109指考最前線-數學甲

班級：__________ 座號：______ 姓名：________________

總分	

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

(　　)1. 已知$45^\circ<\theta<50^\circ$，且設$a=1-\cos^2\theta$、$b=\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$、$c=\dfrac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}$。關於 a、b、c 三個數值的大小，試選出正確的選項。

(1) $a<b<c$　(2) $a<c<b$　(3) $b<a<c$　(4) $b<c<a$　(5) $c<a<b$

(　　)2. 有 A、B 兩個箱子，其中 A 箱有 6 顆白球與 4 顆紅球，B 箱有 8 顆白球與 2 顆藍球。現有三種抽獎方式（各箱中每顆球被抽取的機率相同）：

（一）先在 A 箱中抽取一球，若抽中紅球則停止，若抽到白球則再從 B 箱中抽取一球；

（二）先在 B 箱中抽取一球，若抽中藍球則停止，若抽到白球則再從 A 箱中抽取一球；

（三）同時分別在 A、B 箱中各抽取一球。

給獎方式為：在紅、藍這兩種色球當中，若只抽到紅球得 50 元獎金；若只抽到藍球得 100 元獎金；若兩種色球都抽到，則仍只得 100 元獎金；若都沒抽到，則無獎金。將上列（一）、（二）、（三）這 3 種抽獎方式所得獎金的期望值分別記為E_1、E_2、E_3，試選出正確的選項。

(1) $E_1>E_2>E_3$　(2) $E_1=E_2>E_3$　(3) $E_2=E_3>E_1$　(4) $E_1=E_3>E_2$　(5) $E_3>E_2>E_1$

(　　)3. 根據實驗統計，某種細菌繁殖，其數量平均每 3.5 小時會擴增為 2.4 倍。假設實驗室的試管一開始有此種細菌 1000 隻，根據指數函數模型，試問大約在多少小時後此種細菌的數量會到達4×10^{10}隻左右？（註：$\log2\approx0.3010$，$\log3\approx0.4771$）

(1) 63 小時　(2) 70 小時　(3) 77 小時　(4) 84 小時　(5) 91 小時

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(　　)4. 在坐標平面上，設 O 為原點，且 A、B 為異於 O 的相異兩點。令 C_1 、 C_2 、 C_3 為平面上三個點，且滿足 $\overrightarrow{OC_n}=\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ ， $n=1,2,3$ ，試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{OC_1}\neq\overrightarrow{0}$

(2) $\overline{OC_1}<\overline{OC_2}<\overline{OC_3}$

(3) $\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OA}<\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OA}<\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OA}$

(4) $\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OB}<\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OB}<\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OB}$

(5) C_1 、 C_2 、 C_3 在同一直線上

(　　)5. 對一實數 a，以 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數，例如：$[1.2]=\left[\sqrt{2}\right]=1$，$[-1.2]=-2$ 。考慮無理數 $\theta=\sqrt{10001}$ ，試選出正確的選項。

