110 年 四技二專

統一入學測驗

數學（C）

一、試題分析

110 年統測數學 C 是一份難易適中的試卷。這次的題目有別於 108、109 年的偏難試卷（註：108、109 年統測數學 C 滿分各僅有 17、26 位），試題的難易分配平均，中等偏易的題目置於卷首，偏難或繁瑣的題目置於卷末，而大都是中等上下的題目，整體考生的分數應會提高不少。其他特色如下：

1. 生活素養：

   「108 數學新課綱」強調生活素養，統測已經連續三年加入生活素養題，而敘述也更加精簡流暢。如：第 4、7、12、21、24 題。

2. 圖形試題：

   這次統測有圓錐曲線的圖形描繪，有向量的描繪，有要找三角函數圖形的交點，這些都需要把圖形描繪出來以輔助求解，平時宜培養畫圖解題的習慣。如：第 8、9、16、18、25 題。

3. 參考公式的提示：

   統測已經連續五年提供參考公式，這些公式已不再是聊備一格，在解題時都可以提供關鍵的提示，考生應善用「參考公式」去思考解題策略。

   如：第 2 題以參考公式提供的「三角函數的平方和關係式」來處理，輔以平方差公式，可以迅速解題。倘若以「正切（$\tan\theta$）的商數關係和正割（$\sec\theta$）的倒數關係」來解題，恐怕是化簡為繁，更耗費時間。

4. 特殊試題(1)：

   第 5 題是取材自大學微積分習題，目的應是測驗考生以導數的定義來輔助求解，但是此題將極限直接運算，反而更簡易。

5. 特殊試題(2)：

   第 25 題乍看之下是要以定積分求面積，但是課綱內並無介紹對數函數的積分，因此本題似乎只是在估計面積。

綜合上述，110 年的考生得分將會回歸常態，各種程度的學生都會有適當的鑑別度。只不過這兩年，若當年數學學測的題目偏易（難），則當年統測數學 C 似乎就會因而偏難（易）。考生們也許可以參考來年數學學測的風向

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	數列與級數	1
三角函數	1	指數與對數及其運算	2
三角函數的應用	3	排列組合	2
向量	1	機率與統計	2
式的運算	2	圓	1
聯立方程式	2	二次曲線	2
複數	1	微分	1
不等式及其應用	1	積分	2

總　　分

110 學年度四技二專統一入學測驗
數學 (C)

數學 C 參考公式

1. 三角函數的平方和關係式：$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
2. 三角函數的二倍角公式：$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
3. 三角函數的和差角公式：$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
4. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$
5. 算幾不等式：若 $a\ge 0, b\ge 0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 若 $\dfrac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-1}$，其中 A、B 為實數，則下列何者正確？

(A) $A=2$　(B) $B=1$　(C) $A=-2$　(D) $B=-1$。

(　　) 2. 若 $\tan\theta+\sec\theta=5$，則 $\tan\theta-\sec\theta=$？

(A) $-\dfrac{3}{5}$　(B) $-\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) $\dfrac{3}{5}$。

(　　) 3. $\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 50^\circ-\sin 25^\circ\cos 25^\circ\cos 20^\circ=$？

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $-\dfrac{1}{4}$　(D) $-\dfrac{1}{2}$。

(　　) 4. 某實驗室將 108 個不同樣本在常溫常壓下依固體、液體、氣體及金屬、半金屬、非金屬分類如表(一)。若從固體及液體類中取出一個樣本，則其為半金屬的機率為何？

(A) $\dfrac{5}{32}$　(B) $\dfrac{3}{32}$　(C) $\dfrac{1}{16}$　(D) $\dfrac{1}{18}$。

	固體	液體	氣體	總計
金屬	79	2	0	81
半金屬	9	0	0	9
非金屬	5	1	12	18
總計	93	3	12	108

表(一)

(　　) 5. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(3+h)+2}-\dfrac{1}{3+2}}{h}=$？

(A)$-\dfrac{1}{25}$　(B)$-\dfrac{1}{9}$　(C)$\dfrac{1}{9}$　(D)$\dfrac{1}{25}$ 。

(　　) 6. 若$a=\sum\limits_{m=1}^{7}\dfrac{m-2}{2m-1}$、$b=\sum\limits_{k=0}^{6}\dfrac{k-1}{2k+1}$、$c=\sum\limits_{i=3}^{8}\dfrac{i-4}{2i-5}$，則下列敘述何者正確？

(A)$b>a>c$　(B)$c>a>b$　(C)$c>a=b$　(D)$a=b>c$ 。

(　　) 7. 設$I(t)$為 A 城市某種傳染病在時間t的感染率，且$I(t)=\dfrac{1}{1+49\left(7^{\frac{-t}{3}}\right)}$，$t\ge 0$ 。

若a、b、c分別表示$t=0$、$t=3$、$t=6$時的感染率，則下列何者正確？

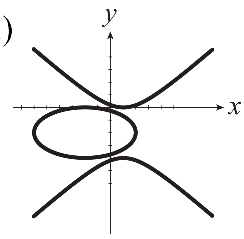
(A)$b=6a$　(B)$c=20a$　(C)$c=4b$　(D)$b=7a$ 。

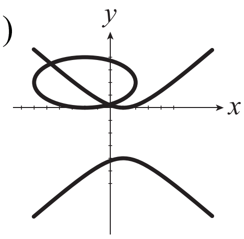
(　　) 8. 若圓C與y軸相切，且圓心為拋物線$y=x^2+4x+5$之頂點，則下列何者為圓C的方程式？

