

皈依數學樂趣多

◎許志農／台灣師範大學數學系

各行各業的人都喜歡用數學或邏輯來描述或解決他們所碰到的問題，例如：行政院長說「內閣改組比小的稍微大一點」。股神巴菲特一向將兩條原則奉為投資圭臬：「第一、不要賠錢；第二、永遠不要忘記第一條的規定。」

我最欣賞的倒是唐伯虎的一段故事：唐伯虎在扇面上題詩作畫遠近馳名，一天，有人故意難為他，重金請他在小小的扇面上畫一百隻駱駝。唐伯虎二話沒說就畫了起來，只見他先畫了一片沙漠，沙漠中間是一座孤峰兀立的大山，山下林茂路彎。那人一看，扇面快要滿了還沒見一隻駱駝，得意地笑了，心想：看他如何畫得下一百隻！只見唐伯虎在山的左側畫了一隻駱駝的後半身，前半身被山崖擋住了；在山的右側，又畫了一隻駱駝的前半身。唐伯虎把筆一擱，那人急了，說：「不夠一百隻呀！」唐伯虎輕輕一笑，拿起筆在畫旁題了一首打油詩「百隻駱駝繞山走，九十八隻在山后，尾駝露尾不見頭，頭駝露頭出山溝。」那人一看，啞口無言。



這三段故事分別將數學元素靈活地、巧妙地、美麗地融入他們的問題中，淡淡的甚至連數學的味道都要消失了。大部分的人很容易犯的毛病是：硬生生地、偏頗地、怪裡怪氣地將數學放入他的問題中，以致於別人很難吸收或欣賞他對問題的論述。如果把這情境縮小成命一道數學題目，無庸置疑的，靈活、巧妙又美麗是好的數學題目的標準，而難、偏或怪則是不好的題目。

學數學的人比其它學科者又具有更細微的思考，物理學家費曼先生曾經說過一段故事：用刀將一粒橘子切成薄片，這些薄片是否可以蓋滿整個地球表面呢？學物理的人會說：「不可能」，而學數學的答案是「當然可以」。原因在於物理是務實的學科，他們會想到「電子是最小的粒子，不可能切到比電子的直徑還薄，所以這些薄片的厚度有其限度，無法蓋滿地球」。然而數學工作者只用頭腦想像，甚至微積分與極限就告訴我們「任意小的厚度都是可行的，所以可以讓薄片蓋滿整個地球。」這種「跨過現實的藩籬，進入想像的領域」可以說是數學家的專利，也是他們快樂的泉源，也因為這樣，數學工作者的特性是

快樂比別人多，痛苦也比別人大。

① 外在篇

1.1 數位教材的革命…起承轉合

讓我們從一則悲劇人物的消息開始：

一九五四年六月七日晚間，英國數學家杜林咬下一顆沾有劇毒氰化物的蘋果，結束四十二年生命，彷彿童話白雪公主現實版，然而卻是沒有白馬王子的悲劇結尾。半個多世紀之後，英國首相布朗在《每日電訊報》撰文，正式向杜林公開道歉，因為英國政府當年以同性戀相關罪名起訴杜林並定罪，導致他自殺身亡。杜林曾在第二次世界大戰期間破解德

國的「謎團密碼」，也是最早提出「人工智慧」概念者，被尊奉為「電腦科學之父」。據歷史學者評斷，杜林成功破解德軍的密碼，讓歐洲地區的戰爭得以提前兩年終結。（中國時報 2009-09-14）

在數學上，有條有理而且在有限的時間內可以做出判斷的方法稱為演算法，希臘時期就知道的歐基里得輾轉相除法就是大家耳熟能詳的數學演算法。杜林將古代演算法的精髓吸收，創立了杜林語言與杜林機，可以說是「承接了古人的智慧，讓今日的電腦與程式語言可以展開並大放異彩。」

杜林是起源於希爾伯特的第十問題—我的第一位研究生之研究題。希爾伯特在一九〇〇年巴黎國際數學家大會演說中，提出了二十三個重要的數學問題，其中第十問題是問「是否可以找到判定丟番圖方程式有否整數解的演算法？」，像

$$21x + 55y = 1, 8x^3 - 6x^2 - 5x + 3 = 0, x^2 + y^2 = 1$$

這些係數為整數的多項式方程式稱為丟番圖方程式或不定方程式，高中所學的輾轉相除法與一次因式檢驗法，就是處理前兩個不定方程式的演算法。

希爾伯特第十問題在一九七〇年被俄國的數學家馬蒂亞塞維奇解決了，答案是「這樣的演算法是不存在的，也就是說，不可能寫出一套杜林語言（電腦程式）來判斷丟番圖方程式是否有整數解。」

從上述的故事不難理解：電腦與程式語言跟數學活動是密不可分的。臺灣是電腦硬體的代工王國，全世界的個人電腦有很高的比例是臺灣代工的，但是受限於數學的深耕不夠，文化淺碟，以致於在程式語言的軟體方面無法與硬體並駕齊驅，領先全世界。但是，臺灣地小人稠，素質優異，如果將硬體的電腦佐以適量的軟體開發，相信在數位教材與數位教學的領域會做出不錯的成績。

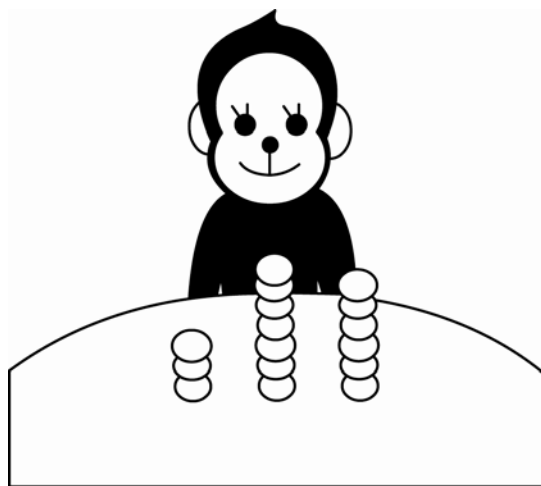
為了縮小城鄉差距，數位教材與網路學習可以打破時空的限制，快速的進入比較弱勢或偏遠地區，讓普及教育可以完整且正常的發揮。鑑於此，教育部提出了〈高中數學科資訊融入教學教材發展計畫〉，其目的是：以系統化發展高中數學科之資訊融入教學教材為目標，藉由分工規劃共同發展符合高中數學教學現場需求之教材，促進教學資源分享及資訊融入教學。鼓勵各校提供及分享所屬教師教學資源及心得，提供全國教師資訊融入數學科教學更豐富的教學資源。

雖然在硬體的普及，軟體的人才培訓都有一段很大的距離要追趕，但還是希望教育部所踏出這一小步，是奠定將來成功的一大步。

在此之前，數學的數位教育都僅限於娛樂或益智層次，在此我們提出兩則設計精良且具啟發意義的數學數位內容：

①（猴子玩拈）拈的遊戲源自中國，經由被販賣到美洲的奴工外傳。所以這個小遊戲先在工人間流行，他們就地取材撿小石子來玩。後來流傳到上流人士，改以銅板在酒吧櫃檯上玩。最有名的玩法是將十二顆石頭分三列排成「三、四、五」的遊戲。

遊戲規則是從三堆的石頭中與猴子輪流取石頭，每次僅能取一堆上的任意顆石頭（至少一顆，至多整堆取完）。取走最後一顆石頭者勝。

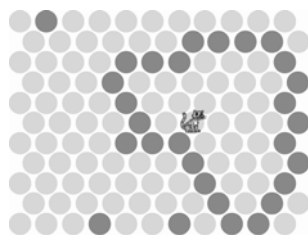


拈的數位版本被設計成跟一隻猴子玩取石頭的遊戲：

直到本世紀初，哈佛大學數學系副教授包頓才利用數的二進位表示法，對拈這道遊戲提出必勝法則。事實上，中國的拈是設計在兩堆上玩的遊戲，規則為：從兩堆的石頭中輪流取石頭，每次僅能取一堆上的任意顆石頭（至少一顆，至多整堆取完），或者兩堆同時取，但必須取一樣多。取走最後一顆石頭者勝。三堆石頭的拈與二進位息息相關，而兩堆石頭的拈則與黃金比例密不可分。

再怎麼靈巧的老虎也無法與小孩玩成一片，但在媒體的虛擬渲染下，巧虎也可以成為小朋友學習的最愛。同樣的，在數位遊戲「拈」中，猴子也被虛擬成好的玩伴。數位學習應該在不同的年齡層發展出不同的虛擬事物，來提升學習的慾望。