(1) $a-1<[a]\leq a$ 對任意實數 a 均成立

(2)數列 $b_n=\dfrac{[n\theta]}{n}$ 發散，n 為正整數

(3)數列 $c_n=\dfrac{[-n\theta]}{n}$ 發散，n 為正整數

(4)數列 $d_n=n\left[\dfrac{\theta}{n}\right]$ 發散，n 為正整數

(5)數列 $e_n=n\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]$ 發散，n 為正整數

(　　)6. 設 $F(x)$ 、 $f(x)$ 皆為實係數多項式函數。已知 $F'(x)=f(x)$ ，試選出正確的選項。

(1)若 $a\geq 0$ ，則 $F(a)-F(0)=\int_0^a f(t)\,dt$

(2)若 $F(x)$ 除以 x 的商式為 $Q(x)$ ，則 $Q(0)=f(0)$

(3)若 $f(x)$ 可被 $x+1$ 整除，則 $F(x)-F(0)$ 可被 $(x+1)^2$ 整除

(4)若對所有實數 x， $F(x)\geq\dfrac{x^2}{2}$ 都成立，則對所有實數 x， $f(x)\geq x$ 也都成立

(5)若對所有 $x>0$ ， $f(x)\geq x$ 都成立，則對所有 $x>0$ ， $F(x)\geq\dfrac{x^2}{2}$ 也都成立

(　　)7. 在複數平面上，設 O 為原點，且 A、B 分別表示坐標為複數 z、$z+1$ 的點。已知點 A、點 B 都在以 O 為圓心的單位圓上，試選出正確的選項。

(1)直線 AB 與實數軸平行

(2)$\triangle OAB$ 為直角三角形

(3)點 A 在第二象限

(4) $z^3=1$

(5)坐標為 $1+\dfrac{1}{z}$ 的點也在同一單位圓上

(　　)8. 設二階實係數方陣 A 代表坐標平面的一個鏡射變換且滿足 $A^3=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$；另設二階實係數方陣 B 代表坐標平面的一個（以原點為中心的）旋轉變換且滿足 $B^3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(1) A 恰有三種可能

(2) B 恰有三種可能

(3) $AB=BA$

(4)二階方陣 AB 代表坐標平面的一個旋轉變換

(5) $BABA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（9–19）。 2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 在坐標空間中，設 O 為原點，且點 P 為三平面 $x-3y-5z=0$、$x-3y+2z=0$、$x+y=t$ 的交點，其中 $t>0$。若 $\overline{OP}=10$，則 $t=$ ＿⑨$\sqrt{⑩⑪}$＿。（化成最簡根式）

B. 考慮坐標平面上相異三點 A、B、C，其中點 A 為 $(1,1)$。分別以線段 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 為直徑作圓，此兩圓交於點 A 及點 $P(4,2)$。已知 $\overline{PB}=3\sqrt{10}$ 且點 B 在第四象限，則點 B 的坐標為 (＿⑫＿,＿⑬⑭＿)。

C. 有一個三角形公園，其三頂點為 O、A、B，在頂點 O 處有一座 150 公尺高的觀景台，某人站在觀景台上觀測地面上另兩個頂點 A、B 與 $\overline{AB}$ 的中點 C，測得其俯角分別為 30°、60°、45°。則此三角形公園的面積為＿⑮⑯⑰⑱$\sqrt{⑲}$＿平方公尺。（化成最簡根式）

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一、坐標平面上，由 A、B、C、D 四點所決定的「貝茲曲線」（Bézier curve）指的是次數不超過 3 的多項式函數，其圖形通過 A、D 兩點，且在點 A 的切線通過點 B，在點 D 的切線通過點 C。令 $y=f(x)$ 是由 $A(0,0)$、$B(1,4)$、$C(3,2)$、$D(4,0)$ 四點所決定的「貝茲曲線」，試回答下列問題。

(1)設 $y=f(x)$ 的圖形在點 D 的切線方程式為 $y=ax+b$，其中 a、b 為實數。求 a、b 之值。（2 分）

(2)試證明多項式 $f(x)$ 可以被 x^2-4x 所整除。（2 分）

(3)試求 $f(x)$。（4 分）

(4)求定積分 $\int_2^6 |8f(x)|dx$ 之值。（4 分）

二、一個邊長為 1 的正立方體 $ABCD$-$EFGH$，點 P 為稜邊 $\overline{CG}$ 的中點，點 Q、R 分別在稜邊 $\overline{BF}$、$\overline{DH}$ 上，且 A、Q、P、R 為一平行四邊形的四個頂點，如下圖所示。

