總　　分

93 年 數學科 學科能力測驗試卷

______科______班　學號______姓名______

第一部分：選擇題

一、單一選擇題

說明：第 1 至 6 題，每題選出最適當的一個選項，每題答對得 5 分，答錯不倒扣．

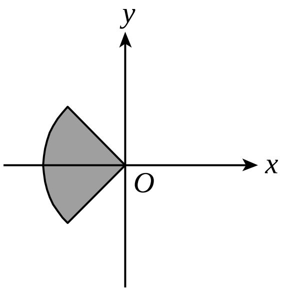
(　　) 1. 已知一等差數列共有十項，且知其奇數項之和為 15，偶數項之和為 30，則下列哪一選項為此數列之公差?

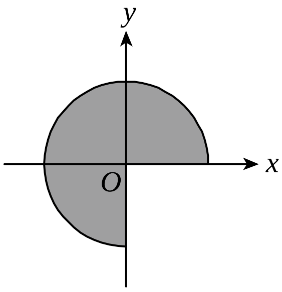
(A)1　(B)2　(C)3　(D)4　(E)5．

(　　) 2. 下列選項中的數，何者最大? [其中 $n!=n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1$]

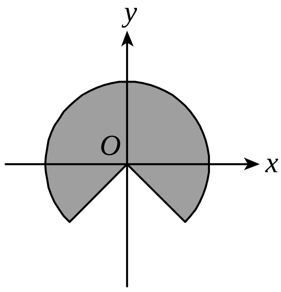
(A)100^{10}　(B)10^{100}　(C)50^{50}　(D)$50!$　(E)$\dfrac{100!}{50!}$．

(　　) 3. 右圖陰影部分所示為複數平面上區域 $A=\{z：z=r(\cos\theta+i\sin\theta)，0\le r\le1，\dfrac{3\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{5\pi}{4}\}$之略圖．令 $D=\{w：w=z^3，z\in A\}$，試問下列選項中之略圖，何者之陰影部分與區域 D 最接近?

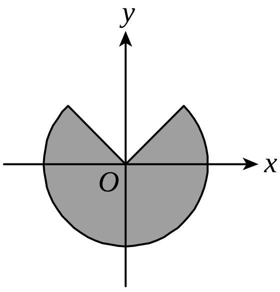




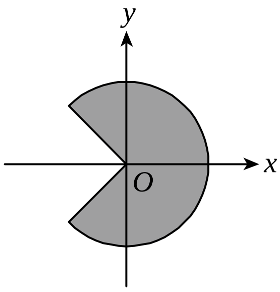
(A)



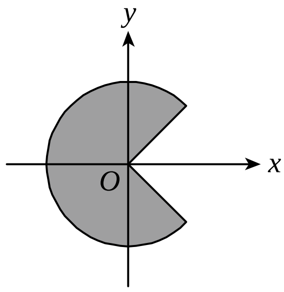
(B)



(C)



(D)



(E)

(　　) 4. 在坐標空間中給定兩點 $A(1,2,3)$與 $B(7,6,5)$．令 S 為 xy－平面上所有使得向量$\overline{PA}$垂直於向量$\overline{PB}$的 P 點所成的集合，則　(A)S 為空集合　(B)S 恰含一點　(C)S 恰含兩點　(D)S 為一線段　(E)S 為一圓．

(　　) 5. 設△ABC 為平面上的一個三角形，P 為平面上一點且 $\overline{AP}=\dfrac{1}{3}\overline{AB}+t\overline{AC}$，其中 t 為一實數．請問下列哪一選項為 t 的最大範圍，使得 P 落在△ABC 的內部?

(A)$0<t<\dfrac{1}{4}$　(B)$0<t<\dfrac{1}{3}$　(C)$0<t<\dfrac{1}{2}$　(D)$0<t<\dfrac{2}{3}$　(E)$0<t<\dfrac{3}{4}$．

(　　) 6. 台灣證券交易市場規定股票成交價格只能在前一個交易日的收盤價（即最後一筆的成交價）的漲、跌 7% 範圍內變動．例如：某支股票前一個交易日的收盤價是每股 100 元，則今天該支股票每股的買賣價格必

