

110指考最前線-數學乙

總	
總分	
	J

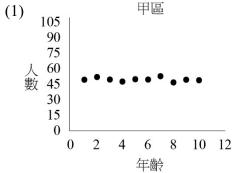
班級:______ 座號:____ 姓名:_____

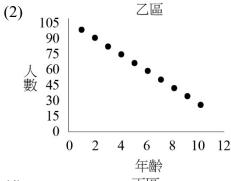
第壹部分:選擇題(單選題、多選題及選填題共占74分)

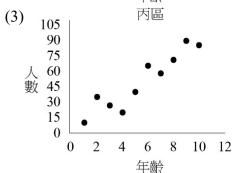
一、單選題(占18分)

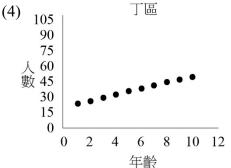
說明:第1題至第3題,每題有5個選項,其中只有一個是正確或最適當的選項,請劃記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者,得6分;答錯、未作答或劃記多於一個選項者,該題以零分計算。

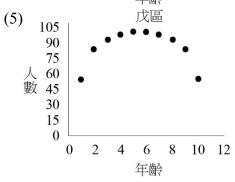
)1. 下列選項分別為甲、乙、丙、丁、戊等五個地區 1 至 10 歲(以整數計)兒童罹患某疾病的 人數散佈圖。試選出罹患某疾病的人數與年齡相關係數值最大的選項。











)2. 已知實係數二次多項式函數 f(x)滿足 f(-1)=k , f(1)=9k , f(3)=-15k ,其中 k>0 。 設 (函數 y = f(x) 圖形頂點的 x 坐標為 a ,試選出正確的選項。

- (2)-1 < a < 1 (3) a = 1 (4)1 < a < 3 $(5)3 \le a$

-)3. 某公司舉辦年終抽獎活動,每人從編號分別為1至6的六張牌中隨機抽取兩張。假設每張 (牌抽到的機會均相等,目規則如下:
 - (一)若這兩張牌的號碼之和是奇數,則可得獎金100元,此時抽獎結束;
 - (二)若號碼之和為偶數,就將這兩張牌丟掉,再從剩下的四張牌中隨機抽取兩張牌,且 其號碼之和為奇數,則可得獎金50元,其他情形則沒有獎金,此時抽獎結束。

依上述規則,試求每人參加此抽獎活動的獎金期望值為多少元?

- (1)50
- (2)70
- (3)72
- **(5)** 100 °

二、多選題(占32分)

說明:第4題至第7題,每題有5個選項,其中至少有一個是正確的選項,請將正確選項劃記在答案 卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定,所有選項均答對者,得8分;答錯1個 選項者,得4.8分;答錯2個選項者,得1.6分;答錯多於2個選項或所有選項均未作答者, 該題以零分計算。

)4. 設 $a = \log_2 8$, $b = \log_3 1$, $c = \log_{0.5} 8$, 試選出正確的選項。

- $(1)b = 0 (2)a + b + c > 0 (3)a > b > c (4)a^2 > b^2 > c^2 (5)2^a > 3^b > (\frac{1}{2})^c$
-)5. 某便利商店將甲、乙、丙三個積木模型和 $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ 五個角色公仔,共八個玩具,分 (成兩袋販售。每袋均裝有四個玩具,其分裝的原則如下:
 - (一) 甲和 a 必須裝在同一袋。
 - (二)每袋至少裝有一個積木模型。
 - (三) d 和 e 必須裝在不同袋。

根據以上敘述,試選出正確的選項。

- (1)每袋至少裝有兩個角色公仔
- (2)乙和丙必裝在不同袋
- (3)如果乙和 d 裝在同一袋,則丙和 e 必裝在同一袋
- (4)如果乙和 d 裝在不同袋,則 b 和 c 必裝在不同袋
- (5)如果b和c裝在不同袋,則乙和丙必裝在同一袋。
-)6. 已知實數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n-1}a_n$,n 為正整數。試選出正確的選項。
 - $(1) a_2 = 3$
 - $(2) a_4 = 9$
 - $(3)\langle a_n\rangle$ 為等比數列
 - $(4)\sum_{n=1}^{20} a_n = 400$
 - $(5)\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2 \circ$

