許教授講故事 STORY

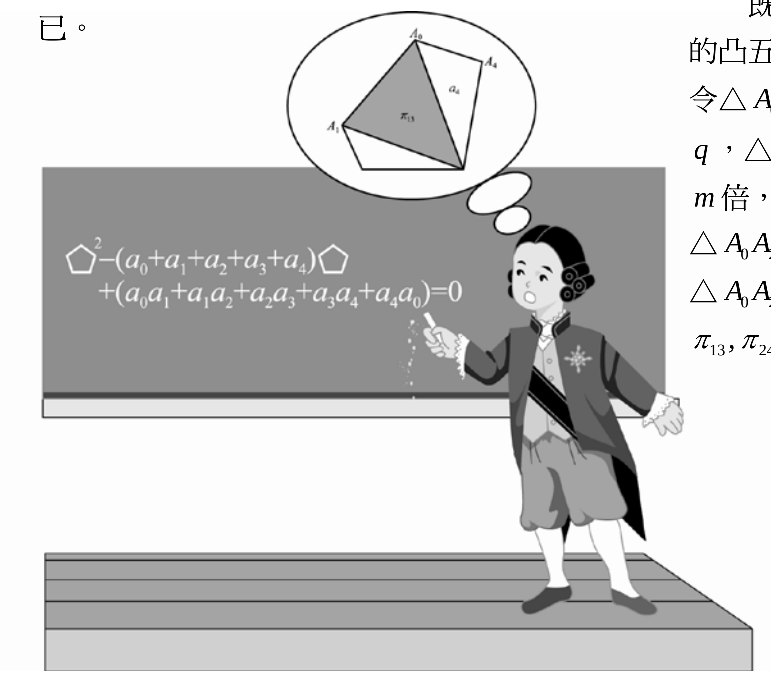
高斯戲弄五邊形...稀少，但成熟！

◎許志農／台灣師範大學數學系

提到高斯，大家總是聯想到

$$1+2+3+\cdots+100=5050$$

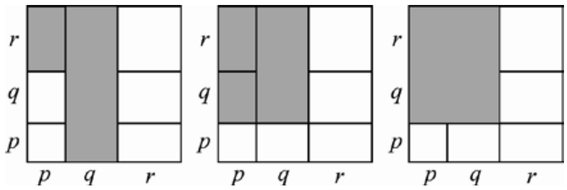
的故事；有時也會提到高斯是第一位證明正十七邊形可以尺規作圖的數學家；或者說，高斯的數學風格稀少，但成熟。這裡我們要引導讀者完成一則五邊形的面積公式，知道這個公式的人不多，曉得公式是高斯所發現的更少。俗語說得好「凡事起頭難」，但我們的起頭卻相當容易，只是大家想不到而已。



你會認為

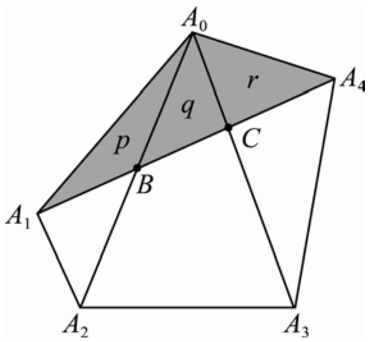
$$pr+q(p+q+r)=(p+q)(q+r)$$

是個很難的等式嗎？一點都不難，只需將兩邊分別乘開，就馬上看出相等了。雖然在中學教科書未曾出現過這個等式，但它卻是一個相當有用的公式，有人稱它為「蒙日等式」。我們也可以透過底下的面積演變，證明蒙日等式：



我們也可以用文字來記憶蒙日等式：「將一個數拆成三項的和，頭尾兩項的積加上中項與全數的積會等於前兩項和與後兩項和的乘積。」

既然要討論五邊形，就讓我們畫個隨意的凸五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$。為了方便起見，令△ A_0A_1B 的面積為 p，△ A_0BC 的面積為 q，△ A_0CA_4 的面積為 r；令 $\overline{A_0A_2}$ 是 $\overline{A_0B}$ 的 m 倍，$\overline{A_0A_3}$ 是 $\overline{A_0C}$ 的 n 倍；並將△ $A_0A_1A_2$，△ $A_0A_2A_3$，△ $A_0A_3A_4$，△ $A_0A_1A_4$，△ $A_0A_1A_3$，△ $A_0A_2A_4$ 的面積分別記為 $\pi_{12},\pi_{23},\pi_{34},\pi_{14},\pi_{13},\pi_{24}$。



有了五邊形圖形及符號定義之後，我們可以得出底下的面積關係：

$$\begin{cases} p=\dfrac{\pi_{12}}{m},\ q=\dfrac{\pi_{23}}{mn},\ r=\dfrac{\pi_{34}}{n}; \\ p+q+r=\pi_{14},\ p+q=\dfrac{\pi_{13}}{n},\ q+r=\dfrac{\pi_{24}}{m}. \end{cases}$$

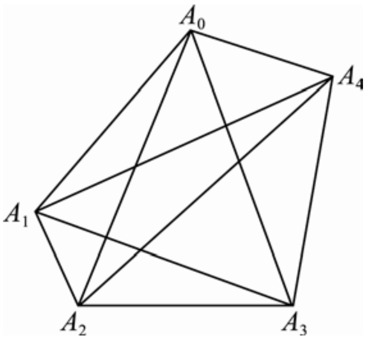
把這六個式子代入蒙日等式，得

$$\frac{\pi_{12}\pi_{34}}{mn}+\frac{\pi_{23}\pi_{14}}{mn}=\frac{\pi_{13}\pi_{24}}{mn},$$

即

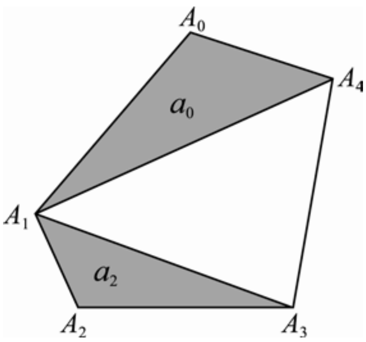
$$\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{23}\pi_{14}=\pi_{13}\pi_{24}.$$

真想不到，從五邊形的一個頂點出發，總共可以畫出六個三角形，而它們的面積有這樣美好的等式關係。我嘗試將五邊形的所有對角線都畫上，如下圖所示：



此時對角線將五邊形分割成 11 塊區域；把這 11 塊區域分別用符號標示，並把公式中的六個區域分別寫成這 11 塊區域的部分和，然後代入等式驗算，發現沒辦法完全消掉。這告訴我們，這個恆等式隱含著比 11 塊區域還多的訊息。

現在就讓讀者操作一下剩下的部分。同樣是這個五邊形，我們把相鄰三個頂點 A_1, A_0, A_4 所形成的△ $A_1A_0A_4$ 之面積記為 a_0；同樣的，△ $A_2A_1A_0$，△ $A_3A_2A_1$，△ $A_4A_3A_2$ 及△ $A_0A_4A_3$ 的面積分別記為 a_1, a_2, a_3 及 a_4，剛好每個頂點對應一個三角形，我們稱它們為此五邊形的基本三角形。



1 設五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積為⬠，試著利用基本三角形的面積 a_0, a_1, a_2, a_3 及 a_4 來表示五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積⬠。

我們手上已經有一個面積恆等式

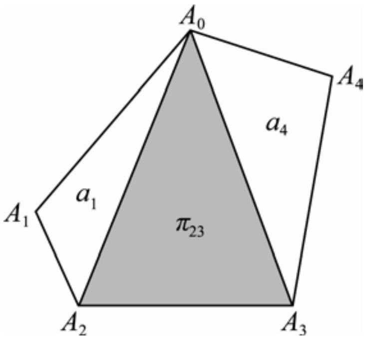
$$\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{23}\pi_{14}=\pi_{13}\pi_{24}.$$

如果可以將恆等式中的六個值都用 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 及⬠來表示，那麼就可以求得⬠的公式了。

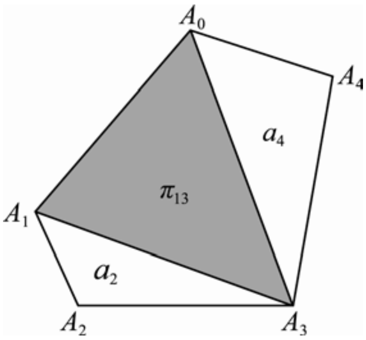
在走更遠的路之前，讓我們停下來講個故事。幾年前中部一所大學舉辦一場研習，請了幾位數學教授演講有趣的數學題材，我就是講高斯五邊形定理這個主題，在演講結束後，參與研習的聽眾都對這個第一次聽到的公式很有興趣，然而午餐時間，主辦這場研習的教授問我一個問題：「知道這個五邊形的面積公式，對人類有什麼意義嗎？」我一時不知如何回答他的問題。現在想想，如果把對人類不是太有意義的事情，如音樂、藝術、登陸月球、探測火星、宇宙有多大…等，都擱置或者不鼓勵研究，那麼我們的生活或世界會是個什麼模樣呢？

因為 π_{12} 是△ $A_0A_1A_2$ 的面積，所以 $\pi_{12}=a_1$；同理 $\pi_{34}=a_4, \pi_{14}=a_0$。分別知道：

