



Icon 設計與 GeoGebra 數學繪圖

黃信淳 老師
國立臺南女子高級中學

壹、前言

此課程是由臺南女中美術科教師王政凱與筆者共同授課。臺南女中每年約莫有40人於畢業後就讀設計領域的科系，而高中課程對此領域的相關教學活動很少。另外，懂得使用GeoGebra，對於數學的學習，有莫大的助益，於是便有了這一堂由美術科與數學科共同教學的課程產生。我們希望未來想就讀設計學系的學生，對設計能有更多的了解。而且在考完學測之後，準備面試與備審資料之時，能夠有更充分的準備，也能言之有物。

貳、課程的設計理念

自從智慧型手機興起，每一個app都需要一個簡單而搶眼的icon，而每個知名品牌也都有自己的商標。未來從事設計工作之時，不免會接到商標設計的案子，而如何辨別商標設計的優劣，如何設計出一個好的icon，如何使用電腦繪製一個規格化的icon，是這個課程的一個主軸。其次，如何使用GeoGebra來輔助數學的學習，是這個課程的另一個主軸。



參、課程教案分享

周次	主題	內容	備註
1	課程簡介與認識彼此	<ul style="list-style-type: none"> ★ 說明課程內容 ★ 分組 ★ 認識彼此的破冰活動 	
2	視覺識別系統的內容與原理	<ul style="list-style-type: none"> ★ 課程PPT教學 ★ 小練習 	作業一： 手繪icon設計稿
3	學習icon設計的方法	<ul style="list-style-type: none"> ★ 課程PPT教學 ★ 小練習 	
4	Launcher Icon設計實作1	★ 說明作業的規格與模式	
5	Launcher Icon設計實作2	★ 設計實作	
6	Launcher Icon設計實作3	★ 完稿	
7	第一次期中考停課		
8	GeoGebra練習1	繪製校徽	
9	GeoGebra練習2	等角螺線與星系旋臂	
10	GeoGebra練習3	圓內光反射的軌跡	
11	GeoGebra練習4	內擺線與包絡線	
12	GeoGebra練習5	隧道與雙無窮遠點	
13	第二次期中考停課		
14	用GeoGebra重繪icon實作1	★ 說明作業的規格與模式	作業二： 電繪icon設計稿
15	用GeoGebra重繪icon實作2	★ 用GeoGebra設計實作	
16	用GeoGebra重繪icon實作3	★ 完稿	
17	班級內發表設計成果1	★ 作品展示	
18	班級內發表設計成果2	★ 講述設計理念	
19	校內展示設計成果	發表在學校的走廊	

肆、實施方式

一、icon設計：

第一次期中考前，由美術老師王政凱授課講述icon的設計，筆者旁聽。

1. 視覺識別系統的內容與原理：

以Google家族的顏色辨識度為例



© 2015 Google Inc. 版權所有。Google 和 Google 標誌是 Google Inc. 的註冊商標。

圖1

Google設計的app很多也很好用，例如搜尋、地圖、表單、行事曆、Chrome、雲端硬碟、Gmail、翻譯。而Google如何統合這些不同領域的app的icon設計呢？答案是顏色。只要手機裡的一個icon裡出現了藍、紅、黃、綠四個顏色，我們會猜想這應該是Google設計的app。

2. 學習icon設計的方法。

3. Launcher Icon 設計實作（手繪）：

這部分由學生選定校內的一個地點、場所、主題、處室、科辦公室，設計其icon，作成手繪稿，並在設計稿上說明其設計理念，類似商場上設計團隊競標時所設計的稿件。例如此次學生選定的主題有：冷氣卡、停車場、百年校慶、數學科辦公室等等。



二、學習使用GeoGebra：

第一次期中考至第二次期中考期間，由筆者授課講述GeoGebra，美術老師王政凱旁聽並攝影，將上課過程做成紀錄，以利成果發表，未來也方便其他老師開設類似課程。以下為練習使用GeoGebra繪製圖形的部分主題。

