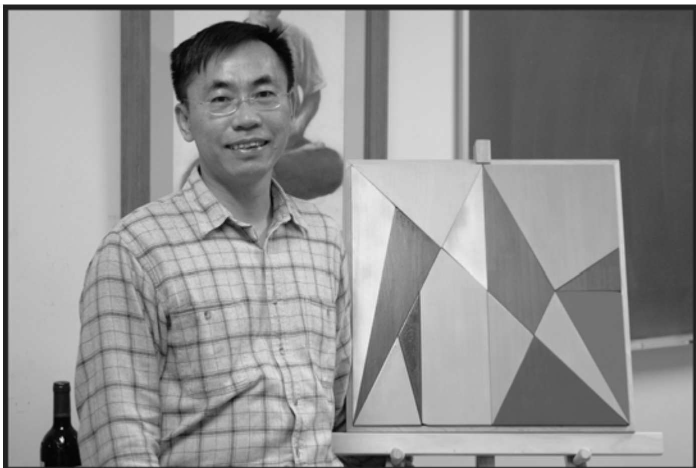
數學美拾趣

◎許志農／台灣師範大學數學系

我的高中同學寄給我一封電子郵件，信裡講了一則微軟總裁比爾‧蓋茲的有趣故事。比爾‧蓋茲是一位脾氣大，很有錢且捐錢慷慨，又很忙碌的人，他的行程都是一年前敲定的，而且敲定了就不准改變。大陸是個很大的市場，比爾‧蓋茲一直想訪問大陸見見其總書記，於是透過中國的微軟負責人安排，就安排在隔年的二月五日。時間近了，微軟負責人才發現那天是大年初三，心想不妙，過年期間應該見不到總書記，於是通知蓋茲的秘書更改行程。蓋茲很不高興，在北京的首都機場斥責中國的微軟負責人：「我的行程都是一年前就排定的，而且不可以更改，這次算是破例。」而中國的微軟負責人幽默的回答：「中國的新年是五千年前就排定的，也沒辦法更改。」蓋茲只好莫可奈何的苦笑。今天的主題——數學，是盤古開天以來就存在了，說起來有點奇怪，我們從小到大都一直在學這早已存在的數學，更奇怪的是「大部分的學生都沒能學好數學，而且很難欣賞數學。」《數學美拾趣》就是嘗試帶領大家來欣賞各位所學過的數學之美。

既然是欣賞數學之美，那麼態度是很重要的。在這裡引用朱光潛《談美》這本書的一小段故事，書裡談到商人、學者及畫家三種人用三種不同的態度去欣賞同一棵古松。商人想的是這棵古松的木材價值，它可以賣多少錢；學者想的是這棵古松是否為新品種，前人沒有發現過的科別；而畫家什麼事都不管，只是拿畫筆忠實的把古松畫下來。很清楚的，商人跟學者對古松的態度是有所為而為，商人想求利，而學者為了爭名；但是畫家對古松的態度卻是無所為而為，僅僅欣賞古松的美而已。希望各位欣賞數學的態度能跟畫家一樣，無所為而為，就是只為了欣賞。

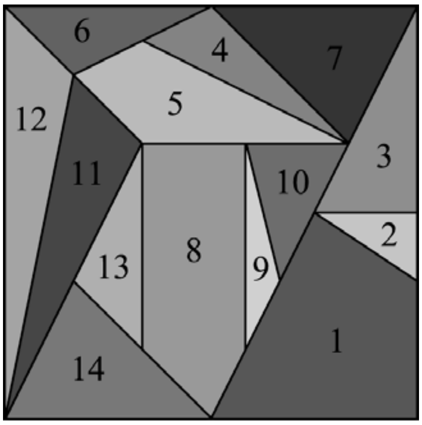
1 許教授與阿基米德的胃痛拼圖合影



數缺形時少直覺，
形少數時難入微。

在加州史丹福大學同步輻射實驗室，古文物復原專家運用紫外光與數位圖像電腦處理技術，讓阿基米德發明的一道遊戲重現天日。1998 年 10 月 30 日，《紐約時報》頭版登了一則報導：紐約佳士得拍賣會上，有一本其貌不揚的古書以美金兩百萬的高價成交。從外表看，這本書就像是中世紀某位修士的祈禱書，磨損不堪，佈滿燒焦、水漬、發霉的痕跡，然而在祈禱文的下方，隱約可看見幾乎被擦拭掉的、傳抄自古代科學家阿基米德的抄本。這祈禱書是教士約翰‧麥隆納斯於公元 1229 年 4 月 14

日抄寫，想在耶穌復活周年日當作禮物獻給教會。羊皮紙從古代中世紀開始使用，由於價值極為貴重，通常經過皮面刮削後重新書寫，被稱為再生羊皮紙，麥隆納斯就是將祈禱文書寫在再生羊皮紙上。透過高科技的掃瞄，祈禱書最後一頁原本是阿基米德稱為《胃痛》的一篇文章。該文章並非談身體的疼痛，而是在論述一道組合學的問題，而且附了一個正方形的插圖。



這拼圖一說是阿基米德發明的，也有人認為更早之前就被發明，阿基米德只是研究過它而已。現在只有兩條線索知道這拼圖，其一是從阿拉伯文中發現這個拼圖，在這個方向上，大都把它看成類似中國的七巧版，當成一種益智遊戲，隨意的拼出各種造型的東西；另一條線索是從一本再生羊皮書所讀出的阿基米德手稿，在這手稿中，可以確定的是：阿基米德把胃痛拼圖當成一道組合問題研究。有幾組不同的組合學家都確認出，一共有

17152

種拼法。左圖就是眾多不同拼法中的一種，也是很困難的一種。

阿基米德的胃痛拼圖會有這樣多的不同拼法，應該不是運氣好發現的，而是精心設計得到的，唯有將幾何與代數融合在一起，才能發明如此巧妙而多變的拼圖。接下來讓我們來談論另一件幾何與代數交融的傑作。

一百多年前（西元 1899 年），皮克發現並證明了三角形面積的一個有趣公式：

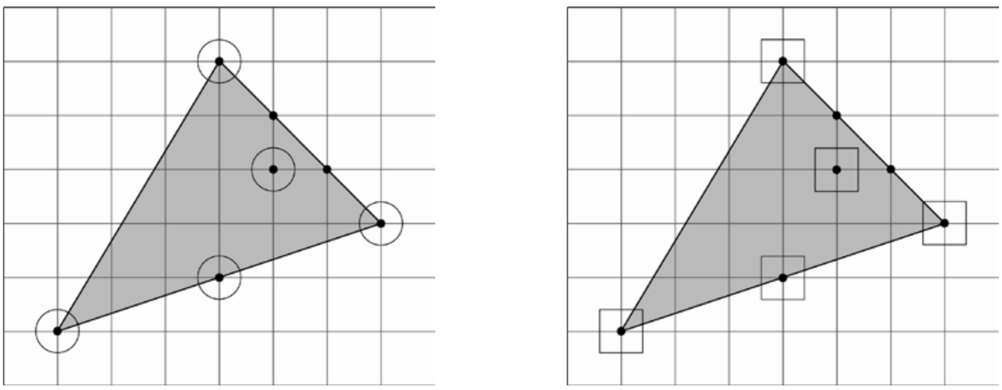
$$\frac{1}{2}S+I-1.$$

這個公式是當三角形的三個頂點都落在格子點上時才成立的，而且符號S代表落在三角形邊上的格子點數，符號I代表落在三角形內部的格子點數。舉例來說，下圖中的三角形邊上一共有 6 個格子點，內部有 10 個格子點，即

$$S=6,\ I=10\,.$$

根據皮克公式，三角形的面積為

$$\frac{1}{2}\times 6+10-1=12\,.$$

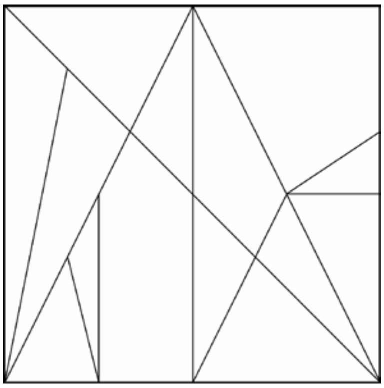


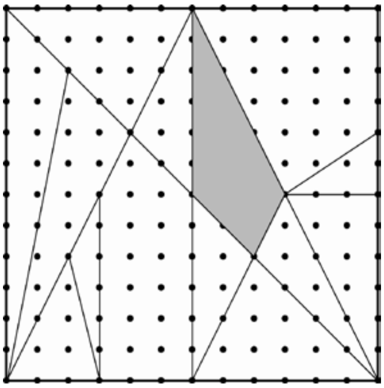
〈皮克公式之我譯〉

每個數學公式發現之前總是有它的雛形或基本想法，究竟皮克是透過怎樣的創意發現了面積公式，我們不得而知。但是，將上圖想成鋪地磚的想法，似乎可以給我們皮克公式之合理性的一點啟發。

習題：

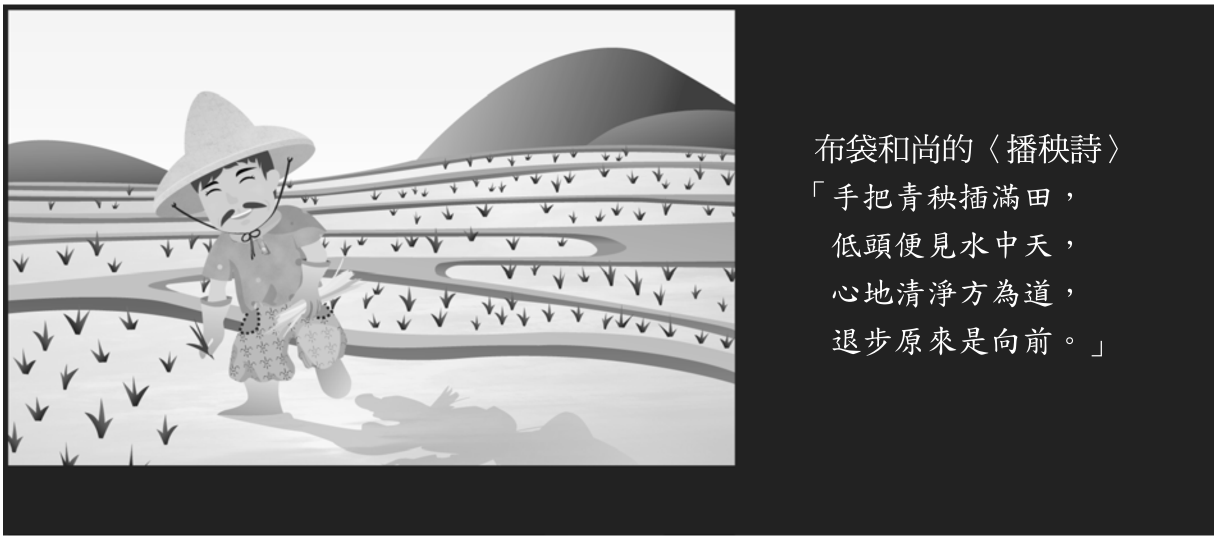
1. 一位年輕的老師從教書的第一天起就開始玩胃痛拼圖，每天到學校的第一件事情就是拼出一幅沒拼過的胃痛拼圖。請幫這位年輕老師算一算，當這位老師退休時，是否所有的胃痛拼圖都會拼出來？
2. 在還沒有發明紙張的年代（即蔡倫之前），西方的數學知識是書寫在 泥版 、紙草書或羊皮紙（如巴比倫泥版、埃及 紙草書 、歐幾里得的幾何原本紙草書和阿基米德的再生 羊皮書 ）上流傳，中國的數學知識利用竹簡來傳播。試論述兩者會產生怎樣的影響？
3. 將皮克公式推廣到四邊形或者多邊形，公式會有所不同嗎？試試看！
4. 在〈皮克公式之我譯〉中，說明三個頂點上的正方形磁磚與三角形相交三塊區域的面積總和為何剛好是一個正方形面積的一半？
5. 下左圖是最近被發現的阿基米德的《胃痛》拼圖，將正方形分成 14 塊多邊形。