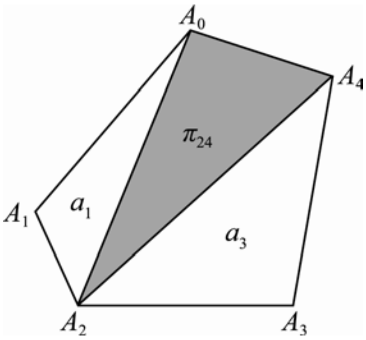
(1) $\pi_{23}=$ ⬠ $-(a_1+a_4)$



(2) $\pi_{13} = \pentagon - (a_2 + a_4)$



(3) $\pi_{24} = \pentagon - (a_1 + a_3)$



將上述三個式子代入

$$\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{23}\pi_{14} = \pi_{13}\pi_{24}.$$

得到

$$a_1a_4 + (\pentagon - (a_1 + a_4))a_0$$
$$= (\pentagon - (a_2 + a_4))(\pentagon - (a_1 + a_3)).$$

整理移項得

$$\pentagon^2 - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\pentagon$$
$$+ (a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_0) = 0.$$

也就是說，五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積$\pentagon$是二次方程式

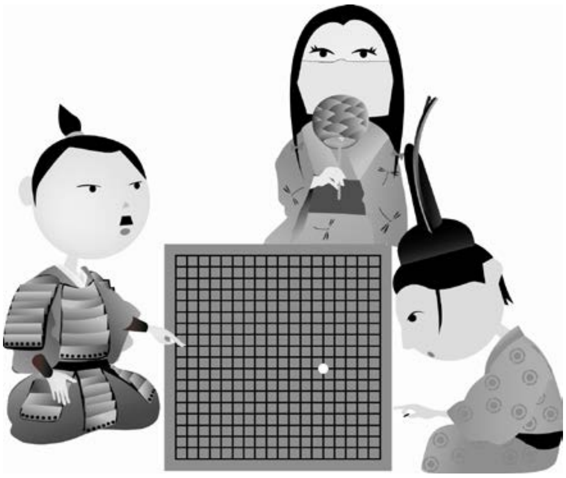
$$x^2 - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)x$$
$$+(a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_0) = 0$$

的一根，將二次方程式根的公式解出，就得到$\pentagon$的公式。

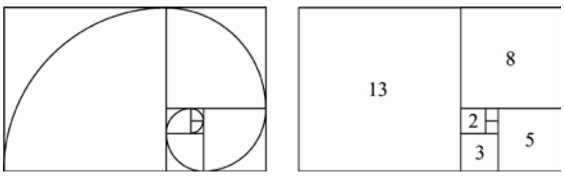
達文西的棋盤…聆聽上帝的美學

◎許志農／台灣師範大學數學系

「公爵和他忠誠的騎士對奕，一位神秘的黑衣女子在背後觀棋…」，這是一幅畫裡的場景。畫裡的棋局不僅讓達文西喜愛不已，就連東方的鐵路工人也著迷。究竟棋局所留下的數學謎團是什麼呢？



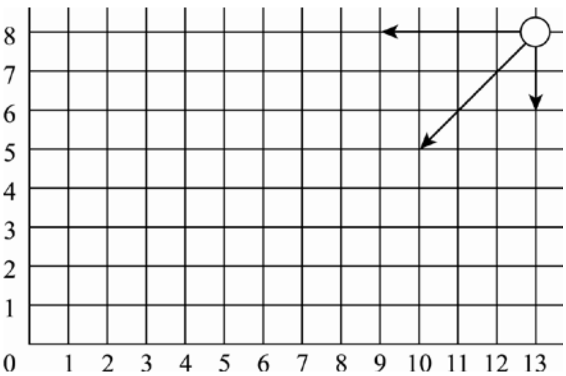
達文西在他的畫作中充分使用了黃金比例，在今日許許多多的事物也都遵循這個比例在運作。例如：傳統照片規格3×5，廣角照片規格4×7及大小為$15:9$的寬螢幕電腦等，都是在談論不同長、寬比例的矩形，這種比例接近1.618的矩形稱為黃金矩形。



▲螺線與黃金比例

不知是人類DNA的遺傳或是上帝的傑作，人類對這種大小尺寸的黃金矩形特別情有獨鍾。當你拿出許許多多不同大小的矩形供小孩子挑選時，他們總是會挑到黃金矩形，就像真正的小法王總是可以選對圓寂法王所留下的法器一樣不可思議。人類這種與生俱來的審美天賦，可以運用在遊戲上擊敗對手嗎？讓我們以一道在圍棋棋盤上玩的遊戲作說明，這遊戲跟圍棋最大的差別是：只需一粒棋子就可以玩這道遊戲。

1 在圍棋的棋盤上放置一粒棋子，接著甲、乙兩人輪流移動這粒棋子，棋盤與移動規則如下：



(1) 甲、乙輪流移動棋子。

(2) 移動棋子的原則：每次只能將棋子往正下方、正左方或左斜下方移動，即每次只能從三個方向中選擇一種，但移動格子數需至少一格。

(3) 將棋子移到原點者贏。

如果一開始將棋子擺在$(13,8)$的位置，那麼誰會贏得這場比賽呢？

棋子的位置與原點可以圍出一個矩形，例如：在上圖中，當棋子落在$(13,8)$時，所圍出的矩形大小為13×8。當甲、乙兩人輪流移動棋子廝殺時，可以將眼光放在可構成黃金矩形的落點上，即

$$(1,2),(2,1),(3,5),(5,3),(4,7),(7,4),\cdots,$$
$$(8,13),(13,8),\cdots$$

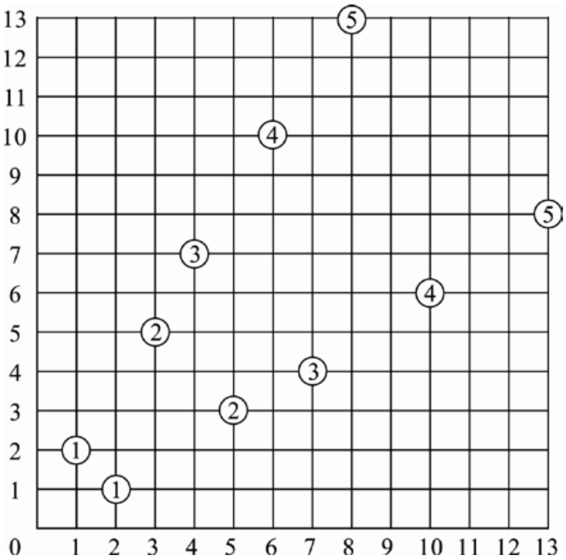
上。當你移動棋子讓它落在這些關鍵點時，會發現贏的機會特別高。也就是說，讓棋子

落在賞心悅目的點上，就是克敵制勝的關鍵。但是，至少有兩個問題產生：

(1) 讓它構成黃金矩形的格子點如何發現？規律為何？

(2) 當我占據關鍵點，對手就無法移動棋子到另一個關鍵點嗎？又下一輪我可以再占到另一個關鍵點嗎？

其實，當你將棋子落在上述關鍵點時，就會贏得比賽，參考下圖：



顯然，當棋子落在 $(0,0)$ 點的向右水平方向、向上鉛直方向或右上對角方向時，只需一次移動就可以移到原點獲勝，所以把這三條射線上的點劃掉。在剩下的點中，離原點最近的兩個點為 $(1,2)$ 與 $(2,1)$，這是你可以贏的第一占據位置。

接下來，將點 $(1,2)$ 與 $(2,1)$ 的向右水平方向、向上鉛直方向及右上對角方向的點劃掉，在剩下的點中，離原點最近的兩個點為 $(3,5)$ 與 $(5,3)$ ，這是你可以贏的第二占據位置。

同樣的，將點 $(3,5)$ 與 $(5,3)$ 的向右水平方向、向上鉛直方向及右上對角方向的點劃掉，在剩下的點中，離原點最近的兩個點為 $(4,7)$ 與 $(7,4)$ ，這是你可以贏的第三占據位置。

如此繼續下去，就可以得到會贏的關鍵點

$$(6,10),(10,6),(8,13),(13,8),\cdots.$$

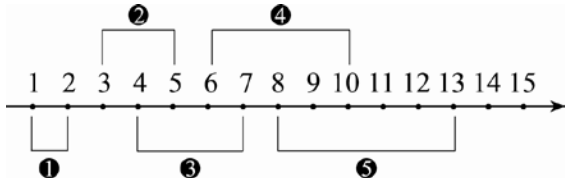
在玩的過程中，只需占據這些要塞，必勝券在握。

每次這樣的劃線刪除很費時間，這裡提出比較簡單的方法：

將所有的正整數

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,\cdots.$$

標記在數線上，如下



如上圖所示，從最小的 1 開始，取與它相距 1 單位的點 2 配成一對，得 $(1,2)$ 與 $(2,1)$ 。

接下來，從剩下最小的數 3 開始，取與它相距 2 單位的點 5 配成一對，得 $(3,5)$ 與 $(5,3)$ 。

同樣的，從剩下最小的數 4 開始，取與它相距 3 單位的點 7 配成一對，得 $(4,7)$ 與 $(7,4)$ 。

如此繼續下去，就可以得到更多的關鍵數對： $(6,10),(10,6);(8,13),(13,8);\cdots;$ 等等。

事實上，「一子棋遊戲」只是「拈」的另一種呈現方式，換湯不換藥，究竟什麼是「拈」呢？稍微介紹一下：「拈」這個遊戲本是中國民間的遊戲，英文叫做 Nim，大概這遊戲是當年大批（廣東人）華工到美國去做工，在工作之餘撿石頭逍遣或賭博時，被美國佬學了去，而 Nim 是由廣東話「拈」（取物之意）轉音而來。遊戲的規定是這樣的：將石頭分為兩堆，每堆的個數隨玩者任意規定，兩人輪流從任一堆中取一個或多個石頭，或者同時在兩堆取同樣個數的石頭，直到最後將石頭取光的人贏。「一子棋遊戲」的條件就是「拈」條件的不同呈現方式，我只是將它改

