的交點只有兩點。

∗ 第四組：與圓$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$外切而與圓$O_1(r_1)$內切的圓

1. 因為圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$內離且半徑不相等，點O_3在圓$O_1(r_1+r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2-r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$的連心線上。所以，可仿照「點圓圓」問題第十種情形的作圖法（利用圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$的內相似中心），作出過點O_3且與圓$O_1(r_1+r_3)$內切而與圓$O_2(r_2-r_3)$外切的圓。依「點圓圓」問題第十種情形第二組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑減短r_3後為半徑作圓，即可得出與圓$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$外切而與圓$O_1(r_1)$內切的兩個圓。



▲圖 74

《證明》

若一圓$X(t)$與圓$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$外切而與圓$O_1(r_1)$內切，又圓$X(t)$被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），則其圓心X必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1}=r_1-t\ ,\ \ \overline{XO_2}=t+r_2\ ,\ \ \overline{XO_3}=t+r_3\ .$$

消去t後得

$$\overline{XO_1}+\overline{XO_3}=r_1+r_3\ ,\ \ \overline{XO_2}-\overline{XO_3}=r_2-r_3\ .$$

由此可知：圓心X是橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$較靠近焦點O_3的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點X也是過點O_3且與圓$O_1(r_1+r_3)$內切，與圓$O_2(r_2-r_3)$外切之圓的圓心。

因為圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$內離，點O_3在圓$O_1(r_1+r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2-r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$的連心線上。所以，橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$有四個交點。但因為前段所提的交點，只限定是雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$的其中一支與橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$的交點；所以，所得的交點只有兩點。

五、 圓$O_2(r_2)$位於圓$O_1(r_1)$內部，圓$O_3(r_3)$與圓$O_1(r_1)$內切又與圓$O_2(r_2)$外切，$r_1 > r_2$且$r_1 > r_3$；又圓心O_1，O_2與O_3不共線。

《作圖法》

在此情形中，所求圓共有四個解（如圖 75 所示），依相切狀況分成三組。有兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切、與圓$O_2(r_2)$都外切、與圓$O_3(r_3)$都外切（第四組圓）。

第一組一解：（如圖 76 所示）

此圓與圓$O_1(r_1)$內切，與圓$O_2(r_2)$內切，與圓$O_3(r_3)$內切；

而且此圓被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而都將圓$O_2(r_2)$與圓$O_3(r_3)$包在其內部（切點除外）。

第二組一解：（如圖 77 所示）

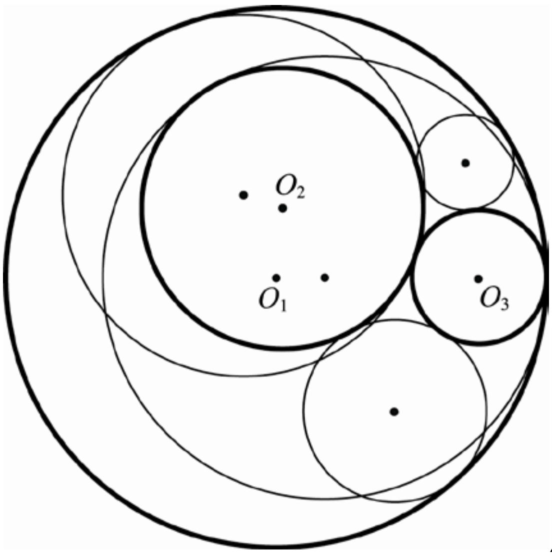
此圓與圓$O_1(r_1)$內切，與圓$O_2(r_2)$內切，與圓$O_3(r_3)$外切；

而且此圓被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而將圓$O_2(r_2)$包在其內部（切點除外）。

第四組兩解：（如圖 78 所示）

兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切，與圓$O_2(r_2)$都外切，與圓$O_3(r_3)$都外切；

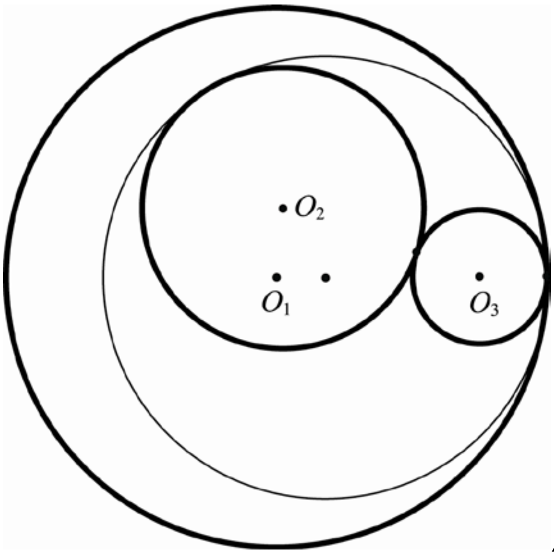
而且兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外）。



▲圖 75

＊ 第一組：與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$都內切的圓

1. 設圓$O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$內切的切點為點A_1，過點A_1與圓$O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$相切的共同切線為直線l_1，則直線l_1與圓$O_2(r_2)$不相交。因為圓心O_1，O_2與O_3不共線。所以，點A_1不在圓心O_2至直線l_1的垂直線上。於是，仿照「點線圓」問題第二種情形的作圖法，作出過點A_1且與直線l_1相切又與圓$O_2(r_2)$內切的圓。依「點線圓」問題第二種情形第二組圓作圖法的結果，此種圓共一解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作的圓與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$都內切。



