無字證明淺介

許志農教授
國立臺灣師範大學數學系

「像顯可徵，雖愚不惑；形潛莫覩，在智猶迷。」

「像顯可徵，雖愚不惑；形潛莫覩，在智猶迷」是《聖教序》的一段文字，而《聖教序》則是唐太宗有感於玄奘艱苦取經的偉大創舉，所賜的序文。《聖教序》成文以後，為了永垂後世，乃籌備將其刻於碑石流傳，又因為太宗皇帝深愛羲之的書法，所以大家認為這篇碑文，非書聖王羲之之書法「不足貴」。然羲之乃晉人，已經逝世，於是請懷仁和尚擔任集字拼文工作。懷仁經過了長達二十四年的收集和拼湊、苦心經營，終成此碑。

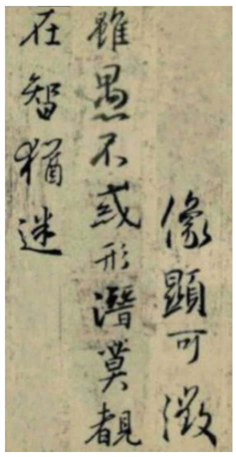


圖1

據說，序中有三個字，蒐集不到王羲之的真跡，怎麼也找不到，懷仁急中生智，奏請朝廷貼出告示，有誰獻出那三個王羲之的字，每一字賞一千金。重賞之下必有勇夫，最後，懷仁終於分別從三個收藏者那裡購得這三個字。「像顯可徵，雖愚不惑；形潛莫覩，在智猶迷」在序中的意思本為

「觀察體驗天地的變化，即使是平凡而愚蠢的人也能知道它的一些徵兆；要通曉明白陰陽變化，即使是賢能而有智慧的人也極少有研究透它的變化規律的。」

這裡，我們想借用它來說明

「在數學上，幾何形體容易看出端倪，就算再怎麼愚蠢的人，也能看出一二；而代數結構就抽象許多，沒有形體可參考，即使再怎麼聰明的人，也會迷惑或懷疑它的正確性。」

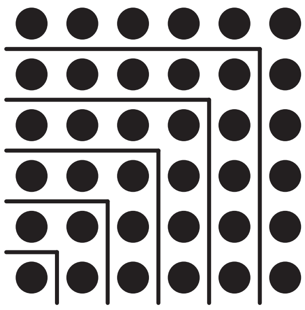
讓我們再來欣賞另一段佛教趣聞：《十牛圖》是宋朝廓庵禪師所寫有關「禪宗修行、求法」的一本書，共有十章，後來他又寫了十首小詩分別來闡釋這十章的精神，最後索性只畫十張圖讓讀者體會整本書所要傳遞的佛境。這十張圖就是有名的《十牛圖》，廓庵認為視覺的圖能勝過嘴裡吟唱的詩，而詩也會勝過文字所堆砌出來的文章。下圖是廓庵《十牛圖》中的第六圖：

圖2　第六圖：騎牛歸家

這第六圖只有一個圓形圖及搭配圖下方的「騎牛歸家」四個字而已，事實上，廓庵的《十牛圖》有「圖說一體，不證自明」的味道。在數學上，跟佛教一樣，一個好的圖勝過千言萬語，透過簡單的線條與空間關係，傳遞特定的數學意義，其中可能包括代數、函數、幾何與統計等關係。這種「圖說一體，不證自明」的圖示，在數學上有個專有名詞，叫做「無字證明」。我們以正奇數求和公式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

為例，仔細觀察下圖：



$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

圖3

將黑棋排成正方形，由左下角往右上角做分割，在我們的視覺感受上，可以明顯的感受到與要傳遞的數學等式「$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$」相聯繫，進而達到「圖說一體，不證自明」的目的。在中古歐洲，費波那契於1225年出版的《平方數之書》，就以圖示來說明這個公式，這圖示也成為該公式最經典的一幅無字證明。這個無字證明圖示充分說明：

