108 年 四技二專

統一入學測驗

數學（C）

一、試題分析

108 年統測數學 C 是自統測實施以來最有難度的一份試卷。此次計算量多且繁瑣，預估此次的滿分人數可能會更少（註：99、105 年統測數學 C 各僅有 20、30 位滿分，這是統測數學 C 的最低紀錄）！如果與 107 年、106 年來比較，108 年的試題大都屬於中等或是偏難，簡單的題目約有四題，分散在試卷內，並沒有集中在前幾題，這對程度較低的考生來說恐怕也要耐心地尋找。

108 年統測數學 C 試卷的其他特色如下：

1. 情境試題：

   未來數學新課綱強調生活素養，今年已率先反應這樣的狀況。如：第 6、25 題。

2. 圖形試題：

   這次幾何圖形題目比以往多，且觀念、計算並重。考生需具備正確的圖形觀念與迅速精確的計算能力，才能在時間內完成。如：第 3、6、9、19、22、24 題。

4. 綜合試題：

   這次綜合觀念題也特別多，需要橫跨多個公式與觀念，才能正確的解答。如：扇形的第 5 題、任意角三角函數定義的第 16、24 題、各種排列組合的第 11 題、兩種圓錐曲線的第 22、23 題、微積分基本定理的 14 題。

綜合上述，對於程度較佳的考生這次試卷可以有效地拉開得分差距，但其他容易因不懂題意而隨意猜答，恐怕將會無法有效鑑別中、低程度的學生，這對於中等程度的考生將會非常不利，也會影響考生們對於準備數學的意願（因投資報酬率太差，可能更不想積極準備）。由於 108 年的試卷偏難，通常隔年(109 年）都會有擺盪效應，也許會有更大的不確定性，考生們應及早調整準備的方向與練習的重點。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	2	數列與級數	1
三角函數	2	指數與對數及其運算	2
三角函數的應用	2	排列組合	2
向量	1	機率與統計	2
式的運算	2	圓	0
聯立方程式	1	二次曲線	2
複數	1	微分	2
不等式及其應用	1	積分	2

108 學年度四技二專統一入學測驗

數學(C)

總　　分

數學 C 參考公式

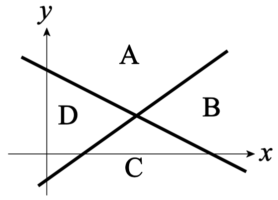
1. 三角函數的和角公式：
   $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ； $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
2. 若α 、 β為一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根，則$\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$ 、 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ 。
3. 若一複數z其極式為$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中$r=|z|$，則$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，其中$n$為正整數。
4. 扇形面積$A=\dfrac{1}{2}r^2\theta$且周長$L=2r+r\theta$，其中r為扇形的半徑，θ為扇形的圓心角。
5. 拋物線方程式$(y-k)^2=4c(x-h)$：頂點(h,k)，焦點$(h+c,k)$，準線$x=h-c$ 。
6. 橢圓方程式$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ， $a\geq b>0$ ：中心(h,k) ，焦點$(h\pm c,k)$ ，其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$ 。
7. 雙曲線方程式$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$：中心$(h,k)$，焦點$(h\pm c,k)$，其中$c=\sqrt{a^2+b^2}$ 。
8. 相異物的直線排列數$P^n_k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ ，不可重覆的組合數$C^n_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 。
9. 設有一組抽樣資料$x_1,x_2,\cdots,x_n$，其算術平均數為$\overline{x}$，則樣本標準差為$S=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}$ 。

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 已知$\overrightarrow{u}=(1,1)$ ， $\overrightarrow{v}=(x+4,y-1)$及$\overrightarrow{w}=(2x,y)$。若$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$垂直且$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{w}$平行，則下列何者正確？
(A) $x=1$　(B) $y=-2$　(C) $y=1$　(D) $x=-2$ 。

(　　) 2. 若$3<\log_{0.5}(2x+1)<4$ ，則x的範圍為何？
(A) $-\dfrac{3}{8}<x<-\dfrac{1}{4}$　(B) $-\dfrac{7}{16}<x<-\dfrac{3}{8}$　(C) $-\dfrac{15}{32}<x<-\dfrac{7}{16}$　(D) $-\dfrac{31}{64}<x<-\dfrac{15}{32}$ 。

( ) 3. 有兩條直線 $L_1:3x-5y=2$、$L_2:x+2y=3$ 將平面分成四個區域，如圖所示，試問區域 A 可用哪一組不等式表示？



(A) $\begin{cases}3x-5y\geq 2\\ x+2y\geq 3\end{cases}$ (B) $\begin{cases}3x-5y\leq 2\\ x+2y\geq 3\end{cases}$ (C) $\begin{cases}3x-5y\geq 2\\ x+2y\leq 3\end{cases}$ (D) $\begin{cases}3x-5y\leq 2\\ x+2y\leq 3\end{cases}$。