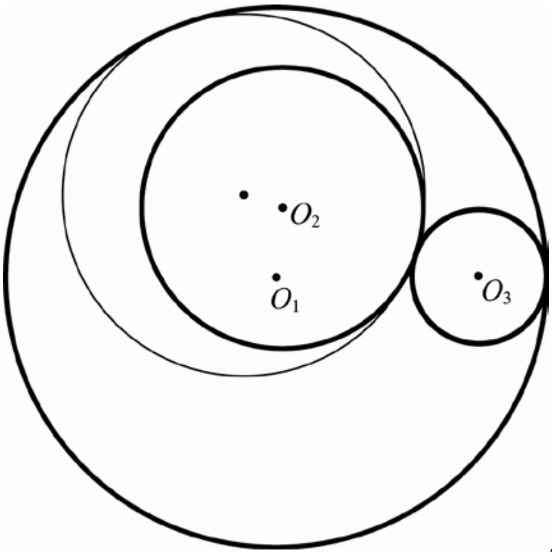
▲圖 76

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ 都內切，則因為圓 $O_2(r_2)$ 位於圓 $O_1(r_1)$ 內部而圓 $O_3(r_3)$ 與圓 $O_1(r_1)$ 內切又與圓 $O_2(r_2)$ 外切，所以，圓 X 被圓 $O_1(r_1)$ 包在其內部（切點除外），而且圓 X 將圓 $O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）。若圓 X 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點不是圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點 A_1，則當圓 X 被圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_1(r_1)$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有交點）；當圓 X 將圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點 A_1 在圓 X 的內部（因為此切點在圓 $O_3(r_3)$ 上）。於是，圓 $O_1(r_1)$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），也有些點在圓 X 的外部（因為圓 X 不能將圓 $O_1(r_1)$ 包在其內部），這與圓 X 、圓 $O_1(r_1)$ 相切的假設矛盾。因此，圓 X 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點就是圓 $O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$ 內切的切點 A_1，而且圓 X 與圓 $O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$ 的共同切線 l_1 相切於點 A_1。由此可知：圓 X 就是過點 A_1 且與直線 l_1 相切又與圓 $O_2(r_2)$ 內切的圓。

∗ 第二組：與圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切的圓

1. 設圓 $O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ 外切的切點為點 A_2，過點 A_2 與圓 $O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ 相切的共同切線為直線 l_2，則直線 l_2 與圓 $O_1(r_1)$ 相交於兩相異點。因為圓心 O_1，O_2 與 O_3 不共線。所以，點 A_2 不在圓心 O_1 至直線 l_2 的垂直線上。請注意：儘管點 A_2 在圓 $O_1(r_1)$ 的內部，但仍可以仿照「點線圓」問題第二種情形第二組圓的作圖法，作出過點 A_2 且與直線 l_2 相切又與圓 $O_1(r_1)$ 內切的圓。我們將作圖法寫成下面的第 2 點。
2. 在過點 A_2 且與直線 l_2 垂直的直線上作點 A_2' 使得：點 A_2' 與圓心 O_1 位於直線 l_2 的同側，而 $\overline{A_2A_2'}=r_1$。設 $\overline{O_1A_2'}$ 的垂直平分線與直線 A_2A_2' 相交於點 X。以點 X 為圓心且過點 A_2 的圓即為所求，此圓與圓 $O_1(r_1)$ 內切。此種圓共一個。



▲圖 77

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$， $O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切，則因為圓 $O_2(r_2)$ 位於圓 $O_1(r_1)$ 內部而圓 $O_3(r_3)$ 與圓 $O_1(r_1)$ 內切又與圓 $O_2(r_2)$ 外切，所以，圓 X 被圓 $O_1(r_1)$ 包在其內部（切點除外），而且圓 X 將圓 $O_2(r_2)$ 包在其內部（切點除外）。若圓 X 與圓 $O_2(r_2)$ 內切的切點不是圓 $O_2(r_2)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 外切的切點 A_2 ，則當圓 X 被圓 $O_2(r_2)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_3(r_3)$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有交點）；當圓 X 將圓 $O_2(r_2)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_2(r_2)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 外切的切點 A_2 在圓 X 的內部（因為此切點在圓 $O_2(r_2)$ 上）。於是，圓 $O_3(r_3)$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），這與圓 X 、圓 $O_3(r_3)$ 外切的假設矛盾。因此，圓 X 與圓 $O_2(r_2)$ 內切的切點就是圓 $O_2(r_2)$， $O_3(r_3)$ 外切的切點 A_2 。

因為圓 X 過點 A_2 且與直線 l_2 相切，而且點 A_2 在直線 l_2 上；所以，圓 X 與直線 l_2 相切於點 A_2 。於是，其圓心在過點 A_2 且與直線 l_2 垂直的直線上。因為

$$\overline{XA_2} = \overline{A_2A_2'} - \overline{XA_2'} = r_1 - \overline{XA_2'} = r_1 - \overline{XO_1} \ .$$