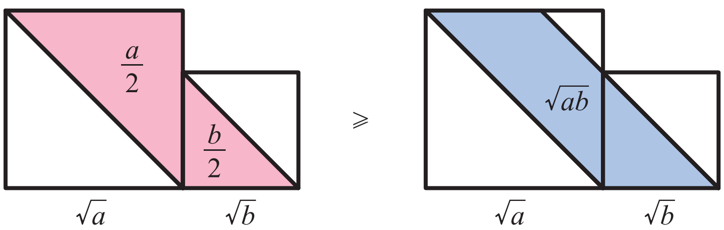
「將一個枯燥笨拙的證明透過幾何圖形來類比，竟會變得如此簡單和美麗，定理的真實性幾乎是一目了然。」　——馬丁・加德納（Martin Gardner）

在數學教室中，「利用數學史的材料講故事，是傳遞數學概念的好方法。」等差數列的求和概念就是一個典型的範例，教師通常會告訴學生一則有關高斯的故事：

「當他十歲時，高斯的老師給他的班級出一道很長的題目，讓自己輕鬆一下。這個題目是要求將1到100的數加起來。全班學生開始埋頭計算著，高斯卻只是在他的板子上寫著5050的數字，並且說：「這就是答案！」驚奇萬分的老師認為高斯只是猜對了，由於他自己也不知道答案，就要求高斯保持安靜，等班上其他學生計算好了，再看看誰的答案正確。出乎意料之外，其他學生的答案也是5050，證明了小高斯的答案果然正確。他究竟怎麼做的呢？」

這故事本身有如一個掛勾，可以在上面掛一個數學觀念——等差數列的求和概念；而每道無字證明的圖示也是一個掛勾，可以在上面掛一個數學公式，不等式或定理。事實上，在希臘文中，定理（theorem）這個字來自“theorein”，它表示“注視”的意思；如果你注視著這個圖示，你立刻就會看出這個定理。因此，「尋找與定理匹配的掛勾，只需“注視”這個圖示就能瞭解定理」是重要的一件事情。

再讓我們來看一個無字證明的圖示：



$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

圖4

上圖是臺灣周伯欣老師發表在《數學傳播，40卷，158期，2016》上，有關算幾不等式的無字證明圖示，並寫道：「在2014年11月6日晚上，躺在床上準備就寢時想到的證明。」

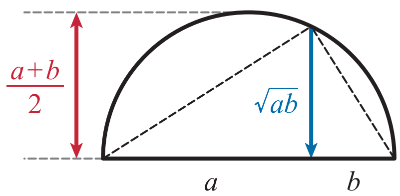
「無字證明」最早出現在1975年的《數學雜誌》（Mathematics Magazine），而《大學數學期刊》（The College Mathematics Journal）也在十多年後開始出版這類帶有圖示為主的證明。在1976年，《數學雜誌》的共同編輯史汀（L. A. Steen）與賽巴赫（J. A. Seebach）決定在該雜誌獨創一個無字證明專欄，而該專欄首次刊載時，史汀寫道：

「作為一名教師，我經常督促學生記住這些蘊涵有關鍵數學關係或定理本質的幾何圖。對多數人而言，在證明過程中，視覺的記憶通常比直線性的記憶更為有效果。此外，一個內蘊有豐富關係的有品質圖表，它內涵有真正的數學等著被我們認知與語言表達。因此，把此作為一個策略來幫助學生學習數學，無字證明往往比用文字證明更準確。」

從這段文字可以知道：好的無字證明更好說服學生對數學的理解，也更便於記憶。然而，我經常把無字證明想成數學公式或定理的十牛圖，一張好的圖勝過繁雜的推理過程。從前面所舉的兩個無字證明圖示，可以清楚的知道：無字證明的精神——簡單易懂的描述數學事實，即使是能用傳統文字證明得證的常見公式，我們亦能用更具吸引力的無字證明來說明相同結果。簡單說，無字證明比傳統證明更符合