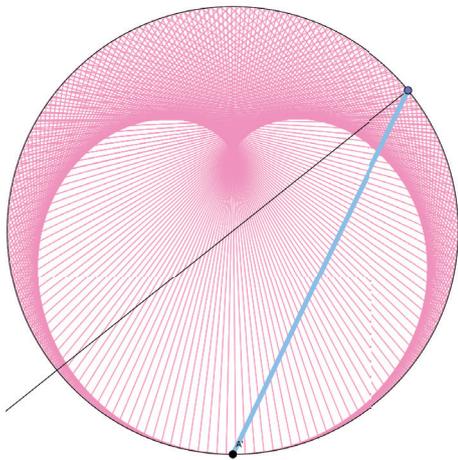


圖2 繪製以圓周上一點為點光源，其所發出的光，照射到圓周上其他點，所反射的光線軌跡。

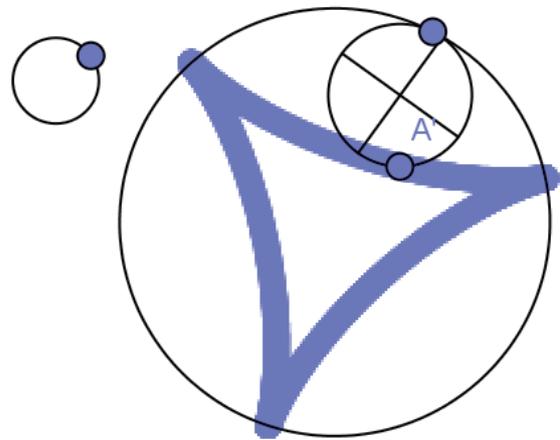


圖3 繪製包絡線。

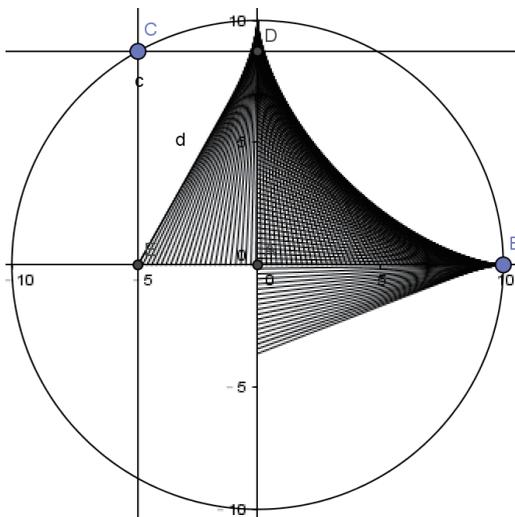


圖4 繪製擺線。

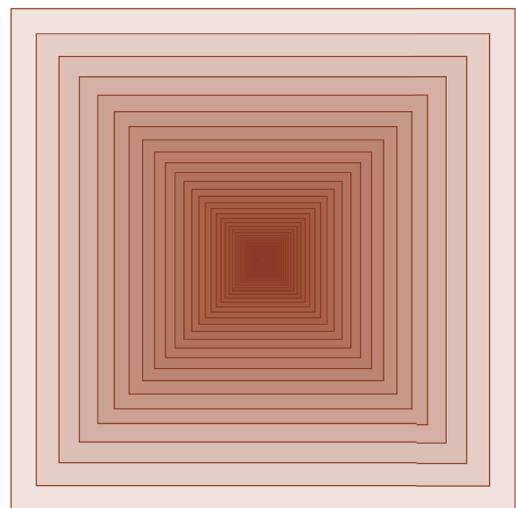
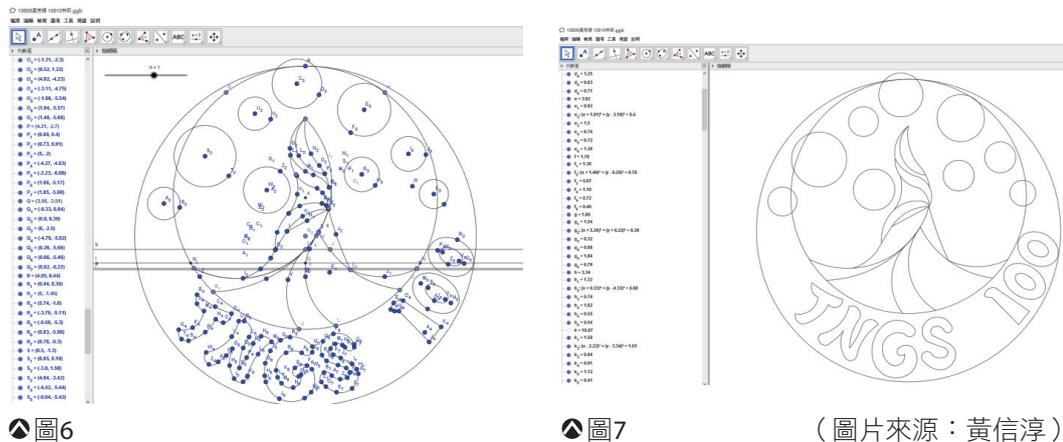


圖5 利用等比數列繪製隧道。

三、成果發表：

第二次期中考至期末考期間，學生開始將手繪稿改為電腦繪圖稿，兩位老師從旁協助。以下為部分學生作品。



以下圖片為上課情形





伍、結語

在經歷半年的跨科共同教學之後，筆者在icon的設計上，學習到許多寶貴的理念和優劣判斷。不但修課的學生收穫良多，而且共同教學的老師們也從彼此身上學到許多對方擅長的領域內的知識。連一般難以想像能夠共同教學的美術科與數學科，都能夠找到適當的主題而加以融合。我相信各個科目之間，也都存在著各式各樣的主題能夠進行共同教學。從過程中，我們當教師的，也能重溫學習的快樂。



人工智慧與機械設計

黃信淳 老師
國立臺南女子高級中學

壹、前言

今年的全國科展中，筆者指導的本校資優班學生吳昀恬，以「AI人工智慧與樂高積木之結合與應用」拿到康寧特別獎與最佳鄉土教材獎，於是便想把科展經驗變成臺南女中的校本課程，在107課綱施行。

本課程教學的五大主要面向為**機械**、**動力**、**控制**、**感測**、**AI**，其中包含大量實作，此部分是技職體系學生擅長但高中學生缺乏的。後端的AI理論與程式設計，超乎技職體系學生的能力。本課程期待能增強高中生較弱的實作，並發揮自身較強的理論與程式設計。

貳、課程的設計理念

本課程的課程規劃上以三年為進程，以下分項說明：

一、第一年課程開發：

以數學、物理、生活科技、資訊、美術等學科的教師為主力，利用Lego EV3，進行課程開發，完成教學示範用的「對弈機器」及其組構說明書，例如Tic Tac Toe對弈機器（如圖）、拈對弈機器、Gobblet對弈機器、Rummikub對弈機器。