所以，以點 X 為圓心， $\overline{XA_2}$ 為半徑的圓必與圓 $O_1(r_1)$ 內切。

∗ 第三組：與圓 $O_1(r_1)$， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切的圓

《證明》

此情形中為什麼沒有第三組圓呢？其理由如下：設圓 X 與圓 $O_1(r_1)$ 內切，與圓 $O_2(r_2)$ 外切，與圓 $O_3(r_3)$ 內切。

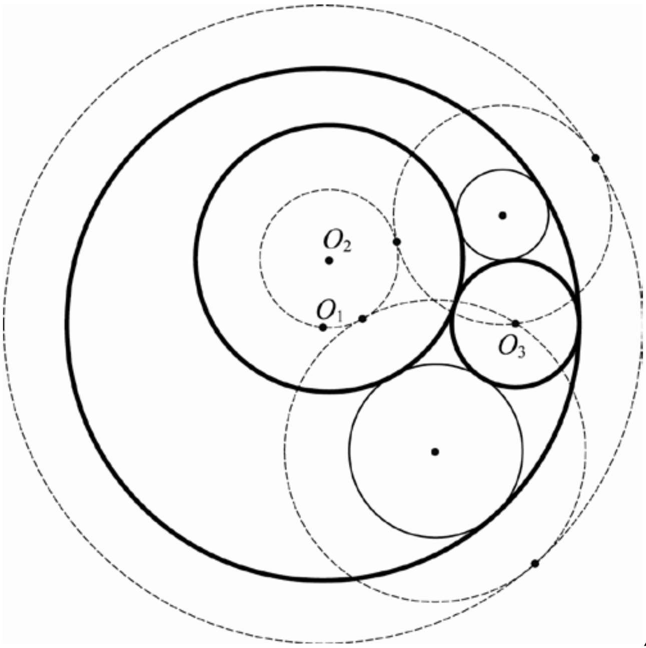
若圓 X 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點就是圓 $O_1(r_1)$， $O_3(r_3)$ 內切的切點，則當圓 X 被圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_2(r_2)$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有交點）；當圓 X 將圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_2(r_2)$， $O_3(r_3)$ 外切的切點 A_2 在圓 X 的內部（因為此切點在圓 $O_3(r_3)$ 上）。於是，圓 $O_2(r_2)$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），這與圓 X 、圓 $O_2(r_2)$ 外切的假設矛盾。

若圓 X 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點不是圓 $O_1(r_1)$， $O_3(r_3)$ 內切的切點 A_1 ，則當圓 X 被圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_1(r_1)$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有

交點）；當圓 X 將圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_1(r_1)$， $O_3(r_3)$ 內切的切點 A_1 在圓 X 的內部（因為此切點在圓 $O_3(r_3)$ 上）。於是，圓 $O_1(r_1)$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），也有些點在圓 X 的外部（因為圓 X 不能將圓 $O_1(r_1)$ 包在其內部），這與圓 X 、圓 $O_1(r_1)$ 相切的假設矛盾。由此可知：在此情形中，所求圓不能與圓 $O_1(r_1)$ 內切，與圓 $O_2(r_2)$ 外切，與圓 $O_3(r_3)$ 內切。

∗ 第四組：與圓 $O_2(r_2)$， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_1(r_1)$ 內切的圓

作圖法與本小節「圓圓圓」問題第四種情形第四組圓的作圖法相同。



▲圖 78

《證明》

證明與本小節「圓圓圓」問題第四種情形第四組圓作圖法的證明相同。

六、 圓 $O_2(r_2)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 是一對外切圓，又圓 $O_2(r_2)$， $O_3(r_3)$ 都與圓 $O_1(r_1)$ 內切，$r_1 > r_2$ 且 $r_1 > r_3$ ；又圓心 O_1， O_2 與 O_3 不共線。

《作圖法》

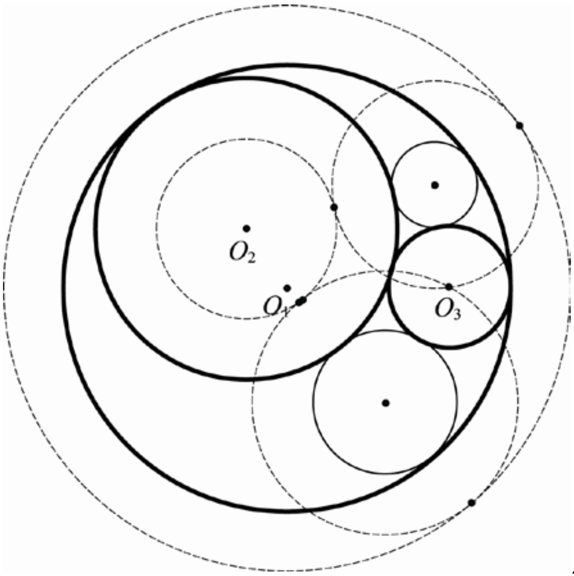
在此情形中，所求圓共有兩解（如圖 79 所示），此兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，與圓 $O_2(r_2)$ 都外切，與圓 $O_3(r_3)$ 都外切（第四組圓）。作圖法與本小節「圓圓圓」問題第四種情形第四組圓的作圖法相同。

此情形中為什麼沒有第一、二、三組圓呢？其理由如下：設圓 X 與圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 與 $O_3(r_3)$ 都相切，而且設圓 X 與圓 $O_i(r_i)$ 內切，其中 $i = 2$ 或 3 。

若圓 X 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點就是圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點，則當圓 X 被圓 $O_i(r_i)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_{5-i}(r_{5-i})$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有交點）；當圓 X 將圓 $O_i(r_i)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_i(r_i)$ 與圓 $O_{5-i}(r_{5-i})$ 外切的切點在圓 X 的內部（因為此切點在圓 $O_i(r_i)$ 上）。於是，圓 $O_{5-i}(r_{5-i})$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），也有些點在圓 X 的外部（圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_{5-i}(r_{5-i})$ 內切的切點就是一例），這與圓 X 、圓 $O_{5-i}(r_{5-i})$ 相切的假設矛盾。

其次，若圓 X 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點不是圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點，則當圓 X 被圓 $O_i(r_i)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_1(r_1)$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有交點）；當圓 X 將圓 $O_i(r_i)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點在圓 X 的內部（因為此切點在圓 $O_i(r_i)$ 上）。於是，圓 $O_1(r_1)$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），也有些點在圓 X 的外部（因為圓 X 不能將圓 $O_1(r_1)$ 包在其內部），這與圓 X ，圓 $O_1(r_1)$ 相切的假設矛盾。

由此可知：在此情形中，所求圓都與圓 $O_2(r_2)$ 外切，也都與圓 $O_3(r_3)$ 外切。



▲圖 79

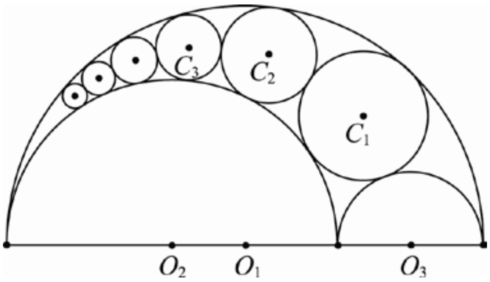
《證明》

證明與本小節「圓圓圓」問題第四種情形第四組圓作圖法的證明相同。

在「圓圓圓」問題中，根據三個給定圓的位置與大小來分類時，要考慮的情形非常多。由於篇幅所限，本文只選擇較具代表性的六種情形，有興趣的讀者可仿照本文所介紹的方法探討其他情形。本文的最後一段，我們舉出圓的幾何中兩個有名的例子。