( ) 4. 已知下列兩個聯立方程組有相同的解 (x,y,z)，試問 a 的值為何？

$\begin{cases}3x-4y+z=4\\ 5x+2y-2z=3\end{cases}$、$\begin{cases}2x+3y-2z=a\\ 4x+5y-3z=1\end{cases}$

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。

( ) 5. 已知扇形的面積為 1 且其周長為 5，試問此扇形的半徑為何？

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2。

( ) 6. 有一梯子斜靠於牆上，且梯子、地面及牆面構成一個 $30°$、$60°$、$90°$ 的直角三角形。若梯子沿牆面下滑 $\frac{1}{2}$ 公尺時，則梯子、地面及牆面構成一個 $45°$、$45°$、$90°$ 的直角三角形。試問梯長為多少公尺？

(A) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$。

( ) 7. 已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為多項式，若以 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 所得餘式為 $3x-4$，以 $x-1$ 除 $g(x)$ 所得餘式為 5，則以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 所得餘式為何？

(A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 4。

( ) 8. 已知 $\frac{x^2+5x+6}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$，其中 A、B 與 C 為實數，則 $A+2B+3C=$

(A) -5 (B) 0 (C) 8 (D) 10。

( ) 9. 已知坐標平面上三直線 $L_1:3x+3y=2$、$L_2:2x-3y=3$、$L_3:x-ay=-2$，且這三直線將平面分成六個區域，則 a 不可以是下列哪一個值？

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) -1 (D) -9。

( ) 10. 某次啦啦隊競賽規定，每隊組隊人數 8 人且男、女生均至少 2 人。某班共有 4 名男生與 6 名女生想參加啦啦隊競賽，若由此 10 人中依規定選出 8 人組隊，則共有多少種組隊方式？

(A) 45 (B) 60 (C) 75 (D) 90。

(　　) 11. 下列何選項的值為組合數C_3^8？

(A)「由8人中選3人分別擔任班長、副班長與康樂股長」所有的可能情形

(B)$(x-1)^8$展開式中，x^3項的係數

(C)「AAABBBBB 共8個字母任意排列」所有的可能情形

(D)「8枝相同的筆全部分給3人且每人至少得到1枝筆」所有的可能情形。

(　　) 12. 利用簡單隨機抽樣，從10位同學中選取2位同學參加比賽，若選中2位同學均為男生的機率小於$\dfrac{1}{10}$，則選中2位女生機率的最小值為何？

(A)$\dfrac{7}{15}$　(B)$\dfrac{8}{15}$　(C)$\dfrac{3}{5}$　(D)$\dfrac{2}{3}$。

(　　) 13. 已知$\{a_n\}$為等差數列且滿足$a_1>0$、$a_5=3a_{12}$。則當n為多少時，a_n開始為負數？

(A)14　(B)15　(C)16　(D)17。

(　　) 14. 已知$F(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^x (t^2+1)dt\right]$，則$F(1)=$

(A)-1　(B)0　(C)1　(D)2。

(　　) 15. 已知函數$f(x)$的導函數為$g(x)=x^2-4x+2$，則$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$

(A)-2　(B)-1　(C)1　(D)2。

(　　) 16. 若點$P(x,y)$為有向角θ終邊上一點且$xy\neq0$，則下列何者正確？

(A)$x\sin\theta>0$　(B)$y\cos\theta>0$　(C)$x\cot\theta>0$　(D)$y\csc\theta>0$。

(　　) 17. 在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{\cos B+i\sin B}{(\cos A+i\sin A)(\cos C+i\sin C)}$為實數，其中$i=\sqrt{-1}$，則$\triangle ABC$必為何種三角形？

(A)等腰三角形　(B)銳角三角形　(C)直角三角形　(D)鈍角三角形。

(　　) 18. 下列為四個班級某次數學測驗的成績分組資料，若以各組的組中點取代該組資料的原始數據，則何者的成績標準差最小？

(A)

分數組別	30~40	40~50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	8	6	7	7	6	8

(B)

分數組別	30~40	40~50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	18	2	1	1	2	18

(C)

分數組別	30~40	40~50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	1	2	18	18	2	1

(D)

分數組別	30~40	40~50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	10	10	1	1	10	10

(　　) 19. 已知坐標平面上三直線 L 、L_1 與 L_2，若直線 L 為水平線，L_1 與 L_2 的斜率分別為 $\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{3}{2}$，且直線 L 被 L_1 與 L_2 所截出的線段長為 26，則此三直線所圍成的三角形面積為多少平方單位？

(A) 39　(B) 52　(C) 78　(D) 156 。

(　　) 20. 已知 $\log_4\left(4^x-2^x+52\right)=x+1$，試問 $\log\left(x^2\cdot 5^x\right)=$

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5 。

(　　) 21. 計算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=$

(A) $\frac{3}{2}$　(B) 1　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{8}$ 。

(　　) 22. 已知點 F 及直線 L 分別為橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ 的焦點及短軸。若以直線 L 為準線及點 F 為焦點所作出拋物線的方程式為 $4c(x-h)=(y-k)^2$，則 $|chk|=$