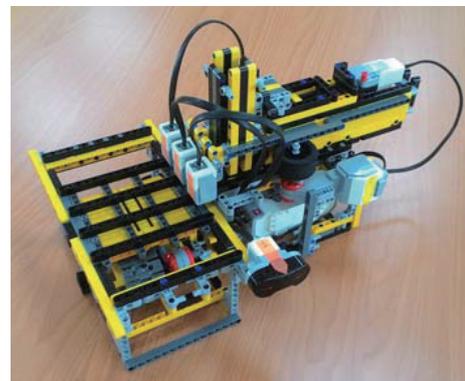


圖9

（圖片來源：黃信淳）



二、第二年教學實踐：

在臺南女中用以下方式之一進行教學。開設專班、開設多元選修課程、工作坊、融入各科課程、專案學生指導等方式進行實踐。

三、第三年推廣教育：

持續開設課程並進一步與鄰近的中山、建興國中、家齊高中合作，簡化課程並以營隊的方式，使鄰近的國中生、高中生、技職體系的學生也能接觸到AI人工智慧的學習。

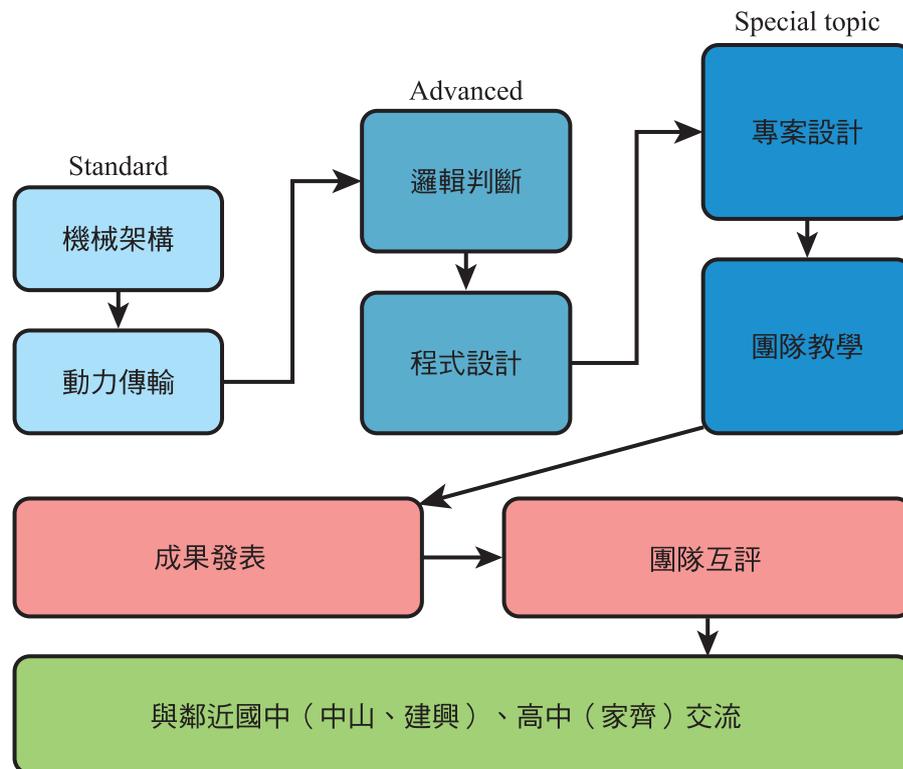


圖10

參、課程教案分享

本課程預計執行15周，每周上課2小時。規劃如下表格，說明於後：

周	單元名稱	內容	時數	評量方式	開發課程模組
1	前測，桌遊	實施前測，討論桌遊中的策略。	2	課堂表現	桌遊中的數學
2	樹形圖	以樹形圖解構桌遊	2		
3	Lego Technic	介紹Lego機械零件與PF系統馬達，並讓學生自創作品。	2	作品評鑑	機械架構
4	Lego EV3	介紹Lego EV3，並讓學生製作循跡車（使用老師所寫的程式）。	2		
5~7	AI人工智慧	學習程式語言，並寫出Tic Tac Toe或拈的對弈程式。	6	程式評鑑	AI人工智慧
8	範例展示 自薦與勸說 選定主題	展示科展作品「Tic Tac Toe對弈機器」，讓學生尋覓與遊說，組成團隊，並選定專案主題，討論分工。	2	作品評鑑	會思考的機器
9~10	機械架構設計	用Lego Technic零件製作機體。	4		
11~13	AI程式設計	用Lego EV3撰寫AI程式。	4		
14~15	成果發表 後測	各個團隊輪流進行專案報告，作品展示，並實施後測。	4		



肆、實施方式

一、課程的開設方式：

視本校整體課程規劃，挑選以下方式進行實踐：

1. 成立專班進行特色課程。
2. 開設多元選修。
3. 融入數學、資訊、生活科技、物理、美術等課程教學中。

二、評量方式：

1. **前測**：測驗內容為本課程所會學到的機械與程式設計知識，前測的測驗結果主要作為後測的對照組，以了解學生在課程中的成長幅度。其次做為調整課程難度的依據。
2. **桌遊中的數學課堂表現**：從觀察中了解學生的臨場反應速度、對於未知事物的理解速度、對於新知識的吸收速度。綜合來說就是學習力的判定。
3. **機械架構的作品評鑑**：以PBL的學習方式，從過程中了解學生解決問題的能力，從作品中了解學生的創造力。
4. **AI人工智慧的程式評鑑**：以PBL的學習方式，從過程中了解學生解決問題的能力，從程式中了解學生的邏輯思考與細心程度。
5. **會思考的機器的作品評鑑**：全方位評價學生，如以下方面：邏輯思考、細心程度、團隊合作、創意發想、解決問題、自我行銷、有看人才的好眼光、講解作品的口才，能正確評價他人作品的眼光與無私心。

伍、結語

自從隨身碟的記憶容量一路從KB、MB，最後變成GB為單位時，人工智慧的未來就一片光明。而使普羅大眾注意到人工智慧，則是AlphaGo在圍棋上驚人的戰績。年輕學子可在高中階段學習簡單的相關理論，探索興趣。

最近與成大電機與成大航太的教授聊到，高中生的學習能力很強，在理論上的發展不錯，不過手作能力就差了點，而技職體系的學生則相反，很少有學生在兩個方面都不錯。這使得筆者想在高中端加強學生的手作能力。

女生在工學院的比例偏低，筆者希望藉由此課程，引發女生對於工學院的興趣，減少對於工學院的恐懼。

陸、參考資料

1. 本校臺南女中科展作品「AI人工智慧與樂高積木之結合與應用」（2016年）

2. 維基百科：

(1) https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square，QR Code：。

(2) <https://en.wikipedia.org/wiki/Tic-tac-toe>，QR Code：。

(3) <http://www.mathland.idv.tw/solveTieTacToe.html>，QR Code：。

3. Coursera：

國立臺灣大學/于天立 (Tian-Li, Yu) / 人工智慧 (Artificial Intelligence)

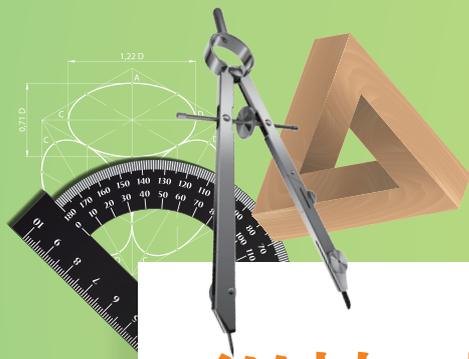
路德維希馬克西米利安慕尼黑大學/Tobias Kretschmer/競爭策略

4. 大拇指兒童程式積木教室，Lego EV3使用說明

<https://goo.gl/1YrYtz>，QR Code：。

5. LAB cavedu，Lego EV3使用說明

http://lab.cavedu.com/ev3_ultrasonic，QR Code：。



從棒球計量學探討統計思維

黃俊瑋 老師

臺北市立和平高級中學

棒球該怎麼經營？怎麼打？
誰是最適合的球員？以及為什麼？
本質上，他們在尋找的，其實是棒球的新知識。

引自《魔球》

壹、緣起

近年來，美國職棒大聯盟產業的總體年營收逐年攀升，突破100億美元大關。據富比士估計，大聯盟所有球隊的總市值和已高達360億美元。換言之，棒球不止是運動，更代表著一種文化與商業活動。當然，商業活動脫離不了投資與獲取利益等商業行為，箇中棒球好手，特別是明星球員，更是球隊的重要資產。因此，如何更加準確抑或更正確地分析、評估球員的當下與未來價值，找出被低估的潛力球員等，皆攸關了球隊的勝利與否，更關乎球團投資成效與經濟利益。當球隊戰績長紅，容易塑造隊上明星球員，並帶動觀眾入場與當地商機。特別是進入季後賽的商機更是龐大，除了球票飆漲之外，天價廣告收入與全國媒體曝光效益，更是經營球團每年趨之若鶩的目標。