須在 93 元至 107 元之間．假設有某支股票的價格起伏很大，某一天的收盤價是每股 40 元，次日起連續五個交易日以跌停板收盤（也就是每天跌 7%），緊接著卻連續五個交易日以漲停板收盤（也就是每天漲 7%）．請問經過這十個交易日後，該支股票每股的收盤價最接近下列哪一個選項中的價格？ (A)39 元 (B)39.5 元 (C)40 元 (D)40.5 元 (E)41 元

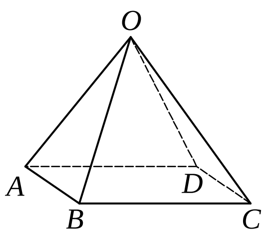
二、多重選擇題

說明：第 1 至 5 題，每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項．每題答對得 5 分，答錯不倒扣，未答者不給分．只錯一個可獲 2.5 分，錯兩個或兩個以上不給分．

( ) 1. 中山高速公路重慶北路交流道南下入口匝道分成內、外兩線車道，路旁立有標誌「外側車道大客車專用」．請選出不違反此規定的選項： (A)小型車行駛內側車道 (B)小型車行駛外側車道 (C)大客車行駛內側車道 (D)大客車行駛外側車道 (E)大貨車行駛外側車道．

( ) 2. 在坐標平面上，下列哪些方程式的圖形可以放進一個夠大的圓裡面？
(A)$3x=2y^2$ (B)$3x^2+2y^2=1$ (C)$3x^2-2y^2=1$ (D)$|x+y|=1$ (E)$|x|+|y|=1$．

( ) 3. 如圖 $O-ABCD$ 為一金字塔，底是邊長為 1 之正方形，頂點 O 與 A、B、C、D 之距離均為 2．試問下列哪些式子是正確的？ (A)$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=\vec{0}$ (B)$\overline{OA}+\overline{OB}-\overline{OC}-\overline{OD}=\vec{0}$ (C)$\overline{OA}-\overline{OB}+\overline{OC}-\overline{OD}=\vec{0}$ (D)$\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OC}\times\overline{OD}$ (E)$\overline{OA}\times\overline{OC}=2$．



( ) 4. 從 1，2，⋯，10 這十個數中隨意取兩個，以 p 表示其和為偶數之機率，q 表示其和為奇數之機率．請問下列哪些敘述是正確的？

(A)$p+q=1$ (B)$p=q$ (C)$|p-q|\le\dfrac{1}{10}$ (D)$|p-q|\ge\dfrac{1}{20}$ (E)$p\ge\dfrac{1}{2}$ ．

( ) 5. 設 $f(x)$為三次實係數多項式，且知複數 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之一解．試問下列哪些敘述是正確的？
(A)$f(1-i)=0$ (B)$f(2+i)\neq0$ (C)沒有實數 x 滿足 $f(x)=x$ (D)沒有實數 x 滿足 $f(x^3)=0$ (E)若 $f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，則 $f(4)<0$．

第二部分：填充題

說明：第 1 至 9 題，每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分．

1. 某數學老師計算學期成績的公式如下：五次平時考中取較好的三次之平均值佔 30%，兩次期中考各佔 20%，期末考佔 30%．某生平時考成績分別為 68、82、70、73、85，期中考成績分別為 86、79，期末考成績為 90，則該生學期成績為__________．（計算到整數為止，小數點以後四捨五入）
2. 某電視台舉辦抽獎遊戲，現場準備的抽獎箱裡放置了四個分別標有 1000、800、600、0 元獎額的球．參加者自行從抽獎箱裡摸取一球（取後即放回），主辦單位即贈送與此球上數字等額的獎金，並規定抽取到 0 元的人可以再摸一次，但是所得獎金折半（若再摸到 0 就沒有第三次機會）；則一個參加者可得獎金的期望值是__________元．（計算到整數為止，小數點以後四捨五入）
3. 設 a，b，c 為正整數，若 $a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=3$，則 $a+b+c=$__________．

4. 設△ABC 為一等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$．若 P、Q 為斜邊 $\overline{BC}$ 的三等分點，則 $\tan\angle PAQ=$＿＿＿＿＿．（化成最簡分數）

5. 某高中招收高一新生共有男生 1008 人、女生 924 人報到．學校想將他們依男女合班的原則平均分班，且要求各班有同樣多的男生，也有同樣多的女生；考量教學效益，並限制各班總人數在 40 與 50 人之間，則共分成＿＿＿＿＿班．