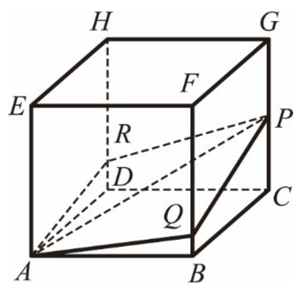
今設定坐標系，使得 D、A、C、H 的坐標分別為 $(0,0,0)$、$(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$，且 $\overline{BQ}=t$，試回答下列問題。

(1)試求點 P 的坐標。（2 分）

(2)試求向量 $\overrightarrow{AR}$（以 t 的式子來表示）。（2 分）

(3)試證明四角錐 G-$AQPR$ 的體積是一個定值（與 t 無關），並求此定值。（4 分）

(4)當 $t=\dfrac{1}{4}$ 時，求點 G 到平行四邊形 $AQPR$ 所在平面的距離。（4 分）



試題大剖析

桃園高中／陳清風

答　案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (5)　2. (3)　3. (2)

二、多選題

4. (4)(5)　5. (1)(5)　6. (1)(2)　7. (1)(4)(5)　8. (2)(5)

三、選填題

A. $4\sqrt{10}$　B. $(7,-7)$　C. $7500\sqrt{2}$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $a=-2, b=8$　(2)見詳解　(3) $f(x)=(x^2-4x)\left(\frac{1}{8}x-1\right)$　(4) 56

二、(1) $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$　(2) $\left(-1,0,\frac{1}{2}-t\right)$　(3)見詳解　(4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

解　析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.　出處：第三冊　第一章 三角

難易度：易

解：利用三角恆等式，得

$a=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$，

$b=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$，

$c=\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}=\tan\theta\times\cos^2\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\cos^2\theta=\sin\theta\times\cos\theta$。

因為 $45^\circ<\theta<50^\circ$，所以

① $\frac{a}{b}=\cos\theta<1\Rightarrow a<b$。

② $\frac{a}{c}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta>\tan 45^\circ=1\Rightarrow a>c$。

綜合①、②，得 $c<a<b$。

故選(5)。

2. 出處：選修數甲(上)　第一章 機率與統計

難易度：易

解：①計算E_1：

取球	紅	(白，白)	(白，藍)
X	50	0	100
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}\times\frac{8}{10}$	$\frac{6}{10}\times\frac{2}{10}$

得$E_1=50\times\frac{4}{10}+0\times\frac{48}{100}+100\times\frac{12}{100}=20+0+12=32$（元）。

②計算E_2：

取球	藍	(白，白)	(白，紅)
X	100	0	50
P	$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}\times\frac{6}{10}$	$\frac{8}{10}\times\frac{4}{10}$

得$E_2=100\times\frac{2}{10}+0\times\frac{48}{100}+50\times\frac{32}{100}=20+0+16=36$（元）。

③計算E_3：

取球	白白	紅白	白藍	紅藍
X	0	50	100	100
P	$\frac{6}{10}\times\frac{8}{10}$	$\frac{4}{10}\times\frac{8}{10}$	$\frac{6}{10}\times\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}\times\frac{2}{10}$

得$E_3=0\times\frac{48}{100}+50\times\frac{32}{100}+100\times\frac{12}{100}+100\times\frac{8}{100}=0+16+12+8=36$（元）。

綜合①、②、③，得$E_2=E_3>E_1$。

故選(3)。

3. 出處：第一冊　第三章 指數、對數函數

難易度：中

解：設經t小時後細菌數量到達4×10^{10}隻。

依題意，得$1000\times2.4^{\frac{t}{3.5}}=4\times10^{10}\Rightarrow2.4^{\frac{t}{3.5}}=4\times10^{7}$。

等號兩邊取對數，得$\frac{t}{3.5}\log2.4=7+\log4$，解得

$$t=\frac{(7+\log4)\times3.5}{\log2.4}=\frac{(7+2\log2)\times3.5}{3\log2+\log3-\log10}\approx\frac{7.6020\times3.5}{0.9030+0.4771-1}=\frac{26.607}{0.3801}=70$$ 。