儘管棒球場上與報章媒體，充斥各種統計資料與衍生出的數據，然而，百年來參與其中的大多數人並未曾深刻思考這些數據背後的意義。素有棒球統計學之父之稱的Bill James，他首先在《1977 Baseball Abstract》一書中，透過大量數據進行研究與比較，提出他對棒球統計資料的種種觀察，以及諸多新論述，進而駁斥報章、媒體與棒球人言談間的謬誤言論。經過他多年的努力，終於在棒球界起了漪漣。儘管，棒球計量學成為球場上顯學的路也曾走得坎坷，本文也無法多談，但近年來「數據分析師」堂堂進入大聯盟球團中的球探部門或分析部門，在球員比較、球員選擇與球員交易等決策過程中，扮演不可或缺的角色，而這些決策背後所代表的，更是數千萬甚至上億美元的生意與商機。



另一方面，數學家與統計學家過去總是位居全美職業評比的前幾名，最近二年，數據科學家（Data Scientist）這個新興職業更是一舉衝上排行榜的前頭。輔以近年火紅的「大數據」分析與研究，統計這門學問與相關知識，恐是未來新世界需求以及未來各類新興職業中，最不可或缺的重要基礎與能力，也勢必影響工作機會與選才的趨勢。

當然，統計在正統數學課程中的地位也逐漸提升、日漸重要，這股風潮在臺灣的中學數學教育發酵，特別是近年來益加深強調的中學統計課程，不難看出這股趨勢。種種原因，搭上近年的棒球熱與大數據統計風，筆者這學期在學校所開設的多元選修數學特色課程，便以「棒球與統計」為主題，跨越體育與數學兩個領域，淺談棒球場上的各項傳統與進階統計數據的意義，分析、探討傳統棒球統計數據的諸多迷思與限制，以及近年來的棒球統計學家們如何提出改進方法，並在統計與科技輔助之下，所發展出的各類新式統計數據。

貳、特色課程主題與主要內容

本課程的開課年級為高一，每週2節課的時間。接下來，筆者先列出本課程的各主題，接著再簡單介紹課程內容、課程評量、課程主要進行方式、課程目標、主要數學與統計知識內涵等。

一、「棒球與統計」課程主題：

1. 相見歡－自我介紹、棒球經驗分享與課程介紹。
2. 簡易棒球規則與球賽基本統計；棒球統計相關英文名詞介紹。
3. 電影欣賞－《魔球》；《魔球》心得分享與討論；《魔球》的意義與啟發。
4. 棒球計量學的發展與Sabermetrics社群興起；棒球統計相關的重要議題。
5. 傳統數據的限制與迷思！？網路資源與棒球統計書籍介紹。
6. 新問題、新思維 I：投打相關進階數據。
7. 新問題、新思維 II：DIP衍生的新思維與BABIP衍生的新觀點。
8. 球探報告怎麼看？臺灣潛力新秀評析。
9. 期中報告－球探報告分析與球員評論。
10. 從統計觀點反思棒球數據－進階投打型態分析；從統計數據窺探新魔球方針；EXCEL與統計分析。
11. 球員價值與貢獻評估 I－勝率公式、得分創造公式。



12. 球員價值與貢獻評估II－取代層級與勝場貢獻評估（Win Above Replacement）。
13. 球員價值與貢獻評估III－勝場貢獻指數（Win Shares）。
14. 期末報告－球員分析實務。
15. 課程總結：課程回顧；反思與回饋。

二、課程主軸與內容說明：

首先，課程的第一部分，是了解學生對棒球相關背景知識與棒球經驗，從簡易棒球規則與球賽相關重要名稱術語談起，慢慢引入棒球場上以及報章媒體上常見的基本棒球數據，並且介紹相關英文名詞，以及美國大聯盟的幾個重要數據庫，一方面也期待學生透過閱讀國外棒球計量學相關網站，培養英文閱讀能力。

接下來，課程的第二個部分，首先欣賞《魔球》這部電影，初步了解球團在進行球員選擇與交易或作決策時，統計知識與數據分析為什麼重要。並透過學習單引導，讓學生反思《魔球》的意義與相關啟發。接著，介紹棒球計量學的發展與Sabermetrics社群（全美棒球研究社群、棒球計量學）興起的過程。

第三部分開始，是本課程的重頭戲，主要聚焦在棒球場上的各項統計數據部分。首先，探討並反思報章媒體上常見的這些傳統數據，是否存在限制或相關迷思？再者，為求解決這些數據的限制或改良不佳的數據，進而引導學生探討棒球統計學家如何構思與創造新數據，以及近代棒球統計學各種新思維與新方法，當中包含投手、打擊與守備相關進階數據的發明目的與這些數據的意義。同時，也介紹如何查詢與使用這些數據。接著，慢慢引入國外學者的研究與種種新發現，先透過統計數據與實例探討BABIP（球打入場中形成安打的比率）的變異性與機運性，並討論衍生出的新觀點新型態的數據。並探討為何近年來DIPS這類投手數據逐漸居於主流，以及背後的新思維。

第四部分則是以選手分析為主，「球探報告怎麼看？」單元先引入統計學中的常態分布，說明球探報告中相關評分與評價所代表的意義。同時也實際以臺灣目前在小聯盟的潛力新秀為例，評析他們的球探報告。接著，介紹「本壘板紀律」的意義，並介紹受惠於近代高科技所衍生的投打守進階數據，以及近年來的一些新研究成果。接著以大聯盟史上的知名球員為例，實際作球員的分析與比較。

第五部分，主要探討球員貢獻與球員價值。首先，從棒球統計學家建立的勝率公式模型出發，說明如何透過球隊的總得失分估算勝率。再從各類得分創造與得分產製公式，分析打者對於球隊得分的貢獻。接著，介紹「取代層級」的概念與意義，引出如何計算、評估球員對於球隊的勝場貢獻（Win Above Replacement），進而比較投手、打者，以及不同守備位置球員的每年整體貢獻與價值。最後，介紹Bill James所發展的勝場貢獻指數（Win Shares），說明如何將球隊一整

