許教授講故事 STORY

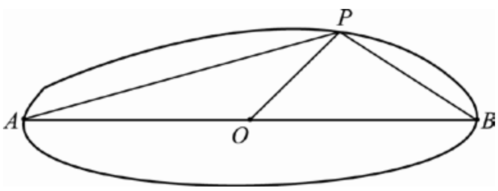
拋向空中的繩環遊戲...玩弄圓與橢圓於骨掌之中

◎許志農／台灣師範大學數學系

看過韻律體操表演嗎？女韻律體操選手將繩、圈、球、棍棒或彩帶拋向空中，進行各種動作的表演，實在精采。對學數學的人來說，除了這些東西在空中所走的路徑是拋物線外，不知道還有什麼深刻的發現？我們以繩為例，看看你對拋向空中的繩環有何關於數學的發現：

1 韻律體操選手將一長度為 $4a$ 的繩拋向空中，是否任何時刻都可以在空中畫一個半徑為 a 的球，讓繩環完全落在球內？

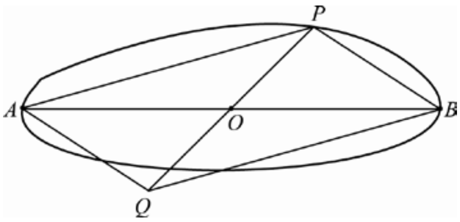
我們在繩環上任取一點 A，接著取另一點 B 使得兩點將繩環等分，即沿著繩子從 A 到 B 的長度恰好是 $2a$，如下圖所示：



令 P 是繩環上的任一點，連接三角形 PAB，且令 O 為 $\overline{AB}$ 的中點。與繩環的長度相比，可以得到不等式

$$\overline{PA}+\overline{PB}\le 2a.$$

設 Q 是 P 對 O 點的對稱點，即 O 是 $\overline{PQ}$ 的中點，此時四邊形 $PAQB$ 為平行四邊形，如下圖所示：



利用三角不等式

$$\overline{PA}+\overline{QA}\ge\overline{PQ} \text{ 及 } \overline{QA}=\overline{PB},\ \overline{PQ}=2\overline{PO}$$

得

$$\overline{PA}+\overline{PB}\ge 2\overline{PO}.$$

綜合上述兩個不等式，得

$$\overline{PO}\le a.$$

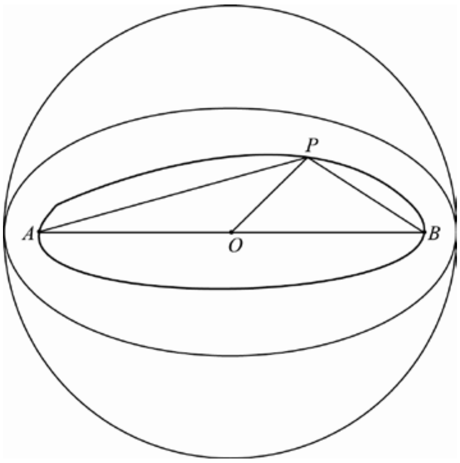
這不等式告訴我們：繩環上任一點 P 至固定點 O 的距離不超過 a，也就是說，整個繩環落在以 O 點為球心，半徑為 a 的球內。

上述的解法是利用圓（或球）的知識解題，接下來我們使用橢圓的定義來處理：不等式

$$\overline{PA}+\overline{PB}\le 2a$$

啟發我們考慮以 A 及 B 為焦點，半長軸長為 a 的橢圓 Γ，即橢圓 Γ 是平面上到 A, B 兩點之距離和為 $2a$ 的點所成的圖形。這不

等式告訴我們：繩環上任一點 P 都落在橢圓 Γ 的內部；又因為橢圓的半短軸不超過半長軸，所以橢圓 Γ 落在以 $\overline{AB}$ 中點 O 為圓心，半徑 a 的圓內部，如下圖所示：



事實上，我們甚至可以證明：這個繩環會落在對角線為 $2a$ 的正立方體內。

從**組合公式**談

期望值的可加性

◎ 陳憲儀／育成高中　吳孝仁／政大附中

在談到期望值這個單元時，以下是一個很經典的問題：

袋中有白球 3 顆、紅球 4 顆；若拿到一顆白球可得獎金 5 元，拿到一顆紅球可得獎金 10 元。求下列各情形拿到獎金的期望值：

(1) 一次取一顆，取 2 次，取後**放回**。

(2) 一次取一顆，取 2 次，取後**不放回**。

(3) 一次取兩顆。

在處理這個問題的時候，我們其實很希望學生按部就班地把所有情形找出來，再分別求出各情形發生的機率，以及所獲得的報酬。

以(1)來說，做法是這樣子的：

取到球的情形	白　白	紅　紅	紅　白	白　紅
機　率	$\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}$
獎　金	10	20	15	15

所以一次取一顆，取 2 次，取後放回，拿到獎金的期望值為

$$\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times 10+\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times 20+\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}\times 15+\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}\times 15=\frac{110}{7}$$