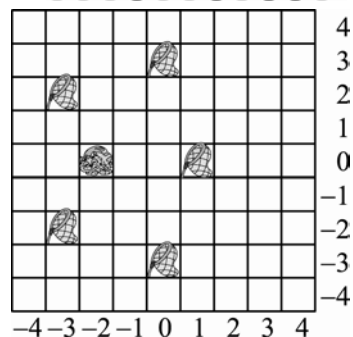
- ②（圍貓遊戲）圍貓遊戲是線上遊戲的一種，其目的除了好玩之外，還可以測試玩者的決策能力。在布滿圓形的長方形棋盤上，每個圓形都與六個圓形相連，一隻貓立於棋盤中央的圓形內，玩者每次將一個圓形塗黑來圍堵貓，但貓可以往尚未被塗色的隔壁圓形移動。



在玩者圍堵與貓移動的輪流遊戲過程中，若貓被圍住，則玩者贏，否則就是貓逃脫成功。上圖是貓被圍住的一種情形。圍貓遊戲是用來考驗玩者決策能力的一種益智遊戲。

板橋高中的學生也研發出一種類似的圍貓遊戲：

在 9×9 的棋盤內，「貓被圍住或者脫逃成功？」是這類似遊戲的主要研究目的。

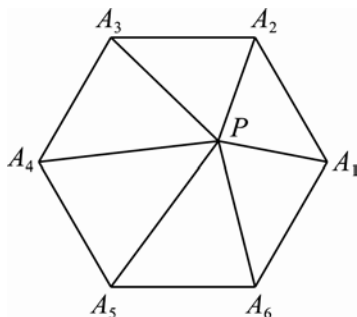


1.2 奇人妙解樂趣多…直覺與入微的掌握

大陸數學家華羅庚以「數缺形時少直覺，形少數時難入微」來勉勵學數學的學生，大意是說「代數與幾何是數學的核心，當我們思考問題時必須兼顧，否則不是缺少了直覺能力就是忘了細微之處。」在解題過程中，想到妙解有如藝術家完成一件漂亮的作品一樣，快樂無窮，但是「妙解在什麼時候出現，是否會出現？」是無法預料的，唯有反覆的以幾何與代數的面向瞭解所碰到的問題時，引人入勝的妙解才有出現的可能。

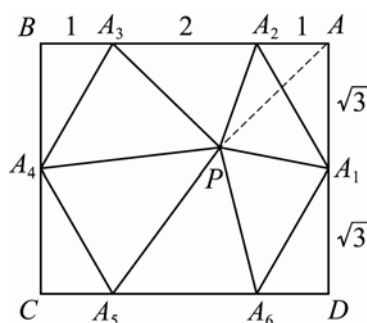
這裡我們提出一道教師推甄試題的兩則妙解，題目的敘述是這樣的：

設 P 是正六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 內部的一點，如下圖所示。證明：三角形 PA_1A_2 ， PA_3A_4 與 PA_5A_6 的面積和與三角形 PA_6A_1 ， PA_2A_3 與 PA_4A_5 的面積和一樣。



讓我們來欣賞一位甄試教師的妙解：

設此正六邊形的邊長為 2，並畫一個長方形 $ABCD$ 將此正六邊形框住，如下圖所示：



若令 P 至 $\overline{AD}$ 的距離為 a ，至 $\overline{BC}$ 的距離為 b ，至 $\overline{AB}$ 的距離為 x ，至 $\overline{CD}$ 的距離為 y ，則

$$a+b=4, \quad x+y=2\sqrt{3}.$$

三角形 PA_1A_2 的面積為

$$\begin{aligned} \Delta PA_1A_2 &= \square PA_1AA_2 - \Delta A_1AA_2 \\ &= (\Delta PA_1A + \Delta PA_2A) - \Delta A_1AA_2 \\ &= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{x \cdot 1}{2} \right) - \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{x + a\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

利用同樣的方式，可以得到

$$\begin{aligned} \Delta PA_3A_4 &= \frac{x + b\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}; \\ \Delta PA_5A_6 &= y. \end{aligned}$$

因此

$$\Delta PA_1A_2 + \Delta PA_3A_4 + \Delta PA_5A_6 = (x+y) + \left(\frac{a+b}{2} - 1 \right) \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

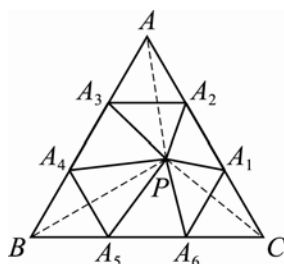
同理可得

$$\Delta PA_6A_1 + \Delta PA_2A_3 + \Delta PA_4A_5 = 3\sqrt{3}.$$

故三角形 PA_1A_2 ， PA_3A_4 與 PA_5A_6 的面積和與三角形 PA_6A_1 ， PA_2A_3 與 PA_4A_5 的面積和一樣。

另一位甄試教師的妙解：

設此正六邊形的邊長為 2，並畫一個大正三角形 ABC 將此正六邊形框住，如下圖所示：



此時大正三角形 ABC 的邊長為 6，且其面積為 $9\sqrt{3}$ ，此時，我們可以將面積和轉換如下

$$\Delta PA_1A_2 + \Delta PA_3A_4 + \Delta PA_5A_6 = \frac{\Delta PCA}{3} + \frac{\Delta PAB}{3} + \frac{\Delta PBC}{3} = \frac{\Delta ABC}{3} = 3\sqrt{3},$$

同理可得

$$\Delta PA_6A_1 + \Delta PA_2A_3 + \Delta PA_4A_5 = 3\sqrt{3},$$

故得證。

這兩位老師的妙解都是先將正六邊形修補成一個可以計算面積的幾何圖形（矩形與正三角形），然後使用面積的代數公式計算面積之間的關係。他們都領悟了

數缺形時少直覺，形少數時難入微

的精髓。

1.3 賞心悅目美拾趣…轉移矩陣實例

「每個元素都大於或等於 0，且每一行的和都是 1」的矩陣稱為「轉移矩陣」，例如

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

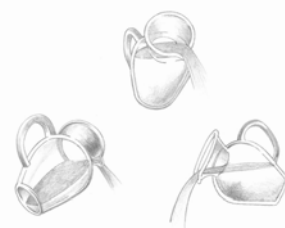
就是三階的轉移矩陣。

在日常生活中，有許多事物都跟轉移矩陣相關，差別只在於我們無法與它連結起來而已。即使是中學課程，也很少舉出很漂亮的轉移矩陣的應用實例。

這裡所要介紹的倒水問題就是一道典型，但不易被察覺的轉移矩陣實例：

有甲、乙及丙三個水瓶，分別裝有 a ， b 及 c 公升的水。每一輪操作都是先將甲瓶的水倒出一半到乙瓶，再將乙瓶的水倒出一半到丙瓶，然後再將丙瓶的水倒出一半回甲瓶。

設 n 輪操作後，甲、乙及丙瓶的水有 a_n ， b_n 及 c_n 公升，如何將 a_n ， b_n 及 c_n 的公式表達出來，又一直操作下去，三瓶子裡的水會穩定下來嗎？如果會，那麼最終三瓶子會有水各幾公升？



首先讓我們考慮第一輪操作後的水量 a_1 ， b_1 ， c_1 與初始值 a ， b ， c 的關係。根據倒水的規則，可以找出它們之間的線性關係

$$\begin{cases} a_1 = \frac{5}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \\ b_1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 0c \\ c_1 = \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

進一步可以得到

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = P^n \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} .$$

因為 P 是一個三階轉移矩陣，所以當操作一直進行下去時，三瓶子裡的水是會趨近穩定狀態的。而且當穩定狀態時，三瓶子水量的比例 $x : y : z$ 會滿足

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ,$$

即滿足方程組

$$\begin{cases} \frac{5}{8}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + 0z = y \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = z \end{cases} ,$$