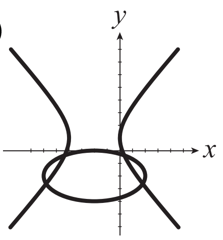
(A)$x^2+y^2+4x-2y+4=0$　(B)$x^2+y^2-4x+2y+1=0$

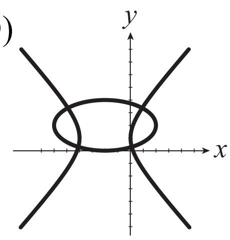
(C)$x^2+y^2-4x+2y+4=0$　(D)$x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 。

(　　) 9. 若有兩個二次曲線方程式，分別為$x^2+4y^2+4x-16y+4=0$與$\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$，則下列何者為此兩曲線的圖形組合？

(A)


(B)


(C)


(D)


(　　) 10. 若k為實數，且二元一次聯立方程組$\begin{cases} kx+3y+k+1=0 \\ x+4(k+1)y+8k^2+1=0 \end{cases}$有無限多組解，則$k$可為下列何值？

(A)$-\dfrac{3}{2}$　(B)$-\dfrac{1}{2}$　(C)$\dfrac{1}{2}$　(D)$\dfrac{3}{2}$ 。

(　　) 11. 若 x 、 y 、 z 為相異實數，則三階行列式 $\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix} = ?$

(A) 0　(B) $(x-y)(y-z)(z-x)$　(C) $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$

(D) $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$ 。

(　　) 12. 跆拳道隊有 8 個隊員，教練安排所有隊員每 2 人一組分別在 A、B、C、D 四個不同場地練習，則共有幾種安排的方式？

(A)105　(B)2520　(C)5040　(D)40320。

(　　) 13. 已知 a 、 b 為實數。若直線 $L_1: y=ax+b$ 與 $L_2: y=bx+a$ 相互垂直，且 $a^2+b^2=50$ ，則 L_1 與 L_2 的交點與原點的距離為多少？

(A) $4\sqrt{3}$　(B)7　(C) $5\sqrt{2}$　(D) $2\sqrt{13}$ 。

(　　) 14. 已知 ΔABC 中， a 、 b 、 c 分別為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之對邊長。若 $ab : bc : ca = 3 : 4 : 6$，則 $\sin A : \sin B : \sin C = ?$

(A)4：3：2　(B)4：2：3　(C)2：3：4　(D)3：2：4。

(　　) 15. 已知三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $f(1)=f(2)=f(-2)=2$ ，且 $f(-1)=8$ ，則下列何者正確？

(A) $a=-1$　(B) $b=1$　(C) $c=-4$　(D) $d=4$ 。

(　　) 16.已知 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 為平面上的三向量，且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$， $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$， $\left|\overrightarrow{a}\right|=5$， $\left|\overrightarrow{b}\right|=12$， $\left|\overrightarrow{c}\right|=13$。若 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}<0$ ，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=?$

(A) -30　(B) -60　(C) -65　(D) -156 。

(　　) 17. $\int_1^3 (3x-2)^{110}\,dx = ?$

(A) $\dfrac{7^{111}-1}{333}$　(B) $\dfrac{3^{111}-1}{333}$　(C) $\dfrac{7^{110}-1}{330}$　(D) $\dfrac{7^{111}-1}{111}$ 。

(　　) 18. 下列敘述何者正確？

(A) $y=\tan\dfrac{\theta}{3}$ 的週期為 $\dfrac{\pi}{3}$

(B) $\tan^2\theta-\sec^2\theta=1$

(C) $-\sqrt{2}\le\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$

(D)若 $\cos\theta=\sin\theta$ ，則 $\theta=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$ ，其中 n 為整數。

(　　) 19. 已知 $i=\sqrt{-1}$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2=a+bi$，則 $a+b=$？

(A) $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$　(B) -1　(C) $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$　(D) 1。

(　　) 20. 若 x 為實數，則 $x^2-2+\dfrac{9}{x^2+2}$ 的最小值為何？

(A) 2　(B) $\dfrac{5}{2}$　(C) $\dfrac{13}{2}$　(D) 6。

(　　) 21. 一個空的書櫃有上、中、下共三層，若將國文、英文、數學三本課本放入書櫃的任一層，且當課本放在同一層左右順序不同時視為不同排列，則共有幾種不同的排法？

(A) 60　(B) 36　(C) 27　(D) 18。

(　　) 22. 若直線 $y=mx$ 與拋物線 $f(x)=-x^2+4x-1$ 相切，且切點在第一象限內，則 $m=$？

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 6。

(　　) 23. $\displaystyle\int_1^4\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx=$？

(A) $\dfrac{57}{5}$　(B) $\dfrac{77}{5}$　(C) $\dfrac{87}{5}$　(D) $\dfrac{107}{5}$。

(　　) 24. 小明量測園藝店同一種盆栽 21 棵植物的高度資料如表(二)，其中有一盆高度為 24 公分，可視為量測異常值。若將此異常值從資料中移除，則下列哪一個統計量，在移除前後改變最多？

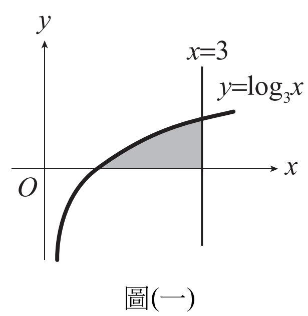
21 棵盆栽的高度（單位：公分）						
8	9	9	9	10	10	11
11	12	12	12	12	13	13
13	14	14	15	15	16	24