應用例之一：鞋匠的小刀

在圖 80 中，圓 $O_2(r_2)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 是一對外切圓，而圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 、圓 $O_3(r_3)$ 都內切，又圓心 O_1， O_2 與 O_3 共線且 $r_1 > r_2 > r_3$ 。將此三圓沿著圓心的連線 $O_1O_2O_3$ 擷取同一側的半圓所成的圖形中，三個半圓所圍的圖形就稱為鞋匠的小刀（shoemaker's knife）。



▲圖 80

在鞋匠的小刀中，我們可以作出一序列的圓 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得：

(1)每個圓 C_n 都與圓 $O_1(r_1)$ 內切，且都與圓 $O_2(r_2)$ 外切。

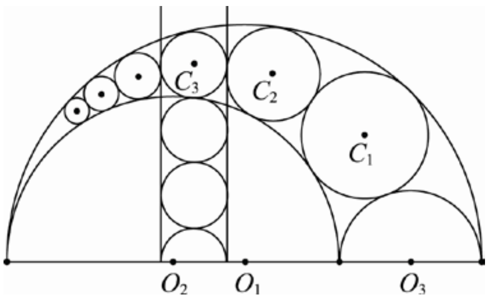
(2)圓 C_1 與圓 $O_3(r_3)$ 外切，而對每個正整數 n ，圓 C_{n+1} 與圓 C_n 外切。

至於上述圓$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$的作圖法，說明如下：當$n>1$時，採用「圓圓圓」問題第六種情形第四組圓的作圖法即可作出圓心C_n。但當$n=1$時，因為圓心O_1，O_2與O_3共線；所以，圓心C_1的作圖法就必須稍作修正，如何修正可參看「點圓圓」問題第十一種情形及思考問題 42 的說明。

在鞋匠的小刀問題中，關於圓C_n的半徑與圓心的位置，有一個有趣的性質，敘述如下：

若圓C_n的半徑為s_n，而圓心C_n至連心線$O_1O_2O_3$的距離為d_n，則$d_n=2n\times s_n$。

上述性質的證明，通常利用圓的反演變換（inversion）。以圓$O_1(r_1)$與$O_2(r_2)$內切的切點為圓心，此點至圓C_n的切線段長為半徑的圓作為反演圓（circle of inversion），圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$被反演成圓C_n的一對平行切線，圓$O_3(r_3)$與圓C_1、圓C_2至圓C_{n-1}都被反演成與前述平行切線都相切的圓，至於圓C_n則被反演成本身。於是，反演後的圖形是一對平行直線以及與此二平行線都相切的$n+1$個圓，而且在這$n+1$個圓中，相鄰的兩個圓都外切，如圖 81 所示。根據這個圖形，很容易就可證得$d_n=2n\times s_n$。



▲圖 81

應用例之二：Steiner 圓系

給定平面上一對內離圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$，其中圓$O_2(r_2)$位於圓$O_1(r_1)$的內部。若$\{C_k\}_{k=1}^{n}$是滿足下述四個條件的有限多個圓，則$\{C_k\}_{k=1}^{n}$稱為是與內離圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$相切的一組 Steiner 圓系（Steiner chain）：

(1)每個圓C_k都與圓$O_1(r_1)$內切，每個圓C_k又都與圓$O_2(r_2)$外切。

(2)對每個$k\in □,1\le k\le n-1$，圓C_{k+1}與圓C_k外切。

(3)圓C_n又與圓C_1外切。

(4)除了(2)與(3)所提的切點外，$\{C_k\}_{k=1}^{n}$中的任何兩圓都沒有其他交點。

顯然地，每一組 Steiner 圓系中至少含三個圓。

關於 Steiner 圓系，首先要注意到一個現象，那就是：並不是每一對內離圓間都有與它們相切的 Steiner 圓系。事實上，即使是一對同心圓，都不一定有與它們相切的 Steiner 圓系。下面的思考問題給出了同心圓有與它們相切的 Steiner 圓系的條件。

思考問題 45：

若圓$O(r_1)$，$O(r_2)$是一對同心圓，且$r_1>r_2$；則此兩圓間有一組與它們相切且共含n個圓（$n\ge 3$）的 Steiner 圓系的充要條件是：兩半徑r_1,r_2與圓的個數n滿足下述關係式：

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}\text{或}\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)=2\text{。}$$

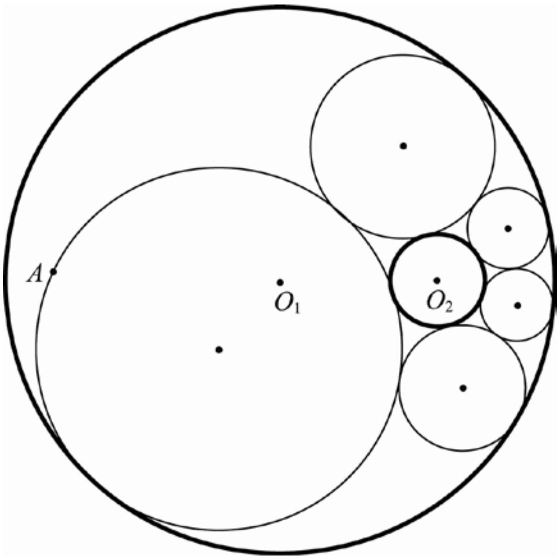
根據上述條件，可知：當兩同心圓$O(r_1)$，$O(r_2)$滿足$r_1=9r_2$時，此兩同心圓間沒有與它們相切的 Steiner 圓系。因為$\sin\frac{\pi}{4}<\frac{8}{10}<\sin\frac{\pi}{3}$，所以滿足$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{8}{10}$的$n$不是正整數。

