

110 年 四技二專

統一入學測驗

數學 (B)

一、試題分析

本次考題難易度分析如下表：

易	3、5、7、8、11、17、18
中	1、2、4、6、9、10、12、13、14、15、19、20、23
難	16、21、22、24、25

自 106 年統測數 B 附參考公式以來皆為課本公式之提醒，然而今年卻出現必須使用參考公式方能解題之參考 ($\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$ 或 $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$)。在考題的設計上，簡易題型仍占多數，並且仍著重基本觀念及定義之熟悉，但最大特別之處在於中等難度考題幾乎在測驗學生細心及計算能力，而難題除了計算繁瑣外，更挑戰學生作答時的制約習慣。學生必須有足夠信心及對於計算方向明確方能正確解出。

1. 簡易題皆為知悉其數學符號或定義，都能輕易直接計算求解。

2. 中等難度題型分析：

第 1 題：考指數基本定義與圖形的遞增遞減觀念。

第 2 題：雖簡單，但易粗心誤認為是國中所學「兩個聯立組有相同解」之題型，導致解題方向錯誤。

第 4 題：由於選項的角度表示法不同，利用常使用的同界角差量為 360° 的整數倍數會提高計算量。

第 10 題：考資料距離愈集中，其標準差愈小的觀念。

第 15 題：需要耐心計算兩邊的 3 階行列式，若用降階需注意正負號。

第 19 題： A 、 B 、 C 相關位置畫正確即可。

第 20 題：利用敘述無窮級數而非前 n 項級數和 S_n 來命題，也容易讓學生混淆，但

由於選項沒有 $\frac{5 \times (5+1)}{2} = 15$ ，減少同學錯誤之計算。

其餘中等題皆為計算較多步驟但觀念不難。

3. 較難難度題型分析：

第 16 題：難題考出學生大量計算能力及公式之推廣。此題需使用到兩次二倍角公式，大大增加其計算量，並且若先計算出 $\cos 4\theta$ ，將還有判斷正負之困難。

第 21 題：較偏普通高中考題，命題巧妙用選取方法數較少的方式，讓考題符合技術型高中範圍，但其實仍有許多不必要的重複計算。

第 22 題：選項答案整理後表示法與計算思維過程有偌大的差異，會影響學生思考過程。

第 24 題：觀念不算難，但會有 $(x-1)$ 、 $(x+1)$ 及使用餘式定理的錯覺，而忽略直式除法。

第 25 題：題目敘述為考古題，但必須使用參考資料 37° 的三角函數值，增加計算之不熟悉。

【統測望遠鏡】

接下來為 108 課綱第一年考題，課綱精神著重於數學素養，從這次的考題中可看出兩大特性：第一，開始有許多考題結合生活經驗，如這次星座、電玩設定、投資股票、店家位置等皆是生活中常見情形。第二，生活中的數據常常不是整數，開始有 37° 等角度出現，同學需特別注意參考公式所給的資訊。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	不等式及其應用	2
三角函數	2	排列組合	2
向量	0	機率	2
指數與對數及其運算	2	統計	2
數列與級數	1	三角函數的應用	3
式的運算	1	二次曲線	3
方程式	2	微積分及其應用	2



110 學年度四技二專統一入學測驗

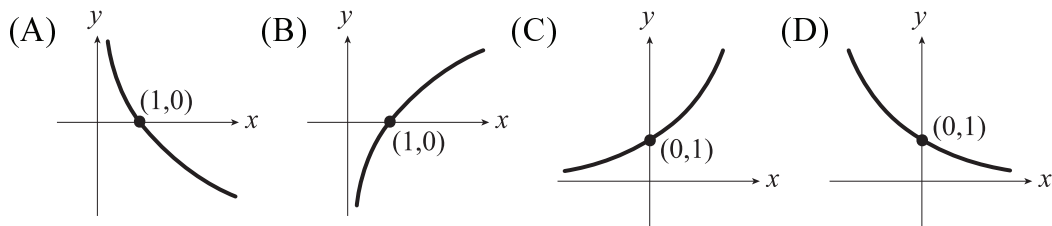
數學 (B)