表(二)

(A)平均數　(B)中位數　(C)眾數　(D)全距。

(　　) 25. 假設 A 表函數 $y=\log_3 x$ 圖形與直線 $y=0$、$x=3$ 所圍區域面積，如圖(一)。若以幾何圖形的觀念來判斷 A 的大小範圍，則下列何者正確？

(A) $0\le A<\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}\le A<1$　(C) $1\le A<2$　(D) $A\ge 2$。



圖(一)

110 年統一入學測驗 數學(C)

答案

1.D	2.B	3.C	4.B	5.A	6.D	7.C	8.D	9.D	10.C
11.A	12.B	13.B	14.D	15.C	16.B	17.A	18.C	19.B	20.A
21.A	22.B	23.A	24.D	25.C					

本試題答案係依據統一入學測驗中心公布之標準答案

1. 技巧與分析

〔解 1〕

(1) 在處理部分分式時，先消去分母

(2) 當兩多項式相等時，任一實數代入兩多項式所得到的值也相等

〔解 2〕

(1) 在處理部分分式時，先消去分母

(2) 當兩多項式相等時，其相對應的次數與係數均相等

解析

〔解 1〕

$$\frac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$$

上式等號的兩側同乘以$(x-3)(x-1)$，得

$3x-1=A(x-1)+B(x-3)\cdots\cdots$①

(1) 令$x=3$代入①：

$3\times3-1=A\times(3-1)+B\times(3-3)$

$\Rightarrow\quad 8=2A+0\quad\Rightarrow\quad A=4$

(2) 令$x=1$代入①：

$3\times1-1=A\times(1-1)+B\times(1-3)$

$\Rightarrow\quad 2=0-2B\quad\Rightarrow\quad B=-1$

由(1)和(2)可知，$A=4$，$B=-1$，故選(D)

〔解 2〕

$$\frac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$$

上式等號的兩側同乘以$(x-3)(x-1)$，得

$$\begin{aligned}3x-1&=A(x-1)+B(x-3)\\&=(Ax-A)+(Bx-3B)\\&=(A+B)x+(-A-3B)\end{aligned}$$

由多項式相等，則$\begin{cases}A+B=3\cdots\cdots①\\-A-3B=-1\cdots\cdots②\end{cases}$

①+②：$-2B=2\quad\Rightarrow\quad B=-1$

$B=-1$代入①：$A+(-1)=3\quad\Rightarrow\quad A=4$

因此$A=4$，$B=-1$，故選(D)

2. 技巧與分析

(1) 三角函數的平方和關係式：

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$\Leftrightarrow\quad \tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$

(2) 平方差公式：

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

解析

三角函數平方和關係式：

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$\Rightarrow\quad \tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$

$\Rightarrow\quad (\tan\theta+\sec\theta)(\tan\theta-\sec\theta)=-1$

$\because\quad \tan\theta+\sec\theta=5$

$\therefore\quad 5\times(\tan\theta-\sec\theta)=-1$

$\Rightarrow\quad \tan\theta-\sec\theta=-\dfrac{1}{5}$

3. 技巧與分析

(1) 三角函數的二倍角公式：

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\Leftrightarrow\quad \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin2\theta$

(2) 三角函數的和差角公式：

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

(3) 三角函數的負角公式：

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

解析

觀察

$\underset{\sim\sim\sim}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}\ \cos 50^\circ - \underset{\sim\sim\sim}{\sin 25^\circ \cos 25^\circ}\ \cos 20^\circ$

(1) 由正弦的二倍角公式

$$\left(\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$\sin 10^\circ \cos 10^\circ = \frac{1}{2}\sin\left(2\times 10^\circ\right) = \frac{1}{2}\sin 20^\circ$$

$$\sin 25^\circ \cos 25^\circ = \frac{1}{2}\sin\left(2\times 25^\circ\right) = \frac{1}{2}\sin 50^\circ$$

(2) $\underset{\sim\sim\sim}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}\ \cos 50^\circ - \underset{\sim\sim\sim}{\sin 25^\circ \cos 25^\circ}\ \cos 20^\circ$

$$= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}\ \cos 50^\circ - \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}\sin 50^\circ}\ \cos 20^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 20^\circ \cos 50^\circ - \cos 20^\circ \sin 50^\circ\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 20^\circ \cos 50^\circ - \cos 20^\circ \sin 50^\circ\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(20^\circ - 50^\circ\right) = \frac{1}{2}\sin\left(-30^\circ\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(-\sin 30^\circ\right) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

4. 技巧與分析

機率的定義：

設樣本空間 S 之中，每個樣本發生的機會均等，若 $A\subset S$ ，則事件 A 發生的機率為

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{事件 } A \text{ 的元素個數}}{\text{樣本空間 } S \text{ 的元素個數}}$$

解析

(1) 設樣本空間 S 為固體及液體類

而固體類有 93 個樣本，液體類有 3 個樣本，則 $n(S) = 93 + 3 = 96$

(2) 設從固體及液體類中取出一個樣本為半金屬的事件為 A，而固體類的半金屬有 9 個樣本，液體類的半金屬有 0 個樣本，則 $n(A) = 9 + 0 = 9$

由(1)和(2)可知

$$\text{所求} = P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{96} = \frac{3}{32}$$