頭換面，讓這道拿取石頭的「拈」可以在坐標平面上操作，讓它較為數學化而已。

一子棋這道遊戲是我在恆春當兵時發明的，當我駐守關山崖下的山海里時，在落山風相伴的晚上，與阿兵哥玩一子棋是無聊軍中生活裡的一大樂趣。

【參考文獻】

1. 張鎮華，拈及其各種變形遊戲，數學傳播第三卷第二期。
2. 李宗元、黃敏晃，一個名為「拈」的遊戲，科學月刊第七十期。
3. 許志農，古老的池塘，青蛙跳入，噗通！…一子棋的誘惑，與奇人相遇的故事。
4. 雷維特（陳慧瑛譯），法蘭德斯棋盤，漫遊者出版。

如何計算圓錐曲線的切線

◎羅驥韡／台北市立陽明高中

計算圓錐曲線的切線方程式一直是個難題，尤其是對一般高中生的程度來說，更何況針對不同的圓錐曲線（橢圓、拋物線、雙曲線…等）而言，又有不同的切線公式，感覺上既不統一又難以記憶，所以我在這裡要介紹一種算法，一種統一的算法，讓你不管面對何種圓錐曲線，都可以直接應用的公式。

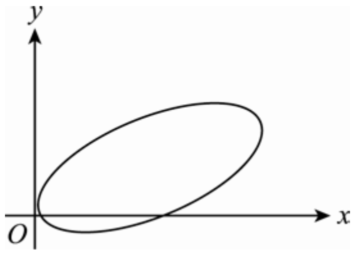
圓錐曲線方程式

在坐標平面上，我們知道不管是哪一種圓錐曲線，都可以表示為以下的形式：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

例如：

- ◆ 橢　圓：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$，我們可以寫成：$x^2+4y^2-4=0$.
- ◆ 拋物線：$y^2=4(x-1)$，我們可以寫成：$y^2-4x+4=0$.
- ◆ 雙曲線：$\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{3}=1$，我們可以寫成：$3x^2-y^2-3=0$.

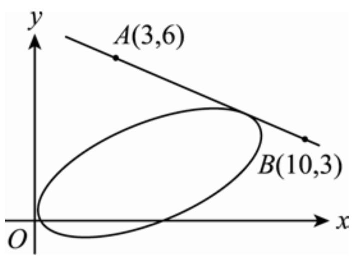


當然上面所舉的例子都是所謂的「標準式」，也就是這些圓錐曲線在坐標平面上的位置都是經過特別安排的，所以方程式會看起來特別漂亮簡潔。一般說來，如果圓錐曲線沒有在「標準位置」的話，那麼它的方程式就會看起來有點複雜，例如：$x^2-2xy+3y^2-5x-2y+1=0$，它的圖形會像右圖一樣。

如何判斷一條通過特定兩點的線是不是切線呢？

例題

1. 我在上面的圓錐曲線中，再加入兩個點 $A(3,6)$ 與 $B(10,3)$，那麼連接這兩點的直線到底是不是切線呢？



解 要回答這樣的問題，我們可以利用**直線的參數式**來測試看看，到底這條直線與圓錐曲線有幾個交點，以下我們就來計算看看：

首先，通過 A, B 兩點的直線參數式為 $\begin{cases} x=3+7t \\ y=6-3t \end{cases}$ ，$t\in\mathbb{R}$.

我們將這組點坐標代入圓錐曲線方程式

$$x^2-2xy+3y^2-5x-2y+1=0，$$

得到 $(3+7t)^2-2(3+7t)(6-3t)+3(6-3t)^2-5(3+7t)-2(6-3t)+1=0$,

化簡得 $118t^2-161t+55=0$,

計算它的**判別式**可以得到 $(-161)^2-4\times118\times55=-33<0$.

所以由**判別式小於零**，我們可以知道上述的直線與圓錐曲線**沒有任何交點**。

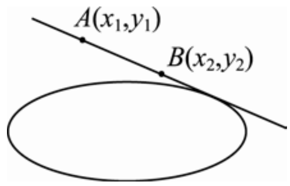
（雖然圖形上看起來「好像」切到，但事實上，精確的計算告訴我們並沒有。）

一般說來，要判斷一條通過特定兩點的線是不是切線，都可以利用上述的方法來達成。既然這個方法這麼好用，那麼我們何不利用這樣的思考模式，發展出一些好用的公式或判斷的法則呢？沒錯！這正是我們這篇文章的目的，所以我們就繼續往下探索看看吧！

探索切線的公式或準則

假設直線通過 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$ 兩點，圓錐曲線為 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ ，那麼我們利用上述同樣的方法來計算看看，直線參數式與圓錐曲線之間，有沒有任何交點。

首先，直線參數式為 $\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}$ ，$t\in\mathbb{R}$.



然後，我們將這組坐標代入圓錐曲線方程式，得到

$$a\left[x_1+(x_2-x_1)t\right]^2+b\left[x_1+(x_2-x_1)t\right]\left[y_1+(y_2-y_1)t\right]+c\left[y_1+(y_2-y_1)t\right]^2$$
$$+d\left[x_1+(x_2-x_1)t\right]+e\left[y_1+(y_2-y_1)t\right]+f=0,$$

如果我們將上面的計算式整理成 t 的二次式，會得到

$$\left[a(x_2-x_1)^2+b(x_2-x_1)(y_2-y_1)+c(y_2-y_1)^2\right]\cdot t^2$$
$$+\left[2ax_1(x_2-x_1)+bx_1(y_2-y_1)+by_1(x_2-x_1)+2cy_1(y_2-y_1)+d(x_2-x_1)+e(y_2-y_1)\right]\cdot t$$
$$+\left[ax_1^2+bx_1y_1+cy_1^2+dx_1+ey_1+f\right]=0.$$

當然，如果我們要計算這個二次式到底有沒有解，還要計算它的**判別式**，這時你或許會想：「天啊！它的係數已經如此複雜了，我們竟然還想去計算它的判別式？就算我們真的花了九牛二虎之力把它算出來了，難道我們還會想去記憶它或應用它嗎？」的確，我們是遇上了瓶頸，我們遇到變數符號太多太長、複雜難以處理的窘境。然而，正是因為面對這樣的窘境，才讓數學家了解到必須開發新的符號與新的運算規則，讓我們可以繞過複雜計算的深淵，繼續邁向推理解題的大道。以下我們就來介紹這個新的利器！

開發新的運算符號

首先，我們先來介紹一種「表格式乘積加總法」：

		3	
2		5	

在左邊的表格中，2 所在的那一橫列與 3 所在的那一直行，對到了數字 5，這時我們規定：2, 3, 5 要乘起來，也就是會得到 $2\times3\times5=30$.

		3	4
1			6
2		5	

我們在左表中，又多放了一些數字上去，現在我們要計算 $2\times3\times5$ 和 $1\times4\times6$ ，並把它們加總起來，所以其實我們要計算的是 $2\times3\times5+1\times4\times6=30+24$.

	1	3	4
0	−1	−2	7
1	0	8	6
2	−4	5	0

在這個例子中，我們填上所有的數字，並利用上面說明的方式將所有的乘積全部加起來。首先，我們先將左側的數字 0, 1, 2 和上側的數字 1, 3, 4 乘到格子裡，可以得到下表中的數字：

0	0	0
0	24	24
−8	30	0

最後，我們只要將表格中所有的數字加起來，那麼所得到的數字就是我們想要計算的**總和**，也就是 $24+24-8+30=70$. 這就是我們所說的「表格式乘積加總法」。

當然，如果你學過「矩陣」乘法，你會知道我們這裡所謂的「表格式乘積加總法」，其實可以用矩陣來表示。例如：上面所舉的最後一個例子，可以利用矩陣乘法：

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 7\\ 0 & 8 & 6\\ -4 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$$

來表示。不過，如果你沒學過矩陣，那也沒關係，請繼續看我們以下的討論就可以了。

我們這裡為什麼要介紹這樣怪異的加總法呢？主要是因為這種加總法剛好跟圓錐曲線的方程式有某種巧妙的連結。請看以下的例子：

	x	y	1
x	-1	-2	7
y	0	8	6
1	-4	5	0

在左表中，如果我們運用「表格式乘積加總法」，那麼我們會得到

$$-x^2-2xy+8y^2+3x+11y+0.$$

請讀者注意看：這剛好是圓錐曲線方程式

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

等號左邊的形式，這也正是為什麼我們要介紹這種加總法的原因。

	x	y	1
x	a	$\frac{b}{2}$	$\frac{d}{2}$
y	$\frac{b}{2}$	c	$\frac{e}{2}$
1	$\frac{d}{2}$	$\frac{e}{2}$	f

如果我們在表格中設定了像左表一樣的數字（請注意裡面的 $\frac{b}{2},\frac{d}{2},\frac{e}{2}$），那麼我們就會得到與圓錐曲線一般式（等號左邊）一模一樣的形式：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f.$$

	x_2	y_2	z_2
x_1	a	b	c
y_1	d	e	f
z_1	g	h	i

最後，為了靈活運用這樣的計算法，我們把最通用的形式寫出來，並且徹底研究這種運算法的規則，才能順利地用於後面的解題推理中。

但是，我們總不能每次都用畫表格的方式來表現，所以在這裡我們假設

$$M=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix},\ P=(x_1,\ y_1,\ z_1),\ Q=(x_2,\ y_2,\ z_2),$$