故選(2)。

二、多選題

4. 出處：第三冊　第三章 平面向量

難易度：中

解：(1)錯。例如：若 $A(1,0)$、$B(-1,0)$，則 $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{0}$。

(2)錯。例如：若 $A(4,0)$、$B(-1,0)$，則

$\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(3,0)$，$\overrightarrow{OC_2}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=(2,0)$，$\overrightarrow{OC_3}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=(1,0)$。

得 $\overline{OC_1}>\overline{OC_2}>\overline{OC_3}$。

(3)錯。承(2)，得

$\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OA}=(3,0)\cdot(4,0)=12$，$\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OA}=(2,0)\cdot(4,0)=8$，$\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OA}=(1,0)\cdot(4,0)=4$，

得 $\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OA}>\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OA}>\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OA}$。

(4)因為

$$\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2,$$

$$\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2,$$

$$\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+3\left|\overrightarrow{OB}\right|^2,$$

所以 $\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OB}<\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OB}<\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OB}$。

(5)因為

$$\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{OC_2}-\overrightarrow{OC_1}=\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right)-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{C_1C_3}=\overrightarrow{OC_3}-\overrightarrow{OC_1}=\left(\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right)-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=2\overrightarrow{OB},$$

所以 $\overrightarrow{C_1C_2}\,//\,\overrightarrow{C_1C_3}$。因此 C_1、C_2、C_3 在同一直線上。

故選(4)(5)。

5. 出處：選修數甲(下)　第一章 極限與函數

難易度：中

解：(1)根據 $[a]$ 的定義，得知 $a-1<[a]\le a$。

(2)因為 $n\theta-1<[n\theta]<n\theta$，所以 $\dfrac{n\theta-1}{n}<\dfrac{[n\theta]}{n}<\theta$。

根據夾擠定理，因為 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\theta-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\theta=\theta$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[n\theta]}{n}=\theta$。

因此數列 $b_n=\dfrac{[n\theta]}{n}$ 收斂。

(3)因為$-n\theta-1<\left[-n\theta\right]<-n\theta$，所以$\dfrac{-n\theta-1}{n}<\dfrac{\left[-n\theta\right]}{n}<-\theta$。

根據夾擠定理，因為$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n\theta-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-\theta)=-\theta$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[-n\theta\right]}{n}=-\theta$。

因此數列$c_n=\dfrac{\left[-n\theta\right]}{n}$收斂。

(4)因為$100<\theta<101$，所以$\dfrac{100}{n}<\dfrac{\theta}{n}<\dfrac{101}{n}$。

當$n\geq 101$時，$\left[\dfrac{\theta}{n}\right]=0$，得$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{\theta}{n}\right]=0$。

因此數列$d_n=n\left[\dfrac{\theta}{n}\right]$收斂。

(5)因為$100<\theta<101$，所以$\dfrac{-101}{n}<\dfrac{-\theta}{n}<\dfrac{-100}{n}$。

當$n\geq 101$時，$\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]=-1$，得$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=$不存在。

因此數列$e_n=n\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]$發散。

故選(1)(5)。

6. 出處：選修數甲(下)　第二章　多項式函數的微積分

難易度：中

解：(1)根據微積分基本定理，得知此選項正確。

(2)設$F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$為$n$次多項式。

因為$F'(x)=f(x)$，所以$f(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$。

根據除法原理，因為$F(x)=x\cdot\left(a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1\right)+a_0$，