「讓我們變聰明的證明就是一個好的證明。」——馬寧（Yu. I. Manin）

事實上，無字證明並非近年來才有的創新，而是已經存在了很長一段時間，例如古代的中國、十世紀的阿拉伯以及文藝復興時期的義大利。就以算幾不等式來說，中學教科書經常以下面的古老無字證明圖示來詮釋這個不等式：



$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

圖5

川崎謙一郎（Ken-ichiroh Kawasaki）對維維亞尼定理「正三角形內部任一點到三邊的距離和等於該正三角形的高」給過一個漂亮無字證明，其圖示如下：

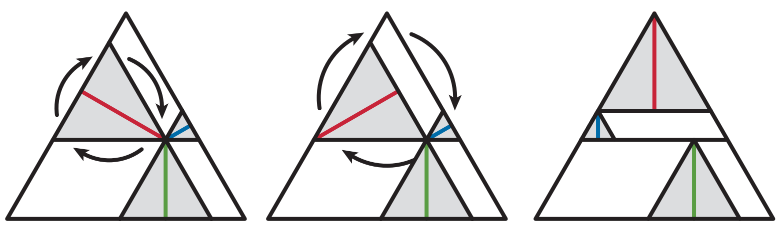


圖6　正三角形內部任一點到三邊的距離和等於該正三角形的高

這個圖示不同於上述幾個無字證明，它表示一個視覺的起始點和從該點出發且按照順序的轉換，也就是說，此無字證明有一個明確的步驟順序。如果使用電腦軟體把這順序的轉換做成動態的展示，那麼「圖說一體，不證自明」的效果會更加顯著。我們把這類動態的無字證明稱為無字證明

2.0版。

儘管無字證明最初的目的是為了「填補文章空缺」，但編輯們會接著問：「能有甚麼比一個令人滿意的插圖更能展現重要的數學觀點呢？」這些無字證明的幾何圖示充分的表達欲證的代數公式，並且達到相輔相成的效果，更加印證華羅庚的名言：

「數缺形時少直覺，形少數時難入微，數形結合百般好，隔離分家萬事休。」——華羅庚

在給更多的無字證明之前，我應該停一下，並思考一個問題：「無字證明算證明嗎？他跟傳統證明有什麼區別？」這是爭論許久，牽涉很廣的認知問題，我們引述一些專家的意見如下：

威廉．鄧漢（William Dunham）在他的著作《數學教室A to Z：數學證明難題和大師背後的故事》中寫道：

「數學家推崇原創證明，不過數學家還特別推崇簡約原創證明—精簡、減省的結論，單刀直入事理核心，施展驚人本領，針針見血直接達成目標。這種證明號稱優雅證明。……相對而言，終極優雅的體現，就是數學家所稱『無字證明』，這其中含有巧思描繪的圖解，逕自傳達一項證明，連解釋都可以省去。很難想像出比這個更優雅的事例。」

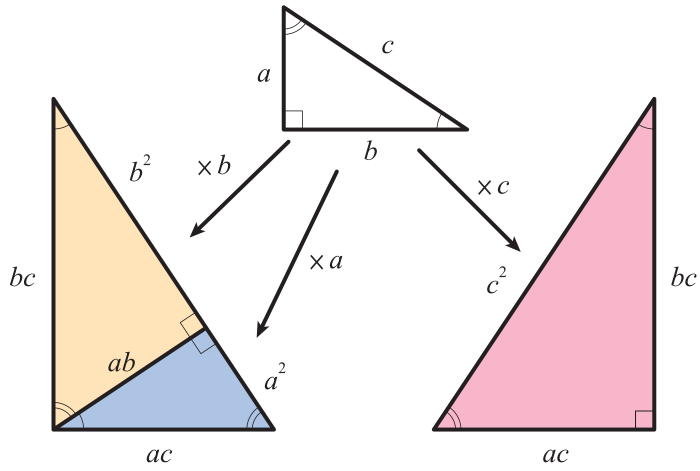
哈爾莫斯（Paul Halmos）說道：「他認為數學不只是一種邏輯，也可以是一種圖像。」波利亞（George Pólya）解題步驟中的「繪製圖形」也是經典的教學建議。