專家研究後發現，可以在邊長 12 公分的正方形上，正確的畫出這 14 塊拼圖，如右圖所示。問：灰色那塊的面積多少平方公分。博弈

2 布袋和尚的播秧詩



唐朝布袋和尚觀察農夫播秧的情景，寫出這首有名的〈播秧詩〉，其中的「退步原來是向前」是最常被引用的句子，而「低頭便見水中天」說的卻是數學（物理）裡的鏡射原理。

不只是農夫播秧含有退步原來是向前的概念，法官讓殺人犯俯首認罪的方法也經常用到退步原來是向前的概念。想想看，法官如果一直說「你就是殺人犯。」嫌疑犯一定回應「大人啊！冤枉，我沒有殺人。」這樣下去不可能定罪。一般法官會先退一步說：「如果你不是殺人犯，那麼那天晚上你在

哪裡呢？」嫌疑犯總是會說謊，然後謊愈扯愈大，最後就出現矛盾。暫時承認嫌疑犯沒殺人雖是「退步」的假設，但是矛盾的出現卻是讓案情「向前」的動力。

在數學的學習上，也有退步原來是向前的概念，例如：在「$\sqrt{2}$ 不是有理數」的證明中，老師的第一行論證就是

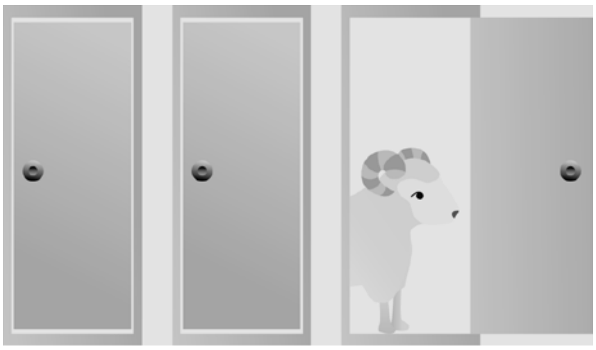
$$\text{假設}\sqrt{2}\text{是有理數，即}\sqrt{2}=\frac{q}{p}\cdots$$

這看起來跟法官假設嫌疑犯沒有殺人有異曲同工之妙。事實上，反證法就是「退步原來是向前」的概念運用。

習題：

1. 想想看，日常生活中還有哪些事物的運作模式可以用「退步原來是向前」來描述。
2. 懷特海是英國數理邏輯學家，曾執教於劍橋大學與牛津大學。下面是他出給學生的一道題目：甲、乙、丙三人各有硬幣若干枚。甲將自己的部分硬幣分給乙、丙，使他們的硬幣各增長了一倍；之後，乙將自己的部分硬幣分給甲、丙，使他們的硬幣各增長了一倍；最後，丙將自己的部分硬幣分給甲、乙，使他們的硬幣各增長了一倍。經過這樣三次的重新分配之後，三人的硬幣都是 8 枚。請問甲、乙、丙三人原有硬幣幾枚。

③ 人性與推理的對話



蒙提・霍爾問題是電視上的一道與博奕有關的遊戲，這個遊戲的玩法是：參賽者會看見三扇關閉了的門，其中一扇的後面有一輛汽車，選中後面有車的那扇門就可以贏得該汽車，而另外兩扇門後面則各藏有一隻山羊。當參賽者選定了一扇門，但未去開啟它的時候，節目主持人會開啟剩下兩扇門的其中一扇，露出其中一隻山羊，然後主持人會問參賽者要不要換另一扇仍然關上的門。問題是：參賽者換另一扇門是否會增加贏得汽車的機率呢？

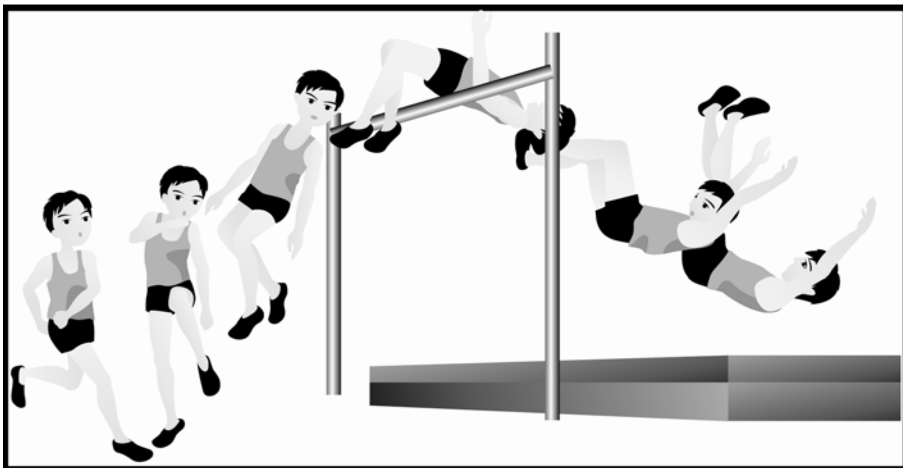
如果嚴格按照上述的條件的話，那麼換門是會增加參賽者贏得汽車的機率，而且贏得汽車的機會率是 $\frac{2}{3}$ 。雖然該問題的答案在邏輯上並不自相矛盾，但十分違反直覺。

蒙提・霍爾問題是一道考驗人性的問題，這類問題其實只牽涉到簡易推理，沒那麼困難，但是把人性考慮進去就變得特別難。上圖所示的戴帽子遊戲也有同樣的道理。

習題：

1. (1) 翻閱高中數學課本或上網搜尋，說明何謂「樹狀圖」？
   (2) 在 1 號門有車，2、3 號門有羊的情形下：利用樹狀圖圖示蒙提・霍爾問題的所有情形。

④ 超完美的人體實驗

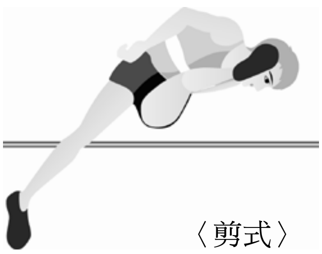


我們經常用「頭腦簡單，四肢發達」來調侃運動員，但是美國跳高選手福斯貝里的背越式跳高卻是跳高革命的先行者。他讓自己的身體在拋物線上挑戰高度，締造了完美的人體實驗。

上拋一顆石頭或球，一離手，它們的運動軌跡——拋物線，就已經完全決定了，這是大家共有的經驗，也是物理學的基本定律。將這項鐵律運用在跳高上可就精彩多了，問題就出在人的身體可以作超完美的旋轉與伸屈。

在過去的歷史中，人們發展出跨越式、剪式、滾式、俯臥式及背越式這五種跳躍過杆的動作：

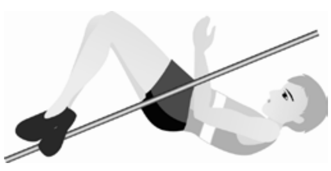
〈跨越式〉



〈剪式〉

〈滾式〉

〈俯臥式〉



〈背越式〉

跳高選手一旦離開地面處於無支撐狀態，身體重心的運動軌跡將不可改變，身體重心所滑出的拋物線就會被完全確定下來，但是身體重心只是人體平衡重量的一個點，隨著身體不同的伸縮，可以讓重心處於身體的上方、內部或者下方，而背越式就是讓重心處於身體下方的一種跳高方式。背越式的革命性意義在於運動員的身體形成「反弓」和「背橋」，頭、肩、背、腰、臀、腿部「分期分批，化整為零」依次滑過橫杆，完全不同於其他跳高形式中身體必須在瞬間「一攬子」過杆。

談到超完美的人體實驗就讓我想起一則有膽識的人體實驗故事：美國一位有名的物理學家在課堂上以自己的頭當賭注，挑戰鐘擺原理。教授拿一條粗繩綁住一顆鉛球掛在屋頂上，教授站在垂繩不遠處並手拿鉛球，讓鉛球與頭接觸，此時教授將手上的鉛球放開，鉛球繫在繩上會做來回的鐘擺運動。當繩子將鉛球擺回時，學生一定會擔心鉛球是否會在教授的面前停下來，如果你相信力學原理，教授一定會毫髮無傷。教授就是藉著這實驗讓學生深刻體會鐘擺的力學。

習題：

1. 有一面一公尺高的圍牆，分別讓一顆球、一支筆、一條狗及一個人越過此圍牆。試就四種物體的重心所產生之拋物線來討論四者越過圍牆的差異程度。
2. 標槍比賽中，選手投擲出標槍。試描述標槍重心在空中所畫出的拋物線軌道與標槍的關係。
3. 打排球或羽毛球的好手經常跳起殺球時，讓人覺得好像他們挺胸停留在高處的時間比較長。想想看，原因為何？

⑤ 倫琴夫人的手掌透視照片

倫琴 1895 年宣布 X 光的存在，並發表了他那張著名的手掌透視照片，讓我們清楚手部骨骼構造與了解各塊骨頭長度的比例。

倫琴為了幫受傷的太太了解手掌受傷的程度，用他所發明的 X 光機幫其夫人照了一張有名的手掌透視照片。從片中清楚看出，大拇指自指尖到腕骨是由三塊骨頭所構成（第三塊在手掌旁邊），而其餘四指都是由四塊骨頭所連接而成（第四塊在手掌內部裡）。

以中指四塊骨頭長度（自中指尖到腕骨）來說明，令其從短到長的長度依序為

$$a,\quad b,\quad c,\quad d\,.$$

也就是說，中指四塊骨頭中，最短那一節的長度為 a ，第二節的長度為 b ，第三節的長度為 c ，藏在手掌那節的長度為 d 。根據統計，當這四節成等比數列，而且公比為