至於一般的內離圓間有與它們相切的 Steiner 圓系的條件如下：兩內離圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$間有一組與它們相切且共含n個圓的 Steiner 圓系的充要條件是：存在兩同心圓$O(s_1)$，$O(s_2)$，使得同心圓$O(s_1)$，$O(s_2)$間有一組與它們相切且共含n個圓的 Steiner 圓系，而且內離圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$是同心圓$O(s_1)$，$O(s_2)$對某個反演變換（inversion）的反演像。當此充要條件成立時，內離圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$間的每一組與它們相切且共含n個圓的 Steiner 圓系，都是同心圓$O(s_1)$，$O(s_2)$間的某一組與它們相切且共含n個圓的 Steiner 圓系，對前述同一個反演變換的反演像。

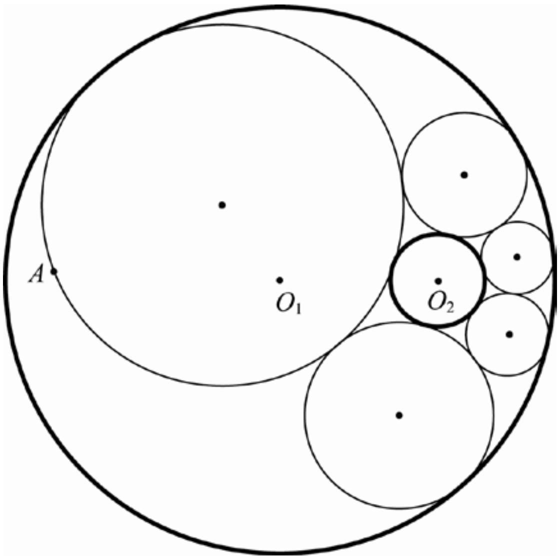
若兩內離圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$間有一組與它們相切且共含n個圓的 Steiner 圓系，且$r_1 > r_2$，則過在圓$O_1(r_1)$內部且在圓$O_2(r_2)$外部的每一點A，都可作出兩組與它們相切的 Steiner 圓系，而且所作出的 Steiner 圓系也都恰含n個圓。這兩組 Steiner 圓系的作圖法如下：

(1) 設圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$是同心圓，即$O_1 = O_2$。首先，在圓$O_1(\frac{r_1+r_2}{2})$上作出與點A距離為$\frac{r_1-r_2}{2}$的點。因為$\overline{O_1A} < \frac{r_1+r_2}{2} + \frac{r_1-r_2}{2}$，所以此種點共兩點。以此種點為圓心，$\frac{r_1-r_2}{2}$為半徑的圓就是圓$C_1$。以點$O_1$為旋轉中心，將圓$C_1$旋轉$\frac{2\pi}{n}$即得出圓$C_2$。仿此繼續進行，就可完成整個 Steiner 圓系。

(2) 設圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$不是同心圓。首先，仿照「點圓圓」問題第十種情形第二組圓的作圖法，作出過點A且與圓$O_1(r_1)$內切且與圓$O_2(r_2)$外切的圓C_1。依思考問題 41 的結果，此種圓共兩個。其次，仿照上述「圓圓圓」問題第五種情形第四組圓的作圖法，作出與圓$O_1(r_1)$內切且與圓$O_2(r_2)$、圓C_1都外切的圓；依「圓圓圓」問題第五種情形第四組圓作圖法的結果，此種圓共兩個，其一是圓C_2、另一是圓C_n；再其次，仍仿照上述「圓圓圓」問題第五種情形第四組圓的作圖法，作出與圓$O_1(r_1)$內切且與圓$O_2(r_2)$、圓C_2都外切的圓；依「圓圓圓」問題第五種情形第四組圓作圖法的結果，此種圓共兩個，其一是圓C_3、另一是圓C_1。仿此繼續進行，就可完成整個 Steiner 圓系。



▲圖 82



▲圖 83

參考資料：

1. Cajori, Florian. A History of Mathematics. P.41
2. Eves, Howard. An Introductuon to the History of Mathematics. P.156

新北市100學年度市立高中職數學科競賽試題

填充題（共有六題，除第一題 5 分外，其餘每題都是 7 分，總計 40 分）

1. 根據研究：一個n階標準魔術方塊必須滿足不等式
$$\frac{1}{n}\times\frac{n-2}{2}\times\sqrt{2}<0.5$$
才能有好的旋轉功能。問：n階標準魔術方塊應滿足$n<$____________。

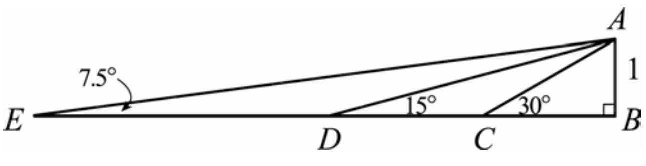
2. 英國 哥倫比亞大學 物理學家 懷特海德 製作了一組骨牌，第一張重 1 公克最輕，以後每張重量擴大為前一張的 1.5 倍，把這套骨牌按適當間距排好，輕輕推倒第一張，必然會波及到下一張及推倒以後的骨牌。根據萬有引力定律測得：地球質量為5.976×10^{27}公克，試問：懷特海德 所排的骨牌中，第___________張的重量會比地球還重。（參考數據：$\log 5.976=0.7764$）

3. 尤拉 在 1742 年時，將 白努利 所舉的四次多項式 $f(x)$ 分解為二次多項式
$$x^2-\left(2+\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right),$$
與二次多項式
$$x^2-\left(2-\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1-\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)$$
的乘積。白努利 所舉的多項式 $f(x)=$____________。（以降次排列表示）

4. 候選人在一條重要的馬路上插競選旗子，第一天在該馬路的頭尾各插一面旗子，第二天在兩面旗子中間再插兩面旗子，第三天在相鄰兩面旗子中間各再插兩面旗子，…，依此類推，每一天都在既有相鄰兩面旗子中間各再插兩面旗子。問：第n天後，該馬路上一共插____________面該候選人的旗子。

5. 甲班有 20 位男生、15 位女生，需推派三位同學參加某項全校性活動，班會中大家決定用抽籤的方式產生參加人選。若每個人中籤的機率相等，則推派的三位同學中有男也有女的機率為____________。

6. 利用下圖，求 $\cot 7.5°=$____________。



參考答案

1.	2.	3.	4.	5.	6.