如果「無字證明」不是證明，那無字證明究竟是什麼？當你看過前面幾個無字證明圖示後，你可能沒辦法得到一個簡單且明確的答案。但一般來說，無字證明是一個圖片或是圖式，它可以幫助讀者去了解為什麼一個特定的敘述可能是正確的，以及如何證明敘述是正確的。

無論無字證明是否為證明，彭剛認為無字證明至少具有四個意義：

1. 促進直覺教學。
2. 提供視覺化表徵。
3. 促進視覺化推理。
4. 培養創新精神。

接下來讓我們來看更多有關無字證明的範例。如下圖，伯克（Frank Burk）將原始的直角三角形放大成另外三個相似的直角三角形，並將較小的兩個三角形拼湊成大的三角形，因為拼湊完是相同的直角三角形，所以比較邊長後，即可推出勾股定理的相關式，雖然沒有任何的文字證明，但在圖中很明顯的就能看出關係：



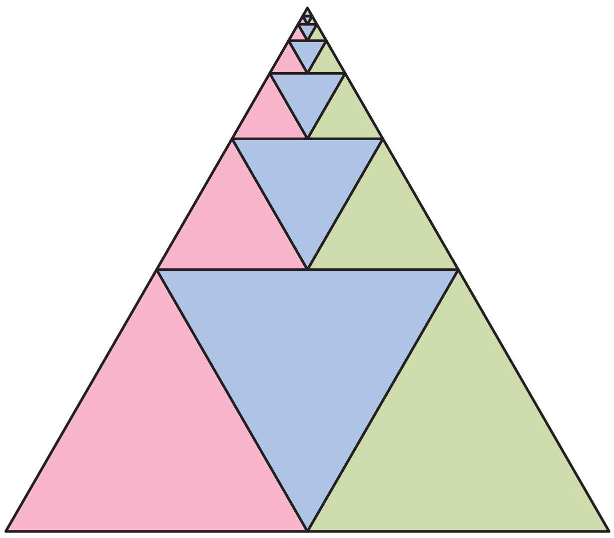
$$c^2 = a^2 + b^2$$

圖7

下圖示馬布里（Rick Mabry）關於無窮等比級數

$$\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{1}{3}$$

的無字證明。



$$\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{1}{3}$$

圖8

這個無字證明，使用顏色帶領讀者進入特定的思路，使他能以滿意、具有說服力及有趣的方式來驗證結果。的確，我們覺得這個無字證明可以相當簡練且具說服力地證明結果。

在1973年10月出版的《科學人》雜誌，馬丁・加德納（Martin Gardner）在他極受歡迎的《數學遊戲》專欄中，將無字證明視為一個能「一目了然」的圖形。加德納並指出：

「在很多情況下，一個不好的證明，若能以簡單且優美的幾何類比圖形來補充說明，則可讓一個定理的真實性一目了然。也顯然說明了英文中所謂的「看到」就是「知道」。」

平方數求和公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

是一道不是那麼容易被學生理解的等式，古希臘阿基米德與中國元代數學家朱世傑都曾經推導過這則公式。多數教學現場的老師都使用數學歸納法來教導學生這則公式，但是，對第一次接觸此公式的學生而言，這樣的教導方式，是很難瞭解與接受的。難怪，高德納（D. E. Knuth）在《電腦程式設計藝術》第一冊中寫道：

「多數教科書只是簡單的敘述這些公式，並且使用數學歸納法證明他們。儘管歸納法是一個完美且有效的證明方法，但是，這樣的教學方式並沒有給學生足夠的洞察力，讓學生一開始學習時有夢想公式從何而來的土壤。」