數學 B 參考公式

- 二倍角公式： $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ； $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$
- 橢圓方程式 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ， $a \geq b > 0$ ：中心 (h, k) ，焦點 $(h \pm c, k)$ ，
其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
- $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ ， $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
- 設有一組抽樣資料 x_1, x_2, \dots, x_n ，其算術平均數為 \bar{x} ，
則樣本標準差為 $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$
- 參考數值： $1\pi = 180^\circ$ 、 $\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$ 、 $\cos 37^\circ \approx \frac{4}{5}$ 、 $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$

單選題 (每題 4 分，共 100 分)

() 1. 若 $f(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ ，則下列何者為 $f(x)$ 之圖形？



() 2. 若 a 、 b 為常數且兩方程組 $\begin{cases} x+2y=3 \\ ax+6y=9 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+by=10 \end{cases}$ 皆為相依方程組，則

$2a - b = ?$

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。

() 3. 下列數對 (x,y) 何者滿足聯立不等式 $\begin{cases} 100x + 2y - 100 \geq 0 \\ 2x + 100y + 100 \leq 0 \end{cases}$?

(A)(0,0) (B)(1,1) (C)(2,1) (D)(2,-2)。

() 4. 若下列四個選項中，其中有三個互為同界角，則下列何者不是另外三個選項的同界角？

(A) $-\frac{9\pi}{5}$ (B) -36° (C) $\frac{\pi}{5}$ (D) 1116° 。

() 5. 若下表為某些名人之星座統計表，則星座代號之眾數為何？

(A) 8.5 (B) 9 (C) 10 (D) 12。

名人代號	出生年月日	星座	星座代號
A	1887/10/31	天蠍座	10
B	1891/08/13	獅子座	7
C	1905/10/23	天秤座	9
D	1910/04/27	金牛座	4
E	1923/01/15	魔羯座	12
F	1950/10/12	天秤座	9
G	1950/07/13	巨蟹座	6
H	1956/08/31	處女座	8

() 6. 若 $a = \log 2$ ， $b = \log 3$ ，則 $10^{2a+b} = ?$

(A) 2 (B) 3 (C) 12 (D) 24。

() 7. 若圓 $C: x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ ，則圓 C 之直徑為何？

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12。

() 8. 某款電玩在開始闖關前需進行設定：第一個步驟是選擇難度，由入門、普通或高手等 3 種難度擇一；第二個步驟由 4 種盔甲擇一；第三個步驟由 5 種武器擇一。若必須依序完成這三個步驟，設定才算完成，則有幾種闖關前設定？

(A) 12 (B) 23 (C) 36 (D) 60。

() 9. 袋中有 5 顆相同的紅球及 3 顆相同的白球，今甲、乙兩人互賭，從袋中隨機抽出 3 顆球。若皆為紅球，則甲給乙 420 元，否則乙須給甲 140 元。求甲獲取金額的期望值為多少元？