而(2)、(3)兩個問題一樣逐步去計算，答案其實也是 $\frac{110}{7}$ 。

當然！學生很快的發現三者答案都一樣。藉由這個問題，一般來說，我們會引入「期望值」可視為「平均值」的概念。例如(1)中，取一次（顆）平均可拿得

$$\frac{3}{7}(\text{拿到白球機率})\times 5(\text{拿到白球報酬})+\frac{4}{7}(\text{拿到紅球機率})\times 10(\text{拿到紅球報酬})=\frac{55}{7}$$

所以取兩次（不管是放回或不放回）或一次拿 2 顆，平均可得到 $\frac{55}{7}\times 2=\frac{110}{7}$ 。

有了此概念後，期望值就變成「**可加**」了。不管取後放回不放回、不管逐次拿還是一次拿，直接計算拿一次的期望值乘上拿的次數就是了。這個結果似乎蠻讓人訝異的！我們來把它說清楚：雖然這個結果可以由機率統計中的隨機變數來證明，但我們還是希望用高中生可以理解的式子來證明，這是這篇文章的目的。證明過程中，會用到以下兩個組合公式：

公式一：多項式定理

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k)^n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots\cdots n_k!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\cdots\cdots x_k^{n_k},$$

其中 $n_1+n_2+n_3+\cdots\cdots+n_k=n$，而 $0\le n_i\le n,\ i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ k$.

公式二：

$$\sum C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\cdots\cdots C_{n_k}^{m_k}=C_n^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k},$$

其中 $n_1+n_2+n_3+\cdots\cdots+n_k=n$，而 $0\le n_i\le n$ 且 $n_i\le m_i,\ i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ k$.

公式一大部分的中學課本內容均有提及，而公式二亦可在課本後面習題發現其蹤跡，只要由式子 $(1+x)^{m_1}(1+x)^{m_2}\cdots\cdots(1+x)^{m_k}=(1+x)^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k}$，便可證明公式二。

回到原問題，今將問題一般化：

袋中有 i 號球 m_i 顆，拿到一顆 i 號球可得獎金 n_i 元，其中 $i=1\sim r$（即袋中共有 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r$ 顆球）。今從袋中抽一顆，拿到獎金的期望值為

$$S=\frac{m_1}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}n_1+\frac{m_2}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}n_2+\cdots\cdots+\frac{m_r}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}n_r.$$

以下分三種情況，說明不管是**一次取一顆，取後放回，取了 d 次**；**一次取一顆，取後不放回，取了 d 次**；或**一次取 d 顆**，所拿到獎金的期望值均為 dS。

(1) 從袋中**一次取一顆，取後放回，取了 d 次**，每次拿到 i 號球的機率為

$$P_i=\frac{m_i}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}.\text{（注意：}P_1+P_2+\cdots\cdots+P_r=1\text{）}$$

假設這 d 顆球中，i 號球取出 d_i 顆（$d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$）這種類型機率為

$$\frac{d!}{d_1!d_2!\cdots\cdots d_r!}P_1^{d_1}P_2^{d_2}\cdots\cdots P_r^{d_r},$$

而得到獎金

$$d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r,$$

所以期望值為

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{d!}{(d_1)!(d_2)!\cdots\cdots(d_r)!}P_1^{d_1}P_2^{d_2}\cdots\cdots P_r^{d_r}(d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r),$$

其中 $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$，而 $0\le d_i\le d,\ i=1,2,\cdots\cdots,k$.

化簡上式得

$$\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{d_1+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{d!}{(d_1)!(d_2)!\cdots\cdots(d_r)!}P_1^{d_1}P_2^{d_2}\cdots\cdots P_r^{d_r}\right)d_kn_k$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{d_1+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{d!}{(d_1)!(d_2)!\cdots\cdots(d_k-1)!\cdots\cdots(d_r)!}P_1^{d_1}P_2^{d_2}\cdots\cdots P_r^{d_r}\right)n_k$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{d_1+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{(d-1)!}{(d_1)!(d_2)!\cdots\cdots(d_k-1)!\cdots\cdots(d_r)!}P_1^{d_1}P_2^{d_2}\cdots\cdots P_k^{d_k-1}\cdots\cdots P_r^{d_r}\right)dP_kn_k.$$

由公式一，上式可化簡為

$$\sum_{k=1}^{r}(P_1+P_2+\cdots\cdots+P_r)^{d-1}dP_kn_k=\sum_{k=1}^{r}1^{d-1}dP_kn_k=d\sum_{k=1}^{r}P_kn_k=dS\,.$$

(2) 從袋中**一次取 d 顆**，若這 d 顆中 i 號球有 d_i 顆（ $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$ ）這種類型機率為

$$\frac{C_{d_1}^{m_1}C_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots C_{d_r}^{m_r}}{C_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}}\,,$$

所以得到獎金

$$d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r\,,$$

則一次取 d 顆得到獎金的期望值為

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{C_{d_1}^{m_1}C_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots C_{d_r}^{m_r}}{C_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}}(d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r)\,,$$