並且，我們規定新的符號：$[P,Q]_M$. 就代表左表所表示的「表格式乘積總和」，也就是

$$[P,\ Q]_M = ax_1x_2+bx_1y_2+cx_1z_2+dy_1x_2+ey_1y_2+fy_1z_2+gz_1x_2+hz_1y_2+iz_1z_2.$$

新符號的定義：

$$[P,\ Q]_M=\begin{array}{c|ccc} & x_2 & y_2 & z_2\\ \hline x_1 & a & b & c\\ y_1 & d & e & f\\ z_1 & g & h & i\end{array}$$

$$= ax_1x_2+bx_1y_2+cx_1z_2+dy_1x_2+ey_1y_2+fy_1z_2+gz_1x_2+hz_1y_2+iz_1z_2.$$

究竟這樣的新符號有什麼漂亮的運算規則呢？請看以下的說明：

新符號的運算性質

假設我們除了上述的新符號之外，我們也引用一般的「向量加法」與「純量積」的運算概念，也就是下列的運算規則：

◆ 若 $P=(x_1,\ y_1,\ z_1), Q=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，則 $P+Q$ 代表 $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$。

◆ 若 $P=(x,\ y,\ z), t$ 為實數，則 tP 代表 (tx, ty, tz)。

那麼，我們所使用的新符號就會有以下的運算規則：

假設 $P=(x_1,\ y_1,\ z_1), Q=(x_2,\ y_2,\ z_2), R=(x_3,\ y_3,\ z_3), t$ 為實數，則有

◆加法分配律：

$$[P+Q, R]_M=[P, R]_M+[Q, R]_M \quad \text{或} \quad [P, Q+R]_M=[P, Q]_M+[P, R]_M.$$

◆純量積：

$$[tP, Q]_M=t[P, Q]_M=[P, tQ]_M.$$

一般而言，「交換律」並不成立，也就是 $[P, Q]_M=[Q, P]_M$ 通常是錯的，但如果 M 是「對稱」的，那麼交換律也會是正確的。但我們說 M 是「對稱」的，指的是什麼意思呢？在這裡我舉個例子：

1	2	5
2	4	6
5	6	7

左表中，數字 1, 4, 7 所在的位置，我們術語上稱為矩陣的「主對角線」，在這主對角線的兩側的「格子對」（如圖中紅色的箭頭所指的三對格子），如果都各自相同，那麼我們就說：這個矩陣是「對稱」的。

	x	y	1
x	a	$\frac{b}{2}$	$\frac{d}{2}$
y	$\frac{b}{2}$	c	$\frac{e}{2}$
1	$\frac{d}{2}$	$\frac{e}{2}$	f

左表中，如果我們假設 $M=\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}, P=(x,\ y,\ 1).$

那麼，圓錐曲線的方程式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 就可以寫成

$$[P, P]_M=0.$$

這裡的 M 就是一個典型的「對稱矩陣」。從現在開始，我們將這個矩陣稱為圓錐曲線的「係數矩陣」。

因此，如果 M 是「對稱」的，那麼我們的新符號就擁有了「交換律」

$$[P, Q]_M=[Q, P]_M.$$

豁然開朗的切線準則

我們前面有提到，如果點$(x,\ y)$在圓錐曲線$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$上面，那麼這個點坐標代入方程式當然會等於零，如果我們用「表格式乘積加總法」來表示的話，那會得到

	x	y	1
x	a	$\frac{b}{2}$	$\frac{d}{2}$
y	$\frac{b}{2}$	c	$\frac{e}{2}$
1	$\frac{d}{2}$	$\frac{e}{2}$	f

=0.

所以，如果A的坐標為$(x,\ y)$，那麼我們希望用$\overline{A}$來代表$(x,y,1)$，這樣的話，我們就可以用更簡短的方式來表示一個點是否在圓錐曲線上了，也就是$A(x,\ y)$在$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$上。可以寫成

	x	y	1
x	a	$\frac{b}{2}$	$\frac{d}{2}$
y	$\frac{b}{2}$	c	$\frac{e}{2}$
1	$\frac{d}{2}$	$\frac{e}{2}$	f

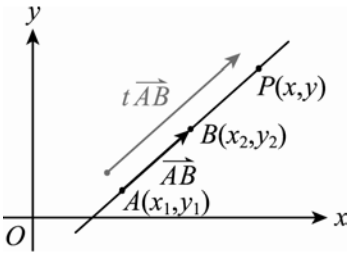
$=\left[\overline{A},\ \overline{A}\right]_M=0$，其中$M=\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}$.

我們就不妨把$\overline{A}(x,\ y,1)$稱為是$A(x,\ y)$的「擴充坐標」吧！（比較正式的說法是「齊次坐標」）

所以我們假設B點的坐標為$(4,5)$，那麼$\overline{B}$就是$(4,5,1)$，其餘請以此類推。好，我們已經做完所有的準備工作了，現在讓我們正式開始繼續切線的推理工作吧！

通過$A=(x_1,\ y_1),B=(x_2,\ y_2)$兩點的直線參數式為

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t=(1-t)x_1+tx_2 \\ y=y_1+(y_2-y_1)t=(1-t)y_1+ty_2 \end{cases},\ t\in\mathbb{R},$$



我們也可以寫成$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=(1-t)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

如果我們把$(x,\ y)$稱為P，那麼會有$P=(1-t)A+tB$.

事實上，對於擴充坐標$\overline{P}(x,\ y,1)$來說，$\overline{P}=(1-t)\overline{A}+t\overline{B}$也是對的，

也就是$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}=(1-t)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$是對的。（請讀者自行檢驗）

現在，要檢查AB直線上的動點P是不是在圓錐曲線上，我們只要檢查$\left[\overline{P},\ \overline{P}\right]_M=0$對不對就好。

但因為$\overline{P}=(1-t)\overline{A}+t\overline{B}$，所以，我們要檢查$\left[(1-t)\overline{A}+t\overline{B},\ (1-t)\overline{A}+t\overline{B}\right]_M=0$有沒有解？

接著我們整理（利用**新符號的運算性質**）：

$$\begin{aligned} &\left[(1-t)\overline{A}+t\overline{B},\ (1-t)\overline{A}+t\overline{B}\right]_M \\ &=(1-t)^2\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M+2t(1-t)\left[\overline{A},\overline{B}\right]_M+t^2\left[\overline{B},\overline{B}\right]_M \\ &=\left(\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M-2\left[\overline{A},\overline{B}\right]_M+\left[\overline{B},\overline{B}\right]_M\right)\cdot t^2+\left(-2\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M+2\left[\overline{A},\overline{B}\right]_M\right)\cdot t+\left(\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M\right). \end{aligned}$$

之前，我們對這個t的二次式有沒有解束手無策，現在有了新的符號幫忙下，如虎添翼，我們不僅用新符號重新算出這個二次式，這一次我們更要計算出它的**判別式**。請繼續看下面判別式的計算：

$$\left(-2\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M+2\left[\overline{A},\overline{B}\right]_M\right)^2-4\left(\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M-2\left[\overline{A},\overline{B}\right]_M+\left[\overline{B},\overline{B}\right]_M\right)\left(\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M\right)$$
$$=4\left(\left[\overline{A},\overline{B}\right]_M^2-\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M\left[\overline{B},\overline{B}\right]_M\right).$$

從上式，我們得到一個非常重要的結果，也是本文最主要的結果：

當$\left[\overline{A},\overline{B}\right]_M^2-\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M\left[\overline{B},\overline{B}\right]_M=0$時**判別式為零**，此時意味著：直線$AB$與圓錐曲線的**交點只有一個**，這個交點就是**切點**，此直線就是**切線**。

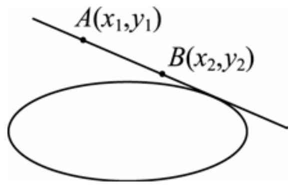
因為這個「切線準則」太重要了，所以我們重新再敘述一遍：

切線準則：

若通過$A(x_1,\ y_1)$與$B(x_2,\ y_2)$的直線為圓錐曲線

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

的**切線**，則「擴充坐標」$\overline{A}(x_1,\ y_1,\ 1),\overline{B}(x_2,\ y_2,\ 1)$會擁有以下的**切線準則**：$\left[\overline{A},\overline{B}\right]_M^2-\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M\left[\overline{B},\overline{B}\right]_M=0$.



