龍騰文化
肯定自己 ➤ 肯定不同

110 數學統測最前線

龍騰貼心服務，給您最精準的分析！！

110 年 統測數學 B 考情趨勢與考題剖析

110 年統測數學 B 考情趨勢

一、試題分析

本次考題難易度分析如下表：

易	3、5、7、8、11、17、18
中	1、2、4、6、9、10、12、13、14、15、19、20、23
難	16、21、22、24、25

自 106 年統測數 B 附參考公式以來皆為課本公式之提醒，然而今年卻出現必須使用參考公式方能解題之參考（$\sin 37° \approx \frac{3}{5}$ 或 $\tan 37° \approx \frac{3}{4}$）。在考題的設計上，簡易題型仍占多數，並且仍著重基本觀念及定義之熟悉，但最大特別之處在於中等難度考題幾乎在測驗學生細心及計算能力，而難題除了計算繁瑣外，更挑戰學生作答時的制約習慣。學生必須有足夠信心及對於計算方向明確方能正確解出。

1. 簡易題皆為知悉其數學符號或定義，都能輕易直接計算求解。
2. 中等難度題型分析：

第 1 題：考指數基本定義與圖形的遞增遞減觀念。

第 2 題：雖簡單，但易粗心誤認為是國中所學「兩個聯立組有相同解」之題型，導致解題方向錯誤。

第 4 題：由於選項的角度表示法不同，利用常使用的同界角差量為$360°$的整數倍數會提高計算量。

82001N/C/0000000

第 10 題：考資料距離愈集中，其標準差愈小的觀念。

第 15 題：需要耐心計算兩邊的 3 階行列式，若用降階需注意正負號。

第 19 題：A、B、C 相關位置畫正確即可。

第 20 題：利用敘述無窮級數而非前 n 項級數和 S_n 來命題，也容易讓學生混淆，但由於選項沒有 $\frac{5\times(5+1)}{2}=15$，減少同學錯誤之計算。

其餘中等題皆為計算較多步驟但觀念不難。

3. 較難難度題型分析：

第 16 題：難題考出學生大量計算能力及公式之推廣。此題需使用到兩次二倍角公式，大大增加其計算量，並且若先計算出 $\cos 4\theta$，將還有判斷正負之困難。

第 21 題：較偏普通高中考題，命題巧妙用選取方法數較少的方式，讓考題符合技術型高中範圍，但其實仍有許多不必要的重複計算。

第 22 題：選項答案整理後表示法與計算思維過程有偌大的差異，會影響學生思考過程。

第 24 題：觀念不算難，但會有 $(x-1)$、$(x+1)$ 及使用餘式定理的錯覺，而忽略直式除法。

第 25 題：題目敘述為考古題，但必須使用參考資料 $37°$ 的三角函數值，增加計算之不熟悉。

【統測望遠鏡】

接下來為 108 課綱第一年考題，課綱精神著重於數學素養，從這次的考題中可看出兩大特性：第一，開始有許多考題結合生活經驗，如這次星座、電玩設定、投資股票、店家位置等皆是生活中常見情形。第二，生活中的數據常常不是整數，開始有 $37°$ 等角度出現，同學需特別注意參考公式所給的資訊。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	不等式及其應用	2
三角函數	2	排列組合	2
向量	0	機率	2
指數與對數及其運算	2	統計	2
數列與級數	1	三角函數的應用	3
式的運算	1	二次曲線	3
方程式	2	微積分及其應用	2

總　分

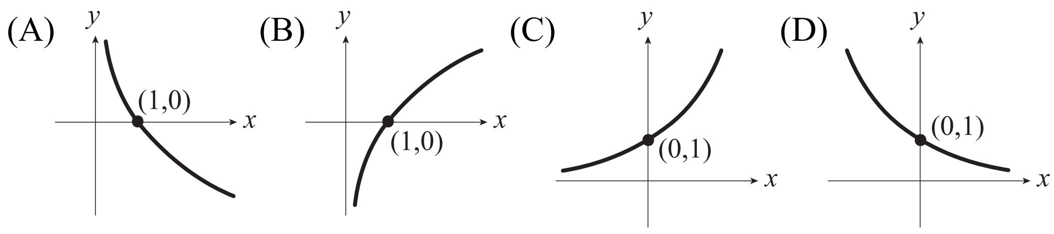
110 統測數學 B 考題剖析

數學 B 參考公式

1. 二倍角公式：$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$；$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$
2. 橢圓方程式 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$，$a \ge b > 0$：中心 (h,k)，焦點 $(h \pm c, k)$，
   其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
3. $P^n_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$，$C^n_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
4. 設有一組抽樣資料 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，其算術平均數為 $\overline{x}$，
   則樣本標準差為 $S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$
5. 參考數值：$1\pi = 180°$、$\sin 37° \approx \dfrac{3}{5}$、$\cos 37° \approx \dfrac{4}{5}$、$\tan 37° \approx \dfrac{3}{4}$

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 若 $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^x$，則下列何者為 $f(x)$ 之圖形？



(　　) 2. 若 a、b 為常數且兩方程組 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ ax + 6y = 9 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + by = 10 \end{cases}$ 皆為相依方程組，則 $2a - b = ?$

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8。

(　　) 3. 下列數對 (x,y) 何者滿足聯立不等式 $\begin{cases} 100x+2y-100\geq 0 \\ 2x+100y+100\leq 0 \end{cases}$？

(A) $(0,0)$　(B) $(1,1)$　(C) $(2,1)$　(D) $(2,-2)$。

(　　) 4. 若下列四個選項中，其中有三個互為同界角，則下列何者不是另外三個選項的同界角？

(A) $-\frac{9\pi}{5}$　(B) $-36°$　(C) $\frac{\pi}{5}$　(D) $1116°$。

(　　) 5. 若下表為某些名人之星座統計表，則星座代號之眾數為何？

(A) 8.5　(B) 9　(C) 10　(D) 12。

名人代號	出生年月日	星座	星座代號
A	1887/10/31	天蠍座	10
B	1891/08/13	獅子座	7
C	1905/10/23	天秤座	9
D	1910/04/27	金牛座	4
E	1923/01/15	魔羯座	12
F	1950/10/12	天秤座	9
G	1950/07/13	巨蟹座	6
H	1956/08/31	處女座	8

(　　) 6. 若 $a=\log 2$，$b=\log 3$，則 $10^{2a+b}=$？

(A) 2　(B) 3　(C) 12　(D) 24。

(　　) 7. 若圓 C：$x^2+y^2-8x+6y=0$，則圓 C 之直徑為何？

(A) 6　(B) 8　(C) 10　(D) 12。

(　　) 8. 某款電玩在開始闖關前需進行設定：第一個步驟是選擇難度，由入門、普通或高手等 3 種難度擇一；第二個步驟由 4 種盔甲擇一；第三個步驟由 5 種武器擇一。若必須依序完成這三個步驟，設定才算完成，則有幾種闖關前設定？

(A) 12　(B) 23　(C) 36　(D) 60。

(　　) 9. 袋中有 5 顆相同的紅球及 3 顆相同的白球，今甲、乙兩人互賭，從袋中隨機抽出 3 顆球。若皆為紅球，則甲給乙 420 元，否則乙須給甲 140 元。求甲獲取金額的期望值為多少元？

(A) 40　(B) 20　(C) -20　(D) -40。

(　　) 10. 下列哪一組樣本的標準差最小？

(A) 1、4、7、10、13　(B) 55、57、58、59、61

(C) 100、101、102、103、104　(D) 216、218、220、222、224。

(　　) 11. 已知兩多項式函數 $g(x)$ 及 $h(x)$ 之導函數分別為 $g'(x)$ 及 $h'(x)$，且 $h(x)=4g(x)-7x+9$。若 $g'(0)=3$，則 $h'(0)=$？

(A) 5　(B) 9　(C) 14　(D) 21。

(　　) 12. 若直線 L_1：$y=mx+b$ 與直線 L：$2x+3y=1$ 平行，且直線 L_1 與 x 軸的交點之 x 坐標為 2，則下列何者正確？

(A) $m+b=\dfrac{2}{3}$　(B) $m+b=6$　(C) $m\times b=\dfrac{2}{3}$　(D) $m\times b=9$。

(　　) 13. 若圓 C_1：$x^2+y^2-2x+2y=0$、圓 C_2：$x^2+y^2-4x+4y=0$，則直線 $L: x-y-4=0$ 與兩圓 C_1、C_2 共有幾個交點？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4。

(　　) 14. 已知 $\tan\theta=\dfrac{7}{25}$。若 $\sin\theta\cos\theta=a$，則下列何者正確？

(A) $\dfrac{1}{2}<a<1$　(B) $0<a<\dfrac{1}{2}$　(C) $-\dfrac{1}{2}<a<0$　(D) $-1<a<-\dfrac{1}{2}$。

(　　) 15. 若 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & b & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$，則 $a+b=$？

(A) -9　(B) -1　(C) 3　(D) 5。

(　　) 16. 已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$。若 $\sin 4\theta=a$，則下列何者正確？

(A) $0<a<\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{3}{4}<a<1$。

(　　) 17. 若橢圓曲線上的任意點到兩點 $(2,-3)$、$(-4,-3)$ 的距離和為 10，則此橢圓之短軸長為何？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 8。