所以$Q(x)=a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$。

因此$Q(0)=f(0)=a_1$。

(3)錯。例如：若$F(x)=x^2+2x+3$，則$f(x)=2x+2$。

雖然$f(x)$可被$x+1$整除，但$F(x)-F(0)=x^2+2x$不可被$(x+1)^2$整除。

(4)錯。例如：若$F(x)=x^2$，則$f(x)=2x$。

雖然$F(x)\geq\dfrac{x^2}{2}$恆成立，但當$x<0$時，$f(x)\geq x$不成立。

(5)錯。例如：若$F(x)=x^2-3$，則$f(x)=2x$。

當$x>0$時，雖然$f(x)\geq x$都成立，但$F(x)\geq\dfrac{x^2}{2}$不會都成立（如$x=1$時）。

故選(1)(2)。

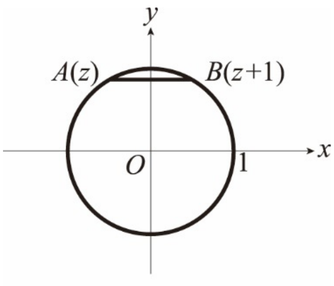
7.　出處：選修數甲(上)　第二章 三角函數

難易度：中

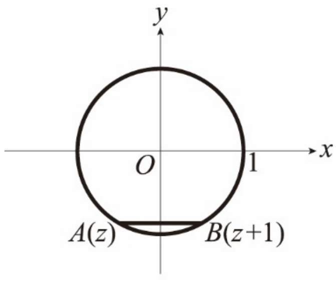
解：(1)因為點 $A(z)$ 向右平移 1 單位到達點 $B(z+1)$，

所以 $\overline{AB}=1$ 且直線 AB 與實數軸平行，

如圖一、圖二所示。



圖一



圖二

(2)因為 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}=1$，所以△$OAB$ 為正三角形。

(3)點 A 在第二或第三象限。

(4)因為 $z=\cos120^\circ+i\sin120^\circ$ 或 $\cos240^\circ+i\sin240^\circ$，

所以 $z^3=\cos360^\circ+i\sin360^\circ$ 或 $\cos720^\circ+i\sin720^\circ$。

因此 $z^3=1$。

(5)因為

$$1+\frac{1}{z}=1+z^{-1}$$

$$=1+\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ) \text{ 或 } 1+\cos(-240^\circ)+i\sin(-240^\circ)\text{，}$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \text{ 或 } 1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\text{，}$$

所以 $\left|1+\frac{1}{z}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$，即坐標為 $1+\frac{1}{z}$ 的點也在同一單位圓上。

故選(1)(4)(5)。

8.　出處：第四冊　第三章 矩陣

難易度：中

解：(1)因為一個點連續鏡射變換二次其坐標不變，所以 $A^2=I$。

因此 $A^3=A^2A=IA=A$，得 $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$。

(2)因為 $B^3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos180^\circ & -\sin180^\circ\\ \sin180^\circ & \cos180^\circ\end{bmatrix}$，且 $180^\circ, 540^\circ, 900^\circ$ 為同界角，

所以 $B=\begin{bmatrix}\cos60^\circ & -\sin60^\circ\\ \sin60^\circ & \cos60^\circ\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\cos180^\circ & -\sin180^\circ\\ \sin180^\circ & \cos180^\circ\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}\cos300^\circ & -\sin300^\circ\\ \sin300^\circ & \cos300^\circ\end{bmatrix}$。

(3) 當 $B=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}$ 時，

$$AB=\begin{bmatrix}0 & -1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},$$

此時 $AB\neq BA$。

(4) 承(3)，因為 AB 不能改寫成 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 的形式，所以 AB 不是旋轉變換。

(5) 令 $\theta=60^\circ,180^\circ$ 或 300°。

因為 $BA=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}$，

所以 $BABA=\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

故選(2)(5)。

三、選填題

A. 出處：第四冊　第二章 空間中的平面與直線

難易度：易

解：解聯立方程式 $\begin{cases}x-3y-5z=0 \\ x-3y+2z=0 \\ x+y=t\end{cases}$，得 $x=\frac{3}{4}t,\ y=\frac{1}{4}t,\ z=0$，即 $P\left(\frac{3}{4}t,\frac{1}{4}t,0\right)$。