(A) 40 (B) 20 (C) -20 (D) -40。

() 10. 下列哪一組樣本的標準差最小？

(A) 1、4、7、10、13 (B) 55、57、58、59、61

(C) 100、101、102、103、104 (D) 216、218、220、222、224。

- () 11. 已知兩多項式函數 $g(x)$ 及 $h(x)$ 之導函數分別為 $g'(x)$ 及 $h'(x)$ ，
且 $h(x) = 4g(x) - 7x + 9$ 。若 $g'(0) = 3$ ，則 $h'(0) = ?$
(A) 5 (B) 9 (C) 14 (D) 21。
- () 12. 若直線 $L_1: y = mx + b$ 與直線 $L: 2x + 3y = 1$ 平行，且直線 L_1 與 x 軸的交點之
 x 坐標為 2，則下列何者正確？
(A) $m + b = \frac{2}{3}$ (B) $m + b = 6$ (C) $m \times b = \frac{2}{3}$ (D) $m \times b = 9$ 。
- () 13. 若圓 $C_1: x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ 、圓 $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$ ，則直線
 $L: x - y - 4 = 0$ 與兩圓 C_1 、 C_2 共有幾個交點？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。
- () 14. 已知 $\tan \theta = \frac{7}{25}$ 。若 $\sin \theta \cos \theta = a$ ，則下列何者正確？
(A) $\frac{1}{2} < a < 1$ (B) $0 < a < \frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2} < a < 0$ (D) $-1 < a < -\frac{1}{2}$ 。
- () 15. 若 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ ，則 $a + b = ?$
(A) -9 (B) -1 (C) 3 (D) 5。
- () 16. 已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ 。若 $\sin 4\theta = a$ ，則下列何者正確？
(A) $0 < a < \frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{4} < a < 1$ 。
- () 17. 若橢圓曲線上的任意點到兩點 $(2, -3)$ 、 $(-4, -3)$ 的距離和為 10，則此橢圓之
短軸長為何？
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8。
- () 18. 若小林準備 600 萬元投資股票 x 萬元及債券 y 萬元，而投資股票金額不會低
於債券金額的 2 倍，則下列何者為題意之限制條件？
(A) $\begin{cases} x + y \leq 600 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x + y \leq 600 \\ 2x \geq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x + y > 600 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x + y > 600 \\ 2x \geq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 。

- () 19. 已知 A 、 B 、 C 三家某知名商店， B 店位於 A 店往西 240 公尺往北 120 公尺處，而 C 店位於 B 店往東 180 公尺往南 40 公尺位置。求 A 店與 C 店的距離為多少公尺？
 (A) 100 (B) 120 (C) 140 (D) 160。
- () 20. 若無窮級數為 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}$ ，則前 5 項之和為何？
 (A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50。
- () 21. 若從 1、2、3、4、5、6、7 七個數字中取兩個相異數字排成二位數，則所有這些不同的二位數之總和為何？
 (A) 42 (B) 924 (C) 1848 (D) 3696。
- () 22. 已知某校新生的生日都沒有 2 月 29 日，而其他每個出生日期的可能性均相等，且新生分班是隨機的。若某新生班級共有 30 位學生，則該班學生生日皆不同的機率為何？
 (A) $\left(\frac{364}{365}\right)^{29}$ (B) $1 - C_2^{30} \times \frac{1}{365}$ (C) $C_{30}^{365} \times \left(\frac{1}{365}\right)^{30}$ (D) $P_{30}^{365} \times \left(\frac{1}{365}\right)^{30}$ 。
- () 23. 若 $f(x) = (x^2 + 1)^{100}$ ，則 $\int_0^1 [2x + f(x)] dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx = ?$
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。
- () 24. 已知 $f(x) = x^2 + bx + c$ 為二次多項式。若 $f(x)$ 被 $(x+1)^2$ 除的餘式被 $x-1$ 整除，且 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除的餘式被 $x+1$ 整除，則 $c = ?$
 (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3。
- () 25. 孫悟空師徒四人取經途中經過一廣闊平原，看到前方有一尊高大佛像，其頂部仰角為 37° ，四人往佛像前行 31 公尺後，佛像頂部仰角變為 53° 。求佛像高度約為多少公尺？
 (A) 57 (B) 53 (C) 37 (D) 31。

110 年統一入學測驗 數學 (B)

答 案

1.D 2.B 3.D 4.B 5.B 6.C 7.C 8.D 9.A 10.C
11.A 12.A 13.C 14.B 15.C 16.C 17.D 18.A 19.A 20.A
21.C 22.D 23.B 24.D 25.B

本試題答案係依據統一入學測驗中心公布之標準答案

1. 技巧與分析

(1) 瞭解指數函數的圖形

(2) $0 < a < 1 \Rightarrow f(x) = a^x$ 為遞減函數

解析

$$\because f(0) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^0 = 1$$

故通過 (0,1) 點……①

考慮底數 $\frac{\pi}{4} < \frac{4}{4} = 1$

\therefore 圖形為遞減函數……②

承①②條件，故選(D)