(　　) 18. 若小林準備 600 萬元投資股票 x 萬元及債券 y 萬元，而投資股票金額不會低於債券金額的 2 倍，則下列何者為題意之限制條件？

(A) $\begin{cases} x+y\le 600 \\ x\ge 2y \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} x+y\le 600 \\ 2x\ge y \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$　(C) $\begin{cases} x+y>600 \\ x\ge 2y \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} x+y>600 \\ 2x\ge y \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$。

(　　) 19. 已知 A、B、C 三家某知名商店，B 店位於 A 店往西 240 公尺往北 120 公尺處，而 C 店位於 B 店往東 180 公尺往南 40 公尺位置。求 A 店與 C 店的距離為多少公尺？

(A) 100　(B) 120　(C) 140　(D) 160。

(　　) 20. 若無窮級數為 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}$，則前 5 項之和為何？

(A) 35　(B) 40　(C) 45　(D) 50。

(　　) 21. 若從 1、2、3、4、5、6、7 七個數字中取兩個相異數字排成二位數，則所有這些不同的二位數之總和為何？

(A) 42　(B) 924　(C) 1848　(D) 3696。

(　　) 22. 已知某校新生的生日都沒有 2 月 29 日，而其他每個出生日期的可能性均相等，且新生分班是隨機的。若某新生班級共有 30 位學生，則該班學生生日皆不同的機率為何？

(A) $\left(\frac{364}{365}\right)^{29}$　(B) $1-C_2^{30}\times\frac{1}{365}$　(C) $C_{30}^{365}\times\left(\frac{1}{365}\right)^{30}$　(D) $P_{30}^{365}\times\left(\frac{1}{365}\right)^{30}$。

(　　) 23. 若 $f(x)=(x^2+1)^{100}$，則 $\int_0^1[2x+f(x)]dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^0 f(x)dx=$？

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3。

(　　) 24. 已知 $f(x)=x^2+bx+c$ 為二次多項式。若 $f(x)$ 被 $(x+1)^2$ 除的餘式被 $x-1$ 整除，且 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除的餘式被 $x+1$ 整除，則 $c=$？

(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 3。

(　　) 25. 孫悟空師徒四人取經途中經過一廣闊平原，看到前方有一尊高大佛像，其頂部仰角為 $37°$，四人往佛像前行 31 公尺後，佛像頂部仰角變為 $53°$。求佛像高度約為多少公尺？

(A) 57　(B) 53　(C) 37　(D) 31。

110 年統一入學測驗 數學(B)

答 案

1.D	2.B	3.D	4.B	5.B	6.C	7.C	8.D	9.A	10.C
11.A	12.A	13.C	14.B	15.C	16.C	17.D	18.A	19.A	20.A
21.C	22.D	23.B	24.D	25.B					

本試題答案係依據統一入學測驗中心公布之標準答案

1. 技巧與分析

(1) 瞭解指數函數的圖形

(2) $0<a<1 \quad \Rightarrow \quad f(x)=a^x$ 為遞減函數

解析

$\because \quad f(0)=\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^0=1$

故通過 $(0,1)$ 點……①

考慮底數 $\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{4}{4}=1$

$\therefore$ 圖形為遞減函數……②

承①②條件，故選(D)

2. 技巧與分析

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 為相依方程組

$\Rightarrow \quad \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

解析

$\begin{cases} x+2y=3 \\ ax+6y=9 \end{cases}$ 為相依方程組

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{3}{9} \quad \Rightarrow \quad a=3$

$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+by=10 \end{cases}$ 為相依方程組

$\Rightarrow \quad \dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{5}{10} \quad \Rightarrow \quad b=2$

$\therefore \quad 2a-b=2\times3-2=4$

故選(B)

3. 技巧與分析

兩個不等式的區域有無限多個點符合

故此題將答案反代最適合

解析

將選項(A)(B)(C)(D)分別代入

$\begin{cases} 100x+2y-100 \\ 2x+100y+100 \end{cases}$

判斷哪個選項符合題目之不等式條件

(A) $(0,0)$ 代入

$\Rightarrow \quad \begin{cases} 0+0-100\le0\text{（不合）} \\ 0+0+100\ge0\text{（不合）} \end{cases}$

(B) $(1,1)$ 代入

$\Rightarrow \quad \begin{cases} 100+2-100\ge0\text{（合）} \\ 2+100+100\ge0\text{（不合）} \end{cases}$

(C) $(2,1)$ 代入

$\Rightarrow \quad \begin{cases} 200+2-100\ge0\text{（合）} \\ 4+100+100\ge0\text{（不合）} \end{cases}$

(D) $(2,-2)$ 代入

$\Rightarrow \quad \begin{cases} 200-4-100\ge0\text{（合）} \\ 4-200+100\le0\text{（合）} \end{cases}$

故選(D)

4. 技巧與分析

同界角之最小正同界角皆相同

解析

將四個選項角度化為最小正同界角

(A) $-\dfrac{9\pi}{5} \overset{+2\pi}{\Rightarrow} \dfrac{\pi}{5}$

(B) $-36^\circ \overset{+360^\circ}{\Rightarrow} 324^\circ$

(C) $\dfrac{\pi}{5}$

(D) $1116^\circ \overset{-3\times360^\circ}{\Rightarrow} 36^\circ=\dfrac{\pi}{5}$

只有(B)不同

故(B)不是另外三個選項之同界角

〔備註〕

互為同界角之角度差量為 360° 的整數倍數，故此題也可將選項互減判斷，但選項有度及弧度兩種，不易計算相減

5. 技巧與分析

利用正字符號計數

解析

用正字符號計數星座代號次數

10	7	9	4	12	6	8
一	一	丅	一	一	一	一

星座代號之眾數為 9

故選(B)

6. 技巧與分析

(1) 對數還原指數：若 $x=\log_a b \Rightarrow a^x=b$

(2) 指數律：$a^{m+n}=a^m\times a^n$，$a^{mn}=\left(a^m\right)^n$

解析

$a=\log 2 \Rightarrow 10^a=2$

$b=\log 3 \Rightarrow 10^b=3$

所求 $10^{2a+b}=10^{2a}\times10^b=\left(10^a\right)^2\times\left(10^b\right)$

$=2^2\times3=12$

故選(C)

7. 技巧與分析

將圓的一般式化為圓的標準式

解析

圓 C：$x^2+y^2-8x+6y=0$

$\Rightarrow \left(x^2-8x+4^2\right)+\left(y^2+6y+3^2\right)=4^2+3^2$

$\Rightarrow (x-4)^2+(y+3)^2=25=5^2$

得圓 C 半徑為 5

$\Rightarrow$ 直徑 $=2\times5=10$

故選(C)

〔另解〕

圓一般式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

其半徑 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$

$\therefore$ 此題直徑 $=2\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(-8)^2+6^2-4\times0}$

$=\sqrt{100}=10$

8. 技巧與分析

排列組合中計數之乘法原理

解析

分三個步驟

每個步驟分別有 3、4、5 種選擇數

故每個步驟選一方法數之情形有

$3\times4\times5=60$ 種選擇

故選(D)

9. 技巧與分析

(1) 古典機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$，A 為事件，S 為樣本空間

(2) 從 n 件相異物品中選 m 件之組合數為 C^n_m

(3) 期望值 $E=\Sigma m\times P$

解析

共 $5+3=8$ 顆球取 3 球方法數為

$C^8_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

P（3 顆皆紅）$=\dfrac{C^5_3}{56}=\dfrac{10}{56}=\dfrac{5}{28}$

P（非 3 顆皆紅）$=1-\dfrac{5}{28}=\dfrac{23}{28}$

故 E（甲獲取金額）

$=P$（3 顆皆紅）$\times(-420)$

$+P$（非 3 顆皆紅）$\times140$

$=\dfrac{5}{28}\times(-420)+\dfrac{23}{28}\times140$

$=5\times(-15)+23\times5=-75+115=40$

故選(A)

〔備註〕

求機率時，因每件物品被選取之機率相同，故需將物品想成相異物

10. 技巧與分析

除了利用標準差求出比較，觀察選項皆為五個數據，考題數據若經過設計則可利用差量推導標準差之大小

解析

依序討論選項中數字的差量

用(a,b,c,d)序對表示

(A) $1,4,7,10,13 \quad \Rightarrow \quad (3,3,3,3)$

(B) $55,57,58,59,61 \quad \Rightarrow \quad (2,1,1,2)$

(C) $100,101,102,103,104 \quad \Rightarrow \quad (1,1,1,1)$

(D) $216,218,220,222,224 \quad \Rightarrow \quad (2,2,2,2)$

各組樣本皆為五個數據

明顯差量皆小的標準差必較小

得標準差大小順序為

$S_{(C)} < S_{(B)} < S_{(D)} < S_{(A)}$

故選(C)

11. 技巧與分析

若 $f(x)=g(x)+h(x)$，且 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 之一階導函數存在，則 $f'(x)=g'(x)+h'(x)$

解析

$\because \quad h(x)=4g(x)-7x+9$

$\Rightarrow \quad h'(x)=4g'(x)-7$

$\therefore \quad h'(0)=4g'(0)-7=4\times3-7=5$

故選(A)

12. 技巧與分析

(1) 斜截式 L ： $y=mx+b$ 之斜率為 m

(2) 若直線 L ： $ax+by+c=0$ ，則斜率為 $-\dfrac{a}{b}$

(3) 若 $L_1 // L_2$ ，且斜率存在 $\quad \Rightarrow \quad m_1=m_2$

解析

L_1 ： $y=mx+b$ 之斜率為 m

L_2 ： $2x+3y=1$ 之斜率為 $-\dfrac{2}{3}$

$\because \quad L_1 // L_2 \quad \Rightarrow \quad m=-\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad L_1$ ： $y=-\dfrac{2}{3}x+b$