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$$

時，中指看起來最完美。

同時，手掌的每隻手指頭的每節長度都呈現公比為

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

的等比數列時，手掌看起來最漂亮。

習題：

1. 拿尺量一量你的大拇指三塊骨頭的長度，並令從短到長的長度依序為

$$a, b, c.$$

   選出符合的條件：

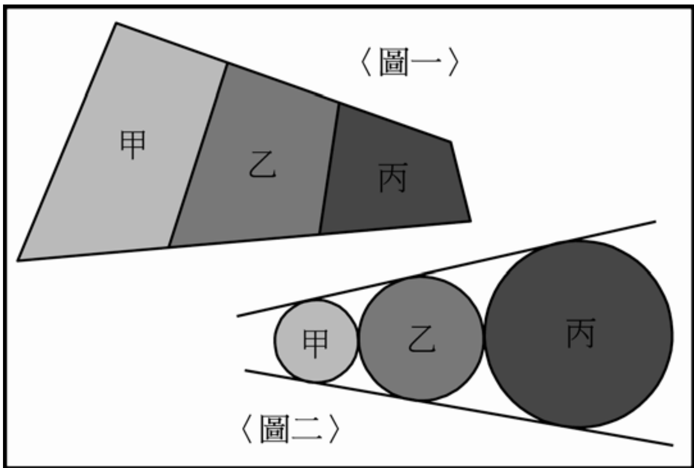
   (1) a, b, c約略成等差數列。

   (2) a, b, c 約略成等比數列。

   (3) a, b, c 大約滿足$c = a + b$。

2. 設完美大拇指三節長度分別為 a, b, c，證明$c = a + b$。

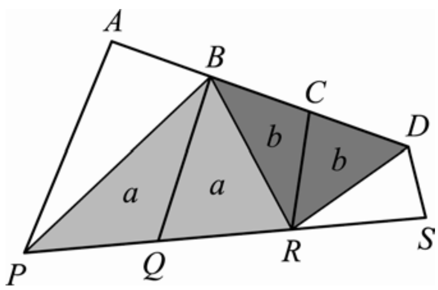
⑥ 數列魅影



等差數列與等比數列是每位學生都懂的數學知識，猜猜看哪個圖形的甲、乙、丙區域面積是等差數列？又何者是等比數列？

在甲、乙、丙四邊形區域的圖形中，上方的三條線段等長，而下方的三條線段亦等長，一個美妙的幾何性質是說：「甲、乙、丙四邊形區域面積構成等差數列。」這是 教育部九十七學年度高級中學數學科能力競賽決賽的口試試題。當中有一位學生提出妙解，解法如下：

作如下的補助線，利用同底等高可以得到圖中面積分別為a, a, b, b的四個三角形：



同樣利用同底等高可以得到

$$\Delta APB = \Delta BPC = \frac{\Delta BPD}{2}\ ;\ \Delta SDR = \Delta RDQ = \frac{\Delta RDP}{2}.$$

將兩式相加，得

$$\Delta APB + \Delta SDR = \frac{\Delta BPD}{2} + \frac{\Delta RDP}{2} = \frac{\square BPRD}{2} = a + b,$$

即

$$\square APQB + \square CRSD = 2\square BQRC.$$

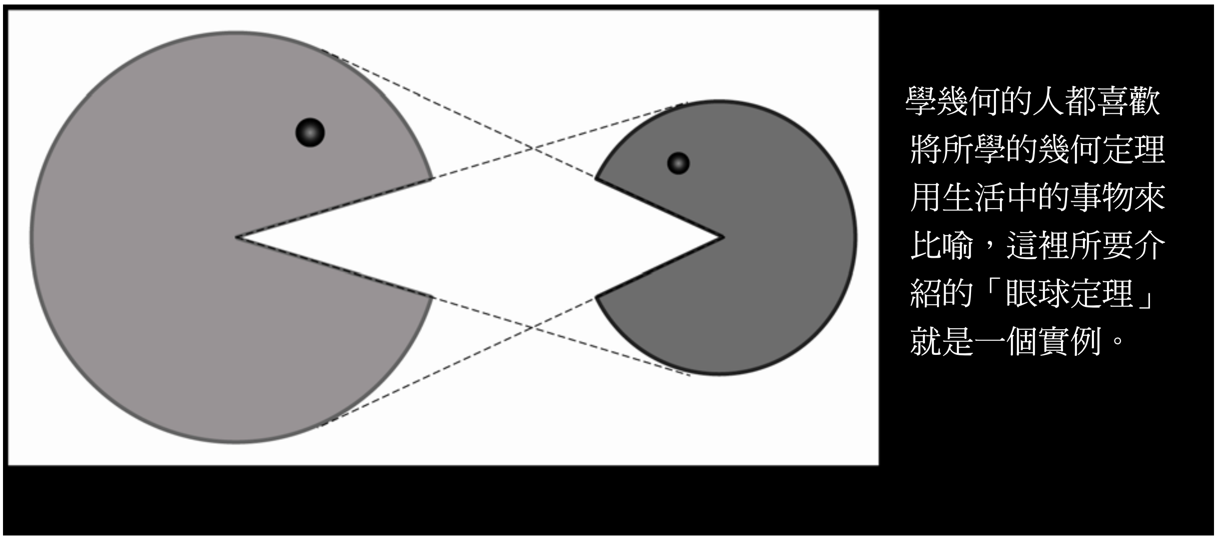
證得四邊形 $APQB$, $BQRC$, $CRSD$ 的面積構成等差數列。

不僅等差數列有好的幾何圖形示例，等比數列也有，圖二中的甲、乙、丙三圓之面積構成等比數列。

習題：

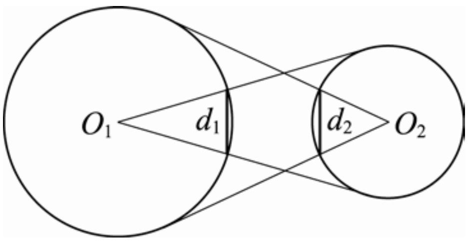
證明：甲、乙、丙三圓之面積構成等比數列。

⑦ 眼球定理



不過，個人比較想要把眼球定理想成大小精靈互吃對方的定理。想想看，大小精靈互相看對方不順眼時，都張大他們的嘴巴，想把對方一口給吃掉，這個圖形可以啟發或引起怎樣的幾何定理呢？

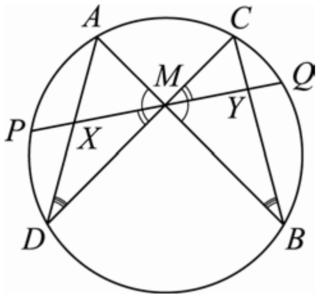
如下圖所示，圓 O_1 與 O_2 是兩個相離的圓，從圓心 O_1 向圓 O_2 引公切線，這兩條公切線會與圓 O_1 交於兩點，令這兩點的距離為 d_1；同樣地，從圓心 O_2 向圓 O_1 引公切線，這兩條公切線會與圓 O_2 交於兩點，令這兩點的距離為 d_2。



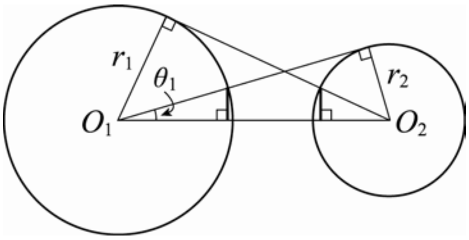
眼球定理告訴我們：$d_1 = d_2$，也就是說，大小精靈體積不同，但他們所張開的嘴巴是一樣大的。

習題：

1. 「蝴蝶定理」是幾何學裡一個漂亮的定理，由於其幾何圖形貌似蝴蝶，便以此命名。請上網輸入「蝴蝶定理」查詢，並依據下圖寫出這個定理的正確敘述，且指出蝴蝶意指圖中的哪一個形狀？



2. 利用以下的提示及輔助圖形證明眼球定理。
提示：利用兩圓半徑 r_1 與 r_2 及直角三角形的比例寫出兩個 $\sin\theta_1$ 的值，並得到 d_1 的公式，以同樣的方法可得到 d_2 的公式；最後比較兩公式。



數理個別化教學

竹崎高中 蔡政民老師

從 1919 年五四運動以來，我們努力地學習民主、科學，為了迎頭趕上，上自教育部、校長，下至各教師均很努力，但最後結果令人失望，不少學生放棄學習數學的機會了。

在一個大班級裡，要實施因材施教，實不容易，由於學生「個別差異」存在的事實，很難有一種適合全班學生特性的教學方法和課程。

在傳統的班級團體中，教師通常是教學的主體，教學都是以教師為主的；而學生在大班級團體教學中，較傾向於被動的角色。而在採用個別化教學的情境中，學生通常是教學活動的重心，教師扮演著教學活動的經理人或協助者的角色。個別化教學要由學生主動學習，課程、教材、評量都應適應個別學生的差異和需要。

教育上提倡個別化教學，其對象涵蓋全部學生，其目的在針對學生的個別差異，培養學生自動自發與自我實現的學習精神和能力。基本上，個別化教學並不拘泥於在形式上要一對一，它可以是在班級情境中，由一位教師針對全班學生的獨特性和差異性設計不同的學習計畫，包括課程、教材、教法、評量等方面，亦即提供個別化教育方案（individualized educational program 簡稱 IEP），這正是個別化教學的真諦。

※ 傾聽一些高中生的心聲：

「傳統的教法是由老師站在講台上，說明定義、由來，然後像變魔術般的解題，經由老師超強的講解能力，讓我們覺得『我們懂了!』事實上，我們並沒有真正的懂，因為我們不知道自己的問題出在哪裡？所以，在課堂上都會覺得『我都聽懂了！』回到家，也沒有再算過。等幾天後要小考時，翻開像外星文一樣的筆記，這時，就會頭昏腦脹的闔上筆記，以致問題還是存在那裡。」

「自學的方式：自行學習，藉由自己閱讀，思考著為什麼這樣寫?公式怎麼來的?再算習題、試著解題，在自行解題的過程中，就可以發現自己哪裡不懂而隨時請教別人。可以思考要如何解題，真的解不出來再看詳解，然後自己再算過一遍，印象會更深刻，這都是自學的好處。」

「以前上課的時候，我也不能說該全歸咎於老師的關係，因為我自己也不是說很用功。可能是以前的種種挫折而導致於現今很討厭數學，可是一年級時是真的有點不是很喜歡當時的老師，或許是聽不懂老師在講什麼吧！但也可能是做出了些許的努力，卻不是得到所期待的結果，而導致開始厭惡數學。」

「我一聽到數學就快暈倒了，更別說算數學，以前上課總是能混就混，很討厭抄寫數學筆記，常常數學課本都是空白的，更常常做白日夢，不然就做自己的事，絲毫不管台上的老師是

否在上課，所以我的數學成績一直往下掉。就只能拼命補習，但是卻愈補愈大洞，曾有一度想放棄數學，真搞不懂為什麼要學數學呢？」

「現在上數學課的優點是在於老師講的淺顯易懂，使得我比以前更容易聽懂，並且也產生想學習數學的心態，這對我來說很重要。因為以前的我，並沒有那麼強烈的想要學習數學，所以我覺得想學習數學心態上的轉變是很重要的一環，因為如果沒有這麼想的話，我想一輩子都不會覺得數學很有趣！現在上課有時會以自習的方式，乍看之下好像是老師想要偷懶，但並不是這樣。因為老師會一個學生一個學生的下去問，問到有一些學生的問題剛好一樣的時候，老師就會上台解說，我覺得這樣很好，因為這樣就不會像上課那樣一直說下去，反而導致於那些知識，還沒有吸收完畢就繼續上新的課程，這樣上課學習也很困難，以致於覺得上課很無趣、很無聊！所以我覺得現在的收穫很大很大。」