事實上，早在古希臘時代，阿基米德在《論螺線》的命題10中，得到底下的等式：

$$3\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)=(n+1)n^2+(1+2+3+\cdots+n)\ .$$

從這等式可以很快推得平方數求和公式。但是，這等式又是如何想到的呢？倘若，阿基米德將平方數以正方形展示在沙盤上，佐以不同顏色，並做有規律的分割，如下圖所示（Sum Squares in the Sand），可否幻想一下，把這幾何圖與上述等式相連結呢？

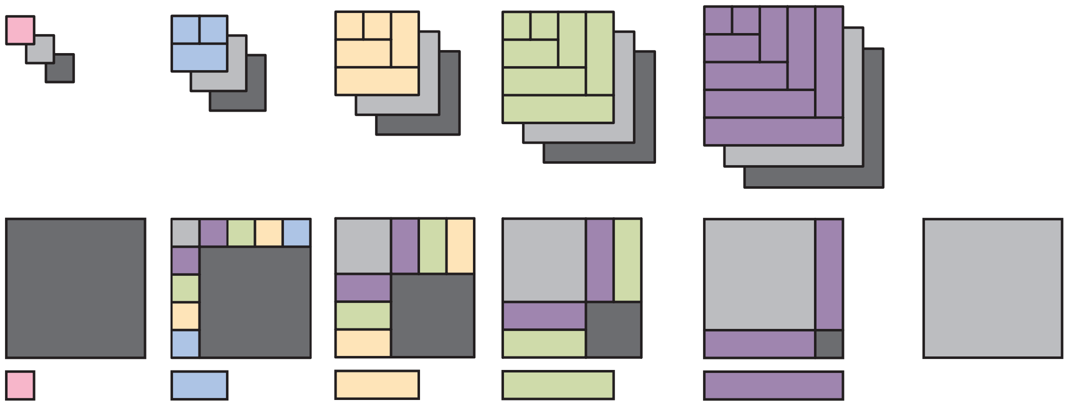
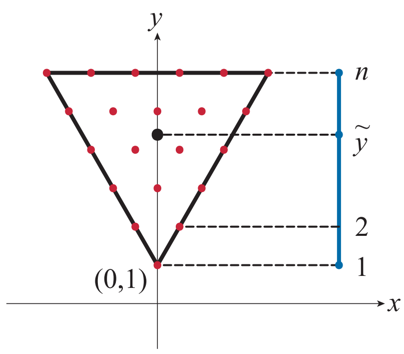


圖9

相信讀者要思考許久，才能把「阿基米德的等式」與「沙盤上的圖」對照起來。因此，阿基米德在沙盤上所畫的圖，比較適合當成證明的輔助圖，而不是無字證明的圖示。

大家都知道：「給我一個支點，我可以舉起整個地球」是阿基米德最膾炙人口的一句話。體現在數學解題上，阿基米德擅長使用平衡或重心等物理原理來解題。接下來這則以「正三角形的重心公式」解「平方數求和公式」的無字證明，直到近代才被發現，可算是阿基米德的漏網之魚。



$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}=\frac{2n+1}{3}$$

圖10

將邊長平均分布 n 個點的正三角形倒畫在坐標平面上，如上圖所示，由下往上，第一排那個紅點之 y 坐標為1，第二排那兩個紅點之 y 坐標都是 2，⋯，第 n 排那 n 個紅點之 y 坐標都是 n（此圖是 $n=6$ 的情形），而且黑點為正三角形的重心，其 y 坐標記為 $\tilde{y}$。想想看，這個圖示真的可以推得「平方數求和公式」嗎？

在此對重心的 y 坐標作個分析：

因為 y 軸是正三角形的一條中線，而重心會將中線分割成 $2:1$ 的兩條線段，所以由分點公式，得

$$\tilde{y}=\frac{1\times1+2\times n}{2+1}=\frac{2n+1}{3}\ .$$

另一方面，$\tilde{y}$ 也是所有紅點的 y 坐標之平均值，即

$$\tilde{y}=\frac{1\times1+2\times2+\cdots+n\times n}{1+2+\cdots+n}=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}\ .$$