6. 在坐標空間中，平面 $x-2y+z=0$ 上有一以點 $P(1,1,1)$為圓心的圓 Γ，而 $Q(-9,9,27)$為圓 Γ 上一點．若過 Q 與圓 Γ 相切的直線之一方向向量為$(a,b,1)$，則 $a=$＿＿＿＿＿，$b=$＿＿＿＿＿．

7. 設 $270°<A<360°$且 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2004°$，若 $A=m°$，則 $m=$＿＿＿＿＿．

8. 坐標平面上的圓 C：$(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有＿＿＿＿＿個點與原點的距離正好是整數值．

9. 在坐標平面上，設直線 L：$y=x+2$ 與拋物線 Γ：$x^2=4y$ 相交於 P、Q 兩點．若 F 表拋物線 Γ 的焦點，則 $\overline{PF}+\overline{QF}=$＿＿＿＿＿．

答　案

第一部分：選擇題

一、單一選擇題

1. C　2. B　3. E　4. A　5. D　6. A

二、多重選擇題

1. ACD　2. BE　3. CD　4. AD　5. ABE

第二部分：填充題

1. 84　2. 675　3. 15　4. $\dfrac{3}{4}$　5. 42　6. 5，3　7. 306　8. 12　9. 10

解　析

第一部分：選擇題

一、單一選擇題

1. 設公差為 d，由題意知：$\begin{cases} a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=15\cdots① \\ a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=30\cdots② \end{cases}$，

因為 $a_2-a_1=a_4-a_3=a_6-a_5=a_8-a_7=a_{10}-a_9=d$，所以由②－①得 $5d=15\Rightarrow d=3$．

2. (A)$100^{10}<100^{50}$． (B)$10^{100}=(10^2)^{50}=100^{50}$． (C)$50^{50}<100^{50}$．

(D)$50!=50\times 49\times\cdots\times 2\times 1<50\times 50\times\cdots\times 50\times 50=50^{50}<100^{50}$．

(E)$\dfrac{100!}{50!}=100\times 99\times\cdots\times 52\times 51<100\times 100\times\cdots\times 100\times 100=100^{50}$．

故選(B)．

3. 由棣美弗定理知：$w=z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$，其中 $0<r^3<1$，$\dfrac{9\pi}{4}<3\theta<\dfrac{15\pi}{4}$．故選(E)．

4. 【解一】

設點 $P(x,y,0)$為 xy 一平面上任一點，因為 $\overline{PA}\perp\overline{PB}$，所以 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=0$，

即$(1-x,2-y,3)\cdot(7-x,6-y,5)=0$

$\Rightarrow(1-x)(7-x)+(2-y)(6-y)+15=0\Rightarrow x^2+y^2-8x-8y+34=0\Rightarrow(x-4)^2+(y-4)^2=-2$

由實數的平方和恆大於或等於 0，知道無任何實數 x，y 滿足上式，故 S 為空集合．

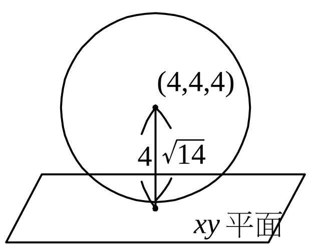
【解二】

因為 $\overline{PA}\perp\overline{PB}$，所以$\angle APB=90°$，

推得 P 點在以 $\overline{AB}$ 為直徑的球面 K：$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=14$ 上，

又因球心$(4,4,4)$到 xy 一平面的距離 4 大於半徑 $\sqrt{14}$，

所以球面 K 與 xy－平面不相交，故 S 為空集合．

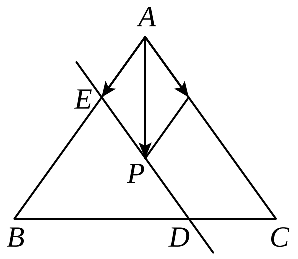


5. 因為 $\overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AB}+t\overline{AC}$，所以點 P 必在過 E 且與 $\overline{AC}$ 平行的直線 $\overleftrightarrow{ED}$ 上，其中 $\overline{AE}=\frac{1}{3}\overline{AB}$.

又(1)當 $P=E$ 時，$t=0$；

(2)當 $P=D$ 時，因 D，B，C 三點共線，所以 $\frac{1}{3}+t=1\Rightarrow t=\frac{2}{3}$.

因此當 $0<t<\frac{2}{3}$ 時，P 落在△ABC 的內部 .