2. 技巧與分析

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 為相依方程組

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

解析

$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ ax + 6y = 9 \end{cases}$ 為相依方程組

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} \Rightarrow a = 3$$

$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + by = 10 \end{cases}$ 為相依方程組

$$\Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{b} = \frac{5}{10} \Rightarrow b = 2$$

$$\therefore 2a - b = 2 \times 3 - 2 = 4$$

故選(B)

3. 技巧與分析

兩個不等式的區域有無限多個點符合
故此題將答案反代最適合

解析

將選項(A)(B)(C)(D)分別代入

$$\begin{cases} 100x + 2y - 100 \\ 2x + 100y + 100 \end{cases}$$

判斷哪個選項符合題目之不等式條件

(A) (0,0) 代入

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 - 100 \leq 0 \text{ (不合)} \\ 0 + 0 + 100 \geq 0 \text{ (不合)} \end{cases}$$

(B) (1,1) 代入

$$\Rightarrow \begin{cases} 100 + 2 - 100 \geq 0 \text{ (合)} \\ 2 + 100 + 100 \geq 0 \text{ (不合)} \end{cases}$$

(C) (2,1) 代入

$$\Rightarrow \begin{cases} 200 + 2 - 100 \geq 0 \text{ (合)} \\ 4 + 100 + 100 \geq 0 \text{ (不合)} \end{cases}$$

(D) (2,-2) 代入

$$\Rightarrow \begin{cases} 200 - 4 - 100 \geq 0 \text{ (合)} \\ 4 - 200 + 100 \leq 0 \text{ (合)} \end{cases}$$

故選(D)

4. 技巧與分析

同界角之最小正同界角皆相同

解析

將四個選項角度化為最小正同界角

$$(A) -\frac{9\pi}{5} \xrightarrow{+2\pi} \frac{\pi}{5}$$

$$(B) -36^\circ \xrightarrow{+360^\circ} 324^\circ$$

$$(C) \frac{\pi}{5}$$

$$(D) 1116^\circ \stackrel{-3 \times 360^\circ}{\Rightarrow} 36^\circ = \frac{\pi}{5}$$

只有(B)不同

故(B)不是另外三個選項之同界角

〔備註〕

互為同界角之角度差量為 360° 的整數倍數，故此題也可將選項互減判斷，但選項有度及弧度兩種，不易計算相減

5. 技巧與分析

利用正字符號計數

解析

用正字符號計數星座代號次數

10	7	9	4	12	6	8
—	—	—	—	—	—	—

星座代號之眾數為 9

故選(B)

6. 技巧與分析

(1) 對數還原指數：若 $x = \log_a b \Rightarrow a^x = b$

(2) 指數律： $a^{m+n} = a^m \times a^n$ ， $a^{mn} = (a^m)^n$

解析

$$a = \log 2 \Rightarrow 10^a = 2$$

$$b = \log 3 \Rightarrow 10^b = 3$$

$$\begin{aligned} \text{所求 } 10^{2a+b} &= 10^{2a} \times 10^b = (10^a)^2 \times (10^b) \\ &= 2^2 \times 3 = 12 \end{aligned}$$

故選(C)

7. 技巧與分析

將圓的一般式化為圓的標準式

解析

$$\text{圓 } C : x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 8x + 4^2) + (y^2 + 6y + 3^2) = 4^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25 = 5^2$$

得圓 C 半徑為 5

$$\Rightarrow \text{直徑} = 2 \times 5 = 10$$

故選(C)

〔另解〕

$$\text{圓一般式 } x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

$$\text{其半徑} = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + e^2 - 4f}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{此題直徑} &= 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{(-8)^2 + 6^2 - 4 \times 0} \\ &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

8. 技巧與分析

排列組合中計數之乘法原理

解析

分三個步驟

每個步驟分別有 3、4、5 種選擇數

故每個步驟選一方法數之情形有

$$3 \times 4 \times 5 = 60 \text{ 種選擇}$$

故選(D)