之前我們完全無法處理的判別式，現在竟然化為如此簡短的數學式，可見新符號的威力真是驚人！

切線準則的應用

現在讓我們舉幾個例子來看看如何使用這個超強的「切線準則」。

例題

2. $A(3,-2)$在雙曲線$x^2-y^2+x-2y-12=0$上，請問經過A點的切線方程式是什麼？

解 假設$P(x,y)$為切線上的一點，那麼通過A與P的直線，事實上就是切線本身，既然如此，

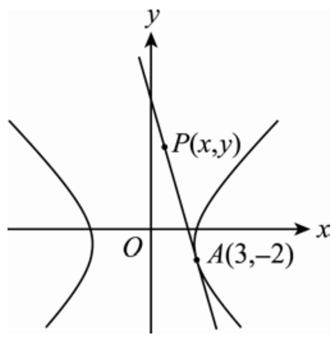
那麼$\overline{A}$與$\overline{P}$就會符合「切線準則」：

$$\left[\overline{A},\overline{P}\right]_M^2-\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M\left[\overline{P},\overline{P}\right]_M=0.$$

但因為A本身在雙曲線上，所以$\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M=0$，

因此，我們可以得到$\left[\overline{A},\overline{P}\right]_M=0$,

也就是



	x	y	1
3	1	0	$\frac{1}{2}$
–2	0	–1	–1
1	$\frac{1}{2}$	–1	–12

=0,

經整理可得$\dfrac{7}{2}x+y-\dfrac{17}{2}=0$，

或者你也可以寫成$7x+2y=17$，這就是經過A點的切線方程式。

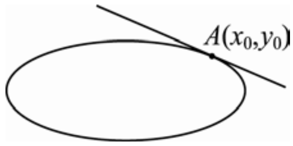
經過上面這個例題的探討，我們發現一個漂亮的現象，那就是

過切點的切線方程式：

若 $A(x_0,\ y_0)$ 在圓錐曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 上，

則通過 A 點的切線方程式為

$$\left[\overline{A},\overline{X}\right]_M=0\text{，其中 }\overline{X}=(x,\ y,\ 1).$$



也就是切線方程式為

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ y_0 & \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ 1 & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{array}=0.$$

現在，我們將這個公式應用到所有圓錐曲線的標準式上，你會發現：所有我們熟知的標準式切線公式（如果你曾經記憶過的話），會一一出現。

下表中，我們假設 (x_0,y_0) 為圓錐曲線上的一點。

類　　型	標準式	計算切線	所得切線方程式
橢　　圓	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}=0$	$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$
拋物線（上下型）	$x^2=4cy$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & 1 & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & 0 & -2c \\ 1 & 0 & -2c & 0 \end{array}=0$	$x_0x=2c(y+y_0)$
拋物線（左右型）	$y^2=4cx$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & 0 & 0 & -2c \\ y_0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2c & 0 & 0 \end{array}=0$	$y_0y=2c(x+x_0)$
雙曲線（左右型）	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}=0$	$\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1$
雙曲線（上下型）	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}=0$	$-\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$

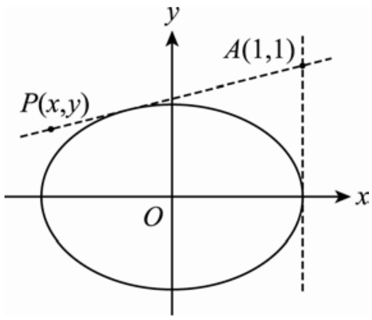
雖然上面我們列出了所有的標準式的切線公式，但我們這樣做只是為了要向你說明：我們的「切線準則」是通用的，你可以用於任一類型的圓錐曲線，而不是要你去背誦上面這些看起來都不太一樣的切線公式。

上面我們一直把重心擺在解決如何計算圓錐曲線**上**一點的切線，但是如果要計算通過圓錐曲線**外**一點的切線時，那麼又該如何呢？請看下面的例子：

例題

3. 請計算通過 $A(1,1)$ ，並與橢圓 $x^2+2y^2=1$ 相切的切線方程式。

注意： A 點在橢圓外！所以會有兩條切線。



解 假設 $P(x,y)$ 為切線上的一點，那麼根據「切線準則」，

我們可以得到

$$\left[\overline{A},\overline{P}\right]_M^2-\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M\left[\overline{P},\overline{P}\right]_M=0,$$

其中 $\left[\overline{A},\overline{P}\right]_M=\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}=x+2y-1,$

$\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M=1^2+2\times1^2-1=2,$ 　　註 就是將 $A(1,1)$ 直接代入 x^2+2y^2-1.

$\left[\overline{P},\overline{P}\right]_M=x^2+2y^2-1,$ 　　註 就是將 $P(x,y)$ 直接代入 x^2+2y^2-1.

因此，$(x+2y-1)^2-2(x^2+2y^2-1)=0$ 整理可得 $x^2-4xy+2x+4y-3=0$.

最後我們作**因式分解**（我們知道答案是兩條直線，所以應該可以分解成兩條直線方程式）：

$(-4x+4)y+(x^2+2x-3)=0$

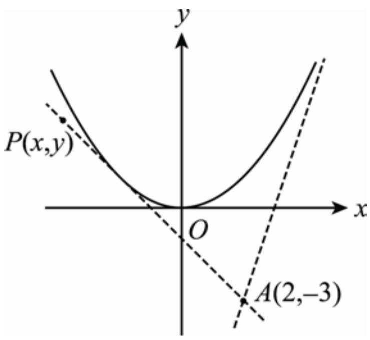
$\Rightarrow -4(x-1)y+(x-1)(x+2)=0\Rightarrow(x-1)(-4y+x-2)=0,$

因此 $x-1=0$ 或 $x-4y+3=0$. 最後這兩個方程式都是**直線方程式**，而且也是 $P(x,y)$ 必須符合的條件，所以這兩條直線就是切線！

例題

4. 請計算通過 $A(2,-3)$ ，並與拋物線 $x^2=4y$ 相切的切線方程式。

注意： A 點在拋物線外！所以會有兩條切線。



解 假設 $P(x,y)$ 為切線上的一點，那麼根據「切線準則」，

我們可以得到

$$\left[\overline{A},\overline{P}\right]_M^2-\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M\left[\overline{P},\overline{P}\right]_M=0,$$

其中 $\left[\overline{A},\overline{P}\right]_M=\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}=2x-2y+6,$

$\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M=2^2-4(-3)=16,$ $\left[\overline{P},\overline{P}\right]_M=x^2-4y,$

因此，$(2x-2y+6)^2-16(x^2-4y)=0$ 整理可得 $3x^2+2xy-y^2-6x-10y-9=0$.

最後我們作**因式分解**：

$3x^2+(2y-6)x-(y^2+10y+9)=0$

$\Rightarrow 3x^2+(2y-6)x-(y+1)(y+9)=0\Rightarrow[x+(y+1)][3x-(y+9)]=0,$

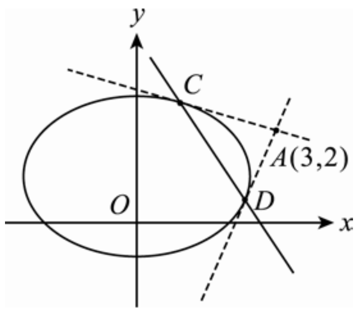
因此 $x+y+1=0$ 或 $3x-y-9=0$. 最後這兩個直線方程式就是切線！

一般說來，如果一個點在圓錐曲線之外，那麼它會擁有兩條切線，但還有另外一條線跟這個點也有密切的關係，這條線叫做「極線」，請看以下的探討。

極線的探討

例題

5. 已知 $A(3,2)$ 在橢圓 $x^2+2y^2-4y=4$ 的外面，且通過 A 點的切線（有兩條）與橢圓分別交於 C, D 兩點，請計算出 CD 直線的方程式。



解 因為 AC 直線與 AD 直線都是切線，所以由「切線準則」知

$$\left[\overline{A},\overline{C}\right]_M^2-\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M\left[\overline{C},\overline{C}\right]_M=0,$$

$$\left[\overline{A},\overline{D}\right]_M^2-\left[\overline{A},\overline{A}\right]_M\left[\overline{D},\overline{D}\right]_M=0.$$

但因為 C, D 都在橢圓上，所以 $\left[\overline{C},\overline{C}\right]_M=0$，$\left[\overline{D},\overline{D}\right]_M=0$，

因此我們可以知道 $\left[\overline{A},\overline{C}\right]_M=0$，$\left[\overline{A},\overline{D}\right]_M=0$.

雖然目前我們還不知道 C, D 的點坐標，但由這兩個方程式，我們知道 C, D 同時符合下面這個方程式

$$\left[\overline{A},\overline{X}\right]_M=0 \quad \text{，其中 } \overline{X}=(x,y,1).$$

然而這個方程式本身就是一個直線方程式，請看

$$\left[\overline{A},\overline{X}\right]_M=\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}=3x+2y-8=0.$$

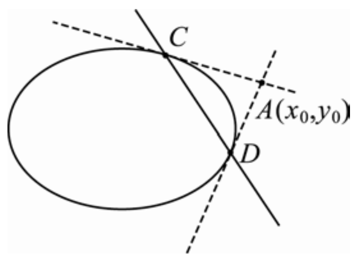
所以，既然 C, D 同時符合這個方程式，那麼 CD 直線方程式當然就是 $3x+2y=8$.