解得 $x : y : z = 2 : 1 : 1$ 。因為三瓶子裡的總水量是 $a + b + c$ 公升，所以甲、乙及丙三個水瓶在穩定狀態時的水量分別為

$$\frac{a+b+c}{2}, \frac{a+b+c}{4}, \frac{a+b+c}{4}$$

公升。

從上面的詮釋可知：倒水問題是一道不容易的趣題，它牽扯到矩陣的概念，而且是相當深的概念。在瓶子只有兩個時，得到的轉移矩陣是二階方陣，會比較好處理。

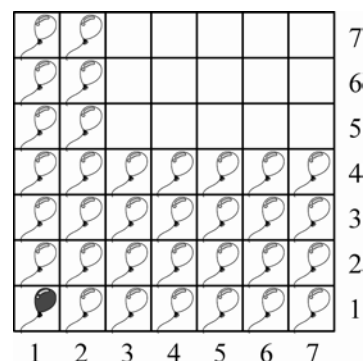
1.4 戲裡有數學

將數學觀念、原理或公式設計在遊戲裡，而且隱藏得天衣無縫，讓玩者從遊玩的過程中更深刻的瞭解到這些數學之事的重要性，像這樣的遊戲就稱為數學遊戲。數學遊戲是一種不公平的遊戲，識破其中數學道理的人容易知道贏的策略，但並不是每種數學遊戲都很容易識破其中的數學道理。舉例來說，五子棋已經被數學家證明為先手有必勝策略的遊戲，但這必勝的數學策略是很複雜的。

① 抓氣球的遊戲：

抓氣球的遊戲又稱為 **Chomp** 的遊戲，數學概念「對稱」隱藏在這道遊戲裡，希望玩者可以很快的掌握這道「對稱之美」的遊戲。在右圖中，有 1 顆黑色氣球，48 顆白色氣球，甲、乙兩人輪流抓氣球，規則如下：

- (1) 每次必須抓台面上還存在的一顆白色氣球。
- (2) 當白色氣球被抓時，此氣球向右及往上區域的白色氣球都會



消失。

(3) 在抓完之後，只剩黑色氣球（即所有白色氣球都消失）的人獲勝。

試問：先抓氣球或者後抓氣球者有必勝的策略，詳述其理由。

② 改變天氣的遊戲：

甲乙丙丁戊五個國家圍成一圓圈，有晴、陰、雷、雨四種氣候輪流替換，每點選一個國家時，這個國家及其相鄰的兩個國家（共三個國家），他們的氣候都會改變成下一個氣候。試問：是否可以在有限次的操作後，讓五個國家的氣候都變成晴天。

這是一道跟算術有關的遊戲。



③ 華容道遊戲：

華容道、孔明棋和魔術方塊被譽為世界三大不可思議的益智遊戲，其中華容道是一道滑板遊戲，出自三國演義中「關羽橫讓捉放曹操」的情節。

華容道棋盤為橫四格縱五格的盤面，曹操是占四格的正方形棋子；占兩格的有五虎將的關羽、張飛、趙雲、馬超與黃忠，其中只有關羽是橫兩格，其餘四將均為豎兩格；還有四個各占一格的兵。在遊戲時，只能利用盤面上留下的兩個空格來移動棋子，想辦法將曹操移到鄰接曹營上方的正中央的位置。

在電腦還沒有普及與成熟之前，滑板遊戲都是用木頭做的方格來操作。現在可以用電腦動畫模擬，而且效果與方便性都不輸給實體的木頭。



② 內在篇

2.1 如何命一道有意思的數學題目…靈活，巧妙與美麗

有命題經驗的人都容易體會「命一道難題比較容易，反而是想一道有意思的容易題比較困難」。如果檢視過去幾年學測與指考的數學考題，比較有鑑別度與深受好評的常常是有創意的容易題或簡易的概念題。市面上的講義、參考書難題充斥，所缺乏的就是創意的容易題或簡易的概念題，也因為這樣，高中老師對有創意的容易題或簡易的概念題會讚不絕口。這類題目除了滿足老師教學需求外，也充實他們的講義內容，活化他們的頭腦思維。

何謂有意思的題目呢？有意思的題目應以

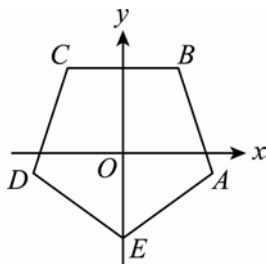
「靈活而不難、巧妙而不偏、美麗而不怪」

為準繩。

例如八十七學年度社會組選擇題第 1 題：

例題 1 設 $ABCDE$ 是坐標平面上的一個正五邊形，它的中心與原點重合，且頂點 E 在 y 軸的負向（如下圖所示）。試問下列各直線中，斜率最小者為何？

- (A) 直線 AB
- (B) 直線 BC
- (C) 直線 CD
- (D) 直線 DE
- (E) 直線 EA .

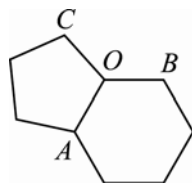


就是一道靈活而不難、巧妙而不偏、美麗而不怪的有意思試題，而且此題的答對率 50%，鑑別度 0.74 都是很好的數字。

九十五學年度指考《數學乙》多選題第 4 題：

例題 2 嘌呤是構成人體基因的重要物質，它的化學結構式主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成（令它們的邊長均為 1）的平面環形，如下圖所示，試問以下哪些選項是正確的？

- (A) $\angle BAC = 54^\circ$
- (B) O 是三角形 ABC 的外接圓圓心
- (C) $\overline{AB} = \sqrt{3}$
- (D) $\overline{BC} = 2\sin 66^\circ$.



也是一道有意思的數學題目。

事實上，命一道有意思的題目的關鍵是頭腦，但障礙也是頭腦。在命題過程中，頭腦只負責修文字與改數字的功能，而題目的素材必須從自然界中尋找。如果題目的素材是從頭腦直接設計而來，那麼所命出來的題目經常逃不掉難、偏、怪的組合。命一道有意思的數學題目是可以訓練的，但必須時時刻刻記住三件事情，即讓頭腦

放鬆，放鬆，還是放鬆。

這跟打球的道理一樣，想要打好球，就是要讓手放鬆，放鬆，再放鬆。

2.2 學習數學的五個階段…知、懂、熟、用、賞

大陸的一本數學書籍用「知，懂，熟，用，賞」來評估數學學習的五個階段，事實上，不僅是科學，即使是文學，藝術或美術，這五種境界也是好的評估方式。所謂的「知、懂、熟、用、賞」是指

知：知道他
懂：瞭解他
熟：熟悉他
用：使用他
賞：欣賞他

的意思。我們以數學的勾股定理來說，學生從知道勾股定理（小學時期），到會推導證明，熟記在腦中（國中時期），進步到很會應用勾股定理題（高中時期）。但是勾股定理對一般大眾來說，如何在日常生活中欣賞到它的存在的背影才是重點，也是最後與最高的境界。

好的泡茶玻璃器皿瓶頸附近的平滑曲線應該要越接近雙曲線越好，道理何在呢？

一般吹玻璃的工人會認為瓶頸的功能僅是「縮口，好拿」而已，但是懂得雙曲線知識的人可不這樣認為。雙曲線的漸進線告訴我們，雙曲線是很像直線的曲線，讓瓶頸附近的截面吹成雙曲線的形式，不僅水流順暢，散熱也比較容易。所以當你欣賞泡茶的玻璃器皿時，瓶頸附近的曲線才是精髓，也是賞的境界。



法鼓山創辦人對人與人的相處提出過五種境界「面對它，處理它，接受它，放下它，超越它」。這跟學習科學的五個階段「知，懂，熟，用，賞」是否有相通之處呢？

2.3 散發神秘果的芳香

俄國有句諺語：「時間是最好的醫生」，意思是說，病人在服用正確的藥物之後，隨著時間的拉長，療效越顯著，病人也越健康。將這樣的概念應用到教書來，當學生在高一習得的知識，到高三幾乎全忘光時，代表時間沒有發揮應有的效果，也可以說，老師在高一時沒因材施教，開錯藥方。老師的每一種教學方式都是一種藥方，學生學習困難時，老師總會以「良藥苦口」來安撫學生。數學教學難道非良藥苦口不可嗎？讓我們來瞭解一下神秘果這種果實的功用。

天下第一奇果神秘果真的很神秘，它起源於西非，這種水果如果生長在中國，曹操用望梅止渴激勵疲憊又口渴的士兵就起不了效果，「望梅止渴」肯定不會成為今日的成語。



吃了神秘果之後，你的味蕾在半小時內會起很大的改變，凡是酸的水果都會變成甜的，而且越酸感覺起來就越甜，當然甜的仍然是甜的。在神秘果的催化之下，草莓、楊桃、奇異果、檸檬都變成很甜的水果，甚至純的檸檬汁喝起來也是甜的。