年的勝場，適當地分配予進攻方與守備方，進而分配給每一位選手，以了解每個球員一整年下來對球隊的勝場貢獻，找出最有價值的選手，並進行選手貢獻的比較。

三、課程進行方式與課程活動：

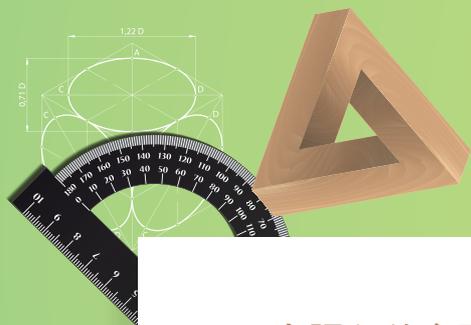
本課程主要的進行方式與課程活動包含：

1. 利用投影片展示與講述教學。
2. 影片欣賞與心得分享：透過電影《魔球》與原著，設計學習單（學習單如附錄），引導學生反思《魔球》的意義，並探討棒球統計社群的興趣與新思維。
3. 利用學習單的提問，引導學生反思、討論棒球統計學裡的諸多重要議題。並透過傳統報章媒體上不合理的數據判讀，學習統計分析與批判性的思維。
4. 介紹棒球英文：
透過課程的進行，學習棒球與棒球計量學常用的英文名詞與英文術語，以利學生閱讀國外相關網站或英文專書。
5. 統計軟體教學：
介紹EXCEL相關統計功能，並實際用於棒球數據分析。
6. 數學閱讀：
閱讀棒球統計相關書籍或文章，撰寫報告，練習數學寫作，並討論與分享。
7. 球員數據分析、球探報告分析與討論：
 - (1) 期中報告－實際閱讀球探報告，進行球員的分析與評論，並上台發表與分享。
 - (2) 期末報告－透過本學期所學，實際進行球員各項基本與進階數的分析與比較。並上台發表、分享與討論。

四、課程評量：

本特色課程的評量方式包含：

1. 《魔球》電影欣賞學習單。
2. 課程學習單與期末回饋表。
3. 期中報告：分析並介紹一位小聯盟球員及其球探報告。
4. 期末報告：透過本學期所學知識，分析一位大聯盟球員或中華職棒的球員。
5. 上課參與及上課表現。



五、本課程的主要課程目標與預計培養的能力：

主要目標包含：閱讀、反思、討論、分析、創造、學習提問：

1. 認識棒球傳統與進階數據，透過統計數據分析球員的能力、價值與貢獻。
2. 閱讀（中、英文網站與資料），認識中英文棒球統計數據與相關術語。
3. 溝通與討論：學習單與心得寫作，上台發表與分享自己的想法，或進行課堂討論。
4. 批判性思考：傳統數據的限制與迷思。
5. 創新思考：棒球統計的新思維與新方法、棒球數據的發展與創造、重要的棒球統計議題。
6. 提問：學習如何提一個好的、有趣的、有意義的問題，然後思考適當的方法，發展適合的統計工具，最後回答問題，並引發新的想法與研究。

六、特色課程相關數學與統計內涵：

1. 平均數、標準差、標準化等基礎統計知識。
2. 相關係數：利用相關係數探究有趣的新發現，並引出棒球統計的新思維與新概念。
3. 函數、數學建模：建立棒球數據相關數學公式、勝率公式或各類函數模型。
4. 迴歸：評估得分創造、球員價值之相關公式。
5. 常態分布：球探報告之評分與相關意義。

參、結語

如同柏拉圖所說：「數學引領我們跳脫變化無常的幻海，看穿假象，看清事物背後的本質。」而統計同樣可以幫助我們釐清雜亂數據背後的本質與現象。

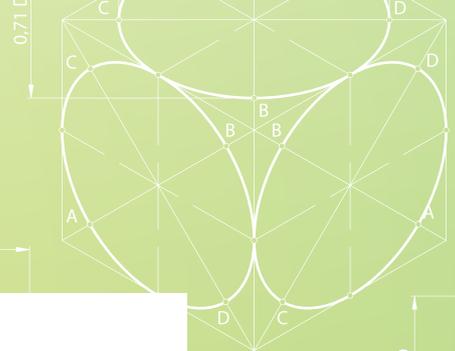
時代在改變，學習新知的方式與看問題的方式也需跟著改變。無論是透過高科技的追蹤分析，或是透過統計大數據分析，乃至於數學模型與數學概念的引入，統計、數學、科技與運動科學影響了棒球的發展，為棒球帶來革命，帶來新的知識，也改變了棒球選才與評價球員的方式與生態。

本課程期待透過數學與運動（產業）的結合，整合跨領域的知識，一方面吸引更多的學生認識棒球－臺灣的國球，並反過來透過棒球學習統計的意義與內涵。除了認識棒球統計數據外，並深入理解各類棒球數據的「真實」意義，理解統計數據背後的諸多限制，學習如何更確精地評價、評斷選手的能力與貢獻，也學習更精確、更客觀、更謙虛地使用統計數據。

*Sketch 13/2011
algebra nulla
in 145° op erat*

*Mechanical
1526*

1,22 D



Drawing

*et effecuum
ula erat op*

0,71 D

最終也期許學生和讀者：讀懂圖表與數據只是統計第一步，除了認識相關統計量與統計數據外，要學習進一步利用統計數據作比較，並試著比較不同統計數據的優缺點，不要只看表面的數據，更要反思、了解統計數據本身的意義，以及數據背後、數據之外的意涵。特別地，各種統計數據都有其限制，在使用數據作分析、比較與決策時，務必小心！並懷抱著質疑與好奇心！

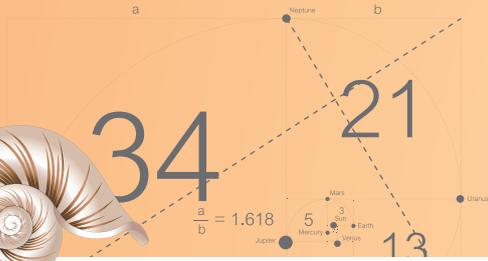
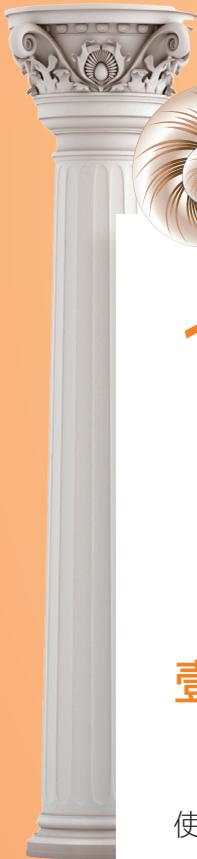
肆、附錄