$4+2\sqrt{2}$	159	$x^4-4x^3+2x^2+4x+4$	$1+3^{n-1}$	$\frac{90}{119}$	$2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

計算證明題（共有四題，總計 50 分）

1. 將由左至右的六個位置分別填入 0 或 1 或 2 的數字，成為「三元字串」，例如：201021 是一個三元字串。對於兩個三元字串 $a=a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ 與 $b=b_1b_2b_3b_4b_5b_6$，定義 a 與 b 的距離為滿足 $a_i \neq b_i$ 的下標 i 的個數。例如：201021 與 001011 的距離為 2（因為它們的第一及第五個位置的數字不相同）。

   (1) 試問與 201021 的距離為 3 的三元字串共有多少個？

   (2) 試求所有三元字串與 201021 的距離總和。（14 分）

2. 小芸 和 小晉 玩擲骰子遊戲，兩人從特製的三顆骰子中各選一個，然後各自擲骰子一次，點數高的獲勝。三顆骰子各面的點數如下：

   A：四面 2 點，兩面 6 點。

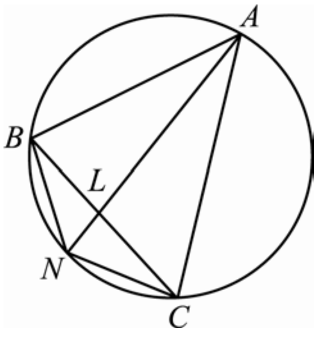
   B：三面 1 點，三面 5 點。

   C：六面都是 3 點。

   (1) 假設 小晉 先選 A 骰子，小芸 要選哪個骰子贏的機會較大？

   (2) 許多兩人玩的遊戲都是先開始的人占些優勢，請問：在這個遊戲中，先選的人有占優勢嗎？（須詳述理由）（12 分）

3. 在銳角△ ABC 中，$\angle A$ 的角平分線交 BC 於 L，交△ ABC 的外接圓於 N。自點 L 向 AB、AC 引垂直線，垂足分別為 K 與 M：



   (1) 請找出與△ ALC 相似的其他三角形。

   (2) 證明：四邊形 $AKNM$ 與△ ABC 面積相等。（12 分）

4. 已知 a、b 為整數，且滿足 $a+b$ 是 3 的倍數，證明

$$a^3+b^3$$

是 9 的倍數。（12 分）

參考解答

1. 所謂三元字串就是從 $0,1,2$ 三類數字裡取出六個，並排成一列的方法數：

(1) 與 201021 的距離為 3 的三元字串就是僅能改變六個位置中的三個，而且每個改變的位置只能填入其餘的兩個數字，因此一共有

$$C_3^6 \times 2^3 = 160$$

個。

(2) 從(1)的討論中，可以發現：與 201021 的距離為 k （ $k = 0,1,2,3,4,5,6$ ）的三元字串共有

$$C_k^6 \times 2^k$$

個。因此，所有三元字串與 201021 的距離總和為

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{6}\left(C_k^6 \times 2^k\right) \times k &= C_1^6 \cdot 2^1 \cdot 1 + C_2^6 \cdot 2^2 \cdot 2 + \cdots + C_6^6 \cdot 2^6 \cdot 6 \\ &= 12 + 120 + 480 + 960 + 960 + 384 = 2916.\end{aligned}$$

[另解] 最後的級數和也可以計算如下：

$$\sum_{k=0}^{6}\left(C_k^6 \times 2^k\right) \times k = \sum_{k=1}^{6}\left(6 \times 2C_{k-1}^5 \times 2^{k-1}\right) = 12\left(1+2\right)^5 = 2916 \ .$$

[妙解] 計算所有三元字串與 201021 的個別位置的距離總和；例如，在所有三元字串中與 201021 的第一個位置不同的字串一共有

$$2 \times 3^5 = 486$$

個。同理，其餘位置不同的字串也都有 486 個。故所有三元字串與 201021 的個別位置的距離總和為

$$486 \times 6 = 2916 \ .$$

這也是所有三元字串與 201021 的距離總和。

2. 首先計算

1^{o} 當一人擲 A 骰子，另一人擲 B 骰子時，擲 A 骰子者獲勝的機率為

$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{6}{6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \ .$$

2^{o} 當一人擲 A 骰子，另一人擲 C 骰子時，擲 C 骰子者獲勝的機率為

$$\frac{6}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \ .$$

3^{o} 當一人擲 B 骰子，另一人擲 C 骰子時，擲 B 骰子者獲勝的機率為

$$\frac{3}{6} \times \frac{6}{6} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \ .$$

其次，根據上述計算回答所問的問題如下：

(1) 當 小晉 先選 A 骰子，小芸 選 C 骰子贏的機會較大，為 $\frac{2}{3}$ 。

(2) 沒有占優勢（甚至吃虧），原因是

①當先玩者選 A 骰子時，後玩者可以選 C 骰子，此時後玩者勝的機率比較高，為 $\frac{2}{3}$（如上小題的例子或是 2º的情況）。

②當先玩者選 B 骰子時，後玩者可以選 A 骰子，此時後玩者勝的機率比較高，為 $\frac{2}{3}$（如(1)的情況）。

③當先玩者選 C 骰子時，後玩者可以選 B 骰子，此時先玩者與後玩者勝的機率都是 $\frac{1}{2}$（如 3º的情況）。

3. (1) 因為 $\angle LAC=\angle BAN$ （ AL 為分角線）及

$\angle ALC=\angle BAN+\angle ABC=\angle CAN+\angle ABC=\angle CBN+\angle CAN=\angle ABN$ ，