如果老師上課的一節課裡能讓學生的學習像吃了神秘果似的，所有數學觀念，公式與推導都變成理所當然與容易的事，那麼學生一定對數學課很感興趣。

最後期勉每位老師在教學上都能散發神秘果的芳香！謝謝。

利用內積與克拉瑪公式

求兩歪斜線的公垂線段的兩端點坐標的公式解法

◎李維昌／國立宜蘭高中

※研究目的：試圖以內積與克拉瑪公式來探求兩歪斜線的公垂線段的兩端點坐標的公式解法。

※研究過程：

已知空間直角坐標系中， O 為原點，兩歪斜線 L_1 與 L_2 分別通過點 A_1 、點 A_2 ， L_1 與 L_2 的方向向量分別為 $\vec{d}_1$ 與 $\vec{d}_2$ ，試求 L_1 與公垂線的交點 B_1 及 L_2 與公垂線的交點 B_2 的坐標。

一、建立二元一次聯立方程組：

1. 設 $\vec{A_1B_1} = t_1 \vec{d_1}$ ， $\vec{A_2B_2} = t_2 \vec{d_2}$ ，

$$\text{則 } \vec{B_1B_2} = \vec{B_1A_1} + \vec{A_1A_2} + \vec{A_2B_2} = -t_1 \vec{d_1} + \vec{A_1A_2} + t_2 \vec{d_2} .$$

2. $\because \vec{B_1B_2} \perp \vec{d_1}$ 且 $\vec{B_1B_2} \perp \vec{d_2}$ ，

$$\therefore \vec{B_1B_2} \cdot \vec{d_1} = 0 \text{ 且 } \vec{B_1B_2} \cdot \vec{d_2} = 0 .$$

$$3. \begin{cases} 0 = \vec{B_1B_2} \cdot \vec{d_1} = -t_1(\vec{d_1} \cdot \vec{d_1}) + \vec{A_1A_2} \cdot \vec{d_1} + t_2(\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}) \\ 0 = \vec{B_1B_2} \cdot \vec{d_2} = -t_1(\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}) + \vec{A_1A_2} \cdot \vec{d_2} + t_2(\vec{d_2} \cdot \vec{d_2}) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t_1(\vec{d_1} \cdot \vec{d_1}) - t_2(\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}) = \vec{A_1A_2} \cdot \vec{d_1} \\ t_1(\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}) - t_2(\vec{d_2} \cdot \vec{d_2}) = \vec{A_1A_2} \cdot \vec{d_2} \end{cases} .$$

二、利用克拉瑪公式求解：

1. 設 $\vec{d_1}$ 與 $\vec{d_2}$ 的夾角為 θ

$$\because \vec{d_1} \text{ 與 } \vec{d_2} \text{ 不平行 } \therefore \sin \theta \neq 0 .$$

$$2. \Delta = \begin{vmatrix} \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 & -\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & -\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \end{vmatrix} = -[\left|\vec{d}_1\right|^2 \left|\vec{d}_2\right|^2 - (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2)^2] = -\left|\vec{d}_1\right|^2 \left|\vec{d}_2\right|^2 \sin^2 \theta \neq 0,$$

由克拉瑪公式得知 (t_1, t_2) 恰有一組解。

$$t_1 = \frac{\begin{vmatrix} \vec{A_1 A_2} \cdot \vec{d}_1 & -\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ \vec{A_1 A_2} \cdot \vec{d}_2 & -\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 & -\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & -\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{A_1 A_2} \cdot \vec{d}_1 & \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ \vec{A_1 A_2} \cdot \vec{d}_2 & \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 & \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \end{vmatrix}},$$

$$t_2 = \frac{\begin{vmatrix} \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 & \vec{d}_1 \cdot \vec{A_1 A_2} \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & \vec{d}_2 \cdot \vec{A_1 A_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 & -\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & -\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 & \vec{d}_1 \cdot \vec{A_2 A_1} \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & \vec{d}_2 \cdot \vec{A_2 A_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 & \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \end{vmatrix}}.$$

三、結論：

$$1. \vec{OB}_1 = \vec{OA}_1 + \vec{A_1 B_1} = \vec{OA}_1 + t_1 \vec{d}_1 = \vec{OA}_1 + \frac{\begin{vmatrix} \vec{A_1 A_2} \cdot \vec{d}_1 & \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ \vec{A_1 A_2} \cdot \vec{d}_2 & \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 & \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \end{vmatrix}} \vec{d}_1,$$

$$2. \vec{OB}_2 = \vec{OA}_2 + \vec{A_2 B_2} = \vec{OA}_2 + t_2 \vec{d}_2 = \vec{OA}_2 + \frac{\begin{vmatrix} \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 & \vec{d}_1 \cdot \vec{A_2 A_1} \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & \vec{d}_2 \cdot \vec{A_2 A_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 & \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \end{vmatrix}} \vec{d}_2.$$

四、應用：

$$\text{空間二歪斜線：} L_1: \frac{x-11}{4} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+7}{-1}, \quad L_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-6}{-2},$$

$\vec{d}_1 = (4, -3, -1)$, $\vec{d}_2 = (3, -4, -2)$, $\vec{OA}_1 = (11, -5, -7)$, $\vec{OA}_2 = (-5, 4, 6)$ ， O 為空間直角坐標系的原

點， $\vec{A_1 A_2} = (-16, 9, 13)$ 。試求：

1. L_1 與公垂線的交點 B_1 。

2. L_2 與公垂線的交點 B_2 。

解：

$$t_1 = \frac{\begin{vmatrix} -104 & 26 \\ -110 & 29 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 26 & 26 \\ 26 & 29 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -52 & 26 \\ -52 & 29 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 26 & 26 \\ 26 & 29 \end{vmatrix}} = -2, \quad t_2 = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 104 \\ 26 & 110 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 26 & 26 \\ 26 & 29 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 52 \\ 26 & 58 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 26 & 26 \\ 26 & 29 \end{vmatrix}} = 2$$

$$\overrightarrow{OB_1} = (11, -5, -7) + (-2) \cdot (4, -3, -1) = (3, 1, -5) ,$$

$$\overrightarrow{OB_2} = (-5, 4, 6) + 2 \cdot (3, -4, -2) = (1, -4, 2) 。$$

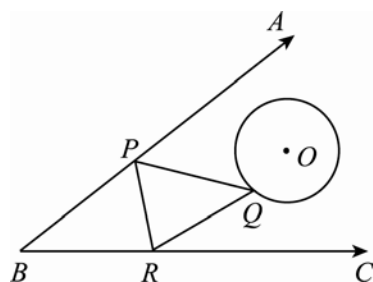
一道數學能力競賽的口試題解答

◎李湘慧 / 國立宜蘭高中

今年第一考區（花蓮高中舉行）數學能力競賽，考了如下的作圖口試題：

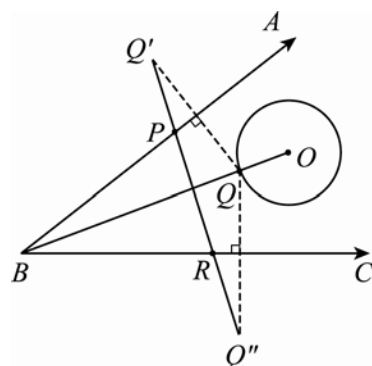
〈題目〉

圓 O 為銳角 ABC 內一定圓，在 $\overrightarrow{BA}$ ，圓 O ， $\overrightarrow{BC}$ 上分別求出一點 P, Q, R ，使 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP}$ 最短。



★ 解 〈做法〉

1. 連 $\overline{BO}$ 交圓 O 於點 Q 。
2. 做點 Q 以 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 為對稱軸的對稱點，分別得 Q' 和 Q'' 。連 $\overline{Q'Q''}$ 交 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 於 P, R 兩點，則 P, Q, R 即為所求。



〈證明〉

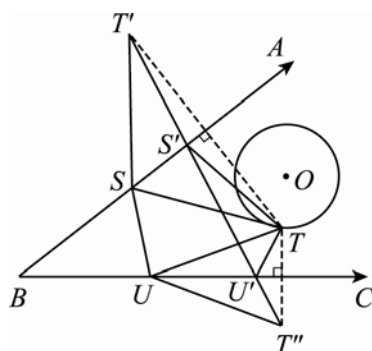
1. 令 T 為圓 O 上一點，而點 S, U 分別為 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 上一點。做點 T 以 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 為對稱軸的對稱點，分別為 T' 與 T'' 。再連 $\overline{T'T''}$ ，且 $\overline{T'T''}$ 分別交 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 於 S' 與 U' 。
2. 因為 T' 與 T'' 為點 T 對 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 的對稱點，所以

$$\overline{ST} = \overline{ST'}, \quad \overline{TU} = \overline{T''U}, \quad \overline{S'T} = \overline{S'T'}, \quad \overline{TU'} = \overline{T''U'},$$

$$\text{故 } \overline{ST} + \overline{TU} + \overline{US} = \overline{ST'} + \overline{UT''} + \overline{US},$$

$$\overline{S'T} + \overline{TU'} + \overline{U'S'} = \overline{S'T'} + \overline{T''U'} + \overline{U'S'} = \overline{T'T''}$$