「一開始，超不習慣的，以致於第一章學的並不好，後來漸漸習慣了，漸漸喜歡思考。我覺得『自學』這個方法很好，讓我們有很自由的空間，可以很自由的學習，我覺得這個方法比傳統的方式好，我很喜歡自學。」

※ 數理教育的目標在於提高學生的數學（數理）成就表現

我們都是人，教的學生也是人，所以要把學生教好，首先了解：

一、人的特質：

人具理性，孟子曰:「人之異於禽獸者幾希」，正人君子能用理性戰勝慾望，同時人類善思維，例如創造望遠鏡以補眼力的不足，創造各式各樣交通工具以補腳力的不足…，也有很好的學習能力。強烈的好奇心是人與生俱有的能力，年幼時記憶力超強，而愈年長理解力愈強。

二、窮則變：

多數國中、小老師認為中小學生的數學不難學，很有心要教好，但面對心性不定、調皮的小孩就是屢戰屢敗，挫折感重，苦無對策。我們能不能跳出框架、跳出限制？就是跳出自己的

(1) 個性：看到學生表現不好就罵（尚易跳出）

(2) 所學：以為自己以前也是這樣學過來的（不太容易跳出）

(3) 時代：今之教育政策、教材、成績計算方式（跳出有困難）

三、愛之適足以害之：

我們都太愛自己的孩子，但又不懂得如何去愛。農民種農作物，光用愛是不行的，而是懂得怎麼愛才行，例如揠苗助長的農夫希望農作物快長高，卻因不了解農作物的生長而適得其反。有人形容孩子的心是玻璃做的（即他們內在是脆弱的），老師或家長如看到不理想的成績時，所表現出來的語氣或表情均易傷害孩子的心。所以我認為老師們最需要「轉念」，要適時讚賞孩子，其實賞識的目光就像陽光會為孩子帶來意想不到的養分，為孩子注入生命與信心；並且老師要承認差異，允許失敗。

四、優秀的中國人：

西方哲學家羅素在民國初年說：「如果讓中國人有 30 年穩定的社會，給他一筆足夠的經濟資源，30 年之內中國的科學可以與西方並駕齊驅。」可見依照西方人的經驗，學科學並不是很困難的。如今已過了三個 30 年，我們的科學仍沒趕上西方。試想：是中國人不用功、愚笨，還是走錯學習的路？中國人是最有智慧的民族，絕對是當之無愧的；再者上自校長，下至教師均很戰戰兢兢；路走得對否，可以從效果上來看。我們的大學聯考平均成績只約 20 分，很明顯是失敗的，方向是錯的，如果方向錯了，那真是愈努力就離目標愈遠，所以我們可確定：教育一定出了問題。如果已確定是失敗了的，難道我們仍要走下去？今談科學教育，其根源在於對人性的認識出了問題，西方人他們是順著人類數理能力的發展開發出認知的精神，以成就科學，而我們一直是從功名的角度著眼；所以他們的科學教育注重思考（慢慢教，不教很多），我們的科學教育注重技術（不留思考時間，教很多）。

五、數理的特質：

(1) 數理的能力是人類與生俱來的：

數學是全世界共通的語言，是人類心靈自己建構起來的，所以數理的能力可說是與生俱來的。柏拉圖曾說：「給我一個僕人，也可以把他教成數學家」。所以我們要相信，每個正常成長的小孩均可學好數學（何以現在看到的是學不好的多？因為家長愛比較，老師常鄙視，教材不易懂）。當然數學是有連貫性的，所以程度不好只是表示以前沒學好，只要有心從基礎的開始學一定可以學好的。

(2) 數理能力發展是有一定順序的：

心理學家皮亞傑把人類認知能力的發展分為：感覺動作（一至三歲）、運思準備（三至六歲）、具體運思（六至十一歲）和抽象運思（十一歲以後）四階段。可見思考能力雖是人類的天性，但其展現是按部就班的，從具體到抽象，從淺度到深度。所以只要一個能正常生活的孩子，都在默默中進行著數理及思考的學習。

(3) 數理的學習特重個別性和偶然性：

「懂不懂」它是很個別、很內在的。數理既以「懂不懂」為標準，則不應該是用教的，尤其不可以眾人一起教，把許多學生集合成一班一起教學，是近代學校體制很不得已的錯誤。數理一定要自己懂了才算懂，自己學會的才愈有興趣，讓人教往往教出壓力來，所以數理最需要提倡主動學習。老師所教，只不過是以自己懂得的方式依理順序說明（是故每位老師的解說過程不同），以喚醒學生，至於學生為什麼有的懂、有的不懂，是老師無法完全掌握的。所以有效的數學教育，應該「能力分班」，最好是「個別教育」；也就是盡量依其能力，放給他自主學習。學得好的，應讓他自己再往前進，以免耽誤他的聰明；學不好的，千萬不要責備他，因為這是個別頭腦裡面的事（此時責罵很難改變，反而是善於鼓勵讚賞與等待還有機會）。老師盡其引導說明，學生盡其學習努力，就已達到教育的目的了，強求是沒有用的。

六、打破分數的迷思：

一個人的學習成長過程中首要以品德為重，考試分數高或低絕不足以表示其品德的好或壞，其實分數的高低亦不能表示其用功程度的（數理尤然）。因為影響學生的成績有下列各因素：

(1) 題目的難易度　　(2) 對教材的了解程度
(3) 平時的努力程度　　(4) 考試的情緒
(5) 13 歲就底定的大腦　　(6) 學生對該科老師的喜好程度
(7) 以往心理的受傷程度　　(8) 同儕關係

因此為了做學生的人師、良師，我們不應一昧地責罵成績表現不理想的學生，反而是該以同理心的語氣從旁鼓勵學生，用愛心、耐心等待學生的成長，如果能如此，學生的心理受傷程度不但會降低、更可能癒合，且對老師的喜好會增強，如此會導致其平時更用功，考試時的情緒較穩定，假以時日對教材內容自然會更能了解掌握，甚至改善同儕的關係。

七、每一學生都是父母的寶貝：

我們都相信：「一個有成就的人，是一分的天才，再加上九十九分的努力。」是故要把一班的孩子教好（尤指成績表現），如果老師不用心那是不可能的（當然有一些特殊學生，或額外加強的），而用心的老師，學生們一定能感受到，甚至被感動。父母養育小孩是天經地義的，相對地每一個小孩都是父母的心肝寶貝，沒有一個小孩是被放棄的，所以教師亦不該放棄任何一位學生，但因每個小孩家庭背景均不相同，學習成就表現迥異，因此老師應當給以因材施教，也唯有如此才能真正看重每一位學生。

我們可以從以上的觀點中建立——「數理個別化教學」的觀念，其綱要如下：

1. 教材的編寫，步步為營，說明清晰易懂，由淺入深，按部就班，循序漸進。
（今市面上各高中課本，經筆者詳細比較下以龍騰版最適當）
2. 因為思考發展是由具體到抽象，由不懂到懂，其歷程是緩慢長遠的。故數理的教學應從生活開始，尤其幼稚園與小學生以遊戲的心態實施，主要是讓孩子玩，不必急於求成，否則愛之適足以害之。
3. 因為數理是以理解為準，理解是內在而具有連續性的，所以最好是採取自學的方式，老師一概不教，只是備問。其次是半自學方式，老師只是略作引導與解難，多給學生反思的時間，不可以教太多。教太多，現在好像懂了，其實不是真懂。
4. 因為理解深具個別性，所以數理應注重其個別的差異，採取個別進度。若學生已經會了，即應鼓勵其自己前進，不要等待，直到他不會的地方暫時停下來，待機再進。若學生還不會，應降低其學習內容，不可硬撐硬趕，否則只有斷送其對思考學習的信心而已。
5. 教師要有專業能力，具備自編教材、統整課程的能力，並改進教學方法與評量，提升教學品質。原則上老師當準備各種評量試題，由易到難，每小節最少兩份，且均有詳細解題過程，方便學生自行閱讀。
6. 在教學心態上，應不要因成績表現的好壞而給予不同的態度，尤其是家長、老師要以等待其成長的愉悅心去面對孩子的數理課程，以鼓舞其信心與興致。

※ 分享與收穫

一、個別化教學實際實行之過程分享：

問　　　　　　　題	處　理　方　式
何謂「不要再那麼努力的障礙我們的孩子了?」負責任的老師們在課堂上很認真的教，似較不會有內疚感，哪會知道學生亦有能力自己看懂（只要教材、解答寫得夠清楚即可）	教了，有多數人似懂了，但卻抹煞了他們思考的能力與機會；又有些本就較差的，常因教了亦不懂導致自暴自棄（然其不懂的真正原因應是以前的就不太了解，只要有心回頭把以前的學好，就自然懂了）
有學生懷疑此方式？	引導學生： (1) 老師們之所以較會都是因看很多，而一般學生幾乎沒有一人買同一冊數學參考書三本以上；亦即只要能多看多吸收自然能會 (2) 若請高一的學生看國小一年級的數學，一定不用二十分鐘（可能三分鐘或更短）就可看完，那麼小一到小六共十二冊，應只需花幾小時（學生大多認同此理論）
接觸一新的內容（對數函數之圖形）三分鐘即有學生反應看不懂（不只一位）	不管他，叫他用心續看就會了解（因學生不習慣閱讀），結果一節課下來全看完而且懂了（即老師要堅持）
月考前兩週出現有進度落後者，如何應考?	只要前面自學過的內容真正了解就好了，為真正使學生有成就，當適度調整現行的成績考查，倘真改不了亦無妨，因此類學生照以往一樣考不好
一程度好的學生反應希望上課，因連續兩次月考均只得六十幾分	堅持下去，反而激勵他更用功，而且自學亦懂了，該生今年學測數學得十三級分

二、意外收穫：

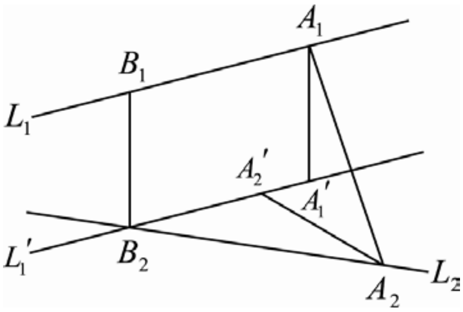
(1) 實行第二週，即因有人超前，同一組的同學回家就很拚，別組亦效法
(2) 有些同學反應：自己學會的好舒服，很快樂，很有成就感
(3) 有些同學反應：已經算到有感覺了（相信每人均可如此，只是時間不一）
(4) 偶爾在黑板講解時全班更珍惜了

◎ 參考資料：
華山書院、讀經通訊
實踐國小張素貞校長：從發展小班教學精神談普通班級的個別化教學

利用 **正射影及外積的概念** 求

兩歪斜線的公垂線段長及兩端點坐標

◎李維昌 / 國立宜蘭高中



如上圖所示，已知空間直角坐標系中，O 為原點，兩歪斜線 L_1 與 L_2 分別通過點 A_1 、 A_2 ，L_1 與 L_2 的方向向量分別為 $\vec{d_1}$ 與 $\vec{d_2}$ ，四邊形 $A_1A_1'B_2B_1$ 為矩形，$\angle A_2A_2'B_2=90°$ ，$\overline{B_1B_2}\perp L_1$ 與 L_2 ，試求 $\overline{B_1B_2}$ 的長度及點 B_1 、 B_2 的坐標。