數學特色課程－電影《魔球》學習單

一年_____班_____號 姓名_____

看完《魔球》電影後，請詳細回答下列六個問題，並請標明題號。

- 一、影片中，你印象最深刻的是哪一個片段或哪一句話？為什麼？（15%）
- 二、看完《魔球》後，你覺得「數學（統計）」為何重要？是否讓你對學習數學的想法有所改變？（15%）
- 三、本電影的片名為《魔球》，看完電影後，你覺得《魔球》的意義或主要精神是什麼？（15%）
- 四、看完電影後，你認為各種「知識」是永恆不變的嗎？為什麼？又你覺得什麼樣的知識較可靠？（15%）
- 五、以下三個問題，請你選擇其中一個問題，詳細回答。（15%）
 1. 運動家隊依《魔球》的理念選擇了球員，但開季戰績仍不佳，如果你是經理人，你仍會繼續貫徹《魔球》的理念嗎？為什麼？
 2. 別的球隊花大筆簽約金，爭搶具有天分的高中球員時，《魔球》的理念卻獨排眾議地認為成熟的大學球員較具「價值」，你對此有何看法或評論？
 3. 運動家隊公開了《魔球》的祕密之後，難道他們不怕其他球團仿效學習嗎？請你寫出你的看法。
- 六、請利用背面空白處，描述你看完此電影的感想。（至少200字，25%）
（有興趣的話，可自行參閱《魔球》一書，另寫一份完整的讀書心得）。



107 數學多元選修你我他

彭良禎老師

國立臺灣師範大學附屬高級中學

壹、前言～接力賽跑

近年來，因應12年國教上路與《107課綱》多元選修的逼近，全臺各地的教育相關單位無不使出渾身解數與廣籌經費，陸續推出各種短、中、長期的配套措施，例如：教育部早從96學年起，即帶頭執行高中**優質化**計畫，102學年起改成**特色領航**計畫，目前則是最新的**前導**計畫；國教署則自98學年起，按部就班地拓展高中的**均質化**規模。至於地區性的教育局也不遑多讓，以北北基為例，新北市於101學年起，率先發起高中職的**旗艦**計畫；臺北市隨後也推出高中職的**領先**計畫急起直追，兩者頗有互別苗頭之勢。

上述的方案名稱或許各有千秋，但異中求同的模式皆是由上而下，帶領著熱情的學校團隊，讓中學端第一線的教師們提早熱身，藉以發展多元豐富的空白課程、校本課程、特色課程…等跑班選修，就連科技部最新接棒的第三期高瞻計畫，也搭上臺灣教改這波新浪潮，將大學端新興科技融入中學教案研發的脈絡，順水推舟地導向母雞（高中職）帶小雞（國中）的新里程，其中由筆者共同主持的「藝數創課」執行內容參見肆、參考六。

貳、分享～野人獻曝

學，然後知不足；教，然後知困。知不足，然後能自反也！知困，然後能自強也！

故曰：教學相長也！《兑命》曰：「學學半。」其此之謂乎？《禮記·學記》

面對沒能「照本宣科」的選修課程，究竟要上什麼？要看什麼？要寫什麼？要玩什麼？要DIY什麼？有趣的是，就連各大專院校的師資培育體系，好像也都還沒未雨綢繆這一塊。筆者以為這是「市場供需」的氛圍。從前的選修都是3+1或4+1的必選，主要是為了課程進度服務，由於當時沒有研發教案的需求，教師即便是碰到不少叫好又叫座的研習，也會因為定位與現實考試升學的節奏不合，故而被束諸高閣，頂多是茶餘飯後地玩票呈現。

所幸在教學這門藝術路途上，每位數學老師應該都累積有不少「抽屜課程」，以便在段考後教學進度較鬆緩的時刻，或是在行事曆上某些青黃不接的時段，安插諸如《數字搜查線》或《天

才無限家》影片欣賞的餘興節目。只是以往可能沒有真實備課的需求，故從沒案牘編寫學習單或設計Q&A問卷，如今若真要就手邊這些現有的教學資源，再融合網路豐富的分享資訊，好好編寫出幾節可操作的實體教案，理當不是難題。

以下以《圓》為主軸，分享筆者歷經多回合教學相長的刺激，最後結合網路教學資源，嘗試從幾道經典小菜串接，慢慢發展成一系列〈圓舞曲魔數〉套餐的演變歷程，學習單內容及教學指引詳見伍、附件。

一、牛皮換城堡：

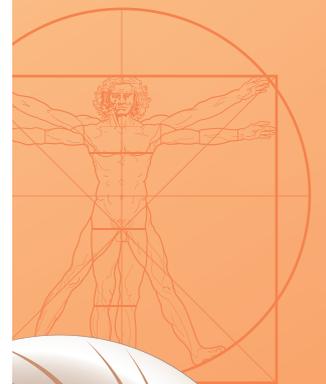
赤崁樓的牛皮交易，是筆者國小社會課堂上聽聞的傳說，教學時也常有學生回應聽過類似的傳說，但就是沒人見識過真實的「歷史場景」，直到筆者在《如何穿越一張明信片》書中得見其實作，才將此操作緊接於錢幣穿洞魔術之後，頗能引人入勝。早期，筆者會的也就只有書中的標準答案，故教學重點放在引導學生從「Impossible」變成「I m possible」的境界，直到後來在師大附中1295數資班互動時，筆者才又教學相長地被啟發一題多解的定位。

二、墨比爾斯環：

Mobius環是筆者就讀師大數學系時，唯一認知的拓樸學經典魔術，但除了科展研究，其實一直不知如何深入淺出地串成課程，直到在「2013 第一屆創新數學教學研討會」上，習得馬來西亞創意教學大師張寶幼老師分享的雙心紙環，這才開了眼界。至於筆者真正用於營隊教學，則是在2014年寒假，因緣際會受邀成為故宮「錯覺藝術大師-艾雪的魔幻世界」版畫特展的數學顧問，為了培訓一百多位導覽志工，試圖說服大家卸下心防，以便真心認識艾雪的「數學版畫」，經大量閱讀相關書報，最後廣蒐網路資源而得的小小破冰成果。學習單中緊接於影片實驗2之後的追加動作，是後來在苗栗公館國小數學營活動中，學生煞有其事地反饋「皮帶換城堡」的刺激，而最後增添的回家功課奧運五環Logo，則是筆者原先異想天開的玩笑之舉，不臆最終還是被臺南市文賢國中的一位學生認真地破解了。如今串接於此，就當是從圓到洞、到環的教學發想。