5. 技巧與分析

〔解 1〕

極限運算的化簡

〔解 2〕

(1) 導數的定義：

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(2) 除法的微分：

若 $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ ，其中 $B(x)\neq 0$

則 $f'(x) = \dfrac{A'(x)B(x) - B'(x)A(x)}{\left[B(x)\right]^2}$

解析

〔解 1〕

$$\because\ \frac{1}{(3+h)+2} - \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5+h} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{5}{(5+h)\times 5} - \frac{5+h}{(5+h)\times 5} = \frac{-h}{(5+h)\times 5}$$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(3+h)+2} - \frac{1}{3+2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{(5+h)\times 5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(5+h)\times 5} = \frac{-1}{(5+0)\times 5} = -\frac{1}{25}$$

〔解 2〕

觀察 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(3+h)+2} - \frac{1}{3+2}}{h}$

令 $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

則 $\displaystyle f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(3+h)+2} - \frac{1}{3+2}}{h}$$

而 $f'(x) = \dfrac{1'\times(x+2) - (x+2)'\times 1}{(x+2)^2}$

$$= \frac{0\times(x+2) - 1\times 1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

則 $f'(3) = \dfrac{-1}{(3+2)^2} = -\dfrac{1}{25}$

因此 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(3+h)+2} - \frac{1}{3+2}}{h} = -\frac{1}{25}$

6. 技巧與分析

級數 Σ 的展開

解析

(1) $a=\sum_{m=1}^{7}\frac{m-2}{2m-1}$

$=\frac{1-2}{2\times1-1}+\frac{2-2}{2\times2-1}+\frac{3-2}{2\times3-1}+\cdots+\frac{7-2}{2\times7-1}$

$=-1+0+\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{3}{9}+\frac{4}{11}+\frac{5}{13}$

(2) $b=\sum_{k=0}^{6}\frac{k-1}{2k+1}$

$=\frac{0-1}{2\times0+1}+\frac{1-1}{2\times1+1}+\frac{2-1}{2\times2+1}+\cdots+\frac{6-1}{2\times6+1}$

$=-1+0+\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{3}{9}+\frac{4}{11}+\frac{5}{13}$

(3) $c=\sum_{i=3}^{8}\frac{i-4}{2i-5}$

$=\frac{3-4}{2\times3-5}+\frac{4-4}{2\times4-5}+\frac{5-4}{2\times5-5}+\cdots+\frac{8-4}{2\times8-5}$

$=-1+0+\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{3}{9}+\frac{4}{11}$

由(1)、(2)和(3)可知，$a=b>c$

7. 技巧與分析

零指數與負整數指數：

設 $a\neq0$ 且 n 為正整數，$a^0=1$，$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

解析

感染率 $I(t)=\frac{1}{1+49\left(7^{-\frac{t}{3}}\right)}$

(1) $a=I(0)=\frac{1}{1+49\left(7^{-\frac{0}{3}}\right)}=\frac{1}{1+49\times7^0}$

$=\frac{1}{1+49\times1}=\frac{1}{50}$

(2) $b=I(3)=\frac{1}{1+49\left(7^{-\frac{3}{3}}\right)}=\frac{1}{1+49\times7^{-1}}$

$=\frac{1}{1+49\times\frac{1}{7}}=\frac{1}{8}$

(3) $c=I(6)=\frac{1}{1+49\left(7^{-\frac{6}{3}}\right)}=\frac{1}{1+49\times7^{-2}}$

$=\frac{1}{1+49\times\frac{1}{7^2}}=\frac{1}{2}$

由(1)、(2)和(3)可知

$b=\frac{25}{4}a$，$c=25a$，$c=4b$

故選(C)

8. 技巧與分析

(1) 二次函數（拋物線）的配方

(2) 拋物線 $y=a(x-h)^2+k$ 的頂點為 (h,k)

(3) 若圓的圓心為 (h,k) 且半徑為 r

則圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

解析

(1) 拋物線 $y=x^2+4x+5=(x^2+4x)+5$

$=(x^2+2\times2\times x+\underline{2^2})+5\underline{-2^2}$

$=(x+2)^2+1=[x-(-2)]^2+1$

則拋物線的頂點為 $(-2,1)$

(2) 圓 C 的圓心為拋物線的頂點 $(-2,1)$

而圓 C 與 y 軸相切，

則圓 C 的半徑為 $|-2|=2$

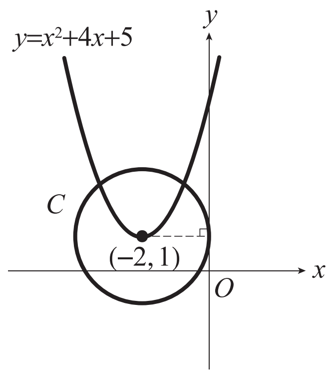
故圓 C 的方程式為

$[x-(-2)]^2+(y-1)^2=2^2$

$\Rightarrow\ (x+2)^2+(y-1)^2=4$

$\Rightarrow\ (x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)=4$

$\Rightarrow\ x^2+y^2+4x-2y+1=0$



9. 技巧與分析

(1) 將橢圓的一般式配方成標準式

(2) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）

是左右焦點的橢圓，中心為(h,k)

長軸長為$2a$，短軸長為$2b$

(3) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$（$a,b>0$）

是左右焦點的雙曲線，中心為(h,k)