解 (1)因為四邊形 $A_1A_1'B_2B_1$ 為矩形，利用正射影及外積的概念，

$$\overrightarrow{B_2B_1}=\overrightarrow{A_1'A_1}=\frac{\overrightarrow{A_2A_1}\cdot\left(\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right)}{\left|\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right|^2}\left(\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right)\text{，得 }\overline{B_1B_2}=\left|\frac{\overrightarrow{A_2A_1}\cdot\left(\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right)}{\left|\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right|^2}\left(\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right)\right|\text{。}$$

(2)因為 $\overrightarrow{A_2A_2'}\perp\overrightarrow{B_2A_1}\Rightarrow\overrightarrow{A_2A_2'}\cdot\overrightarrow{B_2A_1}=0$ ，

又 $\overrightarrow{A_2A_2'}//\vec{d_1}\times\left(\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right)$ 且 $\overrightarrow{B_2A_1}=\overrightarrow{A_2A_1}-\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{A_2A_1}-s\vec{d_2}$ ，

$$\overrightarrow{A_2A_2'}\cdot\overrightarrow{B_2A_1}=0\Rightarrow\left[\vec{d_1}\times\left(\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right)\right]\cdot\left(\overrightarrow{A_2A_1}-s\vec{d_2}\right)=0\text{，}$$

解得 $s=\dfrac{\overrightarrow{A_2A_1}\cdot\left[\vec{d_1}\times\left(\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right)\right]}{\vec{d_2}\cdot\left[\vec{d_1}\times\left(\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right)\right]}$ ，

因此

$$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+s\vec{d_2}\text{ ，}\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{B_2B_1}=\overrightarrow{OB_2}+\frac{\overrightarrow{A_2A_1}\cdot\left(\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right)}{\left|\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right|^2}\left(\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right)\text{。}$$

多項式的乘法與捷徑問題的計數

◎ 陳憲儀／育成高中　吳孝仁／政大附中

這是筆者在參與一場研習裡，講者所留下來的問題。個人提出一點看法，盼能提供各位先進作為概念連結或深入教學的素材。

1. 先來觀察兩個多項式相乘：$\left(1+x+x^2+x^3\right)\times\left(1+x+x^2+x^3\right)$

用分配律把它展開，得到16項

$$\begin{aligned}&1\times1+1\times x+1\times x^2+1\times x^3+x\times1+x\times x+x\times x^2+x\times x^3\\&+x^2\times1+x^2\times x+x^2\times x^2+x^2\times x^3+x^3\times1+x^3\times x+x^3\times x^2+x^3\times x^3\,.\end{aligned}$$

這16項的組成有一個模式，就是在前後兩個$(1+x+x^2+x^3)$裡面各挑一項出來相乘後再通通加起來。當然最後我們會把同樣次數的項合併，最後寫成

$$1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+1x^6\,.$$

熟悉這個模式有兩個好處：一來是在計算某一項係數的時候，用不著全部展開計算，檢查哪幾種方法可以兜出所要的項即可；二來是幾種方法就反映在這一項的係數上。

以上述為例，要兜出x^3這一項有4種方法，分別是

第一個$(1+x+x^2+x^3)$挑	第二個$(1+x+x^2+x^3)$挑	兜出來的項
1	x^3	$1\times x^3=x^3$
x	x^2	$x\times x^2=x^3$
x^2	x	$x^2\times x=x^3$
x^3	1	$x^3\times1=x^3$
4種方法		$4x^3$

又以$\left(1+x+x^2+x^3\right)\left(x+x^3\right)\left(1+x^2+x^3\right)\left(1+x+x^2+x^4\right)$為例，展開式中$x^{10}$項的係數是8，換言之能配出$x^{10}$的方法有8種，就請讀者真的試試。

事實上，我們討論的多項式甚至可以是無窮級數的形式，例如：

$$\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\times\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots$$

我們注意到，對任意給定的項x^n，其係數是一個有限的數。至於這個數是什麼，稍後再談，我們關心的是組成這種項的方法數就反映在這一項的係數上。另外，我們不妨把

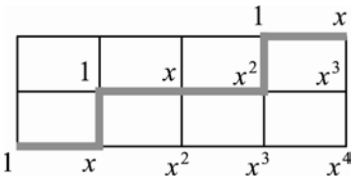
$1+x+x^2+x^3+\cdots$ 記作 $\dfrac{1}{1-x}$；而記號 $\dfrac{1}{(1-x)^2}\left[x^4\right]=5$ 的意思是

$\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\times\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)$ 展開式中 x^4 項的係數等於5。

2. 基本的捷徑問題是這樣子的，從 $(0,0)$ 到 (p,q) 走捷徑，方法有多少？
因為走捷徑就是只能向右或向上，向右總共走了 p 次，向上總共走了 q 次。 p 個右、 q 個上排列出所有的捷徑，所以方法有

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}=C_p^{p+q}.$$

這個計數關鍵在於所有捷徑被我們用 p 個右、 q 個上記錄起來。那麼，換一種方式來記錄捷徑呢？
我們以 $(0,0)$ 到 $(4,2)$ 走捷徑為例，



上圖這一條捷徑，我們要把它記錄成 xx^2x 。規則是這樣子：
(1)在最下方（第一條）橫線處，在每個路口依序標出 $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$ 。
(2)在哪裡向上進入第二條橫線，就把那一項記錄起來，所以記錄 x 。
(3)在進入第二條橫線的同時，從該路口開始，在每個路口依序標出 $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ 。
(4)在哪裡向上進入第三條橫線，就把那一項記錄起來，所以記錄 xx^2 。
(5)在進入第三條橫線的同時，從該路口開始，在每個路口依序標出 $1,\ x$ 。
(6)記錄目的地，所以記錄 xx^2x 。
列出幾種捷徑以及相對應的記錄，如下表

捷徑（＋向上、－向右）	記　錄
－－－＋－＋	$x^3x\cdot 1$
－＋－＋－－	xxx^2
＋＋－－－－	$1\cdot 1\cdot x^4$
－－＋－＋－	x^2xx

$xx^2x=x^4$ ，甚至因為向右走的次數固定是4次，所以記錄出來的一定是 x^4 項。 x^4 項的所有組合情形在 $\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\times\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\times\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)$ 裡被充分的提供，而每種組合記錄著某一條捷徑且不重複。依照之前約定的記號，我們就可以推論得

$$(0,0)\text{ 到 }(4,2)\text{ 的捷徑數}=\frac{1}{(1-x)^3}\left[x^4\right],$$

換句話說

$$\frac{1}{(1-x)^3}\left[x^4\right]=C_4^{2+4}.$$

回到從 $(0,0)$ 到 (p,q) 的所有捷徑，如果我們類比各個變量，例如：橫線數由3變為 $q+1$，向右走的次數固定是 p 次。於是得到

$$(0,0)\text{ 到 }(p,q)\text{ 的捷徑數}=\frac{1}{(1-x)^{q+1}}\left[x^p\right]=C_p^{p+q}.$$

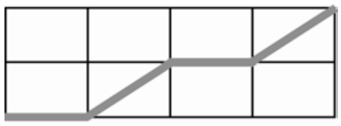
這也順便回答了之前的問題，意思是

$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^{q+1}$ 展開式中，x^p 項的係數是 C_p^{p+q}。

講到這裡，我突然想起我的高中老師在教授排列組合的時候說過的一句話：「算排列組合的時候，有的時候就好像在編故事。編一個好的故事，題目就會變的很簡單。」現在回來看，其實談的是對應（bijection）這個概念，這真是點出了高中排列組合的精華了。

3. 研習會中講者所留下來的問題是：從 $(0,0)$ 到 (p,q)，可以向上、向右、向右上走捷徑，方法有多少？

如下圖



我們看最簡單的例子，從 $(0,0)$ 到 $(4,1)$，可以向上、向右、向右上走捷徑。

首先，我們想訂一個規則建立起所有捷徑的記錄；而在之前所提到的記錄方式似乎可以套用。

圖 1

記錄：xx^3

但是如果出現走對角線的一步，該如何為這條捷徑作適當的記錄呢？

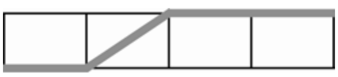


圖 2

圖1那一條捷徑出現在 $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2$ 展開式中 x^4 的一種組合，我們也希望圖2那一條捷徑出現在某個展開式中 x^4 的組合裡面，所以 $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2$ 是不夠記錄的。換句

話說，我們在找一個式子，能記錄的情形比$\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^2$還多，而且最好是這個式子的$x^4$就表現出所有的記錄。

這裡有一個是很明顯的例子：$\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\left(1+x\right)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)$，中間多了個因子$\left(1+x\right)$。這個展開式在計算$x^4$的係數，如果$\left(1+x\right)$這裡選1出來相乘，那麼這種組合方式剛好契合之前的記錄方式。如果選x出來相乘，比如說xxx^2，那就適當訂個規則讓有走對角線的某一條捷徑，記錄就是xxx^2。

$1+x+x^2+x^3+\cdots$	$1+x$	$1+x+x^2+x^3+\cdots$	
選 x	選 1	選 x^3	記錄：$x\cdot 1\cdot x^3=xx^3$ 捷徑：－＋－－－
選 x	選 x	選 x^2	記錄：$x\cdot x\cdot x^2$ 捷徑：？？

以圖1和圖2作說明，規則是這樣子的：
(1)在最下方（第一條）橫線處，在每個路口依序標出 $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$ 。
(2)在哪裡**準備**進入第二條橫線，就把那一項記錄起來，所以圖1記錄x；圖2也記錄x。
(3)如果向上走，記錄1、如果向右上走，記錄x，所以圖1記錄$x\cdot 1$；圖2記錄xx。
(4)在進入第二條橫線的同時，從該路口開始，在每個路口依序標出$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\cdots$。
(5)記錄目的地，所以圖1記錄$x\cdot 1\cdot x^3$；圖2記錄xxx^2。
列出幾種捷徑以及相對應的記錄，如下表

捷徑(＋向上、－向右、／向右上)	記錄
－＋－－－	$x\cdot 1\cdot x^3$
－／－－	xxx^2
－－／－	x^2xx
－－－／	$x^3x\cdot 1$

所以，$\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\left(1+x\right)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)$展開式中的$x^4$項，充分提供了從$(0,0)$到$(4,1)$，向上、向右、向右上的所有捷徑記錄。換句話說

$$(0,0)\text{到}(4,1)\text{，向上、向右、向右上的捷徑數}=\frac{(1+x)}{(1-x)^2}\left[x^4\right]\text{。}$$

我們很自然發現增加的因子$\left(1+x\right)$所扮演的角色，就是由第一橫線進入第二橫線，記錄走上或走右上的選擇。走上記錄1、走右上記錄x。如果問題回到從$(0,0)$到(p,q)的情形，