經由上面這個例題的探討，我們得到一條特殊的直線，這條直線我們稱為「極線」，這是一條通過兩切點的直線。我們將這個重要的結果整理如下：

極線公式：

若 $A(x_0, y_0)$ 在圓錐曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ **外面**，通過 A 點的兩條切線交圓錐曲線於 C, D 兩點，則我們稱 CD 直線為 A 點的「極線」，且其方程式為

$$\left[\overline{A},\overline{X}\right]_M=0 \text{ ，其中 } \overline{X}=(x,y,1).$$



也就是極線方程式為

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ y_0 & \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ 1 & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{array}=0.$$

此時，我們也稱 A 點為 CD 直線的「極點」。

如果你還記得前面的「過切點的切線方程式」公式的話，你會發現：這兩個公式不是一模一樣嗎？是的，的確沒錯！當 A 點在圓錐曲線**外**時，這個公式會產生「極線」，但當 A 點到達圓錐曲線**上**時，它就會變成「切線」！

test 國立台灣師範大學數學系 *97 學年度* 甄選入學

指定項目甄試試題

筆試一、計算證明題（考試時間：2 小時）

1. 設一直角三角形的斜邊長與一股長的和為 6，試求此直角三角形的面積產生最大值時的各邊長。（20 分）

2. 對每個 $n\in\mathbb{N}$，令 a_n 表示由 $n+1$ 個 1 與 n 個 0 交錯出現所成的 $2n+1$ 位數，亦即：

$$a_n = 1010\cdots0101 = \sum_{k=0}^{n} 10^{2k}.$$

   (1) 試證：若 n 為奇數，則 a_n 是 101 的倍數。（10 分）

   (2) 試證：若 n 為偶數 $2m$，則 a_n 是由 1 所成的 $2m+1$ 位數 $11\cdots1$ 的倍數。（10 分）

3. 設 $0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{2}$。

   (1) 試證：若 α,β 與 γ 形成等差數列，而且 $\beta=\dfrac{\pi}{4}$，則 $\tan\alpha,\tan\beta$ 與 $\tan\gamma$ 形成等比數列。（10 分）

   (2) 試證：若 α,β 與 γ 形成等差數列，而且 $\tan\alpha,\tan\beta$ 與 $\tan\gamma$ 形成等比數列，但 $\beta\neq\dfrac{\pi}{4}$，則 $\alpha=\beta=\gamma$。（10 分）

4. 等差數列 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 有一項性質：對每個 $n\in\mathbb{N}$，此數列的前 n 項之和恆等於二項式係數 C_2^{n+1}。其他等差數列有類似的性質嗎？下列兩小題可回答這個問題。

   (1) 設 k 為正整數，試討論等差數列

$$\frac{k(k-1)}{2},\ \frac{k(k-1)}{2}+k^2,\cdots,\frac{k(k-1)}{2}+k^2(n-1),\cdots$$

   是否具有下述性質：對每個 $n\in\mathbb{N}$，此數列的前 n 項之和恆等於形如 C_2^m 的一個二項式係數。（10 分）

(2) 設 k 為正整數，試討論是否有等差數列具有下述性質：對每個 $n \in \mathbb{N}$ ，此等差數列的前 n 項之和恆等於二項式係數 C_2^{kn+1} 。（10 分）

5. 在空間坐標系中，設 O 為原點而 A, B, C 三點的坐標分別為 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 。以線段 $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ 為三邊可作出一個正立方體。此正立方體除了原點 O 之外的其他七個頂點中有四個可作出一個正四面體，亦即：此四點中兩兩的距離都相等。

(1) 試求此正四面體的四個頂點坐標。（10 分）

(2) 試求此正四面體的內切球面方程式。（10 分）

筆試二、填充題（考試時間：1.5 小時）

1. 設 θ 為銳角，且滿足 $\sum_{k=1}^{\infty} \cos^k \theta = 2$ ，則 $\sin 2\theta =$ ________ 。

2. 設複數 $z = -\frac{5}{4}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ ，則滿足 $|z|^n > 10^7$ 的最小正整數 $n =$ ________ 。

（註： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 7 \approx 0.8451$ ）

3. 若 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 54$ 為實係數多項式，且 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 為 $f(x) = 0$ 的根，其中 α, β 為整數， $\alpha > \beta, 6 < |\beta| < 12, \gamma = 1 + \sqrt{2}i$ ，則 $\beta =$ ________ 。

4. 設 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$ 是一橢圓，焦點為 F_1, F_2 。若 A, B 為橢圓上相異兩點， F_1 在線段 $\overline{AB}$ 上，且△ ABF_2 的周長為 28，則 $k =$ ________ 。

5. 某一老鼠走迷宮的遊戲中，假設迷宮有 A, B, C 三個門，老鼠走進這三個門的機率都相等，且假設老鼠不去記憶走過哪些門。如果走進 A 門，則老鼠在 3 個小時後可以走出迷宮；如果走進 B 門，則老鼠經過 2 個小時後又走回原地；如果走進 C 門，則老鼠經過 4 個小時後又走回原地。那麼，這隻老鼠要走出迷宮所花時間的期望值為 ________ 小時。

6. 在坐標空間中，給定一圓Γ及三個平面

$$E_1: x-2y+z=0,\ E_2: 3x-y-z=1,\ E_3: 2x+3y-4z=1,$$

其中圓Γ落在平面E_1上，且E_1, E_2與E_3的交點恰為圓Γ的圓心。若L為平面E_1上的一直線，其方向向量為$(a,4,b)$，且L與圓Γ相切於點$Q(-5,4,7)$，則數對$(a,b)=$__________。

7. 設數列$S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+k}$，且$S=\lim_{n\to\infty}S_n$，則滿足$\left|S_n-S\right|<0.00001$的最小正整數$n$之值為__________。

8. 設數列$\langle a_n\rangle, \langle b_n\rangle$滿足$a_0+b_0=2$，且對每一正整數$n$，恆有

$$a_n=\sqrt{3}a_{n-1}-b_{n-1}\text{及}b_n=a_{n-1}+\sqrt{3}b_{n-1}，$$

則$a_{18}+b_{18}=$__________。

9. 設a,b都是實數，且滿足行列式$\begin{vmatrix} 3a^2-a+3 & b^2+1 & a+3b+2 \\ 2a^2-2b+2 & 2 & a+2b \\ ab+2 & b+2 & 4-b \end{vmatrix}=1$，則行列式

$$\begin{vmatrix} 3b-a & 3a^2-3b+3 & ab+2 \\ b^2-2 & 3 & b+2 \\ 2-\dfrac{1}{2}a & \dfrac{3}{2}a+3b & 4-b \end{vmatrix}=\text{__________。}$$

10. 某校有 1000 位高三學生，其數學成績呈常態分配，平均數為 60 分，標準差為 10 分。試問下列哪些選項是正確的？答：__________。（可複選）

(A) 高三學生中，數學成績介於 70 到 90 分之間的學生約有 150~160 位。

(B) 若甲同學的數學成績 80 分，則他的數學成績在全部高三學生中大約排前 20~25 名。

(C) 若甲和乙為該校兩位高三的學生，則隨機抽出 50 位高三學生時，甲和乙同時被抽中的機率小於 $\frac{1}{400}$ 。

(D) 若將每一位學生的原始數學成績乘上1.1倍當作最終的成績，則調整後的數學最終成績仍呈常態分配。

(E) 承(D)，若調整後，乙同學的數學最終成績為 80 分，則他的數學成績在全部高三學生中大約排前 20~25 名。

（註：在常態分配下，估算大約有 68%的資料落在以平均數為中心的一個標準差之內；大約有 95%的資料落在兩個標準差之內；大約有 99.7%的資料落在三個標準差之內。）

◎ **填充題答案：**

1.	2.	3.	4.	5.
$\frac{4\sqrt{5}}{9}$	73	-9	49	9
6.	7.	8.	9.	10.
$(4,4)$	2×10^5	-2^{19}	$\frac{3}{2}$	$ABCD$

國立台灣師範大學數學系 *97 學年度* 甄選入學

指定項目甄試試題詳解

筆試一、計算證明題：

1. 設此直角三角形的斜邊長為 x，而兩股的長分別為 y 與 $\sqrt{x^2-y^2}$ ，依假設，可令 $x+y=6$ 。於是，得

此直角三角形的面積為 $\dfrac{y\sqrt{x^2-y^2}}{2}=\dfrac{y\sqrt{(x+y)(x-y)}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{y^2(6-2y)}$.

因為

$$\sqrt[3]{y^2(6-2y)}\le\frac{y+y+(6-2y)}{3}=2\,,$$

而且當 $y=6-2y$ 或 $y=2$ 時，上式中的等號成立。

所以，當 $y=2$ 時，此直角三角形的面積產生最大值 $2\sqrt{3}$ ，此時，三角形的三邊長分別為 $2, 2\sqrt{3}, 4$ 。

2. (1) 設 $n=2m-1$ ，則

$$\begin{aligned}
a_{2m-1}=\sum_{k=0}^{2m-1}10^{2k} &=1+10^2+10^4+10^6+\cdots+10^{4m-4}+10^{4m-2}\\
&=(1+10^2)+(10^4+10^6)+\cdots+(10^{4m-4}+10^{4m-2})\\
&=(1+10^2)+10^4(1+10^2)+\cdots+10^{4m-4}(1+10^2)\\
&=(1+10^2)(1+10^4+\cdots+10^{4m-4})\\
&=101\times\sum_{k=0}^{m-1}10^{4k}.
\end{aligned}$$

上式中的因數分解也可以由下法獲得，

$$\begin{aligned}
a_{2m-1}=\sum_{k=0}^{2m-1}10^{2k} &=1+10^2+(10^2)^2+\cdots+(10^2)^{2m-1}\\
&=\frac{(10^2)^{2m}-1}{10^2-1}=\frac{(10^4)^m-1}{10^2-1}\\
&=\frac{(10^4-1)[(10^4)^{m-1}+(10^4)^{m-2}+\cdots+(10^4)^1+1]}{10^2-1}\\
&=(1+10^2)(1+10^4+\cdots+10^{4m-4})\\
&=101\times\sum_{k=0}^{m-1}10^{4k}.
\end{aligned}$$