貫軸長為$2a$，共軛軸長為$2b$

解析

(1) $x^2+4y^2+4x-16y+4=0$

$\Rightarrow \left(x^2+4x\right)+4\left(y^2-4y\right)=-4$

$\Rightarrow \left(x^2+2\times 2\times x+2^2\right)+$

$4\left(y^2-2\times 2\times y+2^2\right)$

$=-4+2^2+4\times 2^2$

$\Rightarrow (x+2)^2+4(y-2)^2=16$

$\overset{\div 16}{\Rightarrow} \dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

$\Rightarrow \dfrac{(x+2)^2}{4^2}+\dfrac{(y-2)^2}{2^2}=1$

這是左右焦點的橢圓方程式

其中心為$(-2,2)$

而$a_{橢}=4$，$b_{橢}=2$

則長軸長$=2a_{橢}=2\times 4=8$

短軸長$2b_{橢}=2\times 2=4$

(2) $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$

$\Rightarrow \dfrac{(x+2)^2}{2^2}-\dfrac{(y-1)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1$

這是左右焦點的雙曲線方程式

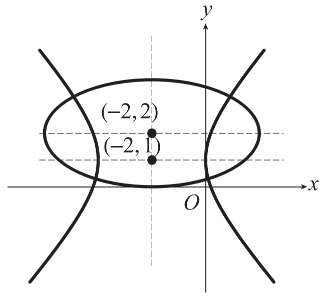
其中心為$(-2,1)$

而$a_{雙}=2$，$b_{雙}=\sqrt{5}$

則貫軸長$2a_{雙}=2\times 2=4$

共軛軸長$2b_{雙}=2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

由(1)和(2)，將兩個方程式作圖如下：



故選(D)

10. 技巧與分析

克拉瑪公式：

設方程組$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$

令$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}$

若方程組有無限多組解，則$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$

解析

方程組$\begin{cases}kx+3y+k+1=0\\x+4(k+1)y+8k^2+1=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}kx+3y=-(k+1)\\x+4(k+1)y=-\left(8k^2+1\right)\end{cases}$

令$\Delta=\begin{vmatrix}k & 3\\1 & 4(k+1)\end{vmatrix}$

$=k\times 4(k+1)-3\times 1=4k^2+4k-3$

$\Delta_x=\begin{vmatrix}-(k+1) & 3\\-\left(8k^2+1\right) & 4(k+1)\end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix}k+1 & 3\\8k^2+1 & 4(k+1)\end{vmatrix}$

$=-\left[(k+1)\times 4(k+1)-3\times\left(8k^2+1\right)\right]$

$=-\left(-20k^2+8k+1\right)=20k^2-8k-1$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}k & -(k+1)\\1 & -\left(8k^2+1\right)\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}k & k+1\\1 & 8k^2+1\end{vmatrix}$

$=-\left[k\times\left(8k^2+1\right)-(k+1)\times 1\right]$

$=-\left(8k^3-1\right)=-8k^3+1$

$\because$ 方程組有無限多組解

$\therefore$ 由克拉瑪公式可知：$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$

(1) $\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad 4k^2 + 4k - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad (2k-1)(2k+3) = 0$

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{3}{2}$

(2) $\Delta_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 20k^2 - 8k - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad (2k-1)(10k+1) = 0$

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{1}{10}$

(3) $\Delta_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -8k^3 + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad k^3 = \dfrac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{2}$

由(1)、(2)和(3)可知，$k = \dfrac{1}{2}$

11. 技巧與分析

(1) 行列式的任一行（列）的 k 倍加到另一行（列），其值不變

(2) 行列式的某一行（列）都是0，其值為0

解析

$\times(-1)$ $\quad \times(-1)$ $\quad \times 1$

$$\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & -y & x \\ z & -z & y \\ x & -x & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & 0 & x \\ z & 0 & y \\ x & 0 & z \end{vmatrix} = 0$$

（行列式的某一行（列）都是0，其值為0）

12. 技巧與分析

(1) 乘法原理：

若完成一件事可以依序分成若干步驟，則完成這件事的方法數為各步驟的方法數之乘積

(2) 相異物的組合：

從 n 個相異物取出 k 個為一組的方法數為 $C^n_k = \dfrac{\overbrace{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}^{\text{從}n\text{倒數，}k\text{個數相乘}}}{k!}$

解析

分步驟安排8個隊員在 A 、B 、C 、D 場地

(1) A 場地：從8個隊員中選2個

有 $C^8_2 = \dfrac{8\times 7}{2!} = 28$ 種

(2) B 場地：已經有2個隊員在 A 場地

剩下 $8-2=6$ 個，從中選2個

有 $C^6_2 = \dfrac{6\times 5}{2!} = 15$ 種

(3) C 場地：已經有4個隊員在 A 、B 場地

剩下 $8-4=4$ 個，從中選2個

有 $C^4_2 = \dfrac{4\times 3}{2!} = 6$ 種

(4) D 場地：已經有6個隊員在 A、B、C 場地，剩下 $8-6=2$ 個

都安排在 D 場地，只有1種

由(1)、(2)、(3)、(4)可知

共有 $28\times 15\times 6\times 1 = 2520$ 種方式

13. 技巧與分析

(1) 斜截式：

直線 $y = mx + b$ 的斜率為 m

(2) 若兩直線垂直，則其斜率乘積為 -1

(3) 兩點 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的距離為

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

解析

(1) 由直線的斜截式：

直線 $L_1 : y = ax + b$ 的斜率為 a

直線 $L_2 : y = bx + a$ 的斜率為 b

$\because \quad L_1 \perp L_2$

$\therefore$ 斜率乘積為 $-1 \quad \Rightarrow \quad ab = -1$

(2) 求兩直線 L_1 與 L_2 的交點：

$L_1 : y = ax + b \quad \Rightarrow \quad ax - y = -b \cdots\cdots$①

$L_2 : y = bx + a \quad \Rightarrow \quad bx - y = -a \cdots\cdots$②

①−②：$(a-b)x = a - b \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$x = 1$ 代入①：$a\times 1 - y = -b$