()7. 已知某人每次飛鏢射中的機率皆為 $\frac{1}{2}$,且每次射飛鏢的結果均互相獨立。試從下列選項中,

選出發生機率為 $\frac{1}{2}$ 的事件。

- (1)連續射2次飛鏢,恰射中1次
- (2)連續射 4 次飛鏢,恰射中 2 次
- (3)連續射 4 次飛鏢,射中的總次數為奇數
- (4)連續射6次飛鏢,在第1次沒有射中的條件下,第2次有射中
- (5)連續射6次飛鏢,在前2次恰射中1次的條件下,後4次恰射中2次。

三、選填題(占24分)

說明:1.第A至C題,將答案劃記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(8-13)。 2.每題完全答對給8分,答錯不倒扣,未完全答對不給分。

A. 數線上有原點 O 及三點 A(-2) 、B(10) 、C(x) ,其中 x 為實數 。

已知線段 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{OB} 長度大小關係為 \overline{BC} < \overline{AC} < \overline{OB} ,

則x的最大範圍為 $_{-}$ 8 $_{-}$ <x< $_{-}$ 9 $_{-}$ 。

- C. 已知一個不均匀銅板,投擲時出現正面的機率為 $\frac{1}{3}$,出現反面的機率為 $\frac{2}{3}$ 。今在坐標平面上有一顆棋子,依投擲此銅板的正反面結果,前進至下一個位置,規則如下:
 - (一)若擲出為正面,則從目前位置依著向量(-1,2)的方向與長度,前進至下一個位置;
 - (二)若擲出為反面,則從目前位置依著向量(1,0)的方向與長度,前進至下一個位置。

例如:棋子目前位置在坐標(2,4),若擲出反面,則棋子前進至坐標(3,4)。

假設棋子以原點(0,0)為起始點,依上述規則,連續投擲此銅板 6 次,且每次投擲均互相獨立,則經過 6 次移動後,棋子停在坐標(② , ③)的機率最大。

第貳部分:非選擇題(占26分)

- 說明:本部分共有二大題,答案必須寫在「答案卷」上,並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號((1)、(2)、……),同時必須寫出演算過程或理由,否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫,且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因,致評閱人員無法清楚辨識,該部分不予計分。每一子題配分標於題末。
- 一、坐標平面上有兩點 A(-3,4), B(3,2) 及一條直線 L。已知 A、B 兩點在直線 L 的兩側且 n=(4,-3) 是直線 L 的法向量。設 A 點到直線 L 的距離為 B 點到直線 L 的距離的 5 倍。根據上述,試回答下列問題。
 - (1)試求向量 \overrightarrow{AB} 與向量 \overrightarrow{n} 的內積。(4分)
 - (2)試求直線L的方程式。(4分)
 - (3) 設 P 點在直線 L 上月 $\overline{PA} = \overline{PB}$,試求 P 點坐標。(4分)
- 二、已知某廠商生產甲、乙兩型電動車所需的成本有電池、馬達、其他等三大類,甲、乙兩型的各類成本如下表(單位:萬元):

	電池成本	馬達成本	其他成本
甲型	56	26	48
乙型	40	20	56

今該廠商甲、乙兩型電動車售價的算式為「電池成本的x倍」、「馬達成本的y倍」與「其他成本的 $\frac{x+y}{2}$ 倍」之總和,即

售價=電池成本×
$$x$$
+馬達成本× y +其他成本× $\frac{x+y}{2}$

其中倍數 $x \cdot y$ 需滿足「 $1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 2$,且甲、乙兩型電動車的售價均不超過 200 萬元」。

該廠商為了區隔產品,希望甲、乙兩型電動車的售價差距最大。根據上述資訊,試回答下列問題。 (1)試寫出甲、乙兩型電動車的售價(以x、y的式子來表示),並說明「甲型電動車的售價必定高於