（銳角 ABC 才成立）。



因為兩點間以直線距離最近，所以 $\overline{ST} + \overline{TU} + \overline{US} \geq \overline{T'T''}$ 。因此，任取圓上一點 T ， S' 與 U' 為所求。

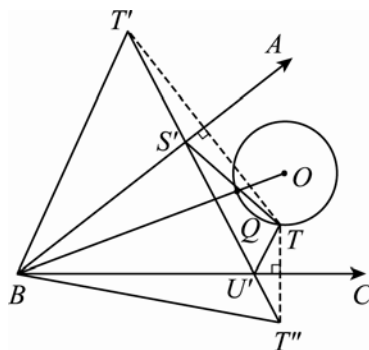
3. 接下來，我們要在圓上找出一點 T ，使該點的兩對稱點 T' 與 T'' 間的距離最短。同樣地，因為對稱關係， $\overline{BT'} = \overline{BT} = \overline{BT''}$ 且 $\angle T'BA = \angle ABT, \angle T''BC = \angle CBT$ 。

故 $\angle T'BT'' = 2\angle ABC$ 為定值。

利用餘弦定理得知，

$$\begin{aligned}\overline{T'T''} &= \sqrt{\overline{BT'}^2 + \overline{BT''}^2 - 2\overline{BT'}\overline{BT''}\cos(2\angle ABC)} \\ &= \sqrt{2\overline{BT}^2(1 - \cos(2\angle ABC))}.\end{aligned}$$

由上式可知，當 $\overline{BT}$ 最短時， $\overline{T'T''}$ 有最小值。即當點 T 為 $\overline{OB}$ 與圓 O 的交點 Q 時，故得證。



複數與三角形面積

◎賴勇仁／慧燈高中、吳孝仁／政大附中

朋友問我一個與面積有關的幾何問題，當下我沒能回答的出來，但我覺得它不是難的，我們一致認為寫來饒口。在深入探索的過程中，藉由複數得到一個簡明且能推廣的方式，同時為平分三角形面積問題提供一個方法，於是成了這篇文章。

利用複數來處理平面幾何問題美不勝收，相關內容無數。本文絕非創見，只能算是個人的讀書筆記，願分享給各位先進作為深入教學或概念連結的素材。

我們先做一點符號上的約定：

- (1) 大寫英文字母 $A, B, \dots$ 表示平面上的點，也代表一個複數，甚至也代表始點為 O 的有向線段，其中 O 為原點；
- (2) $\text{Arg}(Z)$ 為複數 Z 的主幅角，這裡約定複數的主幅角在 $[-\pi, \pi)$ 範圍內；
- (3) $\text{Im}(Z)$ 為複數 Z 的虛部。

三角形的有向面積

會談這件事是因為平面上給出 A, B 兩點的坐標，計算 $\triangle AOB$ 的面積要用到 4 個符號 (A, B 的 x, y 坐標)，還有個絕對值卡在外面，絕對值總是不好運算的，而去掉絕對值又要考慮 A, B 相對的位置。敘述實在太麻煩了，所以我想把這件事情合在一起講。

考慮 A, O, B 三點，符號 $a(AOB)$ 表示三角形 AOB 的有向面積， $\angle AOB$ 表示以 OA 為始邊、 OB 為終邊的有向角。

如果 $\angle AOB \in [0, \pi)$ ，規定 $a(AOB) = \Delta AOB$ ；

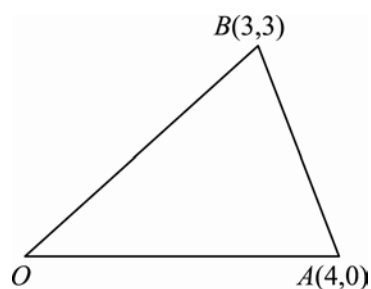
如果 $\angle AOB \in [-\pi, 0)$ ，規定 $a(AOB) = -\Delta AOB$ 。

其中， ΔAOB 被我們拿來當作三角形 AOB 的絕對面積，永遠是非負的。

如右圖， $a(AOB) = 6$ ； $a(BOA) = -6$

很自然發現， $a(AOB)$ 的正負號是跟著 $\sin \angle AOB$ 的正負號而定，所以已知兩邊與夾角的面積公式依然適用。於是

$$\begin{aligned} a(AOB) &= \frac{1}{2} |A| |B| \sin \angle AOB = \frac{1}{2} |A| |B| \sin \text{Arg}\left(\frac{B}{A}\right) \\ &= \frac{1}{2} |A|^2 \left(\frac{|B|}{|A|} \sin \text{Arg}\left(\frac{B}{A}\right) \right) = \frac{1}{2} |A|^2 \text{Im}\left(\frac{B}{A}\right) \\ &= \frac{1}{2} |A|^2 \left(\frac{\frac{B}{A} - \overline{\frac{B}{A}}}{2i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{A}B - A\overline{B}}{2i} \right) = \frac{\text{Im}(\overline{A}B)}{2} \end{aligned}$$



所以， $a(AOB) = \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{AB})$ ，同理 $a(BOA) = \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{BA})$ ，讀者可以用上面的例子做為檢驗，只要將坐標改為對應的複數即可。另外，如果頂點落在 P ，也有平行的結論，

$$a(APB) = \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{(A-P)}(B-P))$$

讀者是否同意形式上簡潔許多呢？接下來，就利用這個工具來處理下面幾個問題：

1. 邊長為 1 的正六邊形 $ABCDEF$ ， P 為內部一點，證明：

$$\triangle APB + \triangle CPD + \triangle EPF = \triangle BPC + \triangle DPE + \triangle FPA \quad (1)$$

證明：

不妨將六個頂點依序設為 $1, w, w^2, w^3, w^4, w^5$ ，其中 $w = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6}$ ；另外，設正六邊形的中心為 O 。因為 P 在內部，所以 $\triangle APB = a(APB)$, $\triangle CPD = a(CPD)$, $\dots$ 。分別將 (1) 的左右兩式寫出來：

$$\begin{aligned} \text{左式} &= a(APB) + a(CPD) + a(EPF) \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Im}[\overline{(1-P)}(w-P) + \overline{(w^2-P)}(w^3-P) + \overline{(w^4-P)}(w^5-P)] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Im}[3|P|^2 - (1+w^2+w^4)P - (w+w^3+w^5)\overline{P} + 3w] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ 3|P|^2 - \text{Im}[(1+w^2+w^4)P] - \text{Im}[(w+w^3+w^5)\overline{P}] + \text{Im}[3w] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同理，右式} &= a(BPC) + a(DPE) + a(FPA) \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Im}[\overline{(w-P)}(w^2-P) + \overline{(w^3-P)}(w^4-P) + \overline{(w^5-P)}(1-P)] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ 3|P|^2 - \text{Im}[(w+w^3+w^5)P] - \text{Im}[(1+w^2+w^4)\overline{P}] + \text{Im}[3w] \} \end{aligned}$$

因為 $1 + w^2 + w^4 = w + w^3 + w^5 = 0$ ，所以我們得到

$$\triangle APB + \triangle CPD + \triangle EPF = \triangle BPC + \triangle DPE + \triangle FPA = \frac{1}{2} \{ 3|P|^2 + \text{Im}[3w] \}$$

很明顯地，如果 P 是任意點，而考慮的是有向面積，我們也有一般的結論：

$$a(APB) + a(CPD) + a(EPF) = a(BPC) + a(DPE) + a(FPA) = \frac{1}{2} \{ 3|P|^2 + \text{Im}[3w] \}$$

在上述問題中，正六邊形的頂點是很對稱的分布，至少是對中心對稱。所以如果要再做推廣，我們將對象考慮為有對稱中心的六邊形 $ABCDEF$ ，並且假設中心為 O ，即 O 為 AD, BE, CF 中點。但是，對任意點 P ，經過計算後發現 $a(APB) + a(CPD) + a(EPF) = a(BPC) + a(DPE) + a(FPA)$ 未必正確，所以我們提出第 2 個問題如下：