又 L_1 與 x 軸交點為 $(2,0)$

$\Rightarrow \quad 0=-\dfrac{2}{3}\times2+b \quad \Rightarrow \quad b=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \quad m+b=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}$

$m\times b=-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3}=-\dfrac{8}{9}$

故選(A)

13. 技巧與分析

(1) 將圓一般式化成標準式求出圓心及半徑

(2) 圓心至直線距離 $=d(O,L)$

若 $d(O,L)=r \quad \Rightarrow \quad$ 恰交於1點（相切）

$d(O,L)<r \quad \Rightarrow \quad$ 交於2點（相割）

解析

① 圓 C_1 ： $x^2+y^2-2x+2y=0$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2+(y+1)^2=2$

則圓心 $O_1(1,-1)$ 且半徑 $r_1=\sqrt{2}$

$d(O_1,L)=\dfrac{|1-(-1)-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=r_1$

$\Rightarrow \quad C_1$ 與 L 恰交於1點

② 圓 C_2 ： $x^2+y^2-4x+4y=0$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y+2)^2=8$

則圓心 $O_2(2,-2)$ 且半徑 $r_2=\sqrt{8}$

$d(O_2,L)=\dfrac{|2-(-2)-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=0<\sqrt{8}=r_2$

$\Rightarrow \quad C_2$ 與 L 交於2點

承①②故共有 $1+2=3$ 個交點，此題選(C)

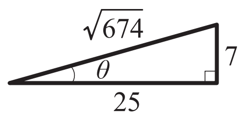
14. 技巧與分析

(1) $\sin\theta\cos\theta$ 與 $(\tan\theta+\cot\theta)$ 互為倒數

(2) $\tan\theta$ 與 $\cot\theta$ 互為倒數

解析（適用新課程）

$\tan\theta=\dfrac{7}{25}$



繪圖如右且斜邊 $=\sqrt{674}$

$\because \quad \tan\theta=\dfrac{7}{25}>0 \quad \Rightarrow \quad \theta\in$ I 、III

若 $\theta\in$ I $\quad \Rightarrow \quad \sin\theta=\dfrac{7}{\sqrt{674}}$ ， $\cos\theta=\dfrac{25}{\sqrt{674}}$

$\Rightarrow \quad \sin\theta\cos\theta=\dfrac{175}{674}$

若 $\theta\in \text{III} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta=\dfrac{-7}{\sqrt{674}}$，$\cos\theta=\dfrac{-25}{\sqrt{674}}$

$\Rightarrow \quad \sin\theta\cos\theta=\dfrac{175}{674}$

$\therefore \quad a=\dfrac{175}{674}$

〔另解〕(適用舊課程)

$\tan\theta=\dfrac{7}{25} \quad \Rightarrow \quad \cot\theta=\dfrac{25}{7}$

$\therefore \quad \tan\theta+\cot\theta=\dfrac{7}{25}+\dfrac{25}{7}=\dfrac{674}{175}$

$\because \quad \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{\tan\theta+\cot\theta}=\dfrac{175}{674}<\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad 0<a<\dfrac{1}{2}$，故選(B)

15. 技巧與分析

三階行列式展開

解析

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$=2\times a\times 2+0+0-0-0-2\times 6\times(-1)$

$=4a+12$

$$\begin{vmatrix} 0 & b & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$=0+0+2\times 4\times 3-0-4\times b\times 1-0$

$=24-4b$

依題意得 $4a+12=24-4b$

$\Rightarrow \quad 4a+4b=12$

$\Rightarrow \quad a+b=3$

故選(C)

〔備註〕

此題明顯第一行皆有2個元素為0，故此命題可能想讓考生降階展開。但注意，右邊行列式降階有一個負號

16. 技巧與分析

(1) 若 $0<\theta_1<\theta_2<\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_1<\sin\theta_2$

(2) $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析 (適用新課程)

根據參考公式 $\sin\theta=\dfrac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \theta\approx 37^\circ$

依四捨五入法則

可令 $36.5^\circ\le\theta<37.5^\circ \quad \Rightarrow \quad 146^\circ\le 4\theta<150^\circ$

$f(x)=\sin x$ 在第二象限遞減

$\Rightarrow \quad \sin 146^\circ\ge\sin 4\theta>\sin 150^\circ$

$\Rightarrow \quad \sin 34^\circ\ge\sin 4\theta>\sin 30^\circ$

$\Rightarrow \quad \sin 30^\circ<\sin 4\theta\le\sin 34^\circ<\sin 45^\circ$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}<\sin 4\theta<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(其中 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{8}}{4}<\dfrac{\sqrt{9}}{4}=\dfrac{3}{4}$)

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}<\sin 4\theta<\dfrac{3}{4}$

故選(C)

〔另解〕(適用舊課程)

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ 畫圖可輕易算出 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

$$\begin{aligned}\sin 4\theta&=2\sin 2\theta\cos 2\theta\\&=2(2\sin\theta\cos\theta)(1-2\sin^2\theta)\\&=2\times 2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}\times\left[1-2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]\\&=\frac{48}{25}\times\left(1-\frac{18}{25}\right)\\&=\frac{48\times 7}{25\times 25}=\frac{336}{625}\end{aligned}$$

可比較得 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{336}{625}<\dfrac{3}{4}$

故選(C)

17. 技巧與分析

(1) 橢圓的定義：

設 F 、 F' 為相異兩定點，且 $\overline{FF'}=2c$

在平面上所有到 F 、 F' 的距離和為一定值 $2a$ ，即 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$

且 $2a>\overline{FF'}$ 的點 P 所形成的圖形稱為橢圓，其中 F 、 F' 為橢圓的焦點

(2) 橢圓的重要關係式：

設長軸長 $\overline{AA'}=2a$ ，短軸長 $\overline{BB'}=2b$

焦距 $\overline{FF'}=2c$ ，則 a 、 b 、 c 的關係式為

$a^2=b^2+c^2$ ， $a>b>0$ ， $a>c>0$

解析

依題意及橢圓定義可知

$(2,-3)$ 及 $(-4,-3)$ 為橢圓兩焦點

記 $F_1(2,-3)$ 、 $F_2(-4,-3)$ 及

長軸長 $2a=10 \quad\Rightarrow\quad a=5$

而 $2c=\overline{F_1F_2}=\left|2-(-4)\right|=6 \quad\Rightarrow\quad c=3$

又 $a^2=b^2+c^2 \quad\Rightarrow\quad b=4$

$\Rightarrow$ 短軸長 $=2b=8$

故選(D)

18. 技巧與分析

依題目中的限制條件列出不等式組

解析

600 萬元投資股票 x 萬元及債券 y 萬元

$\Rightarrow \quad x+y\le 600$

股票 x 萬元不會低於債券 y 萬元的 2 倍

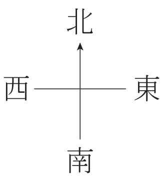
$\Rightarrow \quad x\ge 2y$

投資數量 x 、 y 不會負數

$\Rightarrow \quad x\ge 0$ ， $y\ge 0$

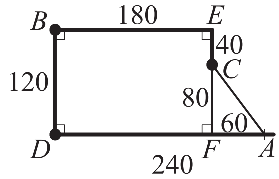
故選(A)

19. 技巧與分析



，能瞭解方位

解析



依題畫圖如右

並設立 D 、 E 、 F 三點於圖

所以 $\overline{CF}=\overline{EF}-\overline{EC}$

$=120-40=80$

$\overline{FA}=\overline{DA}-\overline{DF}=240-180=60$

因此 $\overline{AC}=\sqrt{80^2+60^2}=100$

故選(A)

20. 技巧與分析

知道 $\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

解析

前五項之和

$=\sum_{n=1}^{5}\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{1(1+1)}{2}+\dfrac{2(2+1)}{2}+\dfrac{3(3+1)}{2}+\dfrac{4(4+1)}{2}$

$+\dfrac{5(5+1)}{2}$

$=1+3+6+10+15=35$

故選(A)

21. 技巧與分析

(1) 能利用列舉，規律寫出可能排列情形

(2) 等差級數和 $S_n=\dfrac{\left[2a_1+(n-1)d\right]n}{2}$

解析

十位數為 1 的有 12,13,14,15,16,17 總和為 87

十位數為 2 的有 21,23,24,25,26,27 總和為 146

十位數為 3 的有 31,32,34,35,36,37 總和為 205

十位數為 4 的有 41,42,43,45,46,47 總和為 264

十位數為 5 的有 51,52,53,54,56,57 總和為 323

十位數為 6 的有 61,62,63,64,65,67 總和為 382

十位數為 7 的有 71,72,73,74,75,76 總和為 441

$\Rightarrow$ 全部和為

$87+146+205+264+323+382+441$

$=1848$

故選(C)

〔備註〕

十位數為2的總和比十位數為1的總和多 $6\times10-1=59$，有其規律，故此題和可想成首項$=87$，項數為7，公差為59之等差級數和

$=\dfrac{\left[2\times87+(7-1)\times59\right]\times7}{2}=1848$，便可省略許多列舉之計算

〔另解〕(偏普通高中)