綜合得到

$$\tilde{y}=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n+1}{3},$$

此即平方數求和公式。

雖然上述方法不是阿基米德所發現，但是這種透過「物理模型」來構造「數學公式」的手法，阿基米德算是史上第一人。只是對“證明”要求嚴謹的他，總是會說：「這裡所陳述的事實不能以上面的過程作為真正的證明，但這一過程卻暗示了結論的正確性。鑑於該定理並未得到證明，同時它的真實性又值得懷疑，……。」

關於「無字證明」與「傳統證明」要怎麼區分，無字證明是否算是證明的問題，在此想再分享一兩位專家的話。分享之前，讀者應該回想自己的學習數學證明過程，認真思考：證明的目的究竟是「要說服你什麼是對的」，還是「要展現給你看為什麼它是對的」呢？

「人們對已被正確建立的定理的證明進行了許多新研究，因為現有的證明不具有吸引人的美學。有些數學證明沒有什麼說服力，但符合一位著名數學與物理學家瑞雷爵士（Lord Rayleigh）的話：獲得認同。還有一些其他的證明，它們喚起且吸引了智慧，還引起了喜悅和強烈的慾望。若不論形式，則一個優雅的證明，就像是一首詩歌。」

——克萊恩（Morris Kline）

「像我們這樣的數學家，珍愛著聰明的想法，尤其對於巧妙的圖片感到特別愉快。但是這種欣賞的想法無法說服一些主流的懷疑。畢竟，一個圖片再好，也不過是個特例，並無法推廣到整個一般化的定理。更糟的是，它還有可能造成誤導。雖然不普遍，但主流的態度是，圖片真的只是探索式的工具；它們在心理上雖具有聯

想和教育上的重要性，但它們沒有證明。我想反對這種觀點，並肯定圖片是可以作為證明與理由，且這一作用遠遠超出啟發性。總之，圖片可以證明定理。」——伯朗（James Robert Brown）

無字證明之所以能發展至今天，一位無字證明愛好者，發明人兼蒐集者功不可沒，他就是尼爾森（Roger B. Nelsen）。尼爾森創造與蒐集了無數用幾何圖形來闡釋數學式子或定理的精彩範例，這些現在稱為《無字證明》的圖經常出現在《數學雜誌》與《大學數學期刊》的期刊上，而尼爾森彙整它們，陸續出了三本無字證明的書：

1. 《無字證明Ⅰ：視覺思考上的練習》（Proofs Without Words I: Exercises in Visual Thinking）。
2. 《無字證明Ⅱ：更多視覺思考上的練習》（Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking）。
3. 《無字證明Ⅲ：進階視覺思考上的練習》（Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking）。

它們是目前世界上最常被引用的無字證明範例。在尼爾森的書裡有討論到好幾個關於勾股定理的視覺證明，鼓勵讀者能嘗試使用上述介紹到的一些工具，或許多其他適用的工具，去創造這些視覺證明的2.0版本。

我們以香港蕭文強教授的「平方數求和公式」作為無字證明的最後一個範例。它發表在1984年的《數學雜誌》上，圖示裡是以立方體的方塊來呈現，並以三個方塊來代表一般的情況：