6. 【解一】

依題意最後的收盤價為 $40(1-7\%)^5(1+7\%)^5=40\times0.93^5\times1.07^5$，

又由對數表得

$\log(0.93^5\times1.07^5)=5(\log0.93+\log1.07)=5(0.9685-1+0.0294)=5(-0.0021)$

$=-0.0105=-1+0.9895=-1+\log9.762=\log0.9762$，

所以收盤價約為 $40\times0.9762=39.0480\approx39$，故選(A) .

【解二】

依題意最後的收盤價為

$40(1-7\%)^5(1+7\%)^5=40[(1-0.07)(1+0.07)]^5=40(1-0.0049)^5$

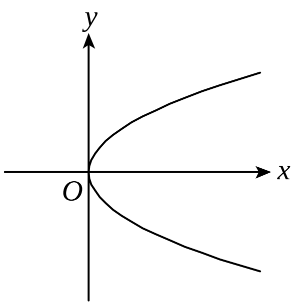
$=40[C_0^5\,1+C_1^5\,(0.0049)+C_2^5\,(-0.0049)^2+\cdots+C_5^5\,(-0.0049)^5]$

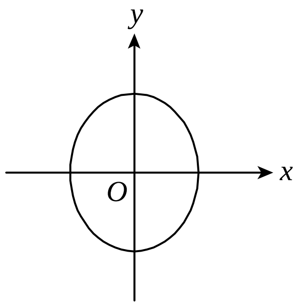
$\approx40(1-5\times0.0049)=40\times0.9755=39.0200\approx39$，故選(A) .

二、多重選擇題

1. 此標誌意思為「外側車道只限行駛大客車，而內側車道則無限制」，因此不違反此規定的選項有(A)(C)(D) .

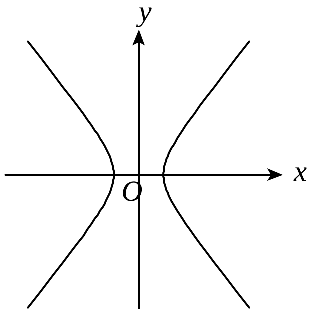
2. (A)$y^2=\frac{3}{2}x$ 圖形為開口向右的拋物線 .　　(B)$\frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$ 圖形為橢圓 .

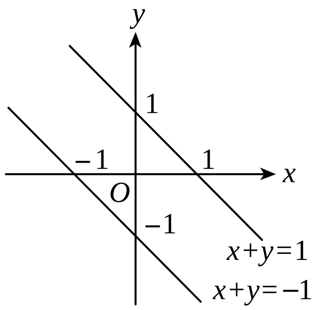




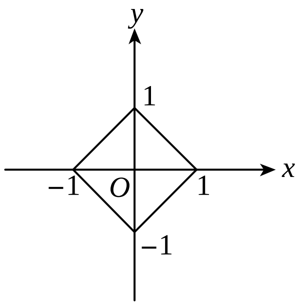
(C) $\dfrac{x^2}{\frac{1}{3}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$ 圖形為雙曲線．

(D) $|x+y|=1\Rightarrow x+y=1$ 或 $x+y=-1$ 圖形為二平行直線．





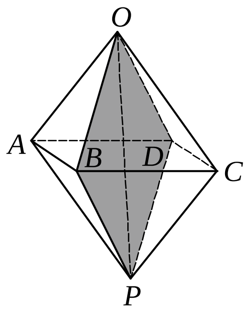
(E) $|x|+|y|=1$ 圖形為正方形．



故選(B)(E)．

3. 設 P 為 O 關於平面 ABC 的對稱點，

因四邊形 $OAPC$ 及 $OBPD$ 均為平行四邊形，所以 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}$， $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OP}$ ．



(A) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OP}\neq\vec{0}$ ．

(B)因為 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\neq\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ ，所以 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\neq\vec{0}$ ．

(C)因為 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ ，所以 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ ．

(D)因為 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|=2$，且 $\angle AOB=\angle COD$，

所以 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=2\times 2\times\cos\angle AOB=2\times 2\times\cos\angle COD=\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}$ ．

4. 因為若兩數的和為偶數，則兩數必都是奇數或都是偶數，所以 $p=\dfrac{C_2^5+C_2^5}{C_2^{10}}=\dfrac{10+10}{45}=\dfrac{4}{9}$ ．