1～7挑選相異二數形成兩位數共有 $P_2^7=42$ 個二位數

但每個數字在個位數及十位數出現次數均等

故1～7等七個數在個位數及十位數各出現 $\dfrac{42}{7}=6$ 次

將所有二位數加總分成十位數加總及個位數加總再求和

$=6\times(1+2+3+\cdots+7)\times10$

$\quad+6\times(1+2+3+\cdots+7)$

$=6\times28\times10+6\times28=1848$

故選(C)

22. 技巧與分析

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B\mid A)$

解析

生日無2月29日

$\Rightarrow$ 僅考量365天之情況選擇

P（第1位生日）$=\dfrac{365}{365}$

P（第2位生日與前1位不同）$=\dfrac{364}{365}$

P（第3位生日與前2位不同生日皆不同）

$=\dfrac{363}{365}$

依此類推

P（第30位生日與前29位不同生日皆不同）

$=\dfrac{336}{365}$

$\therefore$ P（全部30位不同生日）

$=\dfrac{365}{365}\times\dfrac{364}{365}\times\dfrac{363}{365}\times\cdots\times\dfrac{336}{365}$

$=\dfrac{P_{30}^{365}}{365^{30}}=P_{30}^{365}\times\left(\dfrac{1}{365}\right)^{30}$

故選(D)

23. 技巧與分析

(1) $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int x^n dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+c$，其中 $n\neq-1$

解析

$\int_0^1\left[2x+f(x)\right]dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^0 f(x)dx$

$=\int_0^1 2xdx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^0 f(x)dx$

$=\int_0^1 2xdx+\int_0^3 f(x)dx+\int_3^0 f(x)dx$

$=(x^2+c)\Big|_0^1+\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 f(x)dx$

$=\left[(1^2+c)-(0^2+c)\right]+0=1$

故選(B)

24. 技巧與分析

(1) 多項式直式除法

(2) 若 $f(x)$ 有 $(x-a)$ 的因式

（或稱被 $(x-a)$ 整除）

$\Rightarrow$ $f(a)=0$

解析

依題意計算

$$\begin{array}{r|lll} & 1 & & \\ \hline x^2+2x+1 & x^2 & +bx & +c \\ & x^2 & +2x & +1 \\ \hline & & (b-2)x & +(c-1) \end{array}$$

又 $\left[(b-2)x+(c-1)\right]$ 被 $(x-1)$ 整除

$\Rightarrow$ $(b-2)\times1+(c-1)=0$

$\Rightarrow$ $b+c-3=0$ ……①

依題意計算

$$\begin{array}{r|lll} & 1 & & \\ \hline x^2-2x+1 & x^2 & +bx & +c \\ & x^2 & -2x & +1 \\ \hline & & (b+2)x & +(c-1) \end{array}$$

又 $\left[(b+2)x+(c-1)\right]$ 被 $(x+1)$ 整除

$\Rightarrow$ $(b+2)(-1)+(c-1)=0$

$\Rightarrow$ $-b+c-3=0$ ……②

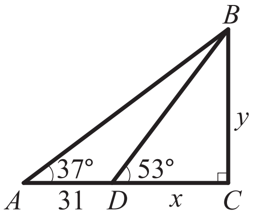
解①②聯立得 $2c-6=0$ $\Rightarrow$ $c=3$

故選(D)

25. 技巧與分析

1. $\tan\theta=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$
2. $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$
3. $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

解析



設佛像高為 y 公尺

在 $\triangle ABC$ 中，$\tan 37^\circ=\dfrac{y}{31+x}=\dfrac{3}{4}\cdots\cdots$①

在 $\triangle BCD$ 中，$\tan 53^\circ=\dfrac{y}{x}\cdots\cdots$②

又 $\tan 53^\circ=\cot 37^\circ=\dfrac{1}{\tan 37^\circ}=\dfrac{4}{3}$ 代入②得

$\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{3}\quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{3}{4}y$ 代入①得

$\dfrac{y}{31+\frac{3}{4}y}=\dfrac{3}{4}\quad\Rightarrow\quad 4y=93+\dfrac{9}{4}y$

$\Rightarrow\quad 16y=372+9y$

$\Rightarrow\quad 7y=372$

$\Rightarrow\quad y=\dfrac{372}{7}\approx 53$

故佛像高約為53公尺

110 年 統測數學 C 考情趨勢與考題剖析

110 統測數學 C 考情趨勢

一、試題分析

110 年統測數學 C 是一份難易適中的試卷。這次的題目有別於 108、109 年的偏難試卷（註：108、109 年統測數學 C 滿分各僅有 17、26 位），試題的難易分配平均，中等偏易的題目置於卷首，偏難或繁瑣的題目置於卷末，而大都是中等上下的題目，整體考生的分數應會提高不少。其他特色如下：

1. 生活素養：
   「108 數學新課綱」強調生活素養，統測已經連續三年加入生活素養題，而敘述也更加精簡流暢。如：第 4、7、12、21、24 題。
2. 圖形試題：
   這次統測有圓錐曲線的圖形描繪，有向量的描繪，有要找三角函數圖形的交點，這些都需要把圖形描繪出來以輔助求解，平時宜培養畫圖解題的習慣。如：第 8、9、16、18、25 題。
3. 參考公式的提示：
   統測已經連續五年提供參考公式，這些公式已不再是聊備一格，在解題時都可以提供關鍵的提示，考生應善用「參考公式」去思考解題策略。
   如：第 2 題以參考公式提供的「三角函數的平方和關係式」來處理，輔以平方差公式，可以迅速解題。倘若以「正切（$\tan\theta$）的商數關係和正割（$\sec\theta$）的倒數關係」來解題，恐怕是化簡為繁，更耗費時間。
4. 特殊試題(1)：
   第 5 題是取材自大學微積分習題，目的應是測驗考生以導數的定義來輔助求解，但是此題將極限直接運算，反而更簡易。
5. 特殊試題(2)：
   第 25 題乍看之下是要以定積分求面積，但是課綱內並無介紹對數函數的積分，因此本題似乎只是在估計面積。

綜合上述，110 年的考生得分將會回歸常態，各種程度的學生都會有適當的鑑別度。只不過這兩年，若當年數學學測的題目偏易（難），則當年統測數學 C 似乎就會因而偏難（易）。考生們也許可以參考來年數學學測的風向

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	數列與級數	1
三角函數	1	指數與對數及其運算	2
三角函數的應用	3	排列組合	2
向量	1	機率與統計	2
式的運算	2	圓	1
聯立方程式	2	二次曲線	2
複數	1	微分	1
不等式及其應用	1	積分	2

總　分

110 統測數學 C 考題剖析

數學 C 參考公式

1. 三角函數的平方和關係式：$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
2. 三角函數的二倍角公式：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
3. 三角函數的和差角公式：$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
4. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$
5. 算幾不等式：若 $a\ge 0,b\ge 0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 若 $\dfrac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-1}$，其中 A、B 為實數，則下列何者正確？

(A) $A=2$　(B) $B=1$　(C) $A=-2$　(D) $B=-1$。

(　　) 2. 若 $\tan\theta+\sec\theta=5$，則 $\tan\theta-\sec\theta=$？

(A) $-\dfrac{3}{5}$　(B) $-\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) $\dfrac{3}{5}$。

(　　) 3. $\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 50^\circ-\sin 25^\circ\cos 25^\circ\cos 20^\circ=$？

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $-\dfrac{1}{4}$　(D) $-\dfrac{1}{2}$。

(　　) 4. 某實驗室將 108 個不同樣本在常溫常壓下依固體、液體、氣體及金屬、半金屬、非金屬分類如表(一)。若從固體及液體類中取出一個樣本，則其為半金屬的機率為何？

(A) $\dfrac{5}{32}$　(B) $\dfrac{3}{32}$　(C) $\dfrac{1}{16}$　(D) $\dfrac{1}{18}$。

	固體	液體	氣體	總計
金屬	79	2	0	81
半金屬	9	0	0	9
非金屬	5	1	12	18
總計	93	3	12	108

表(一)

(　　) 5. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(3+h)+2}-\dfrac{1}{3+2}}{h}=$？

(A)$-\dfrac{1}{25}$　(B)$-\dfrac{1}{9}$　(C)$\dfrac{1}{9}$　(D)$\dfrac{1}{25}$ 。

(　　) 6. 若$a=\sum_{m=1}^{7}\dfrac{m-2}{2m-1}$ 、$b=\sum_{k=0}^{6}\dfrac{k-1}{2k+1}$ 、$c=\sum_{i=3}^{8}\dfrac{i-4}{2i-5}$ ，則下列敘述何者正確？

(A)$b>a>c$　(B)$c>a>b$　(C)$c>a=b$　(D)$a=b>c$ 。

(　　) 7. 設$I(t)$為 A 城市某種傳染病在時間t的感染率，且$I(t)=\dfrac{1}{1+49\left(7^{\frac{-t}{3}}\right)}$, $t\geq 0$ 。

若a 、b 、c分別表示$t=0$ 、$t=3$ 、$t=6$時的感染率，則下列何者正確？

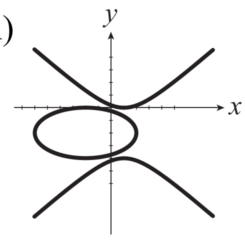
(A)$b=6a$　(B)$c=20a$　(C)$c=4b$　(D)$b=7a$ 。

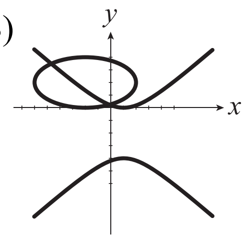
(　　) 8. 若圓C與y軸相切，且圓心為拋物線$y=x^2+4x+5$之頂點，則下列何者為圓C的方程式？