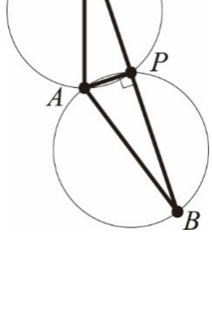
因為 $\overline{OP}=10$，所以 $\sqrt{\frac{9}{16}t^2+\frac{1}{16}t^2+0}=10\Rightarrow\frac{10}{16}t^2=100\Rightarrow t^2=160$，

又因為 $t>0$，所以 $t=4\sqrt{10}$。

B. 出處：第三冊　第三章 平面向量

難易度：中

解：因為直徑的圓周角為直角，所以 $\overrightarrow{PB}$ 與 $\overrightarrow{AP}=(3,1)$ 垂直。



因此可設 $\overrightarrow{PB}=(t,-3t)$。

因為 $\overline{PB}=3\sqrt{10}$，所以 $\sqrt{t^2+9t^2}=3\sqrt{10}\Rightarrow 10t^2=90\Rightarrow t^2=9$，

解得 $t=\pm 3$，即 $\overrightarrow{PB}=(3,-9)$ 或 $(-3,9)$，

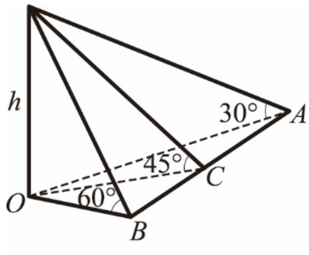
再得 B 點的坐標為 $(7,-7)$ 或 $(1,11)$。

又因為 B 點在第四象限，所以 B 點的坐標為 $(7,-7)$。

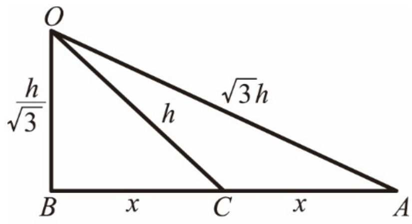
C.　出處：第三冊　第一章 三角

難易度：中

解：設 $h=150$，則 $\overline{OA}=\sqrt{3}h, \overline{OB}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}, \overline{OC}=h$。



圖一



圖二

在圖二中，利用餘弦定理，得

$$\cos B=\frac{\frac{h^2}{3}+x^2-h^2}{2\times\frac{h}{\sqrt{3}}\times x}=\frac{\frac{h^2}{3}+4x^2-3h^2}{2\times\frac{h}{\sqrt{3}}\times 2x}\Rightarrow\frac{-\frac{2h^2}{3}+x^2}{1}=\frac{-\frac{8h^2}{3}+4x^2}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{4h^2}{3}+2x^2=-\frac{8h^2}{3}+4x^2\Rightarrow x^2=\frac{2}{3}h^2,$$

解得 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}h$。再利用餘弦定理，得

$$\cos B=\frac{\frac{h^2}{3}+\frac{2}{3}h^2-h^2}{2\times\frac{h}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{6}}{3}h}=0$$，即 $\angle ABO=90^\circ$。

故 $\triangle ABO$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times 2x\times\dfrac{h}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}h\times\dfrac{h}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}h^2=7500\sqrt{2}$（平方公尺）。