三、魔幻艾雪：

透過艾雪的系列版畫，回應YouTube〈No Magic at All : Mobius Strip〉影片中的實驗操作，順道深刻體驗：為何以數學門外漢自居的艾雪（M.C. Escher, 1898～1972），一輩子用版畫寫了四百多篇日記，最終在數學圈大紅大紫之後，念茲在茲





的卻是Mobius環系列的數學版畫？反觀學校裡的老師和學生，除了用作業、考試、進度寫日記，數學之於我們，還留有哪些深刻的體會與共鳴？

四、創意雙心：

本操作源自馬來西亞創意教學大師張寶幼老師分享的雙心紙環，今搭配國內景觀雕塑大師楊英風的兩款創作連結，以為本系列教案畫龍點睛之效。

參、共勉～教學相長

心理學上有一種現象稱之為「視網膜效應（Retinal Effect）」，意指當一個人擁有某種物品或特徵時，就會比他人更容易注意到這些物品或特徵。以筆者為例，當太太懷孕時，就感覺到處都是孕婦；當小孩出生後，就發現到處都有小Baby。依此類推，當教師真實投身於教案開發的行列之後，不論是主動還是被動，都有機會在解題或出題之時靈光乍現，就連在看書報、賞電影、逛書店、遊老街等日常生活中，相信也會因為視網膜效應的運作，而察覺出更細膩的教案題材，激盪出更夢幻的設計靈感。以下連結窗口載有筆者長期撰寫、發表之創意教學教案與數學科普文章，數量多寡與內容屬性不一，歡迎讀者點一點、看一看、試一試、教一教，假以時日，必也能遞交整學期料好實在，讓學生週週驚豔與期待的特色課程。

肆、參考～擴充閱讀

一、《科學》月刊：

1. 〈活化你的數學課一角錐體積的操作簡餐〉（2013.09）：

網址：<https://goo.gl/MFCsmU>，QR Code：。

2. 〈活化你的數學課一圓的教學套餐〉（2013.05）：

網址：<https://goo.gl/bn85DI>，QR Code：。

二、龍騰文化教師專區《數亦優》期刊32：〈一招「試」天下～正方體截面試題剖析〉（2017）。

網址：<https://goo.gl/6bCYtB>，QR Code：。

三、教育部高中數學學科中心電子報：好書推薦與科普雜文（2009.09～今）。

網址：<https://goo.gl/1pyKGs>，QR Code：。

四、遠哲科學教育基金會《發現》月刊：〈Math-Magics魔數〉專欄（2001.02～2009.10，約40篇）與〈藝數家玩摺紙〉專欄（2009.03～2011.03，共17篇）。

網址：<https://goo.gl/9UKN0I>，QR Code：.

伍、附件～〈圓舞曲魔數〉教學指引

【提醒】

1. 本課程教師宜視學生數學背景知識的多寡，彈性拿捏Q&A節奏的快慢，以及數學引導的深度與廣度。
2. 教師宜先自製ppt簡報圖文，做好問答頁之關鍵內容與網路連結，以便教案執行與操作順暢。剪刀、膠帶、錢幣等物品可提醒學生準備。
3. 班上偶有少數學生已在其他場合練習過某些學習單上的實作，可鼓勵學生給出其他解法，或是練習說說道理，說服自己，也說服別人。自製ppt簡報圖文，做好問答頁之關鍵內容與網路連結，以便教案執行與操作順暢。

一、牛皮換城堡（約10～15分鐘）：

1. 「價值一城」：一塊牛皮挖個洞，真的可以圍出一座城堡？

【建議】教師講古之後，改以A4或B5紙張模擬操作，想辦法剪個大洞讓自己穿越。學生若一籌莫展，可先適度提供一半的提示，如右圖，讓學生自行面對剪開來的很多小洞想辦法，切勿直接告知全套破解技法，會破壞神祕感，且降低學生驚喜。另可多多鼓勵學生試想第二種、第三種…或第 n 種剪法。

【提醒】一開始剪刀就要直接破洞而剪，不宜從紙張邊緣剪入。另有不少學生會沉醉在彼此PK誰的洞最大。

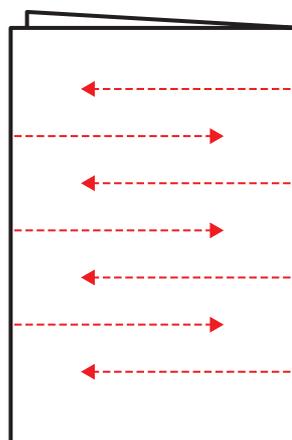


圖11



二、墨比爾斯環（約15~20分鐘）：

【建議】教師先裁切備妥全班操作之長紙條數量（每生至少5條），並將ppt檔連結好YouTube〈No Magic at All：Mobius Strip〉影片（網址：<https://goo.gl/X2XAQL>，QR Code：），然後帶領全班邊看影片邊講解、邊示範、邊提醒，學生逐個實驗影片看完重點之後即模擬操作。

1. 取5條長紙條，仿照影片8~16秒中的動作，先黏貼3個Mobius環。

【提醒】在此只操作翻轉一次的Mobius環，務必提醒學生要將透明膠帶或雙面膠正反面繞一圈完整黏接，以免後頭剪環時脫序演出。

2. 取一Mobius環，仿照影片19~28秒中的實驗1畫中線，猜想或解釋其結果。

答：Mobius環只有一個面，因為當初短邊相接時，即已將正反面互通在一起。

【建議】影片播放到25秒可先暫停，先給學生猜猜看，等過半學生畫完後，再核對25~28秒的結果。另可提醒學生比較、察覺Mobius環的一個面，與乒乓球的一個面，兩者之間的差異：前者有邊界，球面無邊界。

3. 取一Mobius環，仿照影片29~40秒中的實驗2剪中線（二分之一處），猜想或解釋其結果。

答：Mobius環只有一個邊，剪二分之一處並未破壞原有的邊，只是創造出新的邊，由於紙張未斷，所以結果是一個大環（翻轉兩次有兩個邊的Mobius環），而非兩個環。

【建議】影片播放到37秒可先暫停，先給學生對照正常的圓環猜測結果，等過半學生剪完後，再核對37~40秒的結果。

【提醒】一開始剪刀就要像處理一元孔徑時，直接破紙而剪，不能從邊緣剪入，建議先將環摺扁，以剪刀剪出缺口之後，再沿中線剪。

4. 承上題，將大環再沿中線剪二分之一處，是否有機會「皮帶換城堡」？

答：由於此時的大環是已翻轉兩次、有兩個面的Mobius環，故其結果不會與3.一個更大的環相同，所以無法只靠此法剪皮帶來圍出赤崁樓，另參見下面三、魔幻艾雪2.教學。