9. 技巧與分析

(1) 古典機率 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ， A 為事件，

S 為樣本空間

(2) 從 n 件相異物品中選 m 件之組合數為

$$C_m^n$$

(3) 期望值 $E = \sum m \times P$

解析

共 $5+3=8$ 顆球取 3 球方法數為

$$C_3^8 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

$$P(3 \text{ 顆皆紅}) = \frac{C_3^5}{56} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

$$P(\text{非 } 3 \text{ 顆皆紅}) = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$$

故 E (甲獲取金額)

$$= P(3 \text{ 顆皆紅}) \times (-420)$$

$$+ P(\text{非 } 3 \text{ 顆皆紅}) \times 140$$

$$= \frac{5}{28} \times (-420) + \frac{23}{28} \times 140$$

$$= 5 \times (-15) + 23 \times 5 = -75 + 115 = 40$$

故選(A)

〔備註〕

求機率時，因每件物品被選取之機率相同，故需將物品想成相異物

10. 技巧與分析

除了利用標準差求出比較，觀察選項皆為五個數據，考題數據若經過設計則可利用差量推導標準差之大小

解析

依序討論選項中數字的差量

用 (a, b, c, d) 序對表示

$$(A) 1, 4, 7, 10, 13 \Rightarrow (3, 3, 3, 3)$$

$$(B) 55, 57, 58, 59, 61 \Rightarrow (2, 1, 1, 2)$$

$$(C) 100, 101, 102, 103, 104 \Rightarrow (1, 1, 1, 1)$$

$$(D) 216, 218, 220, 222, 224 \Rightarrow (2, 2, 2, 2)$$

各組樣本皆為五個數據

明顯差量皆小的標準差必較小

得標準差大小順序為

$$S_{(C)} < S_{(B)} < S_{(D)} < S_{(A)}$$

故選(C)

11. 技巧與分析

若 $f(x) = g(x) + h(x)$ ，且 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 之一階導函數存在，則 $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

解析

$$\because h(x) = 4g(x) - 7x + 9$$

$$\Rightarrow h'(x) = 4g'(x) - 7$$

$$\therefore h'(0) = 4g'(0) - 7 = 4 \times 3 - 7 = 5$$

故選(A)

12. 技巧與分析

(1) 斜截式 $L: y = mx + b$ 之斜率為 m

(2) 若直線 $L: ax + by + c = 0$ ，則斜率為 $-\frac{a}{b}$

(3) 若 $L_1 \parallel L_2$ ，且斜率存在 $\Rightarrow m_1 = m_2$

解析

$L_1: y = mx + b$ 之斜率為 m

$L_2: 2x + 3y = 1$ 之斜率為 $-\frac{2}{3}$

$$\because L_1 \parallel L_2 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow L_1: y = -\frac{2}{3}x + b$$

又 L_1 與 x 軸交點為 $(2, 0)$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

$$\therefore m + b = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$m \times b = -\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = -\frac{8}{9}$$

故選(A)

13. 技巧與分析

(1) 將圓一般式化成標準式求出圓心及半徑

(2) 圓心至直線距離 $= d(O, L)$

若 $d(O, L) = r \Rightarrow$ 恰交於 1 點 (相切)

$d(O, L) < r \Rightarrow$ 交於 2 點 (相割)

解析

$$\textcircled{1} \text{ 圓 } C_1: x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

則圓心 $O_1(1, -1)$ 且半徑 $r_1 = \sqrt{2}$

$$d(O_1, L) = \frac{|1 - (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r_1$$

$\Rightarrow C_1$ 與 L 恰交於 1 點

$$\textcircled{2} \text{ 圓 } C_2: x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$$

則圓心 $O_2(2, -2)$ 且半徑 $r_2 = \sqrt{8}$

$$d(O_2, L) = \frac{|2 - (-2) - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 0 < \sqrt{8} = r_2$$