- 乙型電動車的售價」。(4分) (2)試在坐標平面上,畫出滿足題幹條件(x,y)的可行解區域,並以斜線標示該區域。(4分)
- (3)試求當倍數 $x \cdot y$ 分別為多少時,甲、乙兩型電動車的售價差距最大?此時甲、乙兩型電動車的售價差距為多少萬元?(6分)

試題大剖析

解題:陳清風老師

答案

第壹部分:選擇題

- 一、單選題
 - 1. (4) 2. (2) 3. (2)
- 二、多選題
 - $4. (1)(3) \quad 5. (1)(5) \quad 6. (1)(4)(5) \quad 7. (1)(3)(4)$
- 三、選填題
 - A. 4 < x < 8 B. 14 C. (2,4)

第貳部分:非選擇題

- $-\cdot$ (1) 30 (2) 4x-3y-1=0 (3) (-2,-3)
- 二、(1)甲的售價為80x+50y(萬元),乙的售價為68x+48y(萬元),說明見詳解 (2)見詳解
 - (3)當 $x = \frac{15}{8}$, y = 1時,售價差距最大為 24.5 萬元

解析

第壹部分:選擇題

- 一、單撰題
- 1. 出處:【99課綱】第二冊 第四章 數據分析

【108課綱】第二冊 單元9 二維數據分析

難易度:易

解:依散布圖中各點的分布狀況,討論相關係數r的值:

- (1)因為各點幾乎落在一水平線上,所以 $r \approx 0$ 。
- (2)因為各點都落在一條斜率為負的直線上,所以r=-1。
- (3)因為各點的分布有左下往右上的趨勢,所以0 < r < 1。
- (4)因為各點都落在一條斜率為正的直線上,所以r=1。
- (5)因為散布圖呈現左右對稱,所以r=0。

故選(4)。

2. 出處:【99課綱】第一冊 第二章 多項式函數

【108課綱】第一冊 單元9 一次與二次函數

難易度:易

解:設
$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$
 ($A \neq 0$)。依題意,得
$$\begin{cases} f(-1) = A - B + C = k \\ f(1) = A + B + C = 9k \end{cases}$$
, $f(3) = 9A + 3B + C = -15k$

解得A = -4k,B = 4k,C = 9k。利用配方法,得

$$f(x) = -4kx^{2} + 4kx + 9k = -4k(x^{2} - x) + 9k$$
$$= -4k\left(x^{2} - x + \frac{1}{4}\right) + k + 9k = -4k\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2} + 10k ,$$

因此 y = f(x) 的圖形是頂點的 x 坐標為 $\frac{1}{2}$ 的拋物線,即 $a = \frac{1}{2}$ 。

故選(2)。

3. 出處:【99課網】選修數學乙(上) 第一章 機率與統計

【108課綱】第二冊 單元7數學期望值

難易度:中

解:兩數的和為奇數必為一奇數一偶數;兩數的和為偶數必為二奇數或二偶數。每人參加抽獎活動所得的金額及其對應的機率如下:

①
$$P(100 \, \overrightarrow{TL}) = \frac{C_1^3 C_1^3}{C_2^6} = \frac{3 \times 3}{15} = \frac{3}{5}$$

$$(2) P(50 \overrightarrow{\pi}) = \frac{C_2^3}{C_2^6} \times \frac{C_1^1 C_1^3}{C_2^4} + \frac{C_2^3}{C_2^6} \times \frac{C_1^1 C_1^3}{C_2^4} = \frac{3}{15} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{15} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{5}$$

(3)
$$P(0 \overrightarrow{\pi}) = 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

根據數學期望值的定義,得期望值 $E=100\times\frac{3}{5}+50\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{5}=70$ (元)。 故撰(2)。

二、多撰題

4. 出處:【99課網】第一冊 第三章 指數、對數函數

【 108 課綱】第 3A 冊 單元 6 對數與對數律、第 3B 冊 單元 4 對數 難易度:易

解:因為 $a = \log_2 8 = 3$, $b = \log_3 1 = 0$, $c = \log_{0.5} 8 = \log_{2^{-1}} 2^3 = -3$,