其中 $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$ ，而 $0\le d_i\le d,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k\,.$
化簡上式得

$$\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{C_{d_1}^{m_1}C_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots C_{d_r}^{m_r}}{C_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}}\right)d_kn_k\,.$$

因為 $d_kC_{d_k}^{m_k}=m_kC_{d_k-1}^{m_k-1}$ ，所以可得

$$\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{C_{d_1}^{m_1}C_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots C_{d_k-1}^{m_k-1}\cdots\cdots C_{d_r}^{m_r}}{C_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}}\right)m_kn_k\,.$$

由公式二，上式可化簡為

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{C_{d-1}^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r-1}}{C_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}}\right)m_kn_k\\&=\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{d}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}\right)m_kn_k\\&=d\sum_{k=1}^{r}\frac{m_kn_k}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}\\&=dS\,.\end{aligned}$$

(3) 今從袋中**一次取一顆，取後不放回，取了 d 次**：
針對這種情形我們做這樣的思考：想像一張有序的列表，一共有 d 個位置，在這張列表擺上 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r$ 顆球中的 d 個球，那麼所有可能的情形就是樣本空間。接著算一算各種情形發生的機率，乘上得到的獎金，再通通求和。
依每號球取出的個數分類，假設 d 顆球中，i 號球取出了 d_i 顆，但是注意到因為表是有序的，所以每種取球個數的類型還蘊含著排列情形。所以 d 顆球中，i 號球取出 d_i 顆

（$d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$）這種類型蘊含了

$$\frac{d!}{d_1!d_2!\cdots\cdots d_r!}P_{d_1}^{m_1}P_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots P_{d_r}^{m_r}$$

這麼多情形。從而機率為

$$\frac{d!}{d_1!d_2!\cdots\cdots d_r!}\frac{P_{d_1}^{m_1}P_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots P_{d_r}^{m_r}}{P_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}},$$

得到獎金

$$d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r,$$

所以期望值為

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d}\frac{d!}{d_1!d_2!\cdots\cdots d_r!}\frac{P_{d_1}^{m_1}P_{d_2}^{m_2}\cdots\cdots P_{d_r}^{m_r}}{P_d^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r}}(d_1n_1+d_2n_2+\cdots\cdots+d_rn_r),$$

其中$d_1+d_2+\cdots\cdots+d_r=d$，而$0\le d_i\le d,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$.

很清楚的，這和(2)是相同的，所以期望值依然是dS。

以上推導過程中，大量使用求和記號$\sum$ 來表示複雜的式子，並配合組合公式證明了期望值的可加性，程度比較好的高中生若能仔細推導一遍，相信在本身數學程度上會有一定的提升！

最後，在中學課本上也很常見此種題目：

丟一顆骰子d次（通常是一次或兩次），求出現點數和的期望值。

此可視為上述題目的特例；投擲到i點可視為拿到i號球一顆，而拿到i號球可得到i元，其中$i=1,2,\cdots\cdots,6$，所以點數和的期望值等於投一顆骰子得到點數的期望值($\frac{1+2+3+\cdots\cdots+6}{6}=\frac{7}{2}$)再乘上$d$。

Test

台北縣公立高中88學年度第一屆數學競賽

此篇試題乃為台北縣教育局為縣內十三所完全中學及鶯歌高職所舉辦的數學科能力競賽第一屆試題；為提供您豐富的考題資訊，往後每期將刊載每屆試題，並提供解答予您。因資料蒐集尚未齊全，而缺第三、四屆競賽試題；若您手邊恰有該兩屆試題，竭誠邀請您提供給敝刊刊載，為提供給莘莘學子一塊學習的資訊園地。

1 試求所有滿足以下不等式的正整數 a, b, c ：

$$\frac{41}{42} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1.$$

解答

不妨設 $a \le b \le c$ ，並將原不等式改寫成

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1. \qquad (*)$$

顯然， $a \ge 2$ 。若 $a \ge 3$，則

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = 1 & \text{當} c = 3 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \le \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} < \dfrac{41}{42} & \text{當} c \ge 4 \end{cases}$$

均與已知不等式不合，故得 $a = 2$ 。若 $b \ge 4$，則

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 1 & \text{當} c = 4 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} < \dfrac{41}{42} & \text{當} c \ge 5 \end{cases}$$