就可以將變量作一個類比。例如：橫線數由2變為$q+1$，每次前進一條橫線就要補上因子$\left(1+x\right)$，一共補了q個$\left(1+x\right)$（見附表1）。我們推論

$$(0,0)\text{ 到 }(p,q)\text{ ，向上、向右、向右上的捷徑數}=\frac{\left(1+x\right)^{q}}{\left(1-x\right)^{q+1}}\left[x^{p}\right]\text{。}$$

4. 接下來計算 $\dfrac{\left(1+x\right)^{q}}{\left(1-x\right)^{q+1}}$展開式中，$x^{p}$項的係數

$\left\{\dfrac{\left(1+x\right)^{q}}{\left(1-x\right)^{q+1}}\right\}\left[x^{p}\right]=\left\{\left(1+x\right)^{q}\times\dfrac{1}{\left(1-x\right)^{q+1}}\right\}\left[x^{p}\right]$中$\left(1+x\right)^{q}$是二項式，我們知道每一項的係數

$$\left(1+x\right)^{q}\left[x^{i}\right]=C_{i}^{q}.$$

而對於$\dfrac{1}{\left(1-x\right)^{q+1}}$，我們在之前得到

$$\frac{1}{\left(1-x\right)^{q+1}}\left[x^{j}\right]=C_{j}^{j+q},$$

所以

$$\left\{\left(1+x\right)^{q}\times\frac{1}{\left(1-x\right)^{q+1}}\right\}\left[x^{p}\right]=\sum_{d=0}^{p}\left(1+x\right)^{q}\left[x^{d}\right]\times\frac{1}{\left(1-x\right)^{q+1}}\left[x^{p-d}\right]=\sum_{d=0}^{p}C_{d}^{q}C_{p-d}^{p-d+q}.$$

甚至，求和式中因子C_{d}^{q}由$\left(1+x\right)^{q}\left[x^{d}\right]$所提供，意思是在捷徑的記錄裡面，有$d$次選擇走對角線。所以推論

$$(0,0)\text{ 到 }(p,q)\text{ 恰好走 }d\text{ 次對角線的方法}=C_{d}^{q}C_{p-d}^{p-d+q}\text{ ，}$$

至此，我們得到結論

$$(0,0)\text{ 到 }(p,q)\text{ ，走向上、向右、向右上的捷徑方法數}=\sum_{d=0}^{p}C_{d}^{q}C_{p-d}^{p-d+q}\text{ 。}$$

附表1

$(0,0)$ 到 $(4,2)$ 走捷徑＋，－，／	$1+x+x^2+\cdots$	$(1+x)$	$1+x+x^2+\cdots$	$(1+x)$	$1+x+x^2+\cdots$
－＋－－＋－	x	1	x^2	1	x
－＋－／－	x	1	x	x	x
－－／＋－	x^2	x	1	1	x
／／－－	1	x	1	x	x^2

註

1. 文中的組合數C_k^n，當$k<0$或$k>n$時定義為0。所以，$C_d^q C_{p-d}^{p-d+q}$在$d>q$且$p-d+q<q$的時候值為0。換句話說，$\sum_{d=0}^{p} C_d^q C_{p-d}^{p-d+q}$、$\sum_{d=0}^{p,q\text{小的那一個}} C_d^q C_{p-d}^{p-d+q}$ 和$\sum_{d} C_d^q C_{p-d}^{p-d+q}$都是一樣的。從結果來看，$d$是$(0,0)$到$(p,q)$走對角線的次數，很自然$d$不會超過$p,q$兩者較小的那一個。

2. $\left\{\dfrac{(1+x)^q}{(1-x)^{q+1}}\right\}\left[x^p\right]$可以有很多種表示法，一個是$\sum_{d=0}^{p} C_d^q C_{p-d}^{p-d+q}$ 。

事實上，因為$C_d^q C_{p-d}^{p-d+q}=C_d^q C_p^{p-d+q}$，所以，$\sum_{d=0}^{p} C_d^q C_{p-d}^{p-d+q}=\sum_{d=0}^{p} C_d^q C_p^{p-d+q}$ 。

或者

$$\left\{\frac{(1+x)^q}{(1-x)^{q+1}}\right\}\left[x^p\right]=\left\{\frac{1}{1-x}\times\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^q\right\}\left[x^p\right]=\left\{\frac{1}{1-x}\times\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^q\right\}\left[x^p\right]$$

$$=\sum_{d=0}^{p}\left\{\frac{1}{1-x}\left[x^{p-d}\right]\right\}\times\left\{\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^q\left[x^d\right]\right\}=\sum_{d=0}^{p}1\times\left\{\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^q\left[x^d\right]\right\}$$

$$=\sum_{d=0}^{p}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^q\left[x^d\right]=\sum_{d=0}^{p}\left\{\sum_{j=0}^{q}C_j^q\left(\frac{2x}{1-x}\right)^j\right\}\left[x^d\right]$$

$$=\sum_{d=0}^{p}\left\{\sum_{j=0}^{q}C_j^q\left(\frac{2x}{1-x}\right)^j\left[x^d\right]\right\}=\sum_{d=0}^{p}\left\{\sum_{j=0}^{q}2^jC_j^q\left(\frac{x}{1-x}\right)^j\left[x^d\right]\right\}$$

$$=\sum_{d=0}^{p}\left\{\sum_{j=0}^{q}2^jC_j^q\left(\frac{1}{1-x}\right)^j\left[x^{d-j}\right]\right\}$$

$$=\sum_{d=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}2^{j}C_{j}^{q}C_{d-j}^{d-1}=\sum_{j=0}^{q}\sum_{d=0}^{p}2^{j}C_{j}^{q}C_{j-1}^{d-1}=\sum_{j=0}^{q}2^{j}C_{j}^{q}\left(\sum_{d=0}^{p}C_{j-1}^{d-1}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{q}2^{j}C_{j}^{q}C_{j}^{p}=\sum_{j\ge 0}2^{j}C_{j}^{q}C_{j}^{p}$$ （後式 j 的求和上限自然不會超過 p,q 較小者）

$$=\sum_{d\ge 0}2^{d}C_{d}^{q}C_{d}^{p}\ .$$ （只是把求和變數由 j 改成 d ）

3. 我們得到一個組合等式

$$\sum_{d\ge 0}C_{d}^{q}C_{p-d}^{p-d+q}=\sum_{d\ge 0}2^{d}C_{d}^{q}C_{d}^{p}\ .$$

例如： $p=3, q=2$ ，左式為 $\sum_{d}C_{d}^{2}C_{3-d}^{5-d}=C_{0}^{2}C_{3}^{5}+C_{1}^{2}C_{2}^{4}+C_{2}^{2}C_{1}^{3}$ ，

右式為 $\sum_{d}2^{d}C_{d}^{2}C_{d}^{3}=2^{0}C_{0}^{2}C_{0}^{3}+2^{1}C_{1}^{2}C_{1}^{3}+2^{2}C_{2}^{2}C_{2}^{3}$ 。

但是基本上我們可能很難去直接推導這兩個式子相等，我們採用的方法就是找一個多項式（比較正確的名詞是**生成函數**），用不同的方式去計算某一項的係數來證明係數一樣，就如同註2的推導過程。請見 數學傳播／第25卷第3期／柳柏濂／用電腦證明組合等式。

test 國立台灣師範大學數學系 98 學年度 甄選入學

指定項目甄試試題

筆試一、計算證明題（考試時間：2 小時）

1. 設 $x \ge 0$ ，$y \ge 0$ 且 $x^2 + y^2 > 0$ 。

   (1) 試求 $\dfrac{3x+4y}{x+2y}$ 的最大值。並說明 x 與 y 分別為何值時會發生最大值？（10 分）

   (2) 試求 $\dfrac{3x+4y}{x+2y}$ 的最小值。並說明 x 與 y 分別為何值時會發生最小值？（10 分）

2. 設 $f(x)$ 為整係數多項式。試證：若 $f(98)$ 是 13 的倍數，則 $f(2009)$ 也是 13 的倍數。（20 分）

3. (1) 試求與 x 軸相切於點 $(20, 0)$ ，又與直線 $3x-4y+12=0$ 相切的圓方程式。（10 分）

   (2) 滿足(1)中條件的圓還有第三條公切線，試求此公切線的方程式。（10 分）

4. 設有一奇整數 n 及一角 θ 使得聯立方程式

$$\begin{cases} 3^n y + (\sin 2\theta)^n z = 0 \\ (1+\sec\theta)^n x + z = 0 \\ -x + (1+\csc\theta)^n y = 0 \end{cases}$$

   中的 x 、 y 與 z 不只一組解，試求 $\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta+\cot\theta+\sec\theta+\csc\theta$ 之值。（20 分）

5. 給定坐標平面上兩點 $A(0,6)$、$B(8,6)$ 與一圓 $\Gamma: x^2+y^2=20$。對於圓 Γ 上每一點 P，令 O_P 表示 $\triangle ABP$ 的外心，試寫出全體外心所成的集合。（20 分）

筆試二、填充題（考試時間：1.5 小時）

1. 設 $f(x)=x^8+a_1x^7+a_2x^6+\cdots+a_8$ 為實係數多項式。若 $f(x)=0$ 的所有根都是 $x^2+5x+8=0$ 的根，則 $a_1=$__________。

2. 小明的媽媽在大減價中買了同品牌的 10 包磨菇湯和 6 包蔬菜湯，混放在一起。爸爸中午煮湯時順手抓 2 包加入水中。假設每包湯包被拿到的機率相等，試問

   (1) 爸爸會拿到相同口味湯包的機率為__________。（5 分）

   (2) 若爸爸拿到的是相同口味的湯包，則他拿到小明喜歡吃的磨菇湯包的機率為__________。（5 分）

3. 從甲、乙、丙、丁四位同學中，隨意選 3 人測量其體重之平均值，發現無論如何選，其平均體重皆相同，此時來了一位同學戊，發現他和乙、丙 3 人的平均體重比前面隨意選 3 人的平均體重多了 5 公斤，則這 5 個人體重的標準差為__________公斤。

   （註：標準差計算公式為 $S=\sqrt{\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})^2\right]}$ ）

4. 設 $a>0$ 且 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$。若 $x^2-2ax+(a^2-2)=0$ 有兩個實根 $\frac{1}{\sin\theta}$ 與 $\frac{1}{\cos\theta}$ ，則 $a=$__________，$\theta=$__________。（各 5 分）

5. 在 1 到 2009 之間的正整數 n 中，使得 n^2+7 與 $n+4$ 不互質的 n 共有__________個。

6. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足下列關係式：

   $$na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n=(0.9)^{n-1}+(0.9)^{n-2}+\cdots+0.9+1，\ n=1,2,3,\cdots，$$

   則 $a_8=$ __________。

7. 設$a>1$，則滿足不等式$\log_a(x^2+2x-4a-3)\le 2$的x值範圍為__________。

8. 設$\overrightarrow{a}=(4,3)$，$\overrightarrow{b}=(\sqrt{x-1},\sqrt{5-x})$為兩平面向量（其中$x$為變數），則兩向量內積$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$的最大值與最小值的差為__________。