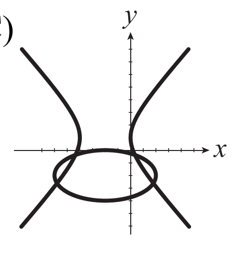
(A)$x^2+y^2+4x-2y+4=0$　(B)$x^2+y^2-4x+2y+1=0$

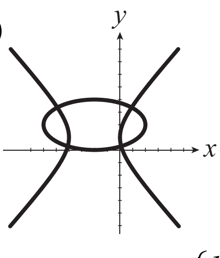
(C)$x^2+y^2-4x+2y+4=0$　(D)$x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 。

(　　) 9. 若有兩個二次曲線方程式，分別為$x^2+4y^2+4x-16y+4=0$與$\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$，則下列何者為此兩曲線的圖形組合？

(A)


(B)


(C)


(D)


(　　) 10. 若k為實數，且二元一次聯立方程組$\begin{cases}kx+3y+k+1=0\\ x+4(k+1)y+8k^2+1=0\end{cases}$有無限多組解，則$k$可為下列何值？

(A)$-\dfrac{3}{2}$　(B)$-\dfrac{1}{2}$　(C)$\dfrac{1}{2}$　(D)$\dfrac{3}{2}$ 。

( ) 11. 若 x、y、z 為相異實數，則三階行列式 $\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix}=$？

(A) 0 (B) $(x-y)(y-z)(z-x)$ (C) $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$

(D) $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$。

( ) 12. 跆拳道隊有 8 個隊員，教練安排所有隊員每 2 人一組分別在 A、B、C、D 四個不同場地練習，則共有幾種安排的方式？

(A)105 (B)2520 (C)5040 (D)40320。

( ) 13. 已知 a、b 為實數。若直線 $L_1: y=ax+b$ 與 $L_2: y=bx+a$ 相互垂直，且 $a^2+b^2=50$，則 L_1 與 L_2 的交點與原點的距離為多少？

(A) $4\sqrt{3}$ (B) 7 (C) $5\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{13}$。

( ) 14. 已知 ΔABC 中，a、b、c 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 之對邊長。若 $ab：bc：ca=3：4：6$，則 $\sin A：\sin B：\sin C=$？

(A)4：3：2 (B)4：2：3 (C)2：3：4 (D)3：2：4。

( ) 15. 已知三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $f(1)=f(2)=f(-2)=2$，且 $f(-1)=8$，則下列何者正確？

(A) $a=-1$ (B) $b=1$ (C) $c=-4$ (D) $d=4$。

( ) 16. 已知 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 為平面上的三向量，且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$，$\left|\overrightarrow{a}\right|=5$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=12$，$\left|\overrightarrow{c}\right|=13$。若 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}<0$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$？

(A) -30 (B) -60 (C) -65 (D) -156。

( ) 17. $\int_1^3 (3x-2)^{110}\,dx=$？

(A) $\dfrac{7^{111}-1}{333}$ (B) $\dfrac{3^{111}-1}{333}$ (C) $\dfrac{7^{110}-1}{330}$ (D) $\dfrac{7^{111}-1}{111}$。

( ) 18. 下列敘述何者正確？

(A) $y=\tan\dfrac{\theta}{3}$ 的週期為 $\dfrac{\pi}{3}$

(B) $\tan^2\theta-\sec^2\theta=1$

(C) $-\sqrt{2}\le\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$

(D) 若 $\cos\theta=\sin\theta$，則 $\theta=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$，其中 n 為整數。

(　　) 19. 已知 $i=\sqrt{-1}$ ，$\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2=a+bi$ ，則 $a+b=$ ？

(A) $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$　(B) -1　(C) $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$　(D) 1 。

(　　) 20. 若 x 為實數，則 $x^2-2+\dfrac{9}{x^2+2}$ 的最小值為何？

(A) 2　(B) $\dfrac{5}{2}$　(C) $\dfrac{13}{2}$　(D) 6 。

(　　) 21. 一個空的書櫃有上、中、下共三層，若將國文、英文、數學三本課本放入書櫃的任一層，且當課本放在同一層左右順序不同時視為不同排列，則共有幾種不同的排法？

(A) 60　(B) 36　(C) 27　(D) 18 。

(　　) 22. 若直線 $y=mx$ 與拋物線 $f(x)=-x^2+4x-1$ 相切，且切點在第一象限內，則 $m=$ ？

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 6 。

(　　) 23. $\int_1^4\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)dx=$ ？

(A) $\dfrac{57}{5}$　(B) $\dfrac{77}{5}$　(C) $\dfrac{87}{5}$　(D) $\dfrac{107}{5}$ 。

(　　) 24. 小明量測園藝店同一種盆栽 21 棵植物的高度資料如表(二)，其中有一盆高度為 24 公分，可視為量測異常值。若將此異常值從資料中移除，則下列哪一個統計量，在移除前後改變最多？

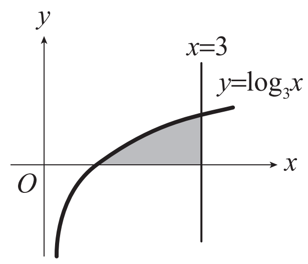
(A)平均數　(B)中位數　(C)眾數
(D)全距。

21 棵盆栽的高度（單位：公分）						
8	9	9	9	10	10	11
11	12	12	12	12	13	13
13	14	14	15	15	16	24

表(二)

(　　) 25. 假設 A 表函數 $y=\log_3 x$ 圖形與直線 $y=0$、$x=3$ 所圍區域面積，如圖(一)。若以幾何圖形的觀念來判斷 A 的大小範圍，則下列何者正確？

(A) $0\le A<\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}\le A<1$　(C) $1\le A<2$
(D) $A\ge 2$ 。



圖(一)

110 年統一入學測驗　數學(C)

答　案

1.D	2.B	3.C	4.B	5.A	6.D	7.C	8.D	9.D	10.C
11.A	12.B	13.B	14.D	15.C	16.B	17.A	18.C	19.B	20.A
21.A	22.B	23.A	24.D	25.C					

本試題答案係依據統一入學測驗中心公布之標準答案

1. 技巧與分析

〔解 1〕

(1) 在處理部分分式時，先消去分母

(2) 當兩多項式相等時，任一實數代入兩多項式所得到的值也相等

〔解 2〕

(1) 在處理部分分式時，先消去分母

(2) 當兩多項式相等時，其相對應的次數與係數均相等

解析

〔解 1〕

$$\frac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$$

上式等號的兩側同乘以$(x-3)(x-1)$，得

$3x-1=A(x-1)+B(x-3)\cdots\cdots①$

(1) 令$x=3$代入①：

$3\times3-1=A\times(3-1)+B\times(3-3)$

$\Rightarrow\quad 8=2A+0\quad\Rightarrow\quad A=4$

(2) 令$x=1$代入①：

$3\times1-1=A\times(1-1)+B\times(1-3)$

$\Rightarrow\quad 2=0-2B\quad\Rightarrow\quad B=-1$

由(1)和(2)可知，$A=4$，$B=-1$，故選(D)

〔解 2〕

$$\frac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$$

上式等號的兩側同乘以$(x-3)(x-1)$，得

$3x-1=A(x-1)+B(x-3)$

$\quad=(Ax-A)+(Bx-3B)$

$\quad=(A+B)x+(-A-3B)$

由多項式相等，則$\begin{cases}A+B=3\cdots\cdots①\\-A-3B=-1\cdots\cdots②\end{cases}$

①+②：$-2B=2\quad\Rightarrow\quad B=-1$

$B=-1$代入①：$A+(-1)=3\quad\Rightarrow\quad A=4$

因此$A=4$，$B=-1$，故選(D)

2. 技巧與分析

(1) 三角函數的平方和關係式：

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$\Leftrightarrow\quad\tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$

(2) 平方差公式：

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

解析

三角函數平方和關係式：

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$\Rightarrow\quad\tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$

$\Rightarrow\quad(\tan\theta+\sec\theta)(\tan\theta-\sec\theta)=-1$

$\because\quad\tan\theta+\sec\theta=5$

$\therefore\quad 5\times(\tan\theta-\sec\theta)=-1$

$\Rightarrow\quad\tan\theta-\sec\theta=-\dfrac{1}{5}$

3. 技巧與分析

(1) 三角函數的二倍角公式：

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\Leftrightarrow\quad\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin2\theta$

(2) 三角函數的和差角公式：

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

(3) 三角函數的負角公式：

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

解析

觀察

$\underset{\sim\sim\sim}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}\ \cos 50^\circ - \underset{\sim\sim\sim}{\sin 25^\circ \cos 25^\circ}\ \cos 20^\circ$

(1) 由正弦的二倍角公式

$$\left(\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$\sin 10^\circ \cos 10^\circ=\frac{1}{2}\sin\left(2\times 10^\circ\right)=\frac{1}{2}\sin 20^\circ$$

$$\sin 25^\circ \cos 25^\circ=\frac{1}{2}\sin\left(2\times 25^\circ\right)=\frac{1}{2}\sin 50^\circ$$