$\Rightarrow \quad y = a + b$

則 L_1 與 L_2 的交點為 $(1, a+b)$

(3) 交點$(1,a+b)$與原點$(0,0)$的距離：

$\sqrt{(1-0)^2+(a+b-0)^2}=\sqrt{1+(a+b)^2}$

$=\sqrt{1+(a^2+2ab+b^2)}$

$=\sqrt{(a^2+b^2)+2ab+1}$

$\because\ \ ab=-1$且$a^2+b^2=50$

$\therefore$ 距離為$\sqrt{50+2\times(-1)+1}=\sqrt{49}=7$

14. 技巧與分析

正弦定理：

設$\triangle ABC$的三邊長為a、b、c

則$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

解析

(1) $\because\ \ ab:bc:ca=\dfrac{ab}{abc}:\dfrac{bc}{abc}:\dfrac{ca}{abc}$

$=\dfrac{1}{c}:\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}$

且$ab:bc:ca=3:4:6$

$\therefore\ \ \dfrac{1}{c}:\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}=3:4:6$

則$c:a:b=\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{1}{3}\times12:\dfrac{1}{4}\times12:\dfrac{1}{6}\times12=4:3:2$

$\Rightarrow\ \ a:b:c=3:2:4$

(2) 由正弦定理可知，

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=3:2:4$

15. 技巧與分析

因式定理的應用：

設α、β、γ為相異實數

若$f(x)$為三次多項式

且$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=k$

則可以設$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+k$

解析

$f(x)$為三次多項式且領導係數為a

而$f(1)=f(2)=f(-2)=2$

設$f(x)=a(x-1)(x-2)[x-(-2)]+2$

$=a(x-1)(x-2)(x+2)+2$

$f(-1)=a(-1-1)(-1-2)(-1+2)+2$

$=a\times(-2)\times(-3)\times1+2=6a+2$

$\because\ \ f(-1)=8\ \ \therefore\ \ 6a+2=8\ \ \Rightarrow\ \ a=1$

則$f(x)=1\times(x-1)(x-2)(x+2)+2$

$=(x-1)(x^2-4)+2$

$=(x^3-x^2-4x+4)+2$

$=x^3-x^2-4x+6$

與$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$比較係數

得$a=1$，$b=-1$，$c=-4$，$d=6$

故選(C)

16. 技巧與分析

(1) 向量的垂直：

設兩個非零向量$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$

則$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}\ \ \Leftrightarrow\ \ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

(2) 若兩向量的內積為正值

則其夾角為銳角或$0°$

(3) 若兩向量的內積為負值

則其夾角為鈍角或$180°$

解析

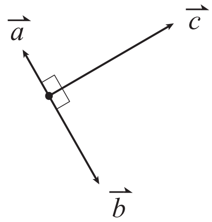
(1) $\because\ \ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0\ \ \therefore\ \ \overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$

(2) $\because\ \ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0\ \ \therefore\ \ \overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{c}$

(3) $\because\ \ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}<0$

$\therefore\ \ \overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角為鈍角或$180°$

由(1)、(2)和(3)，可以畫出$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$的相對位置



故$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$反向，夾角為$180°$

因此$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\times|\overrightarrow{b}|\times\cos180°$

$=5\times12\times(-1)=-60$

17. 技巧與分析

(1) 代換積分：

設 $u=g(x)$ 是可微分函數

則 $\int_a^b f(g(x))\times g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

(2) $\int_a^b u^n du=\frac{1}{n+1}u^{n+1}\Big|_a^b$

$=\frac{1}{n+1}\times b^{n+1}-\frac{1}{n+1}a^{n+1}$

其中 $n\neq -1$

解析

(1) 令 $u=3x-2$

將上式等號的兩側對 x 微分：

$\frac{du}{dx}=3 \quad\Rightarrow\quad du=3dx \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{1}{3}du$

(2) 定積分的範圍：

x	1	3
u	1	7

由(1)和(2)可知，

$\int_1^3 (3x-2)^{110}dx=\int_1^7 u^{110}\times\frac{1}{3}du=\frac{1}{3}\int_1^7 u^{110}du$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{110+1}u^{110+1}\Big|_1^7=\frac{1}{333}u^{111}\Big|_1^7$

$=\frac{1}{333}\times 7^{111}-\frac{1}{333}\times 1^{111}=\frac{7^{111}}{333}-\frac{1}{333}=\frac{7^{111}-1}{333}$

18. 技巧與分析

(1) 週期的變化：

若 $f(\theta)$ 的週期為 T

則 $f(k\theta)$ 的週期為 $\frac{T}{|k|}$，其中 $k\neq 0$

(2) 三角函數的平方和關係式：

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

(3) $a\sin\theta+b\cos\theta$ 的極值：

最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}$

最小值為 $-\sqrt{a^2+b^2}$

(4) $y=\sin\theta$ 和 $y=\cos\theta$ 的圖形

解析

(1) $y=\tan\theta$ 的週期為 π

$\because\quad \tan\frac{\theta}{3}=\tan\left(\frac{1}{3}\times\theta\right)$

$\therefore\quad y=\tan\frac{\theta}{3}$ 的 θ 係數為 $\frac{1}{3}$

則 $y=\tan\frac{\theta}{3}$ 的週期為 $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}=3\pi$