2. 具有中心 O 的六邊形 $ABCDEF$ ， P 點滿足

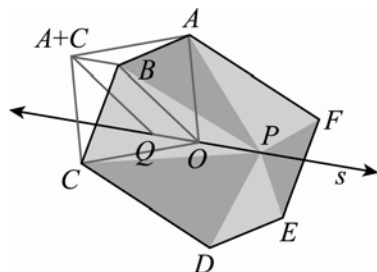
$$a(APB) + a(CPD) + a(EPF) = a(BPC) + a(DPE) + a(FPA) \quad (2)$$

則 P 的軌跡為何？

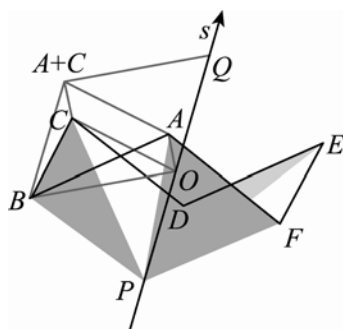
首先，因為 O 為 AD, BE, CF 中點，所以 $D = -A, E = -B, F = -C$ ，接著逆推(2)，來尋求等式的充要條件。

$$\begin{aligned} a(APB) + a(CPD) + a(EPF) &= a(BPC) + a(DPE) + a(FPA) \\ \Leftrightarrow \operatorname{Im}[(\overline{A-P})(B-P) + \overline{(C-P)}(D-P) + \overline{(E-P)}(F-P)] - \\ &\quad \operatorname{Im}[(\overline{B-P})(C-P) + \overline{(D-P)}(E-P) + \overline{(F-P)}(A-P)] = 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Im}\{[(\overline{A-P})(B-P) + \overline{(C-P)}(-A-P) + \overline{(-B-P)}(-C-P)] - \\ &\quad [(\overline{B-P})(C-P) + \overline{(-A-P)}(-B-P) + \overline{(-C-P)}(A-P)]\} = 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Im}[(-A+B-C)P - (-A+B-C)\overline{P}] &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Im}[(A-B+C)P - (A-B+C)\overline{P}] &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Im}[(A-B+C)P] &= 0 \\ \Leftrightarrow a(QOP) = 0 \text{ 其中 } Q = A-B+C \end{aligned}$$

最後一個式子 $a(QOP) = 0, Q = A - B + C$ 的幾何意義是， QOP 是退化的三角形，即 Q, O, P 三點共線，而 Q 點的位置在 $A - B + C$ 處（這裡考慮成向量的運算）。所以結論就呼之欲出了，請看下圖：直線 s 就是 P 點的軌跡；其中 $A, A+C, C, O$ 四點構成平行四邊形、 $O, B, A+C, Q$ 四點構成平行四邊形。



注意到一件事情，所謂具有中心 O 的六邊形 $ABCDEF$ ，形狀完完全全是由連續三個頂點 A, B, C 以及中心 O 所決定。有時候不一定長得像凸六邊形，一般我們稱為六點形，如下圖：



DPE 與 FPA 雖有重疊的部分，但是不影響個別 $a(DPE)$ 與 $a(FPA)$ 的值；再者，我們推導的過程完全無關 A, B, C 及 O 的位置。所以，就有更一般性的結論：

具有中心 O 的六點形 $ABCDEF$ ，其中 $Q=A+B+C$ ，則直線 OQ 上任一點 P 滿足

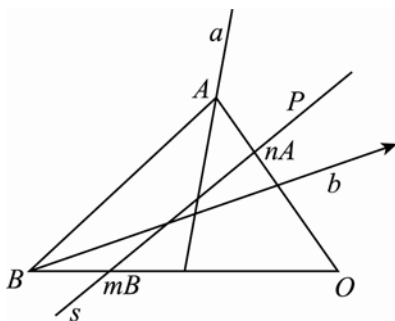
$$a(APB) + a(CPD) + a(EPF) = a(BPC) + a(DPE) + a(FPA)$$

第 3 個問題是想藉由面積的複數表示法與平面上點的共線性質，來處理三角形平分面積問題。但是這個過程其實是很偏向代數角度的。

3. 尺規作圖

非退化三角形 AOB ， P 點異於 A, O, B ，過 P 點作直線平分 $\triangle AOB$

如下圖，不失一般性，假設 P 點落在右上方以直線 a, b 為邊界的區域內， a, b 分別是過 A, B 點的中線。基本上我們就是在找直線 OA 上一點 $A' = nA$ 以及直線 OB 上一點 $B' = mB$ ，使得 P, A', B' 三點共線而且 $\triangle A'OB' = \frac{1}{2}\triangle AOB$ 。所以問題就圍繞在如何決定正實數 m, n 的值。



由面積等式 $\triangle A'OB' = \frac{1}{2}\triangle AOB$ ，可得

$$\text{Im}(\overline{A'B'}) = \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{AB})$$

$$\text{Im}(mn\overline{AB}) = \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{AB}) \Leftrightarrow mn = \frac{1}{2}$$

再者，因為 A, O, B 三點不共線，所以存在唯一的序對 (x, y) 使得 $P = xA + yB$ 。另外， P, nA, mB 三點共線，所以存在實數 $\alpha + \beta = 1$ 使得 $P = \alpha(nA) + \beta(mB)$ 。所以得到 $\alpha n = x, \beta m = y$ ，從而 $\alpha\beta = 2xy$ 。

注意到對上圖 P 點所在的位置而言， $x \geq y, xy \leq \frac{1}{8}$ （註 1）， $\alpha \geq \beta$ （註 2）。所以由公式解可得

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 - 8xy}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{1 - 8xy}}{2}$$

因此

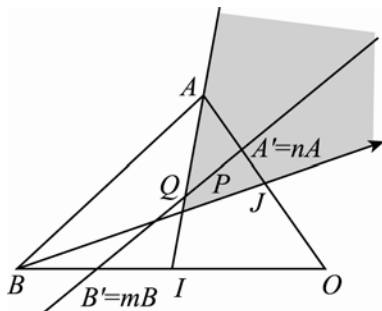
$$n = \frac{2x}{1 + \sqrt{1 - 8xy}}, m = \frac{2y}{1 - \sqrt{1 - 8xy}}$$

注意到 $x\vec{A}$ 其實是 $\vec{OP}$ 在 $\vec{OA}$ 上的分量。同理， $y\vec{B}$ 就是 $\vec{OP}$ 在 $\vec{OB}$ 上的分量。因此，上述的實數 n, m 便可以藉由尺規作圖完成。同樣地，也能藉由尺規作圖找到 $A' = nA$, $B' = mB$ 兩點的確切位置。

*註 1： $P = xA + yB$ 落在文中所描述的區域時，則 x, y 滿足 $\begin{cases} 2x + y \geq 1 \\ x + 2y \leq 1 \end{cases}$

從而 $x \geq y$, $xy \leq \frac{1}{8}$ 。

*註 2：



就 P 點所在的區域而言，因為 P, nA, mB 三點共線，且平分三角形面積，所以 A', B' 一定是 AJ 與 BI 的內分點，其中 I, J 分別是 A, B 的中點。也就是說 $\frac{1}{2} < m, n < 1$ 。又因為

$mn = \frac{1}{2}$ ，由算幾不等式得到 $m + \frac{n}{2} > 1$ 。我們將證明： $B'P > PA'$ ，這件事情與

$P = \alpha(A') + \beta(B')$, $\alpha > \beta$ 是同義的。

第一種情形：如果 P 是 B', A' 的外分點，當然 $B'P > PA'$ 。第二種情形：如果 P 是 B', A' 的內分點，如上圖所示，那麼直線 $A'B'$ 一定交中線 AI 於 Q 。由 Menelaus 定理得到

$$\frac{B'Q}{QA'} = \frac{AO}{A'A} \cdot \frac{IB'}{OI} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{m - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2m-1}{1-n} > 1$$

因此 $B'P > PA'$ 。

test

台北縣九十七學年度縣立高中職數學科

競賽試題（填充卷）

一、考量道路的摩擦係數與路口寬度的因素，某交叉路口的「閃黃燈秒數」 $f(v)$ （秒）應以

$$\frac{v}{10} + \frac{90}{v} + 1$$

這公式規範較適宜，這裡的 v （公里／小時）代表該路段的最高時速限制。問：將最高時速限制 v （公里／小時）訂為 _____ 時，這交叉路口的「閃黃燈秒數」會剛好是 7 秒。