(2) $\sin 10^\circ \cos 10^\circ\ \cos 50^\circ - \sin 25^\circ \cos 25^\circ\ \cos 20^\circ$

$$=\frac{1}{2}\sin 20^\circ\ \cos 50^\circ-\frac{1}{2}\sin 50^\circ\ \cos 20^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin 20^\circ \cos 50^\circ-\cos 20^\circ \sin 50^\circ\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin 20^\circ \cos 50^\circ-\cos 20^\circ \sin 50^\circ\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(20^\circ-50^\circ\right)=\frac{1}{2}\sin\left(-30^\circ\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(-\sin 30^\circ\right)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

4. 技巧與分析

機率的定義：

設樣本空間 S 之中，每個樣本發生的機會均等，若 $A\subset S$，則事件 A 發生的機率為

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{事件 } A \text{ 的元素個數}}{\text{樣本空間 } S \text{ 的元素個數}}$$

解析

(1) 設樣本空間 S 為固體及液體類

而固體類有 93 個樣本，液體類有 3 個樣本，則 $n(S)=93+3=96$

(2) 設從固體及液體類中取出一個樣本為半金屬的事件為 A，而固體類的半金屬有 9 個樣本，液體類的半金屬有 0 個樣本，則 $n(A)=9+0=9$

由(1)和(2)可知

$$\text{所求}=P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{9}{96}=\frac{3}{32}$$

5. 技巧與分析

〔解 1〕

極限運算的化簡

〔解 2〕

(1) 導數的定義：

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(2) 除法的微分：

若 $f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$，其中 $B(x)\neq 0$

則 $f'(x)=\dfrac{A'(x)B(x)-B'(x)A(x)}{\left[B(x)\right]^2}$

解析

〔解 1〕

$$\because\ \frac{1}{(3+h)+2}-\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5+h}-\frac{1}{5}$$

$$=\frac{5}{(5+h)\times 5}-\frac{5+h}{(5+h)\times 5}=\frac{-h}{(5+h)\times 5}$$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(3+h)+2}-\dfrac{1}{3+2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-h}{(5+h)\times 5}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(5+h)\times 5}=\frac{-1}{(5+0)\times 5}=-\frac{1}{25}$$

〔解 2〕

觀察 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(3+h)+2}-\dfrac{1}{3+2}}{h}$

令 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

則 $\displaystyle f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(3+h)+2}-\dfrac{1}{3+2}}{h}$$

而 $f'(x)=\dfrac{1'\times(x+2)-(x+2)'\times 1}{(x+2)^2}$

$$=\frac{0\times(x+2)-1\times 1}{(x+2)^2}=\frac{-1}{(x+2)^2}$$

則 $f'(3)=\dfrac{-1}{(3+2)^2}=-\dfrac{1}{25}$

因此 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(3+h)+2}-\dfrac{1}{3+2}}{h}=-\frac{1}{25}$

6. 技巧與分析

級數 Σ 的展開

解析

(1) $a=\sum_{m=1}^{7}\frac{m-2}{2m-1}$

$=\frac{1-2}{2\times1-1}+\frac{2-2}{2\times2-1}+\frac{3-2}{2\times3-1}+\cdots+\frac{7-2}{2\times7-1}$

$=-1+0+\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{3}{9}+\frac{4}{11}+\frac{5}{13}$

(2) $b=\sum_{k=0}^{6}\frac{k-1}{2k+1}$

$=\frac{0-1}{2\times0+1}+\frac{1-1}{2\times1+1}+\frac{2-1}{2\times2+1}+\cdots+\frac{6-1}{2\times6+1}$

$=-1+0+\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{3}{9}+\frac{4}{11}+\frac{5}{13}$

(3) $c=\sum_{i=3}^{8}\frac{i-4}{2i-5}$

$=\frac{3-4}{2\times3-5}+\frac{4-4}{2\times4-5}+\frac{5-4}{2\times5-5}+\cdots+\frac{8-4}{2\times8-5}$

$=-1+0+\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{3}{9}+\frac{4}{11}$

由(1)、(2)和(3)可知，$a=b>c$

7. 技巧與分析

零指數與負整數指數：

設 $a\neq0$ 且 n 為正整數，$a^0=1$，$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

解析

感染率 $I(t)=\frac{1}{1+49\left(7^{-\frac{t}{3}}\right)}$

(1) $a=I(0)=\frac{1}{1+49\left(7^{-\frac{0}{3}}\right)}=\frac{1}{1+49\times7^0}$

$=\frac{1}{1+49\times1}=\frac{1}{50}$

(2) $b=I(3)=\frac{1}{1+49\left(7^{-\frac{3}{3}}\right)}=\frac{1}{1+49\times7^{-1}}$

$=\frac{1}{1+49\times\frac{1}{7}}=\frac{1}{8}$

(3) $c=I(6)=\frac{1}{1+49\left(7^{-\frac{6}{3}}\right)}=\frac{1}{1+49\times7^{-2}}$

$=\frac{1}{1+49\times\frac{1}{7^2}}=\frac{1}{2}$

由(1)、(2)和(3)可知

$b=\frac{25}{4}a$，$c=25a$，$c=4b$

故選(C)

8. 技巧與分析

(1) 二次函數（拋物線）的配方

(2) 拋物線 $y=a(x-h)^2+k$ 的頂點為 (h,k)

(3) 若圓的圓心為 (h,k) 且半徑為 r

則圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

解析

(1) 拋物線 $y=x^2+4x+5=(x^2+4x)+5$

$=(x^2+2\times2\times x+2^2)+5-2^2$

$=(x+2)^2+1=[x-(-2)]^2+1$

則拋物線的頂點為 $(-2,1)$

(2) 圓 C 的圓心為拋物線的頂點 $(-2,1)$

而圓 C 與 y 軸相切，

則圓 C 的半徑為 $|-2|=2$

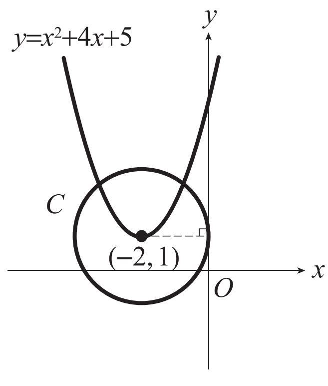
故圓 C 的方程式為

$[x-(-2)]^2+(y-1)^2=2^2$

$\Rightarrow\ (x+2)^2+(y-1)^2=4$

$\Rightarrow\ (x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)=4$

$\Rightarrow\ x^2+y^2+4x-2y+1=0$



9. 技巧與分析

(1) 將橢圓的一般式配方成標準式

(2) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）

是左右焦點的橢圓，中心為(h,k)

長軸長為$2a$，短軸長為$2b$

(3) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$（$a,b>0$）

是左右焦點的雙曲線，中心為(h,k)

貫軸長為$2a$，共軛軸長為$2b$

解析

(1) $x^2+4y^2+4x-16y+4=0$

$\Rightarrow\ (x^2+4x)+4(y^2-4y)=-4$

$\Rightarrow\ (x^2+2\times2\times x+2^2)+$

$4(y^2-2\times2\times y+2^2)$

$=-4+2^2+4\times2^2$

$\Rightarrow\ (x+2)^2+4(y-2)^2=16$

$\overset{\div16}{\Rightarrow}\ \dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

$\Rightarrow\ \dfrac{(x+2)^2}{4^2}+\dfrac{(y-2)^2}{2^2}=1$

這是左右焦點的橢圓方程式

其中心為$(-2,2)$

而$a_{橢}=4$，$b_{橢}=2$

則長軸長$=2a_{橢}=2\times4=8$

短軸長$2b_{橢}=2\times2=4$

(2) $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$

$\Rightarrow\ \dfrac{(x+2)^2}{2^2}-\dfrac{(y-1)^2}{(\sqrt{5})^2}=1$

這是左右焦點的雙曲線方程式

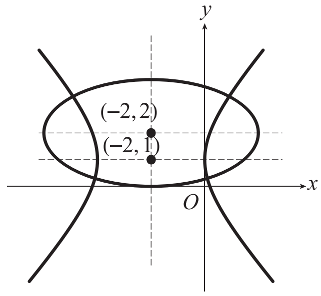
其中心為$(-2,1)$

而$a_{雙}=2$，$b_{雙}=\sqrt{5}$

則貫軸長$2a_{雙}=2\times2=4$

共軛軸長$2b_{雙}=2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

由(1)和(2)，將兩個方程式作圖如下：



故選(D)

10. 技巧與分析

克拉瑪公式：

設方程組$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$

令$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}$

若方程組有無限多組解，則$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$

解析

方程組$\begin{cases}kx+3y+k+1=0\\x+4(k+1)y+8k^2+1=0\end{cases}$

$\Rightarrow\ \begin{cases}kx+3y=-(k+1)\\x+4(k+1)y=-(8k^2+1)\end{cases}$

令$\Delta=\begin{vmatrix}k&3\\1&4(k+1)\end{vmatrix}$

$=k\times4(k+1)-3\times1=4k^2+4k-3$

$\Delta_x=\begin{vmatrix}-(k+1)&3\\-(8k^2+1)&4(k+1)\end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix}k+1&3\\8k^2+1&4(k+1)\end{vmatrix}$

$=-\left[(k+1)\times4(k+1)-3\times(8k^2+1)\right]$

$=-(-20k^2+8k+1)=20k^2-8k-1$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}k&-(k+1)\\1&-(8k^2+1)\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}k&k+1\\1&8k^2+1\end{vmatrix}$

$=-\left[k\times(8k^2+1)-(k+1)\times1\right]$

$=-(8k^3-1)=-8k^3+1$

$\because$ 方程組有無限多組解

$\therefore$ 由克拉瑪公式可知：$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$

(1) $\Delta=0 \quad \Rightarrow \quad 4k^2+4k-3=0$

$\Rightarrow \quad (2k-1)(2k+3)=0$

$\Rightarrow \quad k=\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{3}{2}$