所以
$$a+b+c=0$$
, $a>b>c$, $a^2=c^2>b^2$ 。

又因為
$$2^a = 2^3 = 8$$
, $3^b = 3^0 = 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(2^{-1}\right)^{-3} = 2^3 = 8$,

所以
$$2^a = \left(\frac{1}{2}\right)^c > 3^b$$
。

故選(1)(3)。

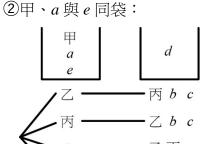
5. 出處:【99課綱】第二冊 第二章 排列、組合

【108 課綱】第二冊 單元 3 計數原理

難易度:中

解:依題意,可分成以下二類,共8種分法:

①甲、a 與 d 同袋:



6. 出處:【99課網】選修數學乙(下) 第一章 極限與函數

【108 課綱】 撰修數學乙(上) 單元 1 數列的極限與無窮等比級數

難易度:中

解:(1)〇:
$$a_2 = \frac{2 \times 1 + 1}{2 \times 1 - 1} a_1 = \frac{3}{1} \times 1 = 3$$
。

(2)
$$\times$$
: $a_3 = \frac{2 \times 2 + 1}{2 \times 2 - 1} a_2 = \frac{5}{3} \times 3 = 5$, $a_4 = \frac{2 \times 3 + 1}{2 \times 3 - 1} a_3 = \frac{7}{5} \times 5 = 7$

$$(3)$$
×: 因為 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} \neq \frac{5}{3} = \frac{a_3}{a_2}$,所以 $\langle a_n \rangle$ 不是等比數列。

(4)○:利用累乘法:

$$\begin{aligned}
\alpha_{\lambda} &= 1 \\
\alpha_{\lambda} &= \frac{3}{1} \alpha_{\lambda} \\
\alpha_{\lambda} &= \frac{5}{3} \alpha_{\lambda} \\
&\vdots \\
\times a_{n} &= \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-1} \alpha_{n-1}
\end{aligned}$$

$$a_n = 1 \times \frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \dots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-1} = 2(n-1)+1 = 2n-1 \quad n \ge 2$$

因為n=1代入亦成立,所以 $a_n=2n-1$, $n\geq 1$,

即 $\langle a_{\scriptscriptstyle n} \rangle$ 是首項為 1,公差為 2 的等差數列。利用等差級數求和公式,得

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{20 \times (2 \times 1 + (20-1) \times 2)}{2} = \frac{20 \times (2+38)}{2} = 400$$

$$(5)\bigcirc : \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 \circ$$

故選(1)(4)(5)。

7. 出處:【99課綱】選修數學乙(上) 第一章 機率與統計

【108課綱】選修數學乙(下) 單元2二項分布

難易度:中

解:利用二項分布,得

$$(1)\bigcirc : C_1^2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \circ$$

(2)
$$\times$$
 : $C_2^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ °

$$(3)\bigcirc : C_1^4 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \circ$$

(4)○:因為每次射飛鏢的結果均互相獨立:

所以第 2 次射中的機率與第 1 次的結果無關,機率為 $\frac{1}{2}$ 。

(5)×:因為每次射飛鏢的結果均互相獨立,

所以P(後 4 次恰中 2 次| 前 2 次恰中 1 次)=P(後 4 次恰中 2 次 $)=C_2^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$ 。 故選(1)(3)(4)。

三、選填題

A. 出處:【99課綱】第一冊 第一章 數與式

【108 課綱】第一冊 單元 2 絕對值

難易度:易

解:因為 $\overline{BC} < \overline{AC}$,所以C點在 \overline{AB} 的中點M(4)之右邊,因此x > 4。

又因為 $\overline{AC} < \overline{OB}$,所以x - (-2) < 10,即x < 8。

故4 < x < 8。

B. 出處:【99 課綱】第四冊 第三章 矩陣

【108 課綱】第 4A 冊 單元 9 矩陣的運算、第 4B 冊 單元 6 矩陣的運算

難易度:易

解:利用二階反方陣的公式,得 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-0} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