所以△ ABN 與△ ALC 相似。同理，△ BLN 也與△ ALC 相似。

(2) 利用(1)的相似，得到

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}\Rightarrow\frac{c}{\overline{AL}}=\frac{\overline{AN}}{b},$$

即

$$\overline{AL}\times\overline{AN}=bc\ .$$

四邊形 $AKNM$ 的面積等於△ AKN 與△ AMN 的面積和，又因為

$$\begin{aligned}\Delta AKN&=\frac{1}{2}\overline{AK}\times\overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2}\\&=\frac{1}{2}\overline{AL}\cos\frac{\angle A}{2}\times\overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2}\\&=\frac{1}{2}\overline{AL}\times\overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2},\end{aligned}$$

及同理可得

$$\Delta AMN=\frac{1}{2}\overline{AL}\times\overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2},$$

所以四邊形 $AKNM$ 的面積為

$$\frac{1}{2}\overline{AL}\times\overline{AN}\left(2\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}\right)=\frac{1}{2}\overline{AL}\times\overline{AN}\sin\angle A\ .$$

將 $\overline{AL}\times\overline{AN}$ 以 bc 取代，得到

$$\frac{1}{2}bc\sin\angle A,$$

這也是△ ABC 的面積。故四邊形 $AKNM$ 與△ ABC 的面積相等。

4. 由因式分解

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right),$$

及 $a+b$ 為 3 的倍數知道

$$(a+b)\text{ 與 }\left((a+b)^2-3ab\right)$$

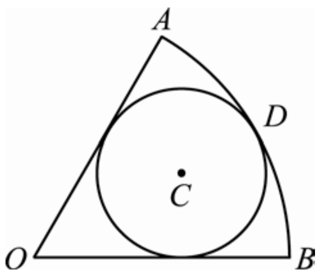
都是 3 的倍數，即

$$a^3+b^3$$

是 9 的倍數。

口試試題（共有兩題，總計 10 分）

1. 如下圖



一圓心角 $60°$ 扇形 OAB，半徑為 R，其內切圓的半徑為 r。求 $\frac{r}{R}$ 的值。

2. 將一個半徑為 5 公分的鐵球，放入一個邊長 10 公分的正方體容器，再放入另一個小鉛球，然後蓋上正方體容器的蓋子，使蓋子與正方體完全密合。求小鉛球的最大半徑。

參考答案

1.	2.

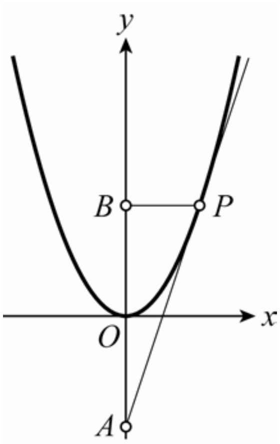
$\frac{1}{3}$	$5\left(2-\sqrt{3}\right)$

專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師範大學數學系

遊戲 65
☆☆☆☆☆

設 P 在拋物線 $y=x^2$ 上，且在第一象限內的任意一點，如圖所示，直線 PB 與 x 軸平行，且交 y 軸於 B 點；直線 PA 是拋物線過 P 點的切線，且交 y 軸於 A 點：



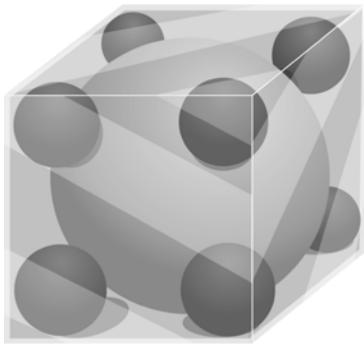
證明：拋物線、直線 PB 與 y 軸所圍的區域面積與△ PAB 的面積之比值是一個常數。

〔玩鎖・玩索〕

「拋物線、直線 PB 與 y 軸所圍的區域面積」是微積分可以計算出來的，使用多項式的微積分可以知道這個常數為何？

遊戲 66
☆☆☆☆☆

一模型公司在一個內部邊長為 2 單位的透明正立方體箱子內，放置一顆半徑為 1 單位的黃球，然後又要在箱子的八個角落再塞入 8 顆半徑相同的小紅球。



試求：小紅球的最大半徑為多少單位？

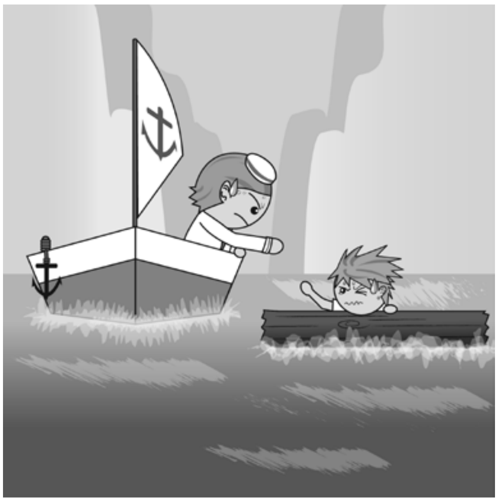
〔玩鎖・玩索〕

這是九十六學年度國立臺灣大學物理系大學申請數學試題，這是一種常見的題目。如果將正立方體改為邊長是1的正四面體，放置一顆大球與正四面體的四面相切，然後在四個頂點附近放置四顆半徑相同的小球，那麼大球的半徑與小球的最大半徑分別是多少呢？