均與已知不等式不合，故得 $b = 3$ 。將 $a = 2, b = 3$ 代入（$*$）式，可得

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} < 1.$$

由此可知 $\frac{1}{7} \le \frac{1}{c} < \frac{1}{6}$ ，得 $c = 7$ 。因此，所求的正整數解 (a, b, c) 為

$$(2,3,7), (2,7,3), (3,2,7), (3,7,2), (7,2,3), (7,3,2)\ .$$

2 從五個不同的正整數中，任意選出四個數，並計算其乘積，結果發現這樣的乘積分別為：

$$140, 210, x, y \text{ 及 } z \text{ 。}$$

試求 xyz 之最小值。

解答

設這五個數分別為 a, b, c, d, e ，且令 $x = \frac{S}{c}, y = \frac{S}{d}, z = \frac{S}{e}$ ，其中 $S = abcde$ ，而

$$S_a = \frac{S}{a} = 140 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5 \cdot 7 ,$$

$$S_b = \frac{S}{b} = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 .$$

注意： S 為 S_aS_b 的因數。因此，可令

$$S = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^s ,$$

其中 p, q, r, s 都是非負的整數。又因 S_a 及 S_b 都是 S 的因數，故

$$p \ge 2, q \ge 1, r \ge 1, s \ge 1.$$

因此，

$$S_aS_bxyz = S^4 \ge (2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^4 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 .$$

由此可得，

$$xyz \ge 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 1058400 .$$

注意：這個最小值是可以達到的。事實上，我們可以取

$$x = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42, y = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60, z = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420 ,$$

此時 $S = 420$ ；而其對應的數 $(a, b, c, d, e) = (3, 2, 10, 7, 1)$ 可使得 xyz 達到最小值

$$\min xyz = 1058400 .$$

3 設函數 $f : R \to R$ 定義如下：

$$f(x) = \frac{x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 5x + 1}{x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 4x + 1} .$$

(a) 試證：對每一實數 x ，都存在一實數 t ，滿足 $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$ ，且

$$f(x) = \frac{10t^2 + 5t + 1}{11t^2 + 4t + 1} .$$

(b) 試求函數 f 的最小值。

解答

(a) 令 $x = \tan\theta$ ，而 $t = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ ，則 $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$ ，且

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin^4\theta + 5\sin^3\theta\cos\theta + 12\sin^2\theta\cos^2\theta + 5\sin\theta\cos^3\theta + \cos^4\theta}{\sin^4\theta + 4\sin^3\theta\cos\theta + 13\sin^2\theta\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos^3\theta + \cos^4\theta} \\ &= \frac{10(\sin\theta\cos\theta)^2 + 5(\sin\theta\cos\theta) + 1}{11(\sin\theta\cos\theta)^2 + 4(\sin\theta\cos\theta) + 1} \\ &= \frac{10t^2 + 5t + 1}{11t^2 + 4t + 1} . \end{aligned}$$

(b) 令 $y=f(x)=\dfrac{10t^2+5t+1}{11t^2+4t+1}$，則

$$(10-11y)t^2+(5-4y)t+(1-y)=0.$$

因 $t\in R$，得判別式

$$(5-4y)^2-4(10-11y)(1-y)\geq 0.$$

即 $(2y-1)(14y-15)\leq 0$，解得 $\dfrac{1}{2}\leq y\leq\dfrac{15}{14}$。令

$$y=\frac{1}{2}=\frac{10t^2+5t+1}{11t^2+4t+1}.$$

解得 $t=-\dfrac{1}{3}$。再由

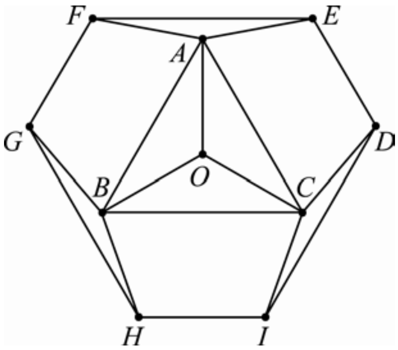
$$\begin{cases}(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}\\(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{5}{3}\end{cases},$$

可得

$$(\sin\theta,\cos\theta)=\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6},\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\right)\text{或}\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}\right).$$

故當 $x=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ 時，$y=f(x)=\dfrac{1}{2}$。因此，函數 f 的最小值為 $\dfrac{1}{2}$。

4 在直角坐標平面上，如圖 $O(0,0)$, $A(0,1)$, $\overline{BC}:\overline{HI}=\left(\sqrt{5}+1\right):2$，而 $\overline{BC}$ 與 $\overline{HI}$ 平行，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$, $\overline{DE}=\overline{FG}=\overline{HI}$, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=\overline{EF}=\overline{GH}=\overline{ID}$，且 $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{BG}=\overline{BH}=\overline{CI}=\overline{CD}$。試求 B, C, D, E, I 各點的坐標。



解答

$$B=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right), C=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right), D=\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right),$$

$$E=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right), I=\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4},\frac{-3-\sqrt{5}}{4}\right)$$

test 國立成功大學數學系 96 學年度 申請入學

數學科試題 A 卷

一、已知 $ABCDEFGH$ 是邊長為 1 的正八邊形，求向量

$$\overline{AB}+\overline{DE}$$

的長度。

二、有一賭局玩法如下：由玩家在 1 號到 6 號其中一號押注 a 元，然後由莊家一次擲 3 顆骰子。如果 3 顆骰子恰有 1 個出現玩家所押注的號碼，那麼莊家歸還玩家 a 元並另給 a 元獎金；如果 3 顆骰子恰有 2 個出現玩家所押注的號碼，那麼莊家歸還玩家 a 元並另給 $2a$ 元獎金；如果 3 顆骰子恰有 3 個出現玩家所押注的號碼，那麼莊家歸還玩家 a 元並另給 $3a$ 元獎金；其他情況莊家沒收玩家 a 元。請問這是否是個公平的賭局？為什麼？