(2) 三角函數的平方和關係式：

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$\Rightarrow\quad \tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$

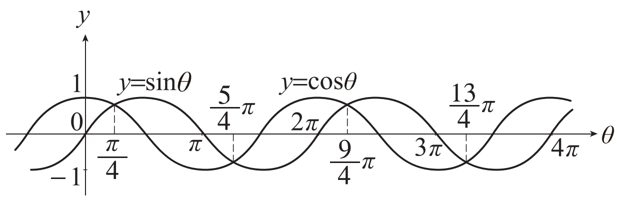
(3) $\sin\theta+\cos\theta$ 的極值如下：

最大值 $=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

最小值 $=-\sqrt{1^2+1^2}=-\sqrt{2}$

則 $-\sqrt{2}\leq\sin\theta+\cos\theta\leq\sqrt{2}$

(4) 在坐標平面上，觀察 $y=\sin\theta$ 和 $y=\cos\theta$ 的圖形



若 $\cos\theta=\sin\theta$

則 $\theta=\frac{\pi}{4}$、$\frac{5}{4}\pi$、$\frac{9}{4}\pi$、$\frac{13}{4}\pi\cdots$

即：$\theta=\frac{\pi}{4}+n\pi$，其中 n 為整數

由(1)、(2)、(3)、(4)的討論

故選項(C)是正確的

19. 技巧與分析

(1) 虛數單位：

若 $i=\sqrt{-1}$，則 $i^2=-1$

(2) 複數的除法：

$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$

$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

(3) 複數的相等：

設 a、b、c、d 均為實數

若 $a+bi=c+di$

則 $a=c$ 且 $b=d$

解析

(1) $\because\ \left(\sqrt{3}\pm i\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2\pm 2\times\sqrt{3}\times i+i^2$

$$=3\pm 2\sqrt{3}i+\left(-1\right)=2\pm 2\sqrt{3}i$$

$$\therefore\ \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^2}{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}=\frac{2-2\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{2\times\left(1-\sqrt{3}i\right)}{2\times\left(1+\sqrt{3}i\right)}=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^2}{\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)}$$

$$=\frac{1^2-2\times1\times\sqrt{3}i+\left(\sqrt{3}i\right)^2}{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1-2\sqrt{3}i+\left(-3\right)}{4}$$

$$=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$=\frac{2\times\left(-1-\sqrt{3}i\right)}{4}$$

$$=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

(2) $\because\ \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2$ 與 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2$ 互為倒數

$$\therefore\ \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2=\frac{2}{-1-\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{2\left(-1+\sqrt{3}i\right)}{\left(-1-\sqrt{3}i\right)\left(-1+\sqrt{3}i\right)}$$

$$=\frac{2\left(-1+\sqrt{3}i\right)}{\left(-1\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(-1+\sqrt{3}i\right)}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

由(1)和(2)可知

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$=-1=-1+0i$$

則 $a=-1$ ，$b=0$ ，因此 $a+b=-1+0=-1$

20. 技巧與分析

算幾不等式：

若 $a\geq 0$ ，$b\geq 0$

則 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

解析

x^2+2 與 $\frac{9}{x^2+2}$ 均為正數

由算幾不等式：

$$\frac{\left(x^2+2\right)+\frac{9}{x^2+2}}{2}\geq\sqrt{\left(x^2+2\right)\times\frac{9}{x^2+2}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^2+2+\frac{9}{x^2+2}}{2}\geq 3$$

$$\overset{\times2}{\Rightarrow}\ x^2+2+\frac{9}{x^2+2}\geq 6$$

$$\overset{-4}{\Rightarrow}\ x^2-2+\frac{9}{x^2+2}\geq 2$$

故 $x^2-2+\frac{9}{x^2+2}$ 的最小值為 2

21. 技巧與分析

加法原理：

若完成一件事的方法可以分成若干類（任兩類不重複），則完成這件事的方法數為各類方法數的總和

解析

(1) 3 本課本都在同一層：

$\underbrace{3}_{\text{從三層中選一層}}\times\underbrace{3!}_{\text{3 本課本的排法}}=3\times6=18$ 種排法

(2) 3 本課本都在不同層：

（每一層只有 1 本課本）

$3!=6$ 種排法

(3) 恰有 2 本在同一層：

$\underbrace{3\times C^3_2\times 2!}_{\text{從三層中選一層，再選 2 本課本排入}}\times\underbrace{2}_{\text{剩下 1 本課本有兩層可選}}=36$ 種排法

由(1)、(2)、(3)可知

共有 $18+6+36=60$ 種排法

22. 技巧與分析

直線與圓錐曲線的關係：

直線與圓錐曲線的方程式可以合併成

$ax^2+bx+c=0$ 或 $ay^2+by+c=0$

若直線與圓錐曲線相切（只有1個交點）

則合併的方程式有兩相等實根

其判別式為 0，即 $b^2-4ac=0$

解析

(1) 拋物線 $f(x)=-x^2+4x-1$

$\Rightarrow \quad y=-x^2+4x-1=-\left(x^2-4x\right)-1$

$=-\left(x^2-2\times2\times x+2^2\right)-1+2^2$

$=-\left(x-2\right)^2+3$

則拋物線的頂點為 $(2,3)$，開口向下

(2) 令 $mx=-x^2+4x-1$

$\Rightarrow \quad x^2+(m-4)x+1=0$

若 $y=mx$ 與 $y=-x^2+4x-1$ 相切（只有1個交點）

則上式有兩相等實根，其判別式為 0

故 $(m-4)^2-4\times1\times1=0$

$\Rightarrow \quad \left(m^2-8m+16\right)-4=0$

$\Rightarrow \quad m^2-8m+12=0$

$\Rightarrow \quad (m-2)(m-6)=0$

$\Rightarrow \quad m=2$ 或 6

① 當 $m=2$ 時：

$x^2+(m-4)x+1=0$

$\Rightarrow \quad x^2+(2-4)x+1=0$

$\Rightarrow \quad x^2-2x+1=0$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2=0$