第貳部分：非選擇題

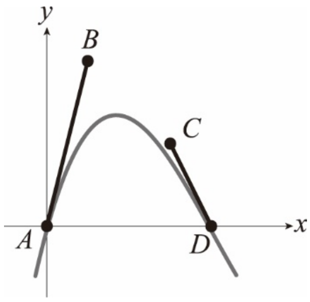
一、出處：選修數甲(下)　第二章 多項式函數的微積分

難易度：中

解：(1)由題意得知，過 D 點的切線為直線 CD。

利用點斜式，得直線 CD 為 $y-0=\dfrac{0-2}{4-3}(x-4)$，即 $y=-2x+8$。

故 $a=-2, b=8$。



(2)因為圖形通過 $A(0,0)$ 與 $D(4,0)$，所以 $f(0)=0, f(4)=0$。

根據因式定理的推廣，得知 $(x-0)(x-4)=x^2-4x$ 是 $f(x)$ 的因式。

因此 $f(x)$ 可以被 x^2-4x 所整除。

(3)設 $f(x)=(x^2-4x)(mx+n)$，則 $f'(x)=(2x-4)(mx+n)+(x^2-4x)\times m$。

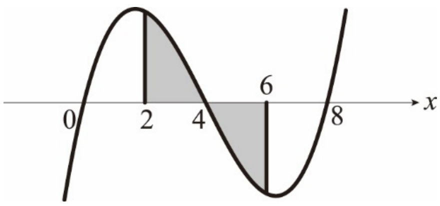
因為 $f'(0)=$直線 AB 的斜率$=\dfrac{4-0}{1-0}=4$，

$f'(4)=$直線 CD 的斜率$=\dfrac{0-2}{4-3}=-2$，

所以 $\begin{cases}-4n+0=4\\ 4(4m+n)+0=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=-1\\ 16m+4n=-2\end{cases}$，

解得 $m=\dfrac{1}{8}, n=-1$。故 $f(x)=(x^2-4x)\left(\dfrac{1}{8}x-1\right)$。

(4)函數 $8f(x)=(x^2-4x)(x-8)=x(x-4)(x-8)$ 的正、負值如下圖。



$$
\begin{aligned}
\text{故}\int_2^6|8f(x)|dx&=\int_2^4|8f(x)|dx+\int_4^6|8f(x)|dx\\
&=\int_2^4 8f(x)dx+\int_4^6 -8f(x)dx\\
&=\int_2^4(x^3-12x^2+32x)dx-\int_4^6(x^3-12x^2+32x)dx\\
&=\left(\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2\right)\Bigg|_2^4-\left(\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2\right)\Bigg|_4^6\\
&=(64-36)-(36-64)\\
&=56\text{。}
\end{aligned}
$$

二、出處：第四冊　第二章 空間中的平面與直線

難易度：中

解：(1)因為 P 為 $\overline{CG}$ 的中點，所以 P 點的坐標為 $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$。

(2)因為 $\overline{BQ}=t$，所以 $Q(1,1,t)$。

又因為 $AQPR$ 為平行四邊形，所以 $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{QP}=\left(-1,0,\frac{1}{2}-t\right)$。

(3)因為 $\overrightarrow{AQ}\times\overrightarrow{AR}=(0,1,t)\times\left(-1,0,\frac{1}{2}-t\right)$

$$=\left(\begin{vmatrix}1 & t\\ 0 & \frac{1}{2}-t\end{vmatrix},\begin{vmatrix}t & 0\\ \frac{1}{2}-t & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-t,-t,1\right),$$

所以平行四邊形 $AQPR$ 的面積為 $\square=\left|\overrightarrow{AQ}\times\overrightarrow{AR}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+(-t)^2+1^2}$。

又因為平面 $AQPR$ 的一個法向量為 $\overrightarrow{AQ}\times\overrightarrow{AR}$ 且通過點 A，

所以其方程式為 $\left(\frac{1}{2}-t\right)x-ty+z=\frac{1}{2}-t$。

利用點到平面距離的公式，得點 $G(0,1,1)$ 到平面 $AQPR$ 的距離為

$$d=\frac{\left|0-t+1-\frac{1}{2}+t\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+(-t)^2+1^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\square}=\frac{1}{2\square}。$$

故四角錐 G-$AQPR$ 的體積為 $\frac{1}{3}\times\square\times d=\frac{1}{3}\times\square\times\frac{1}{2\square}=\frac{1}{6}$，

是一個定值，與 t 無關。

(4)承(3)，因為 $t=\frac{1}{4}$，所以 $d=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+1^2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$。