$\Rightarrow C_2$ 與 L 交於 2 點

承 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 故共有 $1 + 2 = 3$ 個交點，此題選(C)

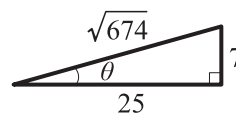
14. 技巧與分析

(1) $\sin \theta \cos \theta$ 與 $(\tan \theta + \cot \theta)$ 互為倒數

(2) $\tan \theta$ 與 $\cot \theta$ 互為倒數

解析 (適用新課程)

$$\tan \theta = \frac{7}{25}$$



繪圖如右且斜邊 $= \sqrt{674}$

$$\because \tan \theta = \frac{7}{25} > 0 \Rightarrow \theta \in \text{I、III}$$

$$\text{若 } \theta \in \text{I} \Rightarrow \sin \theta = \frac{7}{\sqrt{674}}, \cos \theta = \frac{25}{\sqrt{674}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{175}{674}$$

$$\text{若 } \theta \in \text{III} \Rightarrow \sin \theta = \frac{-7}{\sqrt{674}}, \cos \theta = \frac{-25}{\sqrt{674}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{175}{674}$$

$$\therefore a = \frac{175}{674}$$

[另解] (適用舊課程)

$$\tan \theta = \frac{7}{25} \Rightarrow \cot \theta = \frac{25}{7}$$

$$\therefore \tan \theta + \cot \theta = \frac{7}{25} + \frac{25}{7} = \frac{674}{175}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{\tan \theta + \cot \theta} = \frac{175}{674} < \frac{1}{2}$$

$$\therefore 0 < a < \frac{1}{2}, \text{ 故選(B)}$$

15. 技巧與分析

三階行列式展開

解析

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times a \times 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 2 \times 6 \times (-1)$$

$$= 4a + 12$$

$$\begin{vmatrix} 0 & b & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + 2 \times 4 \times 3 - 0 - 4 \times b \times 1 - 0$$

$$= 24 - 4b$$

$$\text{依題意得 } 4a + 12 = 24 - 4b$$

$$\Rightarrow 4a + 4b = 12$$

$$\Rightarrow a + b = 3$$

故選(C)

[備註]

此題明顯第一行皆有 2 個元素為 0，故此命題可能想讓考生降階展開。但注意，右邊行列式降階有一個負號

16. 技巧與分析

$$(1) \text{ 若 } 0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta_1 < \sin \theta_2$$

$$(2) \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

解析 (適用新課程)

$$\text{根據參考公式 } \sin \theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta \approx 37^\circ$$

依四捨五入法則

$$\text{可令 } 36.5^\circ \leq \theta < 37.5^\circ \Rightarrow 146^\circ \leq 4\theta < 150^\circ$$

$f(x) = \sin x$ 在第二象限遞減

$$\Rightarrow \sin 146^\circ \geq \sin 4\theta > \sin 150^\circ$$

$$\Rightarrow \sin 34^\circ \geq \sin 4\theta > \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow \sin 30^\circ < \sin 4\theta \leq \sin 34^\circ < \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \sin 4\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\text{其中 } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{8}}{4} < \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{3}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \sin 4\theta < \frac{3}{4}$$

故選(C)

[另解] (適用舊課程)

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5} \text{ 畫圖可輕易算出 } \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin 4\theta = 2 \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$= 2(2 \sin \theta \cos \theta)(1 - 2 \sin^2 \theta)$$

$$= 2 \times 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \left[1 - 2 \times \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{48}{25} \times \left(1 - \frac{18}{25} \right)$$

$$= \frac{48 \times 7}{25 \times 25} = \frac{336}{625}$$

$$\text{可比較得 } \frac{1}{2} < \frac{336}{625} < \frac{3}{4}$$

故選(C)