9. 設P為橢圓$\Gamma:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$上一點且$F$、$F'$為$\Gamma$的兩個焦點。若$\angle FPF'=60^\circ$，則△$FPF'$的面積為__________。

10. 將空間中的一直線$\begin{cases}x=z\\y=0\end{cases}$繞$z$軸轉一圈形成圓錐$\Gamma$。若在$\Gamma$與平面$\sqrt{5}x+3y+6z=44$所圍成的區域內，置放一顆球，則此球最大半徑為__________。

國立台灣師範大學數學系 *98 學年度* 甄選入學
指定項目甄試試題詳解

廖森游/安康高中

筆試一、計算證明題：

1. 令$\dfrac{3x+4y}{x+2y}=t\Rightarrow(4-2t)y=(t-3)x$。

①當$t=2$時，$x=0$，又$x^2+y^2>0$，此時$y>0$。

②當$t\neq 2$時，$y=-\dfrac{t-3}{2t-4}x$，因為$x\geq 0$，$y\geq 0$且$x^2+y^2>0$，

所以$-\dfrac{t-3}{2t-4}\geq 0\Rightarrow(t-3)(2t-4)\leq 0$（但$t\neq 2$）$\Rightarrow 2<t\leq 3$。

由①②可得$2\leq t\leq 3$，即$t=\dfrac{3x+4y}{x+2y}$之最大值為 3，最小值為 2，

故

(1) 當$x>0$，$y=0$時，$\dfrac{3x+4y}{x+2y}$的最大值為 3。

(2) 當$x=0$，$y>0$時，$\dfrac{3x+4y}{x+2y}$的最小值為 2。

【另解】

$t=\dfrac{3x+4y}{x+2y}=2+\dfrac{x}{x+2y}$或$t=\dfrac{3x+4y}{x+2y}=3-\dfrac{2y}{x+2y}$，

已知$x\geq 0$，$y\geq 0$，$x^2+y^2>0$，所以

(1) 當$x=0$，$y>0$時，$\dfrac{3x+4y}{x+2y}$之值為 2。

(2) 當$x\neq 0$，$t=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{2y}{x}}\leq 2+\dfrac{1}{1+0}=3$（此時$y=0$），

即$x>0$，$y=0$時，$\dfrac{3x+4y}{x+2y}$的最大值為 3。

(3) 當$y=0,\ x>0$時，$\dfrac{3x+4y}{x+2y}$之值為 3。

(4) 當$y\neq 0$，$t=3-\dfrac{2}{\dfrac{x}{y}+2}\geq 3-\dfrac{2}{0+2}=2$（此時$x=0$），

即$x=0$，$y>0$時，$\dfrac{3x+4y}{x+2y}$的最小值為 2。

2. 因為$98=7\times 13+7$，$2009=154\times 13+7$，

$f(x)$為整係數多項式，令$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$，

所以$f(98)=a_n(7\times 13+7)^n+a_{n-1}(7\times 13+7)^{n-1}+\cdots+a_1(7\times 13+7)+a_0$，

由二項式定理展開，得$f(98)=13\cdot m+(7^n a_n+7^{n-1}a_{n-1}+\cdots+7a_1+a_0)$，$m\in\mathbb{Z}$。

又$f(98)$為 13 的倍數$\Rightarrow 7^n a_n+7^{n-1}a_{n-1}+\cdots+7a_1+a_0=13\cdot t$，$t\in\mathbb{Z}$，

$f(2009)=a_n(154\times 13+7)^n+a_{n-1}(154\times 13+7)^{n-1}+\cdots+a_1(154\times 13+7)+a_0$，

由二項式定理展開，得

$f(2009)=13\cdot k+(7^n a_n+7^{n-1}a_{n-1}+\cdots+7a_1+a_0)=13\cdot k+13\cdot t$，$k,t\in\mathbb{Z}$，

故$f(2009)$也是 13 的倍數。

3. (1) 由已知，設圓心為$(20,t)$，

因與x軸相切於點$(20,0)$，所以半徑為$|t|$，

$$\frac{|60-4t+12|}{5}=|t|\Rightarrow t=8\text{或}-72$$。

當$t=8$時，圓方程式為$(x-20)^2+(y-8)^2=8^2$。

當$t=-72$時，圓方程式為$(x-20)^2+(y+72)^2=72^2$。

(2) 由分點公式得兩切線的交點為$(20,18)$，

設公切線方程式為$y-18=m(x-20)\Rightarrow mx-y-20m+18=0$，

利用圓心到切線的距離等於半徑$\dfrac{|20m-8-20m+18|}{\sqrt{m^2+1}}=8\Rightarrow m=\pm\dfrac{3}{4}$，

所以公切線為$3x-4y+12=0$及$3x+4y-132=0$。

【另解】

$3x-4y+12=0$與x軸交於$(-4,0)$，又圓心在直線$x=20$，

由對稱特性可得所求之直線L為$3x+4y=k$，又直線L過點$(44,0)$，

所以L：$3x+4y=3\cdot 44+4\cdot 0\Rightarrow L$：$3x+4y=132$。

4. 三元一次聯立方程式不只一組解

$\Rightarrow$ 係數行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 3^n & (\sin 2\theta)^n \\ (1+\sec\theta)^n & 0 & 1 \\ -1 & (1+\csc\theta)^n & 0 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow -3^n+(\sin 2\theta)^n\cdot(1+\sec\theta)^n\cdot(1+\csc\theta)^n=0$

$\Rightarrow (2\sin\theta\cos\theta)^n\cdot(1+\sec\theta)^n\cdot(1+\csc\theta)^n=3^n$

$\Rightarrow 2^n\cdot\cos^n\theta(1+\sec\theta)^n\cdot\sin^n\theta(1+\csc\theta)^n=3^n$

$\Rightarrow (\cos\theta+1)^n\cdot(\sin\theta+1)^n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$，

又 n 是奇整數，所以 $(\cos\theta+1)\cdot(\sin\theta+1)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow \sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，

令 $\sin\theta+\cos\theta=t$（其中 $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$），則 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}-t\cdots\cdots$①

將 $\sin\theta+\cos\theta=t$ 兩邊平方整理，得 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}\cdots\cdots$②

由①②得 $\dfrac{1}{2}-t=\dfrac{t^2-1}{2}\Rightarrow t^2+2t-2=0\Rightarrow t=-1\pm\sqrt{3}$，

又 $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\Rightarrow t=-1+\sqrt{3}$，

故 $\sin\theta+\cos\theta=t=-1+\sqrt{3}$， $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}-t=\dfrac{3}{2}-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}(3-2\sqrt{3})$，

代入求值式 $\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta+\cot\theta+\sec\theta+\csc\theta$

$$=\sin\theta+\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\sin\theta+\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta\cdot\sin\theta}+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$=\left(-1+\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}(3-2\sqrt{3})}\right)+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{\frac{1}{2}(3-2\sqrt{3})}\right)$$

$$=-5-\sqrt{3}$$ 。

5. 點$P\in$圓$\Gamma: x^2+y^2=20$，可設$P(\sqrt{20}\cos\theta,\sqrt{20}\sin\theta)$，

O_P表示△ABP的外心，則O_P為AB之中垂線L_1與AP之中垂線L_2之交點，

即 $O_P\begin{cases}L_1: x=4\\ L_2:\sqrt{20}\cos\theta x+(\sqrt{20}\sin\theta-6)y=-8\end{cases}\Rightarrow x=4,\ y=\dfrac{-4(\sqrt{20}\cos\theta+2)}{(\sqrt{20}\sin\theta-6)}$，

令$\dfrac{(\sqrt{20}\cos\theta+2)}{(\sqrt{20}\sin\theta-6)}=k$

$\Rightarrow\sqrt{20}k\sin\theta-\sqrt{20}\cos\theta=6k+2\Rightarrow|\ 6k+2\ |\le\sqrt{20k^2+20}$，

兩邊平方移項化簡整理得$2k^2+3k-2\le 0$

$\Rightarrow(k+2)(2k-1)\le 0\Rightarrow -2\le k\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow -2\le -4k\le 8$，得$-2\le y\le 8$，

故O_P之軌跡是以$(4,-2)$，$(4,8)$為兩端點之線段，

則O_P之解集合為$\{(4,y)\,|\,-2\le y\le 8\}$。

筆試二、填充題：

◎ 答案：

1.	2.	3.	4.	5.
20	(1)$\frac{1}{2}$ (2)$\frac{3}{4}$	6	$a=\sqrt{6},\theta=\frac{\pi}{12}$	87
6.	7.	8.	9.	10.
$-\frac{9^6}{10^7}$	$-(a+3)\le x<-1-2\sqrt{a+1}$ 或$-1+2\sqrt{a+1}<x\le a+1$	4	$3\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$

1. $f(x)=x^8+a_1x^7+a_2x^6+\cdots+a_8=0$的八個根分別為$x_1,\ x_2,\cdots,\ x_8$，

   則八個根的和為$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_8=-a_1=-5\times 4$，所以$a_1=20$。

2. (1) $\dfrac{C_2^{10}+C_2^6}{C_2^{16}}=\dfrac{1}{2}$。

   (2) $\dfrac{C_2^{10}}{C_2^{10}+C_2^6}=\dfrac{3}{4}$。

3. 因為甲、乙、丙、丁隨意選 3 人測量其體重之平均值皆相同，

則設甲、乙、丙、丁都為 a 公斤且戊的體重為 α 公斤，

又乙、丙、戊 3 人的平均體重比前面隨意選 3 人的平均體重多了 5 公斤，

故依題意列式 $\frac{2a+\alpha}{3}=a+5\Rightarrow\alpha=a+15$ ，因此五人體重的平均為 $\frac{5a+15}{5}=a+3$ ，

得 $S=\sqrt{\frac{1}{5}(3^2+3^2+3^2+3^2+12^2)}=6$ 。

4. (1) 利用根與係數關係得知，$\begin{cases}\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=2a & \cdots\cdots(A)\\ \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=a^2-2 & \cdots\cdots(B)\end{cases}$,

因此，(A)(B)兩式整理得 $\frac{a^2(a^2-6)}{(a^2-2)}=0\Rightarrow a=\sqrt{6}$（ $a>0$ ）。

(2) 將 $a=\sqrt{6}$ 代入(B)得 $\sin 2\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\theta=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{12}$ 。

5. 因為 n^2+7 與 $n+4$ 不互質，

利用輾轉相除法得 $(n^2+7,n+4)=23$ ，

令 $n+4=23k$ ，$k\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow n=23k-4$

$1\le 23k-4\le 2009\Rightarrow 5\le 23k\le 2013$ ，$k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow k=1,2,3,\cdots,87$ ，共 87 組解。

n	n^2+7	$n+4$	
	n^2+4n		
-4	$7-4n$		
	$-4n-16$		
	23		

6. 因為

(A) $8a_1+7a_2+\cdots+2a_7+a_8=(0.9)^7+(0.9)^6+\cdots+0.9+1$

(B) $7a_1+6a_2+\cdots+a_7=(0.9)^6+\cdots+0.9+1$

(C) $6a_1+5a_2+\cdots+a_6=(0.9)^5+\cdots+0.9+1$

所以

$(A)-(B)\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_7+a_8=(0.9)^7$

$(B)-(C)\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_7=(0.9)^6$

兩式相減得 $a_8=(0.9)^7-(0.9)^6=\left(-\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^6=-\frac{9^6}{10^7}$ 。