遊戲 67

☆☆☆

有一個小孩掉到河裡，他抱住一根圓木順水向下漂流。有三條船同時與圓木相遇，但都沒有注意到圓木上有小孩。當三條船離開圓木一小時後，船員們同時從收音機中聽到圓木上有小孩要求營救的消息。此時，三條船都馬上掉頭返回去追圓木。



若三條船的速度是固定的，而且都不相同，則哪艘船救起了圓木上的小孩呢？

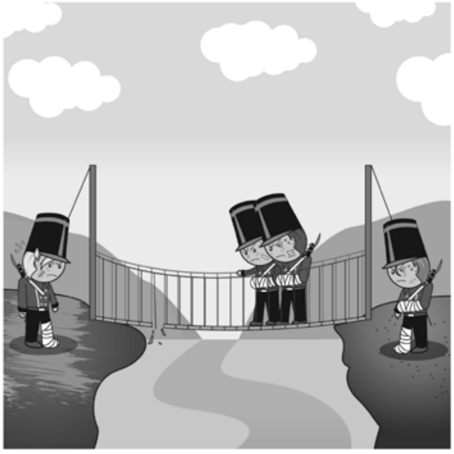
〔玩鎖・玩索〕

摘自美國《數學教師》，1987(8)。

遊戲 68

☆☆☆☆☆

某晚有四個傷兵需要渡過一條破橋以逃離敵方砲火，該破橋每次最多只能承載兩個士兵，而且當兩個士兵一起過橋時，他們必須以較慢的士兵的速度行走。



該四個士兵只有一支手電筒，他們每次必須攜帶手電筒才能安全的過橋，如果四個士兵各需1，2，4及6分鐘過橋，那麼他們安全過橋的最短時間是幾分鐘？

〔玩鎖・玩索〕

顯然必須三去兩回才有辦法讓四位傷兵過橋，而每次都是兩人過去，一人再拿手電筒回來。問題的關鍵在 6 分鐘的傷兵與誰過橋，與 1 或 2 分鐘的傷兵過橋，跟與 4 分鐘的傷兵過橋的差別何在呢？這就是這道問題有趣的地方。本問題是 香港 青少年數學菁英選拔賽的試題。

動手玩數學~破解秘笈 第16期

遊戲 61

(1) 因為 $\angle LAC = \angle BAN$ （ $\overline{AL}$ 為分角線）及

$$\angle ALC = \angle BAN + \angle ABC = \angle CAN + \angle ABC$$
$$= \angle CBN + \angle CAN = \angle ABN ,$$

所以$\triangle ABN$與$\triangle ALC$相似。

同理，$\triangle BLN$也與$\triangle ALC$相似。

(2) 利用(1)的相似，得到

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{c}{\overline{AL}} = \frac{\overline{AN}}{b} ,$$

即

$$\overline{AL} \times \overline{AN} = bc \ .$$

四邊形 $AKNM$ 的面積等於$\triangle AKN$與$\triangle AMN$的面積和，又因為

$$\Delta AKN = \frac{1}{2}\overline{AK} \times \overline{AN} \sin\frac{\angle A}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\overline{AL}\cos\frac{\angle A}{2} \times \overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\overline{AL} \times \overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2},$$

及同理可得

$$\Delta AMN = \frac{1}{2}\overline{AL} \times \overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2} ,$$

所以四邊形 $AKNM$ 的面積為

$$\frac{1}{2}\overline{AL} \times \overline{AN}\left(2\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\overline{AL} \times \overline{AN}\sin\angle A.$$

將 $\overline{AL} \times \overline{AN}$ 以 bc 取代，得到

$$\frac{1}{2}bc\sin\angle A ,$$

這也是$\triangle ABC$的面積。故四邊形 $AKNM$ 與$\triangle ABC$的面積相等。

遊戲 62

首先計算

①當一人擲 A 骰子，另一人擲 B 骰子時，擲 A 骰子者獲勝的機率為

$$\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3} \ .$$

②當一人擲 A 骰子，另一人擲 C 骰子時，擲 C 骰子者獲勝的機率為

$$\frac{6}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3} \ .$$

③當一人擲 B 骰子，另一人擲 C 骰子時，擲 B 骰子者獲勝的機率為

$$\frac{3}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2} \ .$$

其次，根據上述計算回答所問的問題如下：

(1) 當 小晉 先選 A 骰子，小芸 選 C 骰子贏的機會較大，為 $\frac{2}{3}$ 。

(2) 沒有佔優勢（甚至吃虧），原因是

1°當先玩者選 A 骰子時，後玩者可以選 C 骰子，此時後玩者勝的機率比較高，為 $\frac{2}{3}$（如上小題的例子或是 ②的情況）。

2°當先玩者選 B 骰子時，後玩者可以選 A 骰子，此時後玩者勝的機率比較高，為 $\frac{2}{3}$（如 ①的情況）。

3°當先玩者選 C 骰子時，後玩者可以選 B 骰子，此時先玩者與後玩者勝的機率都是 $\frac{1}{2}$（如 ③的情況）。

遊戲 63

設河寬 x 公尺，較快的船為甲船，另一艘為乙船，依題意在第一次相遇時，甲船航行了 $x-720$ 公尺，而乙船走了720公尺；又第一次相遇至第二次相遇，

甲船航行了 $720+(x-400)=x+320$ 公尺，

而乙船走了 $(x-720)+400=x-320$ 公尺。

因此

$$\frac{甲船速度}{乙船速度}=\frac{x-720}{720}=\frac{x+320}{x-320},$$

得 $x^2-1760x=0$，解得 $x=1760$ 與 0（不合）。

故這條河的寬度是1760公尺。

遊戲 64

到教室的整條路上，小琳有一半路程步行，另一半路程跑步；而小琪少於一半的路程步行，超過一半路程用跑步（因為她步行與跑步時間一樣長）。因為小琪跑步的路程比小琳長，所以小琪到教室所花的時間比小琳少，即小琪先抵達教室。