二、數學兼哲學家伽利略，於公元 1632 年出版《對話錄》一書觸怒教廷，在他 70 歲時，接受宗教法庭審判且於該年被判終身監禁。出版《對話錄》一書到在獄中過世是伽利略人生中最灰暗的 10 年。

年輕的伽利略發明十倍率的望遠鏡，並在隔年就發現木星的歐羅巴衛星。發現衛星到接受審判剛好是他被監禁時間的三倍。事實上，發明望遠鏡到出版《對話錄》算是伽利略的黃金歲月，這段時間正好是他發現衛星時年齡的一半。

試問：伽利略在公元 _____ 年發現歐羅巴衛星。

三、設三角形的三邊邊長為 4 公分，7 公分與 a 公分。問： a 可能的整數值有 _____ 個。

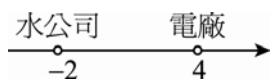
四、懷特海是英國數理邏輯學家，曾執教於劍橋大學與牛津大學。下面是他給他的學生出的一道題目：

甲、乙、丙三人各有硬幣若干枚。甲將自己的部份硬幣分給乙、丙，使他們的硬幣各增長了一倍；之後，乙將自己的部份硬幣分給甲、丙，使他們的硬幣各增長了一倍；最後，丙將自己的部份硬幣分給甲、乙，使他們的硬幣各增長了一倍。經過這樣三次的重新分配之後，三人的硬幣都是 8 枚。請問甲原有硬幣 _____ 枚。

五、化簡

$$3(4\cos^3 35^\circ - 3\cos 35^\circ) - 4(4\cos^3 35^\circ - 3\cos 35^\circ)^3 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

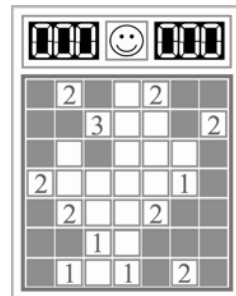
六、政府在筆直的路上設立一座電廠與自來水公司，其坐標如下圖所示：



為了回饋這筆直路上的住戶，規定：「基本費以住戶到水公司的距離與到電廠距離的兩倍相加來計算。」

試寫出沿路基本費不超過 15 元的區域 _____。

七、微軟電腦軟體的遊樂場有一種叫「踩地雷」的遊戲，相信大部分的人都玩過。如下圖所示，白色區域是已探勘沒有地雷的區域，數字代表該區域的四周灰色地帶所佈的地雷數，而且每塊灰色區域至多佈一顆地雷。



問：總共佈 _____ 顆地雷。

八、若多項式方程式 $x^3 - 2x^2 + kx - 6 = 0$ 有兩個根的和為 0，則 $k =$ _____。

test

台北縣九十七學年度縣立高中職數學科

競賽試題（計算、證明題卷）

一、某年二月剛好有四天是星期三，而且這四天的日期數字和為 62。

(1)試完成該月的日曆，如下圖所示：

一	二	三	四	五	六	日

(2)該年的元旦（即一月一日）是星期幾。

二、中國明代數學家朱載堉被譽為鋼琴理論鼻祖，他在 1581 年創立十二平均律理論：

就是用第一弦的長度除以 $\sqrt[12]{2}$ 得到第二個音的弦長，將第二個弦的長度除以 $\sqrt[12]{2}$ 得到第三個音的弦長，以下用相同的方法求得各個音的弦長。設第一個音的弦長為 1：

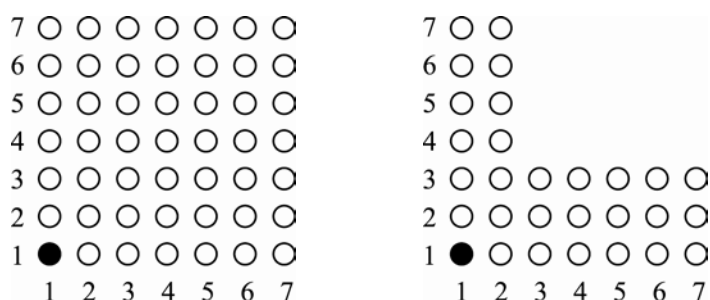
(1)已知第 m 個音的弦長為 $\frac{1}{4}$ ，求 m 的值。

(2)經測量後發現第 n 個音的弦長最接近 $\frac{1}{3}$ ，求正整數 n 的值。

三、有一隻好細菌與一群壞細菌在一起，每過一秒鐘，每隻好細菌會遊說一隻壞細菌讓它改邪歸正，變成好細菌，但是剩下的每隻壞細菌卻會分裂成 2 隻壞細菌。舉例來說，如果開始時有 1 隻好細菌與 7 隻壞細菌，那麼 1 秒鐘後變成 2 隻好細菌與 12 隻壞細菌，2 秒鐘後變成 4 隻好細菌與 20 隻壞細菌…。

- (1) 如果開始時有 1 隻好細菌與 7 隻壞細菌，那麼最後好細菌是否有辦法讓全部的壞細菌改邪歸正呢？（可以的話，寫出幾秒後達到，不能的話，說明理由）
- (2) 如果開始時有 1 隻好細菌與 100 隻壞細菌，那麼最後好細菌是否有辦法讓全部的壞細菌改邪歸正呢？

四、在下圖中，有 1 顆黑色氣球，48 顆白色氣球，當抓住坐標為(3, 4)的白色氣球時，此氣球向右及往上區域的白色氣球都會消失，如下圖的右圖所示：

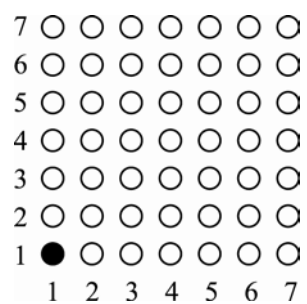


現在讓我們來玩這道抓氣球比賽：

在下圖中，有 1 顆黑色氣球，48 顆白色氣球，甲、乙兩人輪流抓氣球，規則如下：

- (1) 每次必須抓台面上還存在的一顆白色氣球。
- (2) 當白色氣球被抓時，此氣球向右及往上區域的白色氣球都會消失。

(3) 在抓完之後，只剩黑色氣球（即所有白色氣球都消失）的人獲勝



試問：先抓氣球或者後抓氣球者有必勝的策略，詳述其理由。

台北縣九十七學年度縣立高中職數學科競賽試題

答案

填充卷參考答案

一	二	三	四
30	1610	7	13
五	六	七	八
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-3 \leq x \leq 7$	11	3

計算、證明卷參考答案

一、(1)	一、(2)	二、(1)	二、(2)
略	三	25	20
三、(1)	三、(2)	四、	
可以	可以	略	

台北縣九十七學年度縣立高中職數學科競賽試題

(計算、證明題卷) 詳解

一、因為每星期有七天，所以可設二月的四個星期三分別為 a ， $a+7$ ， $a+14$ ， $a+21$ 。根據假設

$$a + (a+7) + (a+14) + (a+21) = 62 ,$$

解得 $a=5$ 。

(1) 二月的日曆為

一	二	三	四	五	六	日
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28		

(2) 由二月的月曆知元月 31 日是星期五，元月 24，17，10，3 日也都是星期五，故元旦為星期三。

二、(1) 根據朱載堉理論

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2^{m-1}}} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{\frac{m-1}{12}} = 4 = 2^2 ,$$

即 $\frac{m-1}{12} = 2$ ，解得 $m=25$ 。

(2) 根據朱載堉理論

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2^{n-1}}} \approx \frac{1}{3} \Rightarrow 2^{\frac{n-1}{12}} \approx 3 .$$

兩邊取對數，得

$$\log 2^{\frac{n-1}{12}} \approx \log 3 \Rightarrow n-1 \approx \frac{12 \log 3}{\log 2} .$$

將 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ 代入, 估得

$$n-1 \approx \frac{12 \cdot 0.4771}{0.3010} \approx 19.0206 .$$

故最可能的 n 值為 20。

三、(1)可以, 7 秒後達到 (直接計算得到)。

(2)設第 n 秒後有好細菌 a_n 隻與壞細菌 b_n 隻, 根據題意得知 $a_0 = 1$, $b_0 = 100$,

$a_1 = 2$, $b_1 = 99 \times 2 = 198$ 及

$$a_{n+1} = 2a_n , \quad b_{n+1} = 2(b_n - a_n) = -2a_n + 2b_n .$$

我們將上述關係用矩陣乘積表示, 得

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} .$$

因此

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = 2^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = 2^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix} .$$

