|  |  |
| --- | --- |
| **108指考最前線-數學甲**\_\_\_\_\_\_年　\_\_\_\_\_\_班　學號\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_　姓名\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | 總　　　 分 |
|  |

第壹部分﹕選擇題（單選題﹑多選題及選填題共占76分）

**一﹑單選題（占18分）**

說明﹕第1題至第3題﹐每題有5個選項﹐其中只有一個是正確或最適當的選項﹐請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」﹒各題答對者﹐得6分﹔答錯﹑未作答或畫記多於一個選項者﹐該題以零分計算﹒

( )1. 某公司尾牙舉辦「紅包大放送」活動﹒每位員工擲兩枚均勻銅板一次﹐若出現兩個反面可得獎金400元﹔若出現一正一反可得獎金800元﹔若出現兩個正面可得獎金800元並且獲得再擲一次的機會﹐其獲得獎金規則與前述相同﹐但不再有繼續投擲銅板的機會（也就是說每位員工最多有兩次擲銅板的機會）﹒試問每位參加活動的員工可獲得獎金的期望值為何﹖

(1)850元 (2)875元 (3)900元 (4)925元 (5)950元﹒

( )2. 設為正整數﹒第個費馬數（Fermat Number）定義為﹐例如﹐﹒試問的整數部分以十進位表示時﹐其位數最接近下列哪一個選項﹖（）

(1)120 (2)240 (3)600 (4)900 (5)1200﹒

( )3. 在一座尖塔的正南方地面某點*A*﹐測得塔頂的仰角為14°﹔又在此尖塔正東方地面某點*B*﹐測得塔頂的仰角為﹐且*A*﹑*B*兩點距離為65公尺﹒已知當在線段上移動時﹐在*C*點測得塔頂的仰角為最大﹐則*C*點到塔底的距離最接近下列哪一個選項﹖（﹐）

(1)27公尺 (2)29公尺 (3)31公尺 (4)33公尺 (5)35公尺﹒

**二﹑多選題（占40分）**

說明﹕第4題至第8題﹐每題有5個選項﹐其中至少有一個是正確的選項﹐請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」﹒各題之選項獨立判定﹐所有選項均答對者﹐得8分﹔答錯1個選項者﹐得4.8分﹔答錯2個選項者﹐得1.6分﹔答錯多於2個選項或所有選項均未作答者﹐該題以零分計算﹒

( )4. 設為坐標平面上通過與兩點的圓﹒試選出正確的選項﹒

(1)的半徑大於或等於5　(2)當的半徑達到最小可能值時﹐通過原點　(3)與直線有交點　(4)的圓心不可能在第四象限　(5)若的圓心在第三象限﹐則的半徑大於8﹒

( )5. 袋中有2顆紅球﹑3顆白球與1顆藍球﹐其大小皆相同﹒今將袋中的球逐次取出﹐每次隨機取出一顆﹐取後不放回﹐直到所有球被取出為止﹒試選出正確的選項﹒

(1)「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率

(2)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件

(3)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件

(4)「取出的第一﹑二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一﹑二顆皆為白球」的機率

(5)「取出的前三顆皆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率﹒

( )6. 設﹑為兩實數數列﹐且對所有的正整數﹐均成立﹒若已知﹐試選出正確的選項﹒

(1)對所有的正整數﹐均成立　(2)存在正整數*n*﹐使得　(3)對所有的正整數*n*﹐均成立　(4)　(5)或﹒

( )7. 已知三次實係數多項式函數﹐在範圍內的圖形如示意圖﹕試選出正確的選項﹒

(1)　(2)　(3)　(4)方程式恰有三實根
(5)圖形的反曲點的坐標為正﹒

( )8. 坐標平面上以原點*O*為圓心的單位圓上三相異點*A*﹑*B*﹑*C*滿足﹐其中*A*點的坐標為﹒試選出正確的選項﹒

(1)向量的長度為4　(2)內積　(3)﹑﹑中﹐以的度數為最小　(4)　(5)﹒

**三﹑選填題（占18分）**

說明﹕1.第A至C題﹐將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(9–18)﹒
2.每題完全答對給6分﹐答錯不倒扣﹐未完全答對不給分﹒