例如：當 $n=5$ 時， $a_5=10101010101=101\times 100010001$ 。

由此可知， a_{2m-1} 是 101 的倍數。

(2) 設 $n=2m$ ，則

$$
\begin{aligned}
a_{2m}=\sum_{k=0}^{2m}10^{2k} &= 1+10^2+10^4+\cdots+10^{4m}\\
&=1+(10^2)^1+(10^2)^2+\cdots+(10^2)^{2m}\\
&=\frac{(10^2)^{2m+1}-1}{10^2-1}=\frac{(10^{2m+1})^2-1}{10^2-1}\\
&=\frac{10^{2m+1}-1}{10-1}\times\frac{10^{2m+1}+1}{10+1}\\
&=(10^{2m}+10^{2m-1}+\cdots+10+1)(10^{2m}-10^{2m-1}+\cdots+10^2-10+1)\\
&=\sum_{k=0}^{2m}10^k\times\sum_{k=0}^{2m}(-10)^k.
\end{aligned}
$$

上式右端的 $\sum_{k=0}^{2m}10^k$ 是由 1 所成的 $2m+1$ 位數 $11\cdots1$ ，而 $\sum_{k=0}^{2m}(-10)^k$ 則為

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2m}(-10)^k &= 10^{2m}-10^{2m-1}+\cdots+10^2-10+1\\
&=9\times10^{2m-1}+9\times10^{2m-3}+\cdots+9\times10^1+1\\
&=\sum_{k=1}^{m}(9\times10^{2k-1})+1\\
&=9090\cdots9091,
\end{aligned}
$$

此數等於由 m 個 9 與 m 個 0 交錯出現所成的 $2m$ 位數與 1 的和。

3. (1) 依假設， $\alpha+\gamma=2\beta=\frac{\pi}{2}$ ，所以得 $\tan\beta=\tan\frac{\pi}{4}=1$ 且

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\cot\gamma.$$

綜合兩式，得

$$\tan\alpha\tan\gamma=1=\tan^2\beta.$$

因此， $\tan\alpha$ 、 $\tan\beta$ 與 $\tan\gamma$ 形成等比數列。

(2) 因為 α 、 β 與 γ 形成等差數列，且 $\beta\neq\frac{\pi}{4}$ ，所以得 $\alpha+\gamma=2\beta\neq\frac{\pi}{2}$ ，

進一步得 $\tan(\alpha+\gamma)=\tan2\beta$ 。依和角公式得

$$\frac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\gamma}=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}.$$

因為$\tan\alpha$、$\tan\beta$與$\tan\gamma$形成等比數列，所以得$\tan\alpha\tan\gamma=\tan^2\beta$。

代入上式，得

$$\tan\alpha+\tan\gamma=2\tan\beta.$$

進一步得

$$(\tan\alpha-\tan\gamma)^2=(\tan\alpha+\tan\gamma)^2-4\tan\alpha\tan\gamma=4\tan^2\beta-4\tan^2\beta=0,$$

$$\tan\alpha=\tan\beta=\tan\gamma.$$

因為$0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，所以得$\alpha=\beta=\gamma$。

4. (1) 對每個$n\in\mathbb{N}$，考慮等差數列

$$\frac{k(k-1)}{2},\frac{k(k-1)}{2}+k^2,\cdots,\frac{k(k-1)}{2}+k^2(n-1),\cdots$$

的前n項之和如下：

$$\begin{aligned}&\frac{k(k-1)}{2}+\left[\frac{k(k-1)}{2}+k^2\right]+\cdots+\left[\frac{k(k-1)}{2}+k^2(n-1)\right]\\&=\frac{n}{2}\times\left[\frac{k(k-1)}{2}+\left(\frac{k(k-1)}{2}+k^2(n-1)\right)\right]\\&=\frac{n}{2}\times(k^2n-k)=\frac{kn(kn-1)}{2}=C_2^{kn}.\end{aligned}$$

由此可知，上述等差數列具有下述性質：對每個$n\in\mathbb{N}$，此數列的前n項之和恆等於二項式係數C_2^{kn}。

(2) 設數列$x,x+y,\cdots,x+(n-1)y,\cdots$具有下述性質：此數列的第一項（之和）為$C_2^{k+1}$，而前兩項之和為$C_2^{2k+1}$。依假設，得

$$\begin{cases}x\quad=C_2^{k+1}=\dfrac{k(k+1)}{2}\\2x+y=C_2^{2k+1}=k(2k+1)\end{cases}.$$

解上述方程組，得$x=\dfrac{k(k+1)}{2},y=k^2$。

對每個$n\in\mathbb{N}$，考慮等差數列

$$\frac{k(k+1)}{2},\ \frac{k(k+1)}{2}+k^2,\cdots,\ \frac{k(k+1)}{2}+k^2(n-1),\cdots$$

的前 n 項之和如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{k(k+1)}{2}+\left[\frac{k(k+1)}{2}+k^2\right]+\cdots+\left[\frac{k(k+1)}{2}+k^2(n-1)\right]\\
&=\frac{n}{2}\times\left[\frac{k(k+1)}{2}+\left(\frac{k(k+1)}{2}+k^2(n-1)\right)\right]\\
&=\frac{n}{2}\times(k^2n+k)=\frac{kn(kn+1)}{2}=C_2^{kn+1}.
\end{aligned}$$

由此可知，上述等差數列具有下述性質：對每個 $n\in\mathbb{N}$ ，此數列的前 n 項之和恆等於二項式係數 C_2^{kn+1} 。

5. (1) 因為 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 為正立方體的四個頂點，且 $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ 為正立方體的三邊，所以此正立方體的另四個頂點為

$$D(1,1,0), E(1,0,1), F(0,1,1), G(1,1,1).$$

又在此正立方體上，以四頂點可作出兩正四面體 $OEFD$ 及 $ABCG$，故除了原點 O 外的正四面體為 $ABCG$ ，即四個頂點坐標為

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1).$$

(2) 因為 $ABCG$ 為正四面體，所以其內心與重心為同一點，即內心坐標為

$$\frac{(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1)+(1,1,1)}{4}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

又三角形 ABC 的重心為 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，且內心與三角形 ABC 的重心之距離就是內切球的半徑，即半徑為

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

故內切球面方程式為

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}.$$

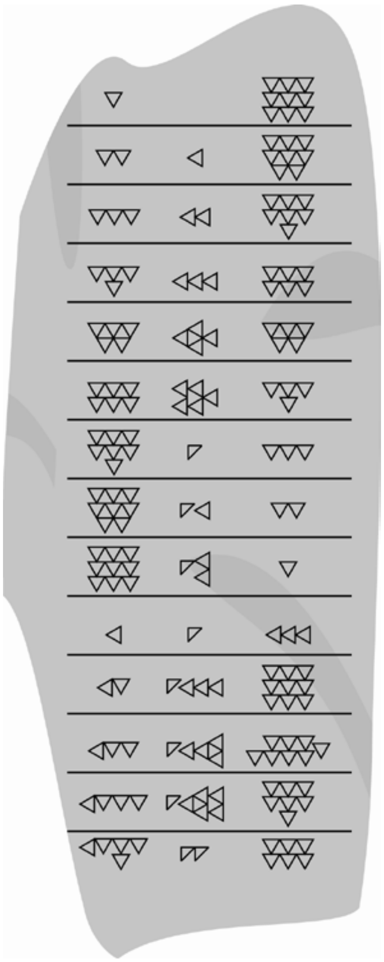
專欄　動手玩數學

◎許志農／台灣師範大學數學系

遊戲 25

☆☆

同學們在圖書館發現一塊古代楔形文字泥板的圖片，大家猜測它是一種乘法表的紀錄，如下圖所示，



請根據這個猜測，判定數字

▽，◁，◸

所代表的值。

〔玩鎖・玩索〕

這遊戲是第六屆「華羅庚金杯…少年數學邀請賽」的搶答題，考驗學生比對與猜測能力。如果很快找到答案，不妨再試試底下這道乘法算則的問題：

為了計算 $73\times 217=15841$，將 73 除以 2，將商數寫下來，再繼續對商數除以 2，反覆得到的商數依序為 36, 18, 9, 4, 2, 1；對 217 依序乘以 2，得到的倍數依序為 434, 868, 1736, 3472, 6944, 13888。將這些數對齊如下表所示：

73	217
36	434
18	868
9	1736
4	3472
2	6944
1	13888
	15841

問：乘積 15841 是如何得到的（寫計算過程即可，能證明更好）。

遊戲 26
☆☆☆

在河裡並排著七顆浮出水面的石頭，其中最左邊三顆石頭分別有三隻手撐著荷葉的青蛙臥著，最右邊三顆石頭也有三隻青蛙臥著，牠們的方向剛好相反。每隻青蛙都不想落水，而且每顆石頭只夠一隻青蛙立足。每隻青蛙的跳躍只能依照下列規則進行：

(1) 青蛙只能臥在原地或往前跳，不允許向後跳。

(2) 青蛙可以跳到前一顆空石頭，或者躍過前一顆臥著青蛙的石頭，到達下一顆空石頭。

試問這六隻青蛙該如何跳躍，才能讓手撐荷葉的三隻青蛙與其餘三隻青蛙的位置剛好互換。

〔玩鎖・玩索〕

這是一道歷史悠久的數學趣題，多想想就可以知道竅門在哪裡。如果上網查詢「青蛙交換」，還可以找到這道遊戲的電腦動畫版本，玩錯了還可以重來。

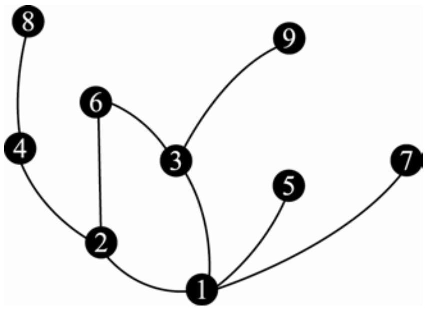
青蛙交換遊戲是道推理問題，考驗學生往前思考更多步數的能耐及除錯的能力。如果左右各有四隻青蛙，那麼中間的空石頭需幾塊才有辦法讓青蛙們完全交換呢？類似的問題可以想想看！