由

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} ; \dots$$

可知

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix} .$$

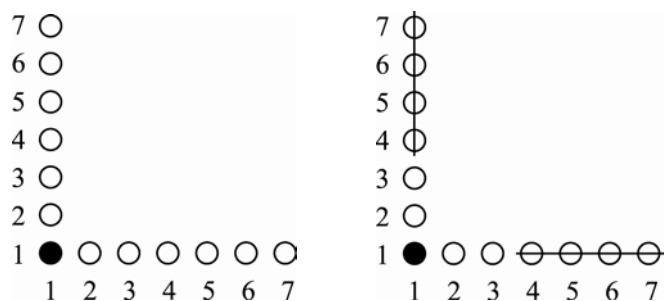
故

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = 2^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix} = 2^n \begin{bmatrix} 1 \\ 100 - n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n \\ (100 - n)2^n \end{bmatrix} ,$$

即 100 秒後有好細菌 $a_{100} = 2^{100}$ 隻與壞細菌 $b_{100} = 0$ 隻。

四、首先甲抓坐標為(2, 2)的氣球，此時只剩黑色氣球及正向右與正向上的白色氣球，

如下圖中的左圖：



接著輪到乙抓氣球，假設乙抓坐標為(4, 1)的氣球，那麼使用對稱的技巧，甲只需抓坐標為(1, 4)的氣球就可以形成如右圖的形狀。接下來甲都採取對稱抓氣球的手法，一定可以抓到最後一顆白色氣球，即甲會獲勝。



專欄

動手玩數學

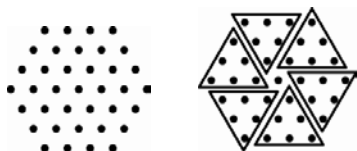
◎許志農／台灣師範大學數學系



遊戲 41

☆☆

下圖中的左圖是小茗用黑點畫出邊上有 4 個黑點的正六邊形，而右圖則是小茗用六個正三角形將左圖做規律的分割：



如果小茗畫的是邊上有 n 個黑點的六邊形，那麼這個六邊形總共用了幾個黑點？

玩鎖 · 玩索

這是規律的探索問題，從切割的規律計算所使用的點數。



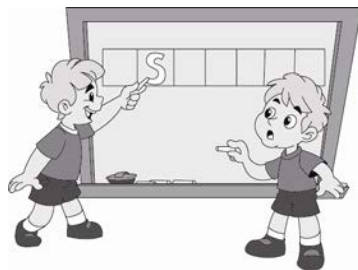
遊戲 42

☆☆☆☆

甲、乙兩人在 1×7 格子上玩 SOS 的遊戲，其規則如下：

- (1) 甲、乙輪流在格子內寫 S 或 O 的英文字母，甲先，乙後。
- (2) 誰寫完後，出現三個連續格的字母為 SOS 者勝。

問：甲或乙有必勝的策略？



玩鎖 · 玩索

這是改編自 1999 年美國奧林匹亞數學競賽的試題，算是推理試題。探討格子數為多少時，甲有必勝的策略，是不錯的挑戰。

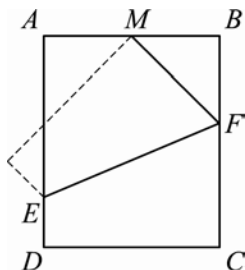


將長 $\overline{AB} = 240$ ，寬 $\overline{BC} = 288$ 的長方形紙張對折，讓頂點 C 剛好落在線段 $\overline{AB}$ 的中點 M

遊戲 43 上，如下圖所示：

☆☆☆

☆☆



已知 $\overline{EF}$ 是折線，求下列線段的長度：

(1) 線段 $\overline{CM}$ 。

(2) 線段 $\overline{EF}$ 。

~~~~~玩鎖 · 玩索~~~~~

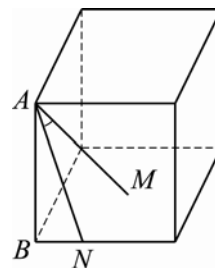
這是古代日本的一道數學問題。紙張的對折與平面上的線對稱（對折線對稱）是一樣的概念，利用這樣的觀念可以求得所要的線段長度。



如下圖所示， A 是邊長為 7 的正立方體之頂點， M 是底面上的中點， N 是稜邊上的一

遊戲 44 點：

☆



已知 $\overline{BN} = 1$ ，求 $\angle MAN$ 。

~~~~~玩鎖 · 玩索~~~~~

正立方體是空間中最常引用的幾何模型，了解正立方體成為學習空間幾何的必經之路。

動手玩數學~破解秘笈

第10期

遊戲 37

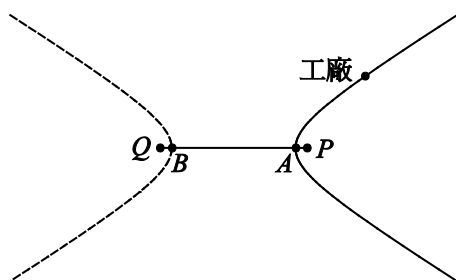
(1) 事實上， $A = a + b + ab = B$ 。

(2) 整理出來的等式為

$$\begin{aligned} & \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}} \end{aligned}$$

遊戲 38

如下圖所示，設雙曲線的貫軸長 $\overline{AB} = 2a$ ：



因為聲音 5 秒鐘可以傳遞 $5 \times 340 = 1700$ 公尺，
所以貫軸長

$$\overline{AB} = 2a = 1700.$$

又因為一支雙曲線的頂點與 P 村的距離為 150 公尺，所以

$$\overline{AP} = 150.$$

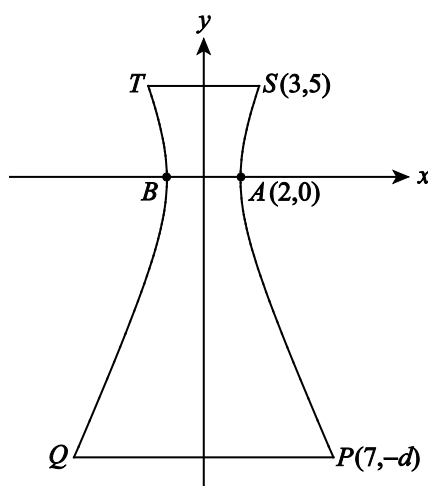
故 P, Q 兩村的距離為

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \overline{AB} + 2\overline{AP} \\ &= 1700 + 2 \cdot 150 = 2000 \text{ (公尺)}. \end{aligned}$$

從解題過程中知道： P 村離工廠較近。

遊戲 39

設雙曲線的中心在原點，貫軸在 x 軸，此時
 $A(2,0)$ ， $S(3,5)$ ， $P(7,-d)$ ，如下圖所示：



令雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，因為通過
 $A(2,0)$ ，所以

$$\frac{2^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1,$$

即 $a^2 = 4$ 。又因為通過 $S(3,5)$ ，所以

$$\frac{9}{4} - \frac{25}{b^2} = 1,$$

即 $b^2 = 20$ 。因此雙曲線方程式為

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

將 $P(7,-d)$ 代入，得

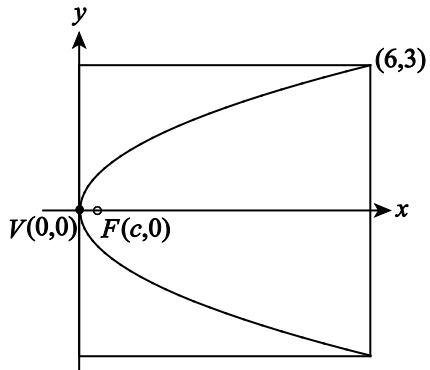
$$\frac{49}{4} - \frac{d^2}{20} = 1,$$

解得 $d = \pm 15$ （負不合）。

故頸部 AB 與底部 PQ 的距離為 $d = 15$ 。

遊戲 40

如下圖所示，令頂點 $V(0,0)$ ，焦點 $F(c,0)$ ，根據題意，拋物線會通過點 $(6,3)$ ：



因為拋物線方程式為

$$y^2 = 4cx,$$

又通過點 $(6,3)$ ，所以

$$3^2 = 4c \cdot 6,$$

解得 $c = \frac{3}{8}$ 。

故應該將燈泡安置於離正方形左邊 $\frac{3}{8}$ 的位置。