7. (1) 因為真數>0，故$x^2+2x+(-4a-3)>0 \Rightarrow x>-1+2\sqrt{a+1}$或$x<-1-2\sqrt{a+1}$。

(2) 因為$a>1$，$\log_a(x^2+2x-4a-3)\le 2$，

所以$x^2+2x-4a-3\le a^2 \Rightarrow x^2+2x-(a^2+4a+3)\le 0$

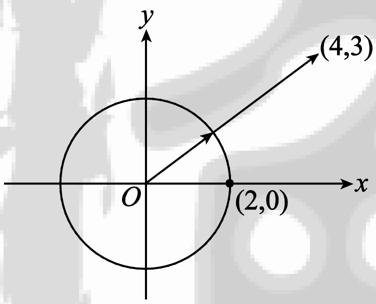
$\Rightarrow [x-(a+1)][x+(a+3)]\le 0 \Rightarrow -(a+3)\le x\le a+1$。

由(1)(2)得$-(a+3)\le x<-1-2\sqrt{a+1}$或$-1+2\sqrt{a+1}<x\le a+1$。

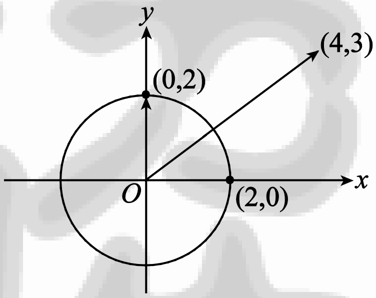
8. 令$\overrightarrow{b}=\left(\sqrt{x-1},\sqrt{5-x}\right)=(u,v)$，$u\ge 0$，$v\ge 0$，

因為$\sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{(x-1)+(5-x)}=\sqrt{4}=2$，

所以$\overrightarrow{b}$可視為始點為原點，終點在半徑為 2 的圓周上（第一象限與 x，y 軸），



圖(1)



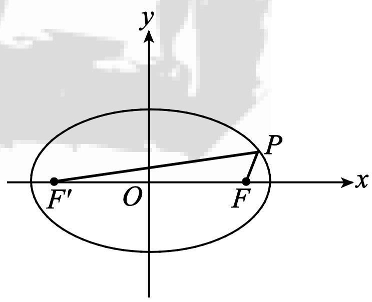
圖(2)

如圖所示，由圖(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 最大，最大值為$5\times 2=10$，

圖(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 最小，最小值為$(4,3)\cdot(0,2)=6$

由(1)(2)得$10-6=4$。

9. 由題意知，$a=5$，$b=3\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=4$,



$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a=10$，$\overline{FF'}=2c=8$，

設$\overline{PF}=x$，則$\overline{PF'}=10-x$，

在$\triangle FPF'$中，$\cos 60^\circ=\dfrac{x^2+(10-x)^2-8^2}{2\cdot x\cdot(10-x)}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{2x^2-20x+36}{2\cdot x\cdot(10-x)}\Rightarrow x^2-10x+12=0$

$\Rightarrow x(x-10)=-12\Rightarrow x(10-x)=12$，

所求$\triangle FPF'$的面積$=\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot(10-x)\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot(12)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$。

10. 由題意可知此圓錐Γ的半頂角為$45°$，任兩母線L_1, L_2之最大夾角為$90°$，

設$L_1:\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ 取一平面E包含L_2且$E \perp L_1$，設$\overrightarrow{N}$為平面E之法向量，

則$\overrightarrow{N} // \overrightarrow{L_1} = (1,0,1)$，又任意母線皆通過$O(0,0,0)$，故$O(0,0,0) \in E$，

故可得平面$E: x + 0y + z = 0$。

設平面$E': \sqrt{5}x + 3y + 6z = 44$，

由題意可知所求之球的球心在z軸上，設球心$S(0,0,t)$，

則球半徑$R = d(S,E) = d(S,E') \Rightarrow \dfrac{|t|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|6t-44|}{\sqrt{50}} \Rightarrow t = 4$或$44$

$\Rightarrow S(0,0,4)$或$S(0,0,44)$（不合, 因為$S(0,0,44)$不與原點$O(0,0,0)$在平面E'的同側），

故球半徑$R = d(S,E) = \dfrac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$。

專欄

動手玩數學

◎許志農／台灣師範大學數學系

遊戲 33

☆☆

下面有兩道跟賽跑有關的邏輯性問題，請你每道限時三秒鐘內回答：

(1)你參加賽跑，追過第二名，你是第幾名？

(2)你參加賽跑，追過最後一名，你是倒數第幾名？

〔玩鎖・玩索〕

這是 Andy 給自認為聰明的人的五道問題其中的兩道，這裡再提供其餘三道中的兩道供讀者思考：

(1) 瑪莉的父親有四個女兒：

大女兒叫一毛；

二女兒叫二毛；

三女兒叫三毛。

請問四女兒叫做什麼名字？

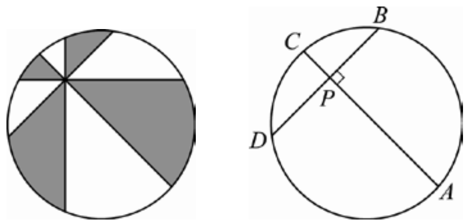
(2) 一個啞巴想買牙刷，他模仿刷牙的動作，成功的向店主表達，也完成了購買。現在一個瞎子想買一副太陽眼鏡，他要如何表達？

遊戲 34

☆☆☆

☆☆

下兩圖中的左圖，在半徑 r 的圓形披薩上選一個任意點，過此點畫四條線將披薩切成八份，要求這四條線中，任兩相鄰的線必須夾 45°，而且一條為水平線、一條為鉛直線；圖中四塊灰色披薩與四塊白色披薩的面積相等，這就是有名的披薩定理。在兩圖中的右圖，考慮其中互相垂直的兩條弦 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$。我們將探討這弦所產生的數學等式，再利用這數學等式闡釋披薩定理。



(1) 證明

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$$

是一個定值，並求此定值。

(2) 從上述定值解釋披薩定理。

〔玩鎖・玩索〕

弦 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 垂直於 P 點，即產生

$$\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$$

四條線段，這四條線段透露了披薩定理的弦外之音。想想看，如果將此四條線段以 P 點為中心，逆時鐘方向旋轉，四條線段的長短隨著旋轉角度而不同，但是他們的平方和卻是不變的定值，那麼利用扇形面積公式 $\frac{1}{2}r^2\theta$，得這定值乘以旋轉的角度就是他們掃過的區域面積。將角度代 $\frac{\pi}{4}$，可得到白色區域的披薩面積。

遊戲 35

☆☆

有五隻大象，不知道每隻真正的重量，但知道牠們的重量都不相等。渡河時，每次都讓兩隻大象擠在同一艘船，下面的數據

110,112,113,114,115,

116,117,118,120,121（單位：石頭）

是幾次渡河時，量得的總重量。是否可依此推得五隻大象各重幾顆石頭呢？

（假設量大象用的石頭，每顆重量一樣）

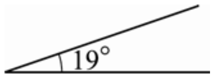
〔玩鎖・玩索〕

曹沖自小生性聰慧，五、六歲的時候智力就和成人相仿。孫權曾送給曹操一頭大象，曹操想知道大象的重量，問遍了手下的人，都想不出秤象的方法，因為沒有那麼大的秤。曹沖想出一法：把大象放進船裡，記錄水位到達船舷的位置；牽出大象，將石頭往船上裝，直到水位到達先前記錄的位置；然後分批秤出石頭的重量，併疊加得出總重量。這總重量即等於大象的重量。曹操非常高興，按照他說的方法秤出了大象的重量。

遊戲 36

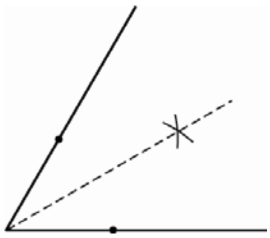
☆

給定19°的角。試著以尺規作圖作出角度為1°的角。



〔玩鎖・玩索〕

這是 95 學年度高級中學數學科能力競賽決賽的口試試題，比賽地點在國立彰化師範大學數學系。國中時，作出正三角形來是每位學生必懂的一道作圖問題，此問題也告訴我們：60°是可以尺規作圖的。又給定一個角，將此角平分（即作出角平分線來）也是可以作圖的，作法如下：



因此，30°也是可以尺規作圖的。一般而言，當角度θ給定時，角度$\dfrac{\theta}{2}$及2θ都是可以尺規作圖的。

動手玩數學~破解秘笈 第8期

遊戲 29

將七點提示劃在下方所對應的表格裡，打×代表不可能的對應：

	一夫	二郎	三吉	四祥	五平
麵包店老闆	×		×	×	✓
理髮師	✓	×	×	×	×
肉店老闆	×		×	✓	
菸酒經銷商	×		✓	×	
公司職員		✓	×	×	×

從這表格得知正確的對應（打✓者）為：

一夫是理髮師，二郎是公司職員，三吉是菸酒經銷商，四祥是肉店老闆，五平是麵包店老闆。

遊戲 30

分析如下：

(1) 根據朱載堉理論

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2^{m-1}}}=\frac{1}{4}\Rightarrow 2^{\frac{m-1}{12}}=4=2^2,$$

即$\dfrac{m-1}{12}=2$，解得$m=25$。

(2) 根據朱載堉理論

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2^{n-1}}}\approx\frac{1}{3}\Rightarrow 2^{\frac{n-1}{12}}\approx 3,$$

兩邊取對數，得

$$\log 2^{\frac{n-1}{12}}\approx\log 3\Rightarrow n-1\approx\frac{12\log 3}{\log 2}.$$

將$\log 2\approx 0.3010, \log 3\approx 0.4771$代入估算，得

$$n-1\approx\frac{12\cdot 0.4771}{0.3010}\approx 19.0206.$$

故最可能的n值為 20。

遊戲 31

設裹屍布已存在n年（算至 1960 年），根據半衰期公式，得

$$\frac{14}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5600}},$$

兩邊取對數，得

$$\log 15-\log 14=\frac{n}{5600}\cdot\log 2.$$

將$\log 15\approx 0.4771+0.6990\approx 1.1761$及$\log 14\approx 0.3010+0.8451\approx 1.1461$代入估算，得

$$\frac{n}{5600}\approx\frac{1.1761-1.1461}{0.3010}\approx\frac{1}{10},$$

即$n\approx 560$，推算

$$1960-560=1400.$$

得裹屍布的年代約為西元 1400 年。

遊戲 32

設跳蟲跳動n次後所在位置的號碼為a_n，根據跳動規則可得

$$a_1=2, a_2=5, a_3=6, a_4=3, a_5=4, a_6=1, a_7=2,\cdots$$

從上式得知跳蟲每跳 6 次就會回到原來的位置，又因為

$$99=6\times 16+3,$$

所以

$$a_{96}=1, a_{97}=2, a_{98}=5, a_{99}=6\ .$$

故跳蟲在跳動 99 下後，其所在位置的號碼是 6 號。