5. 取一Mobius環，仿照影片中40~54秒中的實驗3剪三分之一處，並猜測結果。

答：Mobius環只有一個邊，剪三分之一處並未破壞原有的邊，但會創造出新的邊與新的環（中央三分之一處），故結果是一大一小的環，大的與實驗1的結果相同，小的與原先的Mobius環結構相同，只是比較窄。

【建議】影片播放到50秒附近先暫停，提醒學生保持三分之一的寬度繼續往下剪，剪刀千萬不要轉彎與缺口相會，到54秒時再暫停一次，先給學生猜測結果，等過半學生剪完後，再核對54~60秒的結果，若時間夠，還可試試剪四分之一、五分之一……處。

6. 仿照影片中60~1:20秒的實驗4設計，取更寬的長紙條剪五分之一線，使結果能擺出奧運五環的Logo。

答：略。

【建議】實驗4只欣賞，不操作，奧運五環的挑戰留作回家功課，可提醒逆向找答案。

三、魔幻艾雪（約5~10分鐘）：

1. 欣賞〈Mobius Strip II〉（1963）的構圖，艾雪想用紅螞蟻傳遞〈No Magic at All: Mobius Strip〉影片中的哪一個實驗？

答：實驗1（沿中線畫線），9隻紅螞蟻即代表畫一圈會橫跨正反兩面的紅線。

【備註】艾雪版畫作品連結艾雪官方網站：<https://goo.gl/Cvj57E>，QR Code：

2. 欣賞〈Mobius Strip I〉（1961）的構圖，艾雪想用3隻魚表達〈No Magic at All: Mobius Strip〉影片中的哪一個實驗？版畫套印的精準度要求極其麻煩，為何艾雪硬是要將魚肚和魚背設計成兩種顏色？

答：實驗2（沿中線剪開），艾雪想藉紅、綠兩色凸顯剪開後的大環有兩個面，而不再是實驗2一個面的Mobius環。

【備註】艾雪版畫作品連結艾雪官方網站：<https://goo.gl/oiFQB0>，QR Code：

【備註】艾雪將環翻了三次，翻奇數次的Mobius環都是一個面，翻偶數次的Mobius環都有兩個面，會有少數學生根據魚身和魚尾的比例而認定是實驗3，但其剪刀其實有轉彎，故仍是剪中線的結構。

3. 欣賞〈騎士Horsemen〉（1946）的構圖，艾雪將環翻轉了幾次？

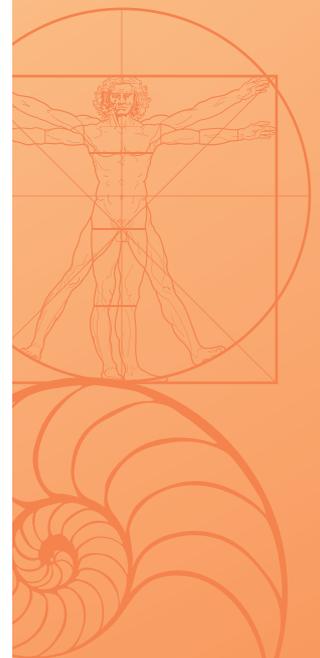
答：2次，艾雪為此特別將騎士套印雙色，藉以凸顯該環的結構有兩個面。

【備註】艾雪版畫作品連結維基藝術網站：<https://goo.gl/xL4pZ9>，QR Code：

4. 欣賞〈天鵝Swans〉（1956）的構圖，艾雪將環翻轉了幾次？

答：0次或4次，若把白天鵝視為上層，即為正常的環帶，若把黑天鵝視為上層，即為翻轉四次的環帶，但不論是0次還是4次，艾雪特別透過版畫的陰刻與陽刻印刷，造成黑白雙色效果，藉以凸顯該環的結構有兩個面。

【備註】艾雪版畫作品連結維基藝術網站：<https://goo.gl/NEVci4>，QR Code：





5. 欣賞〈結Knots〉（1965，圖三）的三葉結構圖，艾雪的雲霄飛車軌道有幾個面？

答：一個。艾雪把長紙條增加厚度變成四角柱，雲霄飛車的軌道是將原本有4個側面的四角柱，巧妙地旋轉90度後，銜接成只有1個面的軌道。

【備註】艾雪版畫作品連結艾雪官方網站：<https://goo.gl/mn9MFu>，QR Code：。

【分享】若是旋轉180度、270度、360度，則軌道分別會有2個面、1個面、4個面。艾雪於1956的數學家年會上嶄露頭角，可能是未成名之作1946的〈騎士〉與1956的〈天鵝〉引起英國拓樸學家的好奇，但交流之後才發現艾雪真的是對拓樸學一竅不通，不過艾雪卻因此對Mobius環的各式魔術惦念不忘，故在晚年仍三不五時以此為題編劇，發表一系列發人深思的數學版畫：其中的〈結〉原本應該會命名為Mobius Strip III。

四、創意雙心（約5~10分鐘）：

1. 欣賞楊英風雕塑大師的作品〈日新又新〉（1993）與〈常新〉（1990），除了「月亮」的差異之外，試比較兩作品中的Mobius環軌道的差別。

答：都是翻轉一次的Mobius環，但一個是右手往前翻，另一個是右手往後翻。

【備註】楊英風雕塑作品連結楊英風數位美術館

網址：<https://goo.gl/Xqw8y1>，QR Code：。

<https://goo.gl/oeDIZ2>，QR Code：。

【建議】可參照下一操作的影片示範。

2. 取2條長紙條，分別仿照〈日新又新〉與〈常新〉的Mobius環結構黏貼，然後背對背垂直相接，再以剪刀各自剪中線，感受心心相映的數學浪漫。

【建議】可準備較高級或紅色系的紙帶剪貼，另請參照YouTube影片〈Romantic Mathematical Shape: möbius-loop hearts〉5:10至5:42之片段黏貼兩個Mobius環，再參照影片3:56至5:10之片段黏接兩環、剪中線。

影片網址：<https://goo.gl/fYdCfP>，QR Code：。

【提醒】若兩個Mobius環完全同構，則剪完中線的結果是「再見不聯絡」，而非心心相扣。