遊戲 27
☆☆

如下圖所示，在種植編號分別為

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

的九棵大樹裡進行拔樹遊戲。甲、乙兩人輪流拔樹，每次拔一棵樹，但是當編號6的樹被拔掉時，編號1, 2, 3（6的因數）的樹也跟著除掉，依此規律拔樹。最後把樹拔光的人得勝。



問何者可以得勝。

〔玩鎖・玩索〕

拔樹遊戲是在探索你對正整數因數的了解及操作能力。以此遊戲為例，只要細心的畫遊戲過程的樹狀圖，就不難發現何者會贏及贏的策略。問題是，多數學生都認為數學只需動腦或想特殊技巧，很少願意動手把完整的遊戲過程記錄下來，這反而延後及阻礙對問題的進一步理解。

如果將拔樹遊戲限定為

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n$$

等 n 個數，在 n 值不大時，容易發現贏的策略。例如：

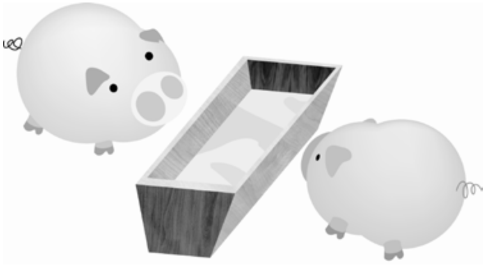
(1) $n=1$ 時，先玩者贏，拔 1 號樹。
(2) $n=2$ 時，先玩者贏，拔 2 號樹。
(3) $n=3$ 時，先玩者贏，拔 1 號樹。
(4) $n=4$ 時，先玩者贏，拔 2 號樹。
(5) $n=5$ 時，先玩者贏，拔 4 號樹。
(6) $n=6$ 時，先玩者贏，拔 6 號樹。

看起來，拔樹遊戲好像先玩者具有優勢，是否「無論 n 值為何，先玩者都具備贏的策略呢？」有興趣深究的讀者，可以參閱本人所寫的《算術》這本書。

遊戲 28
☆☆☆☆☆

如下圖所示，餵豬用的豬槽是用三塊長方形木板所圍成，且是開口向上的倒「ㄇ」字形的立體。為了裝餵豬的餿水，在前後兩側用兩塊等腰梯形的橫截面木板隔離，又讓這兩塊橫截面木板與底板垂直。

當倒「ㄇ」字形的三邊都是 1 時，將側面兩塊木板張開，橫截面的面積將增大，但到一定程度後又將減少。當倒「ㄇ」字形的兩個內角都張到180°時，橫截面的面積為零。

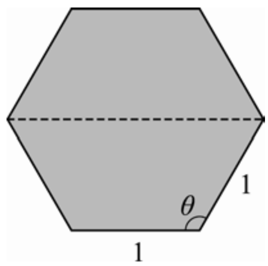


問：倒「ㄇ」字形的兩個內角多少度時（要求角度一樣），豬槽容量達到最大。

〔**玩鎖・玩索**〕

古代腓尼基有一則故事：逃難的狄多公主以剩下的金幣換得一條很長的繩子，地主說：「用這條繩子圍土地，所能圍出的區域都是妳的。」把狄多公主的故事用數學語言來說就是：周長固定的幾何形狀中，何者面積最大？或者說，面積固定的幾何形狀中，何者周長最小？事實上，我們可以知道：「在周長相同的所有封閉平面曲線中，以圓所圍的面積為最大」；如果將封閉平面曲線限制為多邊形，那麼也可以推得：「在周長相同的所有 n 邊形中，以正 n 邊形所圍的面積為最大」。數學家把這些問題統稱為等周問題。

套用等周問題的知識，我們可以巧解如下：如下圖所示，將豬槽橫截面按開口線反射一下



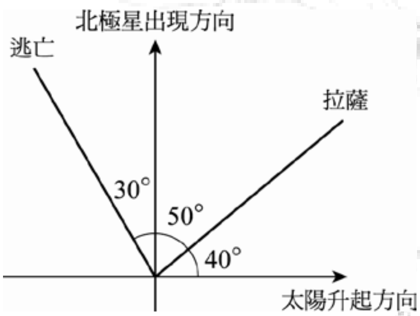
此時，六邊形的內部區域是兩個橫截面，而六邊形的周長為 6。根據「在周長相同的所有六邊形中，以正六邊形所圍的面積為最大」知：當 $\theta = 120°$ 時，橫截面的面積達到最大。

但是，這裡所要求的是用中學學過的公式或定理解題，讀者不妨再想想。

動手玩數學~破解秘笈 第6期

遊戲 21

將直角坐標定位為 x 軸正向是「太陽升起的方向」；y 軸正向是「北極星出現的方向」。有了這樣的定位之後，由「北極星出現在前往拉薩之路正前方偏左 $50°$ 的方位上」知「前往拉薩之路與正東夾 $40°$ 」；由「太陽在他逃亡小路正前方偏右 $120°$ 的方向升起」知「逃亡小路與正北夾 $30°$ 」。畫圖如下：

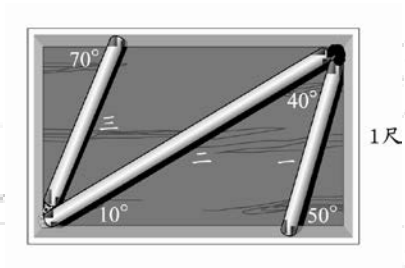


所以南星前往拉薩之路與落荒而逃的小路之夾角是

$$30° + 50° = 80°.$$

遊戲 22

由下圖得知，



第一節的長度為 $\dfrac{1}{\sin 50°} = \dfrac{1}{\cos 40°}$ ，

第二節的長度為 $\dfrac{1}{\sin 10°} = \dfrac{1}{\cos 80°}$ ，

第三節的長度為 $\dfrac{1}{\sin 70°} = \dfrac{1}{\cos 20°}$ 。

霍師父的身高為

$$\frac{1}{\cos 40°} + \frac{1}{\cos 80°} - \frac{1}{\cos 20°},$$

通分得

$$\frac{\cos 20° \cos 80° + \cos 20° \cos 40° - \cos 40° \cos 80°}{\cos 20° \cos 40° \cos 80°}$$

利用這道遊戲的提示 $\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \dfrac{1}{8}$,

得

$$\begin{aligned}
&4(2\cos 20° \cos 80° + 2\cos 20° \cos 40° \\
&\quad - 2\cos 40° \cos 80°) \\
&= 4(\cos 100° + \cos 60° + \cos 60° + \cos 20° \\
&\qquad - \cos 120° - \cos 40°) \\
&= 4\left(\frac{3}{2} + \cos 100° + \cos 20° - \cos 40°\right) \\
&= 4\left(\frac{3}{2} + 2\cos 60° \cos 40° - \cos 40°\right) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

故霍師父的身高為 6 呎。

遊戲 23

(1) 四點 A, B, C, D 共圓。因為不共線的任意三點可以畫一個圓，讓此圓過此三點，所以可以畫一圓通過 B, C, D 三點，又從 A 點看弦 CD 的張角與圓周上 B 點對應到弦 CD 的圓周角一樣，故 A 點在此圓上。即 A, B, C, D 四點共圓。

(2) 根據圓冪性質知道：$\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OC}\times\overline{OD}$ 。設竹竿白色部分的長度為 x 公尺，代入上式，得

$$(30+10)\times 10 = x(x+9)$$
$$\Rightarrow x=-25(\text{不合}),\ 9\ .$$

因此，竹竿白色部分的長度為 9 公尺。

(3) 設所張視角最大的點為 T 點，此時通過 T, C, D 三點的圓與地平線相切。同樣由圓冪性質，得

$$\overline{OT}\times\overline{OT}=\overline{OC}\times\overline{OD}=16\times(16+9)\ .$$

解得 $\overline{OT}=20$ ，即小呆瓜離竹竿 20 公尺處，仰望黑色竹竿所張的視角最大。

〔註〕

這裡利用圓冪性質解題，事實上，也可以利用定坐標的方式解題。例如：設 $A(-40,0)$, $B(-10,0)$, $C(0,x)$, $D(0,x+9)$，此時通過四點的圓心 M 坐標為 $M\left(-25, x+\dfrac{9}{2}\right)$。利用圓心 M 到 B 點的距離等於圓心 M 到 C 點的距離（都是半徑），可以解得 x 的值。

遊戲 24

設對邊門牌號碼為

$$1, 3, 5, \cdots, 2n-1\ .$$

因為兩邊的門牌號碼沒有跳號，所以汀菱的別墅門牌號碼不是 $2n-2$ 就是 $2n$ 號。又級數和

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2\ .$$

所以

$$n^2=(2n-2)+323 \text{ 或 } n^2=2n+323\ ,$$

即

$$n^2-2n-321=0 \text{ 或 } n^2-2n-323=0\ .$$

第一個二次方程式沒有正整數解，而第二個方程式可以分解為 $(n-19)(n+17)=0$ ，即 $n=19$ 。故汀菱的別墅門牌號碼是環山路 $2n=38$ 號。