A. 在坐標平面上﹐定義一個坐標變換﹐其中代表舊坐標﹐代表新坐標﹒若舊坐標為的點*P*經此坐標變換得到的新坐標為﹐則﹒

B. 在坐標平面上﹐﹑為函數圖形上之兩點﹐其中﹒已知*A*﹑*B*連線的斜率等於2﹐且線段的長度為﹐則﹒（化成最簡分數）

C. 設為複數﹒在複數平面上﹐一個正六邊形依順時針方向的連續三個頂點為﹑0﹑（其中）﹐則的實部為﹒（化成最簡分數）

第貳部分﹕非選擇題（占24分）

說明﹕本部分共有二大題﹐答案必須寫在「答案卷」上﹐並於題號欄標明大題號（一﹑二）與子題號（(1)﹑(2)﹑……）﹐同時必須寫出演算過程或理由﹐否則將予扣分甚至零分﹒作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫﹐且不得使用鉛筆﹒若因字跡潦草﹑未標示題號﹑標錯題號等原因﹐致評閱人員無法清楚辨識﹐其後果由考生自行承擔﹒每一子題配分標於題末﹒

一﹑坐標空間中以*O*表示原點﹐給定兩向量﹑﹒試回答下列問題﹒

(1) 若是長度為2的向量﹐且與之夾角為60°﹐試求向量與的內積﹒（2分）

(2) 承(1)﹐已知滿足此條件的所有點*P*均落在一平面*E*上﹐試求平面*E*的方程式﹒（2分）

(3) 若是長度為2的向量﹐分別與﹑之夾角皆為60°﹐已知滿足此條件的所有點*Q*均落在一直線*L*上﹐試求直線*L*的方向向量﹒（4分）

(4) 承(3)﹐試求出滿足條件的所有*Q*點之坐標﹒（4分）

二﹑設為實係數多項式函數﹐且對恆成立﹒試回答下列問題﹒

(1) 試求﹒（2分）

(2) 試求﹒（4分）

(3) 試求﹒（2分）

(4) 試證明恰有一個大於1的正實數*a*滿足﹒（4分）

**試題大剖析**

桃園高中／陳清風

 答　案

第壹部分﹕選擇題

一﹑單選題

　 1. (2)　 2. (5)　 3.(3)

二﹑多選題

　 4. (2)(5)　 5. (1)(5)　 6. (3)(4)　 7. (2)(3)(5)　 8. (1)(5)

三﹑選填題

　 A. 　 B. 　C. 

第貳部分﹕非選擇題

一﹑(1)2　(2)　(3)　(4)或

二﹑(1)2　(2)　(3)　(4)見詳解

 解　析

第壹部分﹕選擇題

一﹑單選題

1. 出處﹕選修數甲(上)　第一章 機率與統計

難易度﹕易

解﹕令隨機變數為獲得的獎金﹐則的可能取值為
（元）﹐
其機率分布如下﹕
　　　
得期望值為元﹒
故選(2)﹒

2. 出處﹕第一冊　第三章 指數﹑對數函數

難易度﹕易

解﹕因為

 
 
 ﹐
所以的首數約為1232﹐即約為1233位數﹒
故選(5)﹒

3. 出處﹕第三冊　第一章 三角

難易度﹕中

解﹕如圖﹐設尖塔的高為﹒在直角三角形中﹐因為
﹐﹐
所以由畢氏定理﹐得﹐
解得﹐再得﹒
因為離塔底愈近仰角愈大﹐且在*C*的仰角最大﹐所以﹒
又因為的面積﹐
所以﹒
故選(3)﹒