又若兩數的和為奇數，則兩數必是一奇數一偶數，所以 $q=\dfrac{C_1^5C_2^5}{C_2^{10}}=\dfrac{25}{45}=\dfrac{5}{9}$ ．

故選(A)(D)．

5. 由虛根成雙定理知：方程式 $f(x)=0$ 的三個根為 $1+i$，$1-i$，α，其中 α 為實數．

(A)因 $1-i$ 為方程式 $f(x)=0$ 的一根，所以 $f(1-i)=0$．

(B)因 $2+i$ 不是方程式 $f(x)=0$ 的一根，所以 $f(2+i)\neq 0$．

(C)因 $f(x)-x=0$ 為 3 次實係數多項方程式，由虛根成雙定理知道方程式至少有一實根，

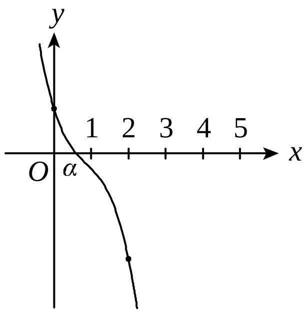
因此至少有一實數 x 滿足 $f(x)-x=0 \Rightarrow f(x)=x$．

(D)因 $f(x^3)=0$ 為 9 次實係數多項方程式，由虛根成雙定理知道方程式至少有一實根，

因此至少有一實數 x 滿足 $f(x^3)=0$．

(E)因 $f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，根據勘根定理知：$0<\alpha<2$，又因 $y=f(x)$的圖形是連續不斷的，且與 x 軸恰交一點$(0,\alpha)$，

所以圖形在 $x>2$ 的部分恆在 x 軸的下方，因此 $f(4)<0$．



故選(A)(B)(E)．

第二部分：填充題

1. 學期成績為 $\dfrac{82+73+85}{3}\times 30\%+86\times 20\%+79\times 20\%+90\times 30\%=84$．

2. 依題意得

獎金	1000	800	600	500	400	300	0
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

所以期望值為 $\dfrac{1}{4}(1000+800+600)+\dfrac{1}{16}(500+400+300+0)=600+75=675$．

3. $a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=3$

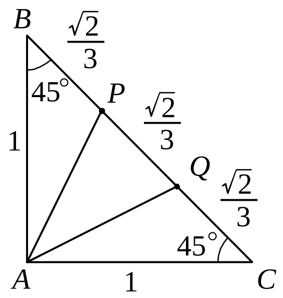
$\Rightarrow \log_{520}(2^a\times 5^b\times 13^c)=3 \Rightarrow 2^a\times 5^b\times 13^c=520^3=(2^3\times 5\times 13)^3=2^9\times 5^3\times 13^3 \Rightarrow a+b+c=9+3+3=15$．

4. 設 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$，$\overline{BC}=\sqrt{2}$．

【解一】

因為 $\overline{AQ}^2=1^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{3})^2-2\times 1\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}\times\cos 45^\circ=\dfrac{5}{9}$．所以 $\overline{AQ}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$；同理 $\overline{AP}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$．

因此 $\cos\angle PAQ=\dfrac{\frac{5}{9}+\frac{5}{9}-\frac{2}{9}}{2\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}}=\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{10}{9}}=\dfrac{4}{5}$，又因 $\angle PAQ$ 為銳角，所以 $\tan\angle PAQ=\dfrac{3}{4}$．



【解二】

建立直角坐標系：$A(0\,,0)$，$B(0\,,1)$，$C(1\,,0)$，

因為 P，Q 為 $\overline{BC}$ 的三等分點，所以 $P(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，$Q(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$，

因此 $\cos\angle PAQ=\dfrac{\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}|\times|\overrightarrow{AQ}|}=\dfrac{(\frac{1}{3}\,,\frac{2}{3})\times(\frac{2}{3}\,,\frac{1}{3})}{\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}=\dfrac{4}{5}$，

又因 $\angle PAQ$ 為銳角，所以 $\tan\angle PAQ=\dfrac{3}{4}$ ．

【解三】

由向量分點公式知：$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

因為 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0$，

因此 $|\overrightarrow{AP}|^2=\dfrac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2=\dfrac{4}{9}+0+\dfrac{1}{9}=\dfrac{5}{9}\Rightarrow|\overrightarrow{AP}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ．

同理可得：$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{AQ}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ．