(2) $\Delta_x=0 \quad \Rightarrow \quad 20k^2-8k-1=0$

$\Rightarrow \quad (2k-1)(10k+1)=0$

$\Rightarrow \quad k=\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{1}{10}$

(3) $\Delta_y=0 \quad \Rightarrow \quad -8k^3+1=0$

$\Rightarrow \quad k^3=\dfrac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad k=\dfrac{1}{2}$

由(1)、(2)和(3)可知，$k=\dfrac{1}{2}$

11. 技巧與分析

(1) 行列式的任一行（列）的 k 倍加到另一行（列），其值不變

(2) 行列式的某一行（列）都是0，其值為0

解析

$\times(-1)$ $\times(-1)$ $\times 1$

$$\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & -y & x \\ z & -z & y \\ x & -x & z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & 0 & x \\ z & 0 & y \\ x & 0 & z \end{vmatrix}=0$$

（行列式的某一行（列）都是0，其值為0）

12. 技巧與分析

(1) 乘法原理：

若完成一件事可以依序分成若干步驟，則完成這件事的方法數為各步驟的方法數之乘積

(2) 相異物的組合：

從 n 個相異物取出 k 個為一組的方法數

為 $C^n_k=\dfrac{\overbrace{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}^{\text{從}n\text{倒數，}k\text{個數相乘}}}{k!}$

解析

分步驟安排8個隊員在 A 、 B 、 C 、 D 場地

(1) A 場地：從8個隊員中選2個

有 $C^8_2=\dfrac{8\times7}{2!}=28$ 種

(2) B 場地：已經有2個隊員在 A 場地

剩下 $8-2=6$ 個，從中選2個

有 $C^6_2=\dfrac{6\times5}{2!}=15$ 種

(3) C 場地：已經有4個隊員在 A 、 B 場地

剩下 $8-4=4$ 個，從中選2個

有 $C^4_2=\dfrac{4\times3}{2!}=6$ 種

(4) D 場地：已經有6個隊員在 A、B、C 場地，剩下 $8-6=2$ 個

都安排在 D 場地，只有1種

由(1)、(2)、(3)、(4)可知

共有 $28\times15\times6\times1=2520$ 種方式

13. 技巧與分析

(1) 斜截式：

直線 $y=mx+b$ 的斜率為 m

(2) 若兩直線垂直，則其斜率乘積為 -1

(3) 兩點 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 的距離為

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

解析

(1) 由直線的斜截式：

直線 $L_1: y=ax+b$ 的斜率為 a

直線 $L_2: y=bx+a$ 的斜率為 b

$\because \quad L_1 \perp L_2$

$\therefore$ 斜率乘積為 $-1 \quad \Rightarrow \quad ab=-1$

(2) 求兩直線 L_1 與 L_2 的交點：

$L_1: y=ax+b \quad \Rightarrow \quad ax-y=-b \cdots\cdots$①

$L_2: y=bx+a \quad \Rightarrow \quad bx-y=-a \cdots\cdots$②

①−② ：$(a-b)x=a-b \quad \Rightarrow \quad x=1$

$x=1$ 代入① ：$a\times1-y=-b$

$\Rightarrow \quad y=a+b$

則 L_1 與 L_2 的交點為 $(1,a+b)$

(3) 交點$(1,a+b)$與原點$(0,0)$的距離：

$$\sqrt{(1-0)^2+(a+b-0)^2}=\sqrt{1+(a+b)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(a^2+2ab+b^2\right)}$$

$$=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)+2ab+1}$$

$\because$ $ab=-1$且$a^2+b^2=50$

$\therefore$ 距離為$\sqrt{50+2\times(-1)+1}=\sqrt{49}=7$

14. 技巧與分析

正弦定理：

設$\triangle ABC$的三邊長為a、b、c

則$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

解析

(1) $\because$ $ab:bc:ca=\dfrac{ab}{abc}:\dfrac{bc}{abc}:\dfrac{ca}{abc}$

$$=\frac{1}{c}:\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$$

且$ab:bc:ca=3:4:6$

$\therefore$ $\dfrac{1}{c}:\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}=3:4:6$

則$c:a:b=\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{6}$

$$=\frac{1}{3}\times12:\frac{1}{4}\times12:\frac{1}{6}\times12=4:3:2$$

$\Rightarrow$ $a:b:c=3:2:4$

(2) 由正弦定理可知，

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=3:2:4$

15. 技巧與分析

因式定理的應用：

設α、β、γ為相異實數

若$f(x)$為三次多項式

且$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=k$

則可以設$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+k$

解析

$f(x)$為三次多項式且領導係數為a

而$f(1)=f(2)=f(-2)=2$

設$f(x)=a(x-1)(x-2)[x-(-2)]+2$

$=a(x-1)(x-2)(x+2)+2$

$f(-1)=a(-1-1)(-1-2)(-1+2)+2$

$=a\times(-2)\times(-3)\times1+2=6a+2$

$\because$ $f(-1)=8$ $\therefore$ $6a+2=8$ $\Rightarrow$ $a=1$

則$f(x)=1\times(x-1)\,(x-2)(x+2)+2$

$=(x-1)\left(x^2-4\right)+2$

$=\left(x^3-x^2-4x+4\right)+2$

$=x^3-x^2-4x+6$

與$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$比較係數

得$a=1$，$b=-1$，$c=-4$，$d=6$

故選(C)

16. 技巧與分析

(1) 向量的垂直：

設兩個非零向量$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$

則$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

(2) 若兩向量的內積為正值

則其夾角為銳角或0°

(3) 若兩向量的內積為負值

則其夾角為鈍角或180°

解析

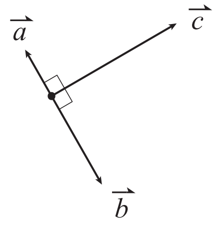
(1) $\because$ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$ $\therefore$ $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$

(2) $\because$ $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$ $\therefore$ $\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{c}$

(3) $\because$ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}<0$

$\therefore$ $\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角為鈍角或180°

由(1)、(2)和(3)，可以畫出$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$的相對位置



故$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$反向，夾角為180°

因此$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\times\left|\overrightarrow{b}\right|\times\cos180°$

$=5\times12\times(-1)=-60$

17. 技巧與分析

(1) 代換積分：

設 $u=g(x)$ 是可微分函數

則 $\int_a^b f(g(x))\times g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

(2) $\int_a^b u^n du=\left.\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}\right|_a^b$

$=\dfrac{1}{n+1}\times b^{n+1}-\dfrac{1}{n+1}a^{n+1}$

其中 $n\neq -1$

解析

(1) 令 $u=3x-2$

將上式等號的兩側對 x 微分：

$\dfrac{du}{dx}=3 \quad\Rightarrow\quad du=3dx \quad\Rightarrow\quad dx=\dfrac{1}{3}du$

(2) 定積分的範圍：

x	1	3
u	1	7

由(1)和(2)可知，

$\int_1^3 (3x-2)^{110}dx=\int_1^7 u^{110}\times\dfrac{1}{3}du=\dfrac{1}{3}\int_1^7 u^{110}du$

$=\dfrac{1}{3}\times\left.\dfrac{1}{110+1}u^{110+1}\right|_1^7=\left.\dfrac{1}{333}u^{111}\right|_1^7$

$=\dfrac{1}{333}\times 7^{111}-\dfrac{1}{333}\times 1^{111}=\dfrac{7^{111}}{333}-\dfrac{1}{333}=\dfrac{7^{111}-1}{333}$

18. 技巧與分析

(1) 週期的變化：

若 $f(\theta)$ 的週期為 T

則 $f(k\theta)$ 的週期為 $\dfrac{T}{|k|}$，其中 $k\neq 0$

(2) 三角函數的平方和關係式：

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

(3) $a\sin\theta+b\cos\theta$ 的極值：

最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}$

最小值為 $-\sqrt{a^2+b^2}$

(4) $y=\sin\theta$ 和 $y=\cos\theta$ 的圖形

解析

(1) $y=\tan\theta$ 的週期為 π

$\because\quad \tan\dfrac{\theta}{3}=\tan\left(\dfrac{1}{3}\times\theta\right)$

$\therefore\quad y=\tan\dfrac{\theta}{3}$ 的 θ 係數為 $\dfrac{1}{3}$

則 $y=\tan\dfrac{\theta}{3}$ 的週期為 $\dfrac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}=3\pi$

(2) 三角函數的平方和關係式：

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$\Rightarrow\quad \tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$

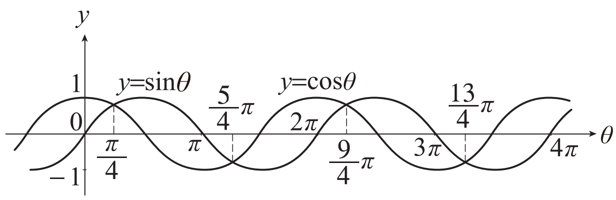
(3) $\sin\theta+\cos\theta$ 的極值如下：

最大值 $=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

最小值 $=-\sqrt{1^2+1^2}=-\sqrt{2}$

則 $-\sqrt{2}\leq\sin\theta+\cos\theta\leq\sqrt{2}$

(4) 在坐標平面上，觀察 $y=\sin\theta$ 和 $y=\cos\theta$ 的圖形



若 $\cos\theta=\sin\theta$

則 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 、 $\dfrac{5}{4}\pi$ 、 $\dfrac{9}{4}\pi$ 、 $\dfrac{13}{4}\pi\cdots$