二﹑多選題

4. 出處﹕第三冊　第二章 直線與圓

難易度﹕中

解﹕令﹒

(1) 如圖一﹐半徑的最小值為﹒

(2) 如圖一﹐當的半徑達到最小值時﹐為直徑﹒因為為直角三角形﹐所以由直徑的圓周角為直角得知﹐通過原點*O*﹒

(3) 如圖二﹐以為弦的圓可能與直線不相交（圓心在右上方且半徑夠大）﹒

(4) 如圖三﹐因為的圓心必落在的中垂線上﹐且此中垂線通過第四象限﹐所以圓心可能在第四象限﹒

(5) 如圖三﹐因為中垂線與軸的交點為﹐且﹐所以若圓心在第三象限﹐則的半徑大於﹒又因為﹐所以此選項正確﹒
   
 圖一 圖二 圖三

故選(2)(5)﹒

5. 出處﹕第二冊　第三章 機率

難易度﹕易

解﹕令表示取出的第一顆為紅球的事件﹐表示取出的第二顆為紅球的事件﹒

(1) 因為﹐﹐
所以﹒

(2) 計算﹒因為﹐
所以與不是獨立事件﹒

(3) 令表示取出的第二顆為白球或藍球的事件﹒因為﹒
所以與不是互斥事件﹒

(4) 因為﹐﹐
所以﹒

(5) 因為﹐﹐
所以﹒

故選(1)(5)﹒

6. 出處﹕選修數學甲(下)　第一章 極限與函數

難易度﹕中

解﹕(1) 錯﹕例如﹐滿足題意﹐但﹒

(2) 錯﹕因為﹐所以為遞增數列﹒
 又因為﹐所以對所有正整數*n*﹐均使得﹒

(3) 對﹕因為﹐所以﹒

(4) 對﹕根據夾擠定理﹐因為且﹐所以﹒

(5) 錯﹕例如﹐﹐滿足題意﹐但不存在﹒

故選(3)(4)﹒

7. 出處﹕選修數甲(下)　第二章 多項式函數的微積分

難易度﹕中

解﹕依題意﹐函數的圖形有以下兩種情形（其中圖形上的黑點為反曲點）﹕
  
 圖一 圖二

(1) 錯﹕若是圖一﹐其圖形的最右方下沉﹐則﹒

(2) 對﹕反曲點的坐標為﹒
若是圖一﹐則﹔若是圖二﹐則﹒
因此﹐無論圖一或圖二﹐﹒

(3) 對﹕無論圖一或圖二﹐以點為切點的切線斜率皆為正﹒
因為﹐所以﹒

(4) 錯﹕無論圖一或圖二﹐函數的圖形與軸恰交一點且此點非反曲點﹒
因此﹐方程式有一實根二虛根﹒

(5) 對﹕無論圖一或圖二﹐反曲點的坐標皆為正﹒

故選(2)(3)(5)﹒

8. 出處﹕第三冊　第三章 平面向量

難易度﹕中

解﹕因為﹐所以三向量恰可圍成一個三邊長為的﹐如圖所示﹒
 

(1) ﹒

(2) 因為﹐所以為鈍角﹒
因此﹐與的夾角為銳角﹐得﹒

(3) 因為的最小邊為﹐所以所對的角是三內角中的最小角﹒
又因為﹐
所以在上述三個角中﹐以最大﹒

(4) 因為﹐所以

 
 
 ﹐
得﹒

(5) 在中﹐利用正弦定理﹐得﹒
因為﹐﹐
所以﹒

故選(1)(5)﹒

三﹑選填題

A. 出處﹕第四冊　第三章 矩陣

難易度﹕易

解﹕依題意﹐得﹒
移項得﹐
因此﹐﹒
故﹒

B. 出處﹕第一冊　第三章 指數﹑對數函數

難易度﹕中

解﹕因為在的圖形上﹐所以﹒
因為直線的斜率為2﹐所以
﹒……①
又因為﹐所以
﹒……②
將①代入②﹐得﹐
因為﹐所以﹒……③
將③代入①﹐得﹐
再得﹐即﹒……④
由③④解得﹐﹐故﹒

C. 出處﹕選修數學甲(上)　第二章 三角函數

難易度﹕中

解﹕設﹐其中為實數﹒依題意﹐作圖如右﹒
由圖知﹐點以原點為中心﹐逆時針旋轉﹐得點﹒
利用複數乘法的幾何意義﹐得﹐
將代入﹐得﹒
根據複數相等的定義﹐得﹒
解得﹒故的實部為﹒

第貳部分﹕非選擇題

一﹑出處﹕第四冊　第二章 空間中的平面與直線

難易度﹕中

解﹕(1) 因為﹐
所以﹒

(2) 設點的坐標為﹒
因為﹐所以﹐
此即為平面*E*的方程式﹒

(3) 設點的坐標為﹒與(1)(2)同理﹐
得﹒
此即為直線*L*的兩面式﹒直線*L*的一個方向向量為兩平面法向量的外積﹐
即﹒
故直線的方向向量為﹐為非零實數﹒

(4) 將代入*L*的兩面式﹐得﹐
解得﹒因此﹐可設點的坐標為﹒
因為﹐所以﹐
即﹐解得或﹒故點的坐標為或﹒

二﹑出處﹕選修數甲(下)　第二章 多項式函數的微積分

難易度﹕難

解﹕(1) 將代入原式﹐因為﹐所以﹐
解得﹒

(2) 將原式兩邊同時對微分﹐因為﹐
所以
整理得﹒

(3) 由(2)﹐因為﹐所以（為常數）﹒
又由(1)﹐因為﹐所以﹐解得﹒
故﹒

(4) 因為無實數解﹐
所以的圖形沒有水平切線﹒
解﹐得﹐即為圖形的反曲點﹒
將的圖形描繪如右﹒由定積分的幾何意義﹐
得知的面積的面積
其中的面積是定值﹐的面積隨增大而增大﹒
因為時﹐﹐
所以必恰有一個大於1的正實數使得的面積的面積﹒