又 $\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}=(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC})\times(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{9}+0+0+\dfrac{2}{9}=\dfrac{4}{9}$，

所以 $\cos\angle PAQ=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}|\times|\overrightarrow{AQ}|}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}}=\dfrac{4}{5}$，

又因 $\angle PAQ$ 為銳角，所以 $\tan\angle PAQ=\dfrac{3}{4}$ ．

5. 設共分成 d 班，

因各班有同樣的男生數，也有同樣的女生數，所以 d 為 1008 與 924 的公因數．

又 1008 與 924 的最大公因數為 84，所以 d 可能為 1，2，3，4，6，7，12，14，21，28，42，84，

但每班的人數 $\dfrac{1008+924}{d}=\dfrac{1932}{d}$ 須介於 40 與 50 之間，

即 $40<\dfrac{1932}{d}<50\Rightarrow\dfrac{1932}{50}<d<\dfrac{1932}{40}\Rightarrow 38.\cdots<d<48.\cdots$，故 $d=42$ ．

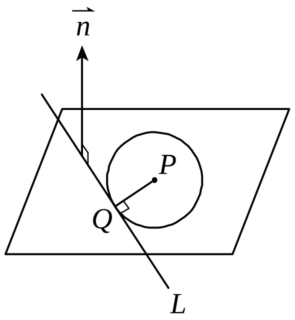
6. 因為 $(a\,,b\,,1)\perp\overrightarrow{PQ}$，所以 $(a\,,b\,,1)\times(-10\,,8\,,26)=0$

$\Rightarrow-10a+8b+26=0\Rightarrow 5a-4b-13=0\cdots$①

又方向向量 $(a\,,b\,,1)$ 與平面，$x-2y+z=0$ 的法向量 $\vec{n}=(1\,,-2\,,1)$ 垂直，

所以 $(a\,,b\,,1)\times(1\,,-2\,,1)=0\Rightarrow a-2b+1=0\cdots$②

由①、②解得 $a=5$，$b=3$．



7. 因為 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A)=2(\sin A\cos 30°+\cos A\sin 30°)=2\sin(A+30°)$，

且 $\sin 2004°=\sin(5\times 360°+204°)=\sin 204°=\sin(180°+24°)=-\sin 24°$，所以 $\sin(A+30°)=-\sin 24°$，

又因 $300°<A+30°<390°$，所以 $A+30°=360°-24°$，即 $A=306°$．

8. 設 P 為圓 C 上任一點，O 為圓點，

因 C：$(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 的圓心為 $K(7,8)$，半徑 $r=3$，

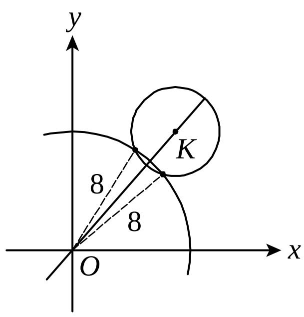
所以 $\overline{OP}$ 的最大值為 $\overline{OK}+r=\sqrt{7^2+8^2}+3=\sqrt{113}+3=13.\cdots$，

最小值為 $\overline{OK}-r=\sqrt{7^2+8^2}-3=\sqrt{113}-3=7.\cdots$，

因此若 $\overline{OP}$ 為整數值，則 $\overline{OP}=8$，9，10，11，12，13，

若以 O 為圓心，分別以 8，9，10，11，12，13 為半徑畫弧，與圓 C 共交於 12 個點．

因此所求的 P 點共有 12 個．



9. $\begin{cases} x^2=4y\cdots② \\ y=x+2\cdots① \end{cases}$

由①代入②得 $x^2=4(x+2)\Rightarrow x^2-4x-8=0\Rightarrow x=2\pm 2\sqrt{3}$，代入①得 $y=4\pm 2\sqrt{3}$，

因此 $P(2-2\sqrt{3},4-2\sqrt{3})$，$Q(2+2\sqrt{3},4+2\sqrt{3})$．

又由拋物線的定義知：$\overline{PF}=d(P,L_1)$，$\overline{QF}=d(Q,L_1)$，其中 L_1：$y=-1$ 為拋物線 $x^2=4y$ 的準線，

故 $\overline{PF}+\overline{QF}=d(P,L_1)+d(Q,L_1)=(5-2\sqrt{3})+(5+2\sqrt{3})=10$．