因此
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故 a+b+c+d=7+0+0+7=14。

8

C. 出處:【99課網】選修數學乙(上) 第一章 機率與統計

【108 課綱】 選修數學乙(下) 單元 2 二項分布

難易度:中

解:設隨機變數 X 表示出現正面的次數。因為這是 n=6 , $p=\frac{1}{3}$ 的二項分布,

所以 X 的期望值為 $np = 6 \times \frac{1}{3} = 2$ (次)。

因為X的期望值2(次)是整數,所以由二項分布的性質得知,

機率的最大值會發生在X=2時,即擲此銅板6次出現2次正面4次反面時。根據棋子前進的規則,

此時棋子所停位置的 x 坐標為 $2\times(-1)+4\times1=2$,y 坐標為 $2\times2+4\times0=4$ 。 故棋子停在坐標(2,4)的機率最大。

第貳部分:非選擇題

一、出處:【99課網】第三冊 第三章 平面向量

【108 課綱】第 3A 冊 單元 9 平面向量的運算、第 3B 冊 單元 7 平面向量的運算 難易度:中

解:(1)因為 \overrightarrow{AB} =(6,-2),所以 \overrightarrow{AB} · \overrightarrow{n} =6×4+(-2)×(-3)=30。

(2)如圖,因為 $\triangle AHQ \approx \triangle BRQ$,所以 $\overline{AQ}: \overline{QB} = \overline{AH}: \overline{BR} = 5:1$ 。

利用坐標的分點公式,得
$$Q\left(\frac{1\times(-3)+5\times3}{5+1},\frac{1\times4+5\times2}{5+1}\right)=Q\left(2,\frac{7}{3}\right)\circ A$$

又因為L的法向量 $\overrightarrow{n}=(4,-3)$,所以可設L:4x-3y+k=0。

將
$$Q$$
 點代入 L ,得 $4 \times 2 - 3 \times \frac{7}{3} + k = 0$,解得 $k = -1$ 。

故 L 的方程式為 4x-3y-1=0。



②因為直線
$$AB$$
 的斜率為 $\frac{4-2}{-3-3} = -\frac{1}{3}$,所以 \overline{AB} 中垂線的斜率為 3 ,

又中垂線通過
$$\overline{AB}$$
的中點 $\left(\frac{-3+3}{2},\frac{4+2}{2}\right)=(0,3)$,

因此 \overline{AB} 中垂線的方程式為y-3=3(x-0),即3x-y+3=0。

③解
$$\begin{cases} 4x-3y-1=0\\ 3x-y+3=0 \end{cases}$$
,得 $x=-2,y=-3$ 。故 P 點的坐標為 $(-2,-3)$ 。

9

二、出處:【99課綱】第三冊 第二章 直線與圓

【108課綱】選修數學乙(下) 單元 5 線性規劃

難易度:中

解:(1)依售價的算式,得

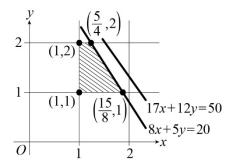
甲的售價為
$$56x + 26y + 48 \times \frac{x+y}{2} = 80x + 50y$$
 (萬元),

乙的售價為
$$40x + 20y + 56 \times \frac{x+y}{2} = 68x + 48y$$
 (萬元)。

因為(80x+50y)-(68x+48y)=12x+2y>0 (因為 $1 \le x \le 2 \ge 1 \le y \le 2$),所以甲的售價必定高於乙的售價。

(2)依題意,得
$$\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 2 \\ 80x + 50y \le 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 2 \\ 8x + 5y \le 20 \\ 17x + 12y \le 50 \end{cases}$$

可行解區域為圖中的斜線區域。



(3)目標函數:甲、乙售價的差距(80x+50y)-(68x+48y)=12x+2y。 利用頂點法:

(x,y)	(1,1)	$\left(\frac{15}{8},1\right)$	$\left(\frac{5}{4},2\right)$	(1,2)
12x + 2y	14	24.5	19	16

故當 $x = \frac{15}{8}$, y = 1時,售價差距 12x + 2y 有最大值為 24.5 萬元。