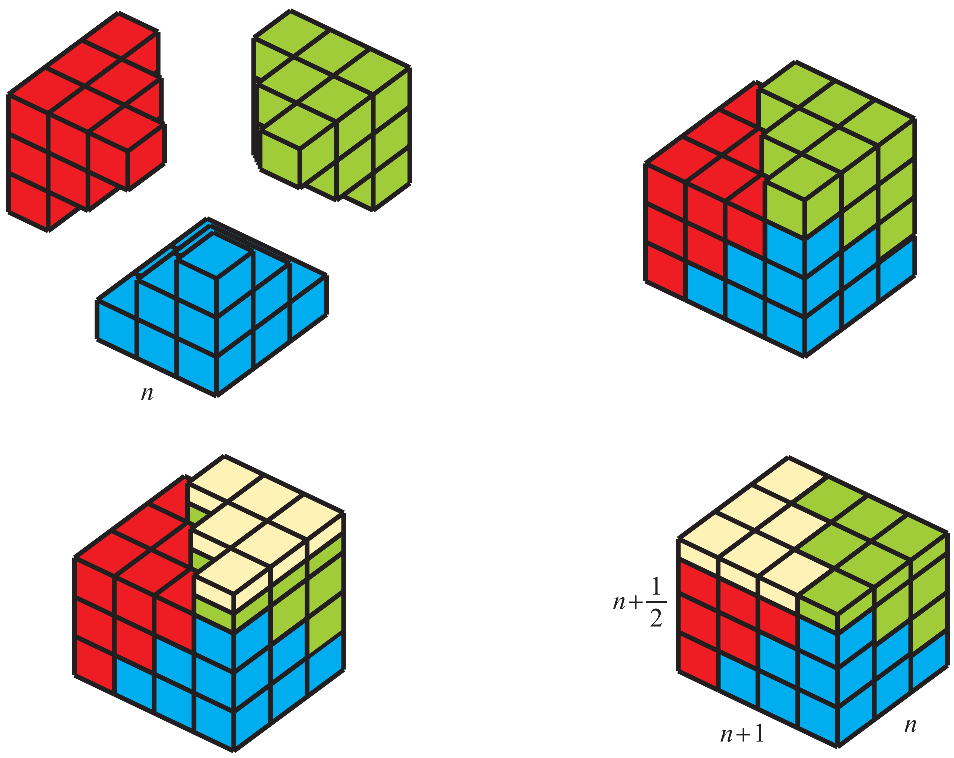


圖11

$$3\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)=n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

另一個令人興奮的是這種新的表達方式在三維中有呈現的可能，在Youtube影片裡，已經可以找到許多蕭文強教授這個無字證明的動態展示方式，或稱為無字證明2.0版，例如：https://www.youtube.com/watch?v=kZTFrv3vRgg.

有趣的是，蕭文強的無字證明在描述數論結果時，有一個共通的圖解題材——利用方格或正方形來代表一個單位。在動畫的一開始，每個方格所堆疊而成的金字塔代表一組平方和。

無字證明2.0並不具數學歸納證明的一般性，但是它比靜態的無字證明更加通用。人們仍然認為只要檢查有限個圖形或動畫，就可算是一個證明的嘗試，但藉由分析少數情況來說明依然不能算是一個證明，畢竟它還存在無限多個尚未檢查的情況。儘管無字證明2.0因為利用特例來證明而飽受批評，但在上述案例中，我們相信這樣的互動能夠超越批評，也使無字證明更具意義。

誠如愛丁頓所言「證明是數學家自己折磨自己的幽靈」，在我們的教學現場，談「傳統證明」色變也是現在學生學習數學的一大特色。記得筆者就讀國中時，要學習或背誦許多有關平面幾何的定理之證明。等我長大之後，才瞭解當時課綱的這種安排是為了訓練學生邏輯思考與推理的能力，並順便練習書寫傳統證明的功夫。在那個年代，「無字證明」一詞根本還沒出現，如今同一個數學公式，我們可以從教科書上習得傳統的證明方法，也可以在無字證明的書籍上找到視覺證明的方式，甚至可以在網際網路上觀賞無字證明2.0的動態呈現。這無疑是一大進步，但該如何讓它們達到事半功倍的效果呢？最後，讓我們再次品嚐本文開頭那句一千五百年前的話，「無字證明」應該就是

「像顯可徵，雖愚不惑；形潛莫覩，在智猶迷。」