三、找出所有滿足不等式

$$\log_4(x+1)+\log_2(3-x)>\log_4(13-5x)$$

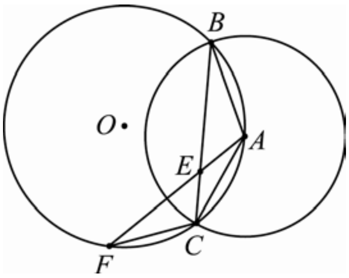
的實數 x 。

四、求級數

$$\sum_{i=1}^{2007}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}$$

的和。

五、如下圖，設兩圓以 O 點及 A 點為圓心，且 A 點在另一圓之圓周上，兩圓相交於 B, C 兩點；設 F 點在以 O 為圓心之圓上，$\overline{AF}$ 與 $\overline{BC}$ 相交於 E 點。已知 $\overline{AE}=1, \overline{EF}=3$，求 $\overline{AB}$。



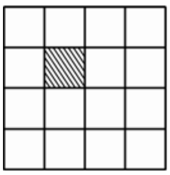
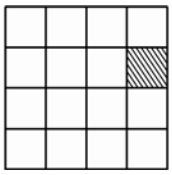
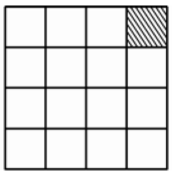
六、考慮方程式 $x^3-x^2-x-2=0$，

(a) 求此方程式的三個根。

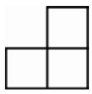
(b) 這三個根在複數平面上成一三角形。試求三角形的外心。（以一複數表示）

七、我們定義「π」為單位圓之面積。證明：$\pi>3$。

八、在 $2^n\times 2^n$ 方格中拿走任一格的圖形稱為虧格 A_n，例如 A_2 的虧格有

 或  或  或 ……

等，共 16 種。請證明：當 $n\geq 1$ 時，A_n 的任一種虧格，均可用數個形如



（可旋轉其方向）的不重疊的瓷磚來將其完全鋪蓋住。

九、設 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 皆為正數。試證明：

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)(1+a_5)\geq\left(1+\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}\right)^5.$$

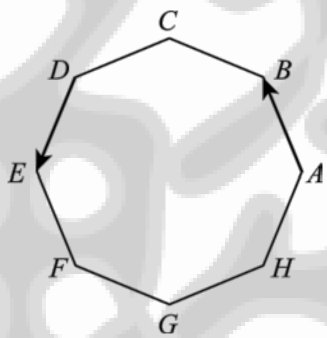
國立成功大學數學系 96 學年度 申請入學

數學科試題 A 卷詳解

一、因為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DE}$ 的夾角為135°，如下圖所示，所以

$$\begin{aligned}\left|\overline{AB}+\overline{DE}\right|^2 &= \left|\overline{AB}\right|^2+2\overline{AB}\cdot\overline{DE}+\left|\overline{DE}\right|^2\\ &=1^2+2\cdot 1\cdot 1\cos 135°+1^2\\ &=2-\sqrt{2},\end{aligned}$$

即向量 $\overline{AB}+\overline{DE}$ 的長度為 $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.



二、假設玩家押 1 號；3 顆骰子

出現一個 1 的機率為 $\dfrac{C_1^3\times5\times5}{6^3}=\dfrac{75}{216}$ ；

出現兩個 1 的機率為 $\dfrac{C_2^3\times5}{6^3}=\dfrac{15}{216}$ ；

出現三個 1 的機率為 $\dfrac{C_3^3}{6^3}=\dfrac{1}{216}$ ；

沒出現 1 的機率為 $\dfrac{5^3}{6^3}=\dfrac{125}{216}$.

根據規則，玩家獲利期望值為

$$\frac{75}{216}\times a+\frac{15}{216}\times 2a+\frac{1}{216}\times 3a-\frac{125}{216}\times a,$$

化簡，得

$$-\frac{17}{216}a.$$

因為獲利期望值為負值，所以是不公平的遊戲（莊家獲利）。

三、讓對數函數有意義的條件為

$$\begin{cases} x+1>0 \\ 3-x>0 \\ 13-5x>0 \end{cases} \Rightarrow -1<x<\frac{13}{5}.$$