17. 技巧與分析

(1) 橢圓的定義：

設 F 、 F' 為相異兩定點，且 $\overline{FF'} = 2c$
 在平面上所有到 F 、 F' 的距離和為一定
 值 $2a$ ，即 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$
 且 $2a > \overline{FF'}$ 的點 P 所形成的圖形稱為橢
 圓，其中 F 、 F' 為橢圓的焦點

(2) 橢圓的重要關係式：

設長軸長 $\overline{AA'} = 2a$ ，短軸長 $\overline{BB'} = 2b$
 焦距 $\overline{FF'} = 2c$ ，則 a 、 b 、 c 的關係式為
 $a^2 = b^2 + c^2$ ， $a > b > 0$ ， $a > c > 0$

解析

依題意及橢圓定義可知

$(2, -3)$ 及 $(-4, -3)$ 為橢圓兩焦點

記 $F_1(2, -3)$ 、 $F_2(-4, -3)$ 及

長軸長 $2a = 10 \Rightarrow a = 5$

而 $2c = \overline{F_1F_2} = |2 - (-4)| = 6 \Rightarrow c = 3$

又 $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = 4$

\Rightarrow 短軸長 $= 2b = 8$

故選(D)

18. 技巧與分析

依題目中的限制條件列出不等式組

解析

600 萬元投資股票 x 萬元及債券 y 萬元

$\Rightarrow x + y \leq 600$

股票 x 萬元不會低於債券 y 萬元的 2 倍

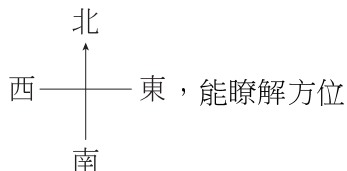
$\Rightarrow x \geq 2y$

投資數量 x 、 y 不會負數

$\Rightarrow x \geq 0$ ， $y \geq 0$

故選(A)

19. 技巧與分析



解析

依題畫圖如右

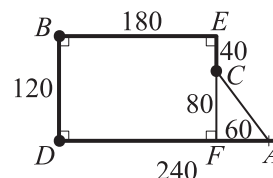
並設立 D 、 E 、 F
 三點於圖

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overline{CF} &= \overline{EF} - \overline{EC} \\ &= 120 - 40 = 80 \end{aligned}$$

$$\overline{FA} = \overline{DA} - \overline{DF} = 240 - 180 = 60$$

$$\text{因此 } \overline{AC} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100$$

故選(A)



20. 技巧與分析

知道 $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

解析

前五項之和

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^5 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1(1+1)}{2} + \frac{2(2+1)}{2} + \frac{3(3+1)}{2} + \frac{4(4+1)}{2} \\ &\quad + \frac{5(5+1)}{2} \end{aligned}$$

$$= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$$

故選(A)

21. 技巧與分析

(1) 能利用列舉，規律寫出可能排列情形

(2) 等差級數和 $S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$

解析

十位數為 1 的有 12, 13, 14, 15, 16, 17 總和為 87

十位數為 2 的有 21, 23, 24, 25, 26, 27 總和為 146

十位數為 3 的有 31, 32, 34, 35, 36, 37 總和為 205

十位數為 4 的有 41, 42, 43, 45, 46, 47 總和為 264

十位數為 5 的有 51, 52, 53, 54, 56, 57 總和為 323

十位數為 6 的有 61, 62, 63, 64, 65, 67 總和為 382

十位數為 7 的有 71, 72, 73, 74, 75, 76 總和為 441

\Rightarrow 全部和為

$$87 + 146 + 205 + 264 + 323 + 382 + 441 = 1848$$

故選(C)

〔備註〕

十位數為 2 的總和比十位數為 1 的總和多 $6 \times 10 - 1 = 59$ ，有其規律，故此題和可想成首項 = 87，項數為 7，公差為 59 之等差級數

$$\text{和} = \frac{[2 \times 87 + (7-1) \times 59] \times 7}{2} = 1848, \text{ 便可省略許多列舉之計算}$$

略許多列舉之計算

〔另解〕(偏普通高中)