$\Rightarrow \quad x=1$

將 $x=1$ 代入 $y=-x^2+4x-1$：

$y=-1^2+4\times1-1=-1+4-1=2$

則直線與拋物線相切於點 $(1,2)$

② 當 $m=6$ 時：

$x^2+(m-4)x+1=0$

$\Rightarrow \quad x^2+(6-4)x+1=0$

$\Rightarrow \quad x^2+2x+1=0$

$\Rightarrow \quad (x+1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$

將 $x=-1$ 代入 $y=-x^2+4x-1$：

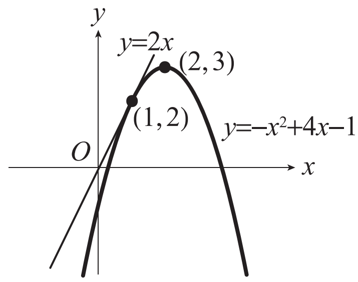
$y=-(-1)^2+4\times(-1)-1$

$=-1-4-1=-6$

則直線與拋物線相切於點 $(-1,-6)$

由於直線與拋物線的切點在第一象限內

故 $m=2$



23. 技巧與分析

(1) $\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx$

$=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\int_a^b x^n dx=\left.\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right|_a^b$

$=\dfrac{1}{n+1}\times b^{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\times a^{n+1}$

其中 $n\neq-1$

解析

(1) $\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)=x\sqrt{x}-1+1-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$=x\sqrt{x}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$x\sqrt{x}=x\times x^{\frac{1}{2}}=x^{1+\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$

$\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=x^{-\frac{3}{2}}$

(2) $\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx=\left.\dfrac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right|_1^4$

$=\left.\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right|_1^4=\left.\dfrac{2}{5}\left(\sqrt{x}\right)^5\right|_1^4$

$=\dfrac{2}{5}\times\left(\sqrt{4}\right)^5-\dfrac{2}{5}\times\left(\sqrt{1}\right)^5$

$=\dfrac{64}{5}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{62}{5}$

(3) $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}dx = \left.\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}\right|_1^4$

$= -2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = \left.\frac{-2}{\sqrt{x}}\right|_1^4 = \frac{-2}{\sqrt{4}} - \frac{-2}{\sqrt{1}}$

$= -1-(-2) = 1$

由(1)、(2)、(3)可知

$\int_1^4 \left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx$

$= \int_1^4 \left(x\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$

$= \int_1^4 x\sqrt{x}dx - \int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

$= \frac{62}{5}-1 = \frac{57}{5}$

24. 技巧與分析

了解資料平均數、中位數、眾數與全距的意義

解析

(1) 21棵的高度總和

$= 8+3\times 9+2\times 10+2\times 11+4\times 12+3\times 13$
$+2\times 14+2\times 15+16+24 = 262$

其平均數 $= 262 \div 21 \fallingdotseq 12.48$（公分）

移除24（公分）的數據，剩下20棵的高度總和 $= 262-24 = 238$

其平均數 $= 238 \div 20 = 11.9$（公分）

則移除前後的平均數相差

$\fallingdotseq 12.48-11.9 = 0.58$（公分）

(2) 21棵植物高度的中位數（由小到大的第11個數據）為12（公分）

移除24（公分）的數據，剩下20棵植物高度的中位數（由小到大的第10、11個數據平均）為 $\frac{12+12}{2} = 12$（公分）

則中位數沒有改變

(3) 21棵植物高度的眾數為12（公分）

移除24（公分）的數據，剩下20棵植物高度的眾數也是12（公分），則眾數沒有改變

(4) 21棵植物高度的全距為 $24-8 = 16$（公分）

移除24（公分）的數據，剩下20棵植物高度的全距為 $16-8 = 8$（公分）

則移除前後的全距相差

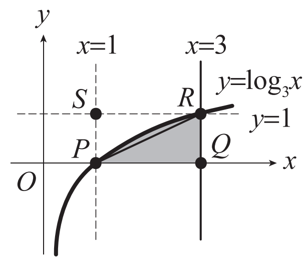
$= 16-8 = 8$（公分）

由(1)、(2)、(3)、(4)可知，全距改變最多

25. 技巧與分析

了解對數函數 $y = \log_a x$ 的圖形

解析



(1) 如圖，畫出直線 $x=1$ 和 $y=1$，則四邊形 $PQRS$ 為長方形，面積為 $2\times 1 = 2$

(2) $\triangle PQR$ 是直角三角形

面積為 $\frac{1}{2}\times 2\times 1 = 1$

(3) $\because$ A 是鋪色部分的面積

$\therefore$ $A <$ 長方形 $PQRS$ 的面積 $= 2$

且 $A > \triangle PQR$ 的面積 $= 1$

則 $1 < A < 2$，故選(C)