在有意義的條件下，不等式為

$$\log_4(x+1)+\log_4(3-x)^2>\log_4(13-5x),$$

即

$$\log_4(x+1)(3-x)^2>\log_4(13-5x),$$

去對數符號，得

$$(x+1)(3-x)^2>(13-5x).$$

移項整理，得

$$(x-1)(x-2)^2>0,$$

解得

$$1<x,\ x\neq 2.$$

綜合得到：滿足不等式的範圍為

$$1<x<2 \text{ 或 } 2<x<\frac{13}{5}.$$

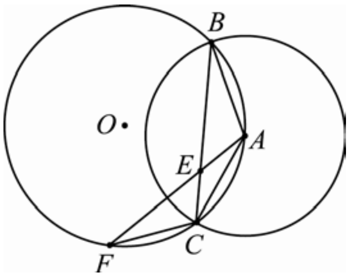
四、利用

$$\frac{1}{i(i+1)(i+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\right)$$

得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2007}\frac{1}{i(i+1)(i+2)} \\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2007}\left(\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\right) \\
&=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}\right)+\left(\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2007\times 2008}-\frac{1}{2008\times 2009}\right)\right) \\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2008\times 2009}\right)=\frac{2017035}{8068144}.
\end{aligned}$$

五、設 A 點為圓心的半徑為 r，即 $\overline{AB}=\overline{AC}=r$.



考慮△ AEC 及△ ACF，因為 $\angle EAC=\angle CAF$，又圓周角 $\angle ECA$ 及 $\angle CFA$ 所對應的弦等長，所以 $\angle ECA=\angle CFA$。因此△ AEC 與△ ACF 相似，根據邊長的比例，得

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}.$$

代入已知的數據，得

$$\frac{1}{r}=\frac{r}{1+3},$$

解得 $r=2$。故 $\overline{AB}=2$。

六、解析如下：

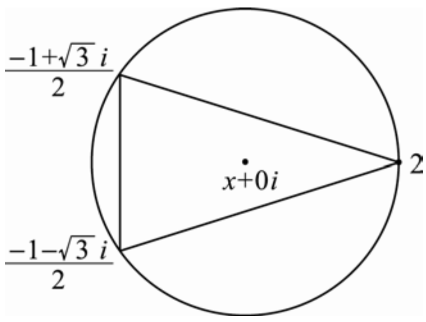
(a)利用一次因式檢驗法可以驗算得到 $x-2$ 是 x^3-x^2-x-2 的一次因式，所以

$$x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1),$$

即 $x^3-x^2-x-2=0$ 的三根為

$$2, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

(b)因為複數 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 與 $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 為共軛複數，所以他們對稱於 x 軸，即該三角形的外心在 x 軸上，並令外心的複數坐標為 $x+0i$：



因為 $x+0i$ 是外心，所以 $x+0i$ 至 2 與至 $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 的距離相等，即

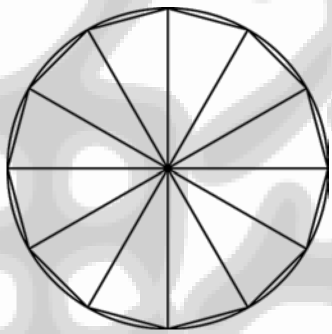
$$\left|x-2\right|=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\ .$$

將兩邊平方，解得

$$x=\frac{3}{5}.$$

故這三角形的外心為 $\dfrac{3}{5}+0i$ 。

七、考慮圓內接正 12 邊形的面積 Δ，如下圖所示：



因為是單位圓，所以每個小三角形的銳夾角為 $\dfrac{2\pi}{12}=30^\circ$ ，所以

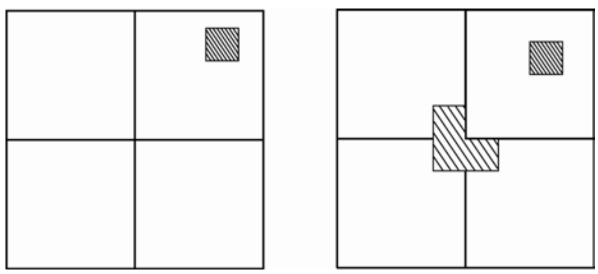
$$\Delta=12\times\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 30^\circ=6\sin 30^\circ=3.$$

又圓內接正 12 邊形的面積 $\Delta=3$ 應該小於單位圓面積 π ，故 $\pi>3$.

八、我們利用數學歸納法證明如下：

(1)當 $n=1$ 時， A_1 扣掉一個虧格，剛好有三格，無論虧格在哪個位置，都可以用一塊 L 型瓷磚鋪滿。

(2)假設 $n=k$ 時成立，即 A_k 的任一種虧格都可以用 L 型瓷磚鋪滿。當 $n=k+1$ 時，我們將 A_{k+1} 分成四塊，如下圖的左圖所示：



首先，用一塊 L 型瓷磚鋪在沒有虧格的三塊區域上，如上圖的右圖所示。此時，四等份中的每一份都是 A_k 虧格的一種。根據假設，它們都可以用 L 型瓷磚鋪滿，故 A_k 的任一種虧格都可以用 L 型瓷磚鋪滿。