即：$\theta=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$，其中 n 為整數

由(1)、(2)、(3)、(4)的討論

故選項(C)是正確的

19. 技巧與分析

(1) 虛數單位：

若 $i=\sqrt{-1}$，則 $i^2=-1$

(2) 複數的除法：

$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$

$=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

(3) 複數的相等：

設 a 、 b 、 c 、 d 均為實數

若 $a+bi=c+di$

則 $a=c$ 且 $b=d$

解析

(1) $\because \left(\sqrt{3}\pm i\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2\pm 2\times\sqrt{3}\times i+i^2$

$$=3\pm 2\sqrt{3}i+(-1)=2\pm 2\sqrt{3}i$$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^2}{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}=\frac{2-2\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{2\times\left(1-\sqrt{3}i\right)}{2\times\left(1+\sqrt{3}i\right)}=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^2}{\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)}$$

$$=\frac{1^2-2\times1\times\sqrt{3}i+\left(\sqrt{3}i\right)^2}{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1-2\sqrt{3}i+(-3)}{4}$$

$$=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$=\frac{2\times\left(-1-\sqrt{3}i\right)}{4}$$

$$=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

(2) $\because \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2$ 與 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2$ 互為倒數

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2=\frac{2}{-1-\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{2\left(-1+\sqrt{3}i\right)}{\left(-1-\sqrt{3}i\right)\left(-1+\sqrt{3}i\right)}$$

$$=\frac{2\left(-1+\sqrt{3}i\right)}{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(-1+\sqrt{3}i\right)}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

由(1)和(2)可知

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$=-1=-1+0i$$

則 $a=-1$，$b=0$，因此 $a+b=-1+0=-1$

20. 技巧與分析

算幾不等式：

若 $a\geq 0$，$b\geq 0$

則 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

解析

x^2+2 與 $\frac{9}{x^2+2}$ 均為正數

由算幾不等式：

$$\frac{\left(x^2+2\right)+\frac{9}{x^2+2}}{2}\geq\sqrt{\left(x^2+2\right)\times\frac{9}{x^2+2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2+\frac{9}{x^2+2}}{2}\geq 3$$

$$\overset{\times 2}{\Rightarrow} x^2+2+\frac{9}{x^2+2}\geq 6$$

$$\overset{-4}{\Rightarrow} x^2-2+\frac{9}{x^2+2}\geq 2$$

故 $x^2-2+\frac{9}{x^2+2}$ 的最小值為 2

21. 技巧與分析

加法原理：

若完成一件事的方法可以分成若干類（任兩類不重複），則完成這件事的方法數為各類方法數的總和

解析

(1) 3 本課本都在同一層：

$$\underbrace{3}_{\text{從三層中選一層}}\times\underbrace{3!}_{\text{3 本課本的排法}}=3\times6=18 \text{ 種排法}$$

(2) 3 本課本都在不同層：

（每一層只有 1 本課本）

$3!=6$ 種排法

(3) 恰有 2 本在同一層：

$$\underbrace{3\times C_2^3\times 2!}_{\text{從三層中選一層，再選 2 本課本排入}}\times\underbrace{2}_{\text{剩下 1 本課本有兩層可選}}=36 \text{ 種排法}$$

由(1)、(2)、(3)可知

共有 $18+6+36=60$ 種排法

22. 技巧與分析

直線與圓錐曲線的關係：

直線與圓錐曲線的方程式可以合併成

$ax^2+bx+c=0$ 或 $ay^2+by+c=0$

若直線與圓錐曲線相切（只有1個交點）

則合併的方程式有兩相等實根

其判別式為 0 ，即 $b^2-4ac=0$

解析

(1) 拋物線 $f(x)=-x^2+4x-1$

$\Rightarrow \quad y=-x^2+4x-1=-(x^2-4x)-1$

$=-(x^2-2\times2\times x+2^2)-1+2^2$

$=-(x-2)^2+3$

則拋物線的頂點為 $(2,3)$ ，開口向下

(2) 令 $mx=-x^2+4x-1$

$\Rightarrow \quad x^2+(m-4)x+1=0$

若 $y=mx$ 與 $y=-x^2+4x-1$ 相切（只有1個交點）

則上式有兩相等實根，其判別式為 0

故 $(m-4)^2-4\times1\times1=0$

$\Rightarrow \quad (m^2-8m+16)-4=0$

$\Rightarrow \quad m^2-8m+12=0$

$\Rightarrow \quad (m-2)(m-6)=0$

$\Rightarrow \quad m=2$ 或 6

① 當 $m=2$ 時：

$x^2+(m-4)x+1=0$

$\Rightarrow \quad x^2+(2-4)x+1=0$

$\Rightarrow \quad x^2-2x+1=0$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2=0$

$\Rightarrow \quad x=1$

將 $x=1$ 代入 $y=-x^2+4x-1$ ：

$y=-1^2+4\times1-1=-1+4-1=2$

則直線與拋物線相切於點 $(1,2)$

② 當 $m=6$ 時：

$x^2+(m-4)x+1=0$

$\Rightarrow \quad x^2+(6-4)x+1=0$

$\Rightarrow \quad x^2+2x+1=0$

$\Rightarrow \quad (x+1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$

將 $x=-1$ 代入 $y=-x^2+4x-1$ ：

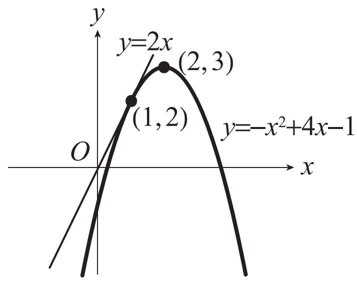
$y=-(-1)^2+4\times(-1)-1$

$=-1-4-1=-6$

則直線與拋物線相切於點 $(-1,-6)$

由於直線與拋物線的切點在第一象限內

故 $m=2$



23. 技巧與分析

(1) $\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx$

$=\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\int_a^b x^n dx = \left.\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right|_a^b$

$=\dfrac{1}{n+1}\times b^{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\times a^{n+1}$

其中 $n\neq-1$

解析

(1) $\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)=x\sqrt{x}-1+1-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$=x\sqrt{x}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$x\sqrt{x}=x\times x^{\frac{1}{2}}=x^{1+\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$

$\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=x^{-\frac{3}{2}}$

(2) $\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx=\left.\dfrac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right|_1^4$

$=\left.\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right|_1^4=\left.\dfrac{2}{5}\left(\sqrt{x}\right)^5\right|_1^4$

$=\dfrac{2}{5}\times\left(\sqrt{4}\right)^5-\dfrac{2}{5}\times\left(\sqrt{1}\right)^5$

$=\dfrac{64}{5}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{62}{5}$

(3) $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}\Bigg|_1^4$

$= -2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = \frac{-2}{\sqrt{x}}\Big|_1^4 = \frac{-2}{\sqrt{4}} - \frac{-2}{\sqrt{1}}$

$= -1-(-2) = 1$

由(1)、(2)、(3)可知

$\int_1^4 \left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx$

$= \int_1^4 \left(x\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$

$= \int_1^4 x\sqrt{x}dx - \int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

$= \frac{62}{5} - 1 = \frac{57}{5}$

24. 技巧與分析

了解資料平均數、中位數、眾數與全距的意義

解析

(1) 21棵的高度總和

$= 8+3\times9+2\times10+2\times11+4\times12+3\times13$
$+2\times14+2\times15+16+24 = 262$

其平均數 $= 262\div21 \fallingdotseq 12.48$（公分）

移除24（公分）的數據，剩下20棵的高度總和 $= 262-24 = 238$

其平均數 $= 238\div20 = 11.9$（公分）

則移除前後的平均數相差

$\fallingdotseq 12.48-11.9 = 0.58$（公分）

(2) 21棵植物高度的中位數（由小到大的第11個數據）為12（公分）

移除24（公分）的數據，剩下20棵植物高度的中位數（由小到大的第10、11個數據平均）為 $\frac{12+12}{2} = 12$（公分）

則中位數沒有改變

(3) 21棵植物高度的眾數為12（公分）

移除24（公分）的數據，剩下20棵植物高度的眾數也是12（公分），則眾數沒有改變

(4) 21棵植物高度的全距為 $24-8=16$（公分）

移除24（公分）的數據，剩下20棵植物高度的全距為 $16-8=8$（公分）

則移除前後的全距相差

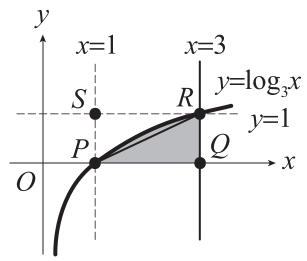
$=16-8=8$（公分）

由(1)、(2)、(3)、(4)可知，全距改變最多

25. 技巧與分析

了解對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形

解析



(1) 如圖，畫出直線 $x=1$ 和 $y=1$，則四邊形 $PQRS$ 為長方形，面積為 $2\times1=2$

(2) $\triangle PQR$ 是直角三角形

面積為 $\frac{1}{2}\times2\times1=1$

(3) $\because$ A 是鋪色部分的面積

$\therefore$ $A <$ 長方形 $PQRS$ 的面積 $=2$

且 $A > \triangle PQR$ 的面積 $=1$

則 $1<A<2$，故選(C)