1~7 挑選相異二數形成兩位數共有 $P_2^7 = 42$ 個二位數

但每個數字在個位數及十位數出現次數均等故 1~7 等七個數在個位數及十位數各出現

$$\frac{42}{7} = 6 \text{ 次}$$

將所有二位數加總分成十位數加總

及個位數加總再求和

$$= 6 \times (1+2+3+\dots+7) \times 10 \\ + 6 \times (1+2+3+\dots+7)$$

$$= 6 \times 28 \times 10 + 6 \times 28 = 1848$$

故選(C)

22. 技巧與分析

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

解析

生日無 2 月 29 日

⇒ 僅考量 365 天之情況選擇

$$P(\text{第 1 位生日}) = \frac{365}{365}$$

$$P(\text{第 2 位生日與前 1 位不同}) = \frac{364}{365}$$

$P(\text{第 3 位生日與前 2 位不同生日皆不同})$

$$= \frac{363}{365}$$

依此類推

$P(\text{第 30 位生日與前 29 位不同生日皆不同})$

$$= \frac{336}{365}$$

∴ $P(\text{全部 30 位不同生日})$

$$= \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \dots \times \frac{336}{365}$$

$$= \frac{P_{30}^{365}}{365^{30}} = P_{30}^{365} \times \left(\frac{1}{365}\right)^{30}$$

故選(D)

23. 技巧與分析

$$(1) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$(3) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \text{ 其中 } n \neq -1$$

解析

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [2x + f(x)] dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx \\ &= \int_0^1 2x dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx \\ &= \int_0^1 2x dx + \int_0^3 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx \\ &= (x^2 + c) \Big|_0^1 + \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 f(x) dx \\ &= [(1^2 + c) - (0^2 + c)] + 0 = 1 \end{aligned}$$

故選(B)

24. 技巧與分析

(1) 多項式直式除法

(2) 若 $f(x)$ 有 $(x-a)$ 的因式

(或稱被 $(x-a)$ 整除)

$$\Rightarrow f(a) = 0$$

解析

依題意計算

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2 + 2x + 1 \overline{) x^2 \quad + bx \quad + c} \\ \underline{x^2 \quad + 2x \quad + 1} \\ (b-2)x \quad + (c-1) \end{array}$$

又 $[(b-2)x + (c-1)]$ 被 $(x-1)$ 整除

$$\Rightarrow (b-2) \times 1 + (c-1) = 0$$

$$\Rightarrow b + c - 3 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

依題意計算

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2 - 2x + 1 \overline{) x^2 \quad + bx \quad + c} \\ \underline{x^2 \quad - 2x \quad + 1} \\ (b+2)x \quad + (c-1) \end{array}$$

又 $[(b+2)x + (c-1)]$ 被 $(x+1)$ 整除

$$\Rightarrow (b+2)(-1) + (c-1) = 0$$

$$\Rightarrow -b + c - 3 = 0 \dots\dots \textcircled{2}$$

解 $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ 聯立得 $2c - 6 = 0 \Rightarrow c = 3$

故選(D)

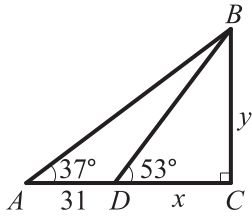
25. 技巧與分析

1. $\tan \theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$

2. $\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$

3. $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

解析



設佛像高為 y 公尺

在 $\triangle ABC$ 中， $\tan 37^\circ = \frac{y}{31+x} = \frac{3}{4}$①

在 $\triangle BCD$ 中， $\tan 53^\circ = \frac{y}{x}$②

又 $\tan 53^\circ = \cot 37^\circ = \frac{1}{\tan 37^\circ} = \frac{4}{3}$ 代入②得

$\frac{y}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{4}y$ 代入①得

$\frac{y}{31 + \frac{3}{4}y} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4y = 93 + \frac{9}{4}y$

$\Rightarrow 16y = 372 + 9y$

$\Rightarrow 7y = 372$

$\Rightarrow y = \frac{372}{7} \approx 53$

故佛像高約為 53 公尺