綜合上述的討論，得證。

九、將

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)(1+a_5)$$

展開，得

$$1+A_1+A_2+A_3+A_4+a_1a_2a_3a_4a_5,$$

其中

$$A_1=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \qquad \text{（共 5 項）；}$$

$$A_2=a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+\cdots\cdots \qquad \text{（共 10 項）；}$$

$$A_3=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots\cdots \qquad \text{（共 10 項）；}$$

$$A_4=a_1a_2a_3a_4+a_1a_2a_3a_5+\cdots\cdots \qquad \text{（共 5 項）.}$$

利用算幾不等式，得

$$\frac{A_1}{5}\ge\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}\ ;$$

$$\frac{A_2}{10}\ge\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}^{\,2}\ ;$$

$$\frac{A_3}{10}\ge\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}^{\,3}\ ;$$

$$\frac{A_4}{5}\ge\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}^{\,4}\ .$$

故

$$\begin{aligned}
&(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)(1+a_5)\\
&=1+A_1+A_2+A_3+A_4+\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}^{\,5}\\
&=1+5\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}+10\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}^{\,2}+10\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}^{\,3}+5\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}^{\,4}+\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}^{\,5}\\
&=\left(1+\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}\right)^5.
\end{aligned}$$

專欄 動手玩數學

◎許志農／台灣師範大學數學系

遊戲 17

☆☆☆☆

一天夜裡，福爾摩斯正在書房看書，突然電燈熄滅了，原來是保險絲燒斷。福爾摩斯同時點燃了備用的兩支圓柱狀蠟燭，在燭光下繼續閱讀，直到電工把電燈修好。

第二天，他想知道昨晚斷電多長時間。但是，他當時沒有注意斷電的時間，也沒有注意來電的時間。於是他想透過了解點多長時間的蠟燭來推斷斷電時間。他找來找去，怎麼也找不到點剩的蠟燭。後來僕人告訴他，燒剩的蠟燭一支長度是另一支的 4 倍。原本兩支蠟燭都是新的，而且原來長短一樣，但粗細不同，粗的一支點完需 5 小時，細的一支點完需 4 小時。

請你根據上面的訊息推算，福爾摩斯前一晚處在斷電的時間有多長？

〔玩鎖・玩索〕

這是大陸第三屆「希望杯」全國數學邀請賽的培訓題。培養對文字敘述很多的題目之閱讀與抓出數學要素的能力，是國中進入高中，甚至未來很重要的一種訓練。

遊戲 18

☆

俄國著名作家契柯夫所寫的《家庭教師》中，寫了一位教師為一道算術題大傷腦筋。這題目是：顧客用 540 盧布買了兩塊布料共 138 俄尺，其中藍布料每俄尺 3 盧布，黑布料每俄尺 5 盧布。

問：藍布料與黑布料各買幾俄尺？（註：盧布是一種貨幣單位。）

〔玩鎖・玩索〕

契柯夫出生於小市民家庭，父親的雜貨舖破產後，他靠當家庭教師讀完中學；1879 年進入莫斯科大學學醫，1884 年畢業後從醫並開始文學創作。他的名言「簡潔是天才的姊妹」也成為後世作家孜孜追求的座右銘。

「設未知數，寫下滿足的式子，再求解」是解本問題的標準方法，也是國中數學解題重點。

遊戲 19

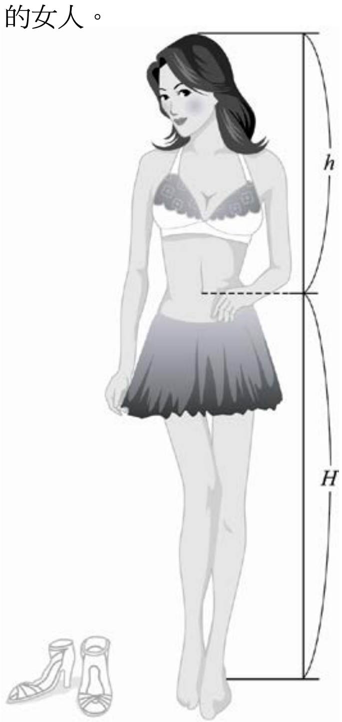
☆☆

黃金比值 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 自古希臘以來，都扮演著重要的角色。例如，古希臘就利用黃金比值來建構正五邊形；文藝復興時期，達文西利用黃金比值來創作「蒙娜麗莎的微笑」。

達文西心中的完美女人是身材符合

$$\frac{身高}{肚臍高度} = \tau$$

的女人。



(1) 利用計算機或電腦求黃金比值 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 至小數點以下第三位（將第四位四捨五入）。

(2) 模特兒志玲身高 173 公分，肚臍高度 105 公分。請問志玲應該穿幾公分（取整數）高的高跟鞋，才會看起來最像完美女人？

〔玩鎖・玩索〕

先透過計算機或電腦估計黃金比值 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的近似值，再將此近似值代入條件裡，比較容易求得答案。

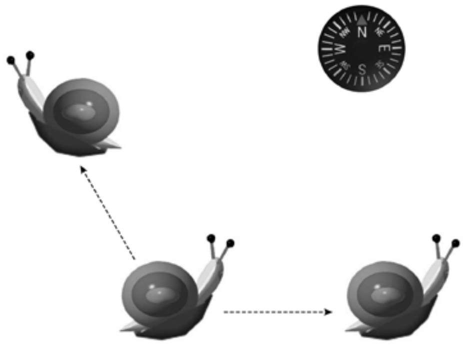
不妨量一下自己的比例離黃金比值多遠。芭蕾舞者在跳舞時，喜歡墊高腳底，女人喜歡穿高跟鞋的目的何在呢？

遊戲 20

☆☆☆

有一隻奇怪的蝸牛，白天停止不動，到了晚上不是向東前行 1 公尺，就是向西 $60°$ 北的方向前行 1 公尺。

經過 n 個晚上的爬行之後，蝸牛的位置在原來位置的正北方，試問該蝸牛與原來的位置相距幾公尺？（將答案以符號 n 表示。）



〔玩鎖・玩索〕

笛卡兒最有名的名言是「我思故我在」，他也是坐標幾何的提倡者之一。有了坐標幾何，可以讓我們談論平面上的距離，將向量再考慮進來，就如魚得水了……距離與方向俱足。

動手玩數學~破解秘笈 第4期

遊戲 13

(1)觀察大拇指所數的前幾個數為

$$1,9,17,\ldots.$$

再考慮手指數數的實際操作情形，從大拇指數過去，再數回大拇指時，會增加 8 個數。所以大拇指所數的數是首項 1，公差 8 的等差數列。也就是說，大拇指數的第 n 個數為

$$1+8(n-1)=8n-7.$$

(2)利用不等式 $8n-7\le 999$ 得 $n\le 125\frac{6}{8}$。因為大拇指第 125 回數到的數為 $8\cdot 125-7=993$，所以 999 被中指數到。

玩鎖．玩索解答

第一題：478，第二題：$4n+2$。

遊戲 14

所有烏龜的總重量 W 為

$$\begin{aligned} W&=3+\frac{3}{8^1}\cdot 2^1+\frac{3}{8^2}\cdot 2^2+\frac{3}{8^3}\cdot 2^3+\cdots \\ &=3\left(1+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right) \\ &=3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &=4. \end{aligned}$$

故所有烏龜的總重量為 4 公斤。

遊戲 15

將阿基米德、歐幾里得、費馬與高斯以符號 A, E, F 及 G 表示。

(1) 若 A 說謊，則 A 答對第一題或第四題，也就是說，F 與 G 有一人說謊。因為只有一人說謊，所以不可能這種情形；也就是說，A 說了實話。

(2) 若 E 說謊，則 E 答對第四題，即 G 說謊。因為只有一人說謊，所以不可能這種情形；也就是說，E 說了實話。

(3) 若 G 說謊，則 A, E, G 都沒答對第四題，即 F 答對第四題。因此，F 也說謊，不合。

(4) 綜合前面得到，A, E, G 說實話，F 說謊話。即 G 答對第四題，又因為 A, F, G 都沒答對第一題，所以 E 答對第一題。

答案：歐幾里得答對第一題，高斯答對第四題，費馬是唯一的說謊者。

遊戲 16

將六個半徑相等的圓之圓心連在一起，形成玩鎖．玩索中的圖形，所以最左側、最右側與最上邊的這三個圓之圓心所形成的三角形為等腰三角形。

玩鎖．玩索解一

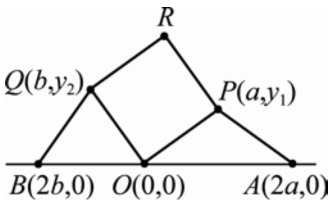
$$\left|\overline{CQ'}+\overline{Q'R'}\right|=\left|\overline{RP}+\overline{PA}\right|=\left|\overline{RA}\right|=\left|-\overline{AR}\right|=\left|\overline{AR}\right|.$$

故三角形 RAB 為等腰三角形。

玩鎖．玩索解二

我們將利用定坐標的方法證明，最左側、最右側與最上邊的這三個點所形成的三角形為等腰三

角形。令底層三個點的坐標分別為 $A(2a,0)$，
$O(0,0)$ 與 $B(2b,0)$，如下圖所示：



因為 POA 與 QOB 都是等腰三角形，所以 P 點的 x 坐標為 $\frac{0+2a}{2}=a$，可令 $P(a,y_1)$，同理可令 $Q(b,y_2)$。又因為 $OPRQ$ 是平行四邊形（菱形），所以

$$\overline{OR}=\overline{OP}+\overline{OQ}=(a,y_1)+(b,y_2)=(a+b,y_1+y_2),$$

即 $R(a+b,y_1+y_2)$。由 A, B, R 的 x 坐標為 $2a$，$2b$，$a+b$ 知道，R 在線段 $\overline{AB}$ 垂直平分線上，即 $\overline{RA}=\overline{RB}$。故三角形 RAB 為等腰三角形。