(A) 12　(B) 8　(C) 6　(D) 4 。

(　　) 23. 已知 F_1 、F_2 為橢圓 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 的焦點，且 F_3 、F_4 為雙曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的焦點。若 P 點為上述橢圓與雙曲線之交點，則下列何者正確？

(A) $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=24$　(B) $\overline{PF_3}+\overline{PF_4}=26$　(C) $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=6$

(D) $\left|\overline{PF_3}-\overline{PF_4}\right|=6$ 。

(　　) 24. 已知 $O(0,0)$ 、$P(-3,4)$ 與 $Q(x,y)$ 為坐標平面上三點。若以 O 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑，逆時針方向轉動 30° 後，P 點與 Q 點重疊，則下列何者正確？

(A) $x=\frac{-3\sqrt{3}-4}{2}$　(B) $x=\frac{-3\sqrt{3}+4}{2}$　(C) $y=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$　(D) $y=\frac{4\sqrt{3}+3}{2}$ 。

(　　) 25. 小明設計了一款迴力鏢，已知將此迴力鏢擲出後，迴力鏢過了時間 t 秒後與小明的距離為 $f(t)=\frac{100t}{t^2+9}$ 公尺，若在 t_0 秒時，迴力鏢離小明最遠，則 $t_0=$

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4 。

108 年統一入學測驗　數學(C)

答案

1.B	2.C	3.B	4.B	5.D	6.C	7.D	8.A	9.B	10.A
11.C	12.A	13.C	14.D	15.B	16.D	17.C	18.C	19.D	20.A
21.A	22.D	23.B	24.A	25.C					

本試題答案係依據統一入學測驗中心公布之標準答案

1. 技巧與分析

設兩非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，

(1) 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 垂直，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，
即 $a_1b_1+a_2b_2=0$

(2) 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行，則 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$，
其中 b_1、$b_2\neq 0$

解析

$\because$ $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 垂直

$\therefore$ $(1,1)\cdot(x+4,y-1)=0$

$\Rightarrow$ $1\times(x+4)+1\times(y-1)=0$

$\Rightarrow$ $x+y=-3\cdots\cdots$①

$\because$ $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 平行

$\therefore$ $\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{y}$ $\Rightarrow$ $2x-y=0\cdots\cdots$②

①+②：$3x=-3$ $\Rightarrow$ $x=-1$

$x=-1$ 代回①：$-1+y=-3$ $\Rightarrow$ $y=-2$

故選項(B)正確

2. 技巧與分析

(1) 設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，n 為實數，則 $n=\log_a a^n$

(2) 當 $0<a<1$ 時，$y=\log_a x$ 為遞減函數，
即 $0<x_1<x_2$ $\Leftrightarrow$ $\log_a x_1>\log_a x_2$

解析

$3<\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)<4$

$\Rightarrow$ $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3<\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

$\Rightarrow$ $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{8}<\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)<\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{16}$

$\because$ 底數 $\dfrac{1}{2}$ 在 $0\sim 1$ 之間

$\therefore$ 真數 $\dfrac{1}{16}<2x+1<\dfrac{1}{8}$
（即真數 >0）

整理得 $-\dfrac{15}{16}<2x<-\dfrac{7}{8}$

因此 $-\dfrac{15}{32}<x<-\dfrac{7}{16}$

3. 技巧與分析

(1) 直線 $ax+by+c=0$ 的斜率 $m=-\dfrac{a}{b}$，
其中 $b\neq 0$

(2) 直線的走向：
① 往右上斜的直線斜率為正
② 往右下斜的直線斜率為負

(3) 二元一次不等式的圖解：（當 $a>0$ 時）
① $ax+by+c\geq 0$ 的圖解為直線 $ax+by+c=0$ 及其右側
② $ax+by+c\leq 0$ 的圖解為直線 $ax+by+c=0$ 及其左側

解析

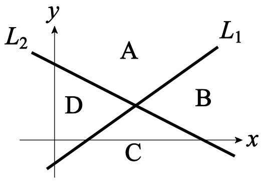
$\because$ 直線 $L_1:3x-5y=2$ 的斜率為
$m_1=-\dfrac{3}{-5}=\dfrac{3}{5}>0$

$\therefore$ L_1 是往右上斜的直線

$\because$ 直線 $L_2:x+2y=3$ 的斜率為
$m_2=-\dfrac{1}{2}<0$

$\therefore$ L_2 是往右下斜的直線

可得知直線 L_1 及 L_2 圖形如下所示



∵ 區域 A 在直線 L_1 的左側

∴ $3x-5y\le 2$

∵ 區域 A 在直線 L_2 的右側

∴ $x+2y\ge 3$

因此區域 A 可以表示成 $\begin{cases}3x-5y\le 2\\ x+2y\ge 3\end{cases}$

4. 技巧與分析

如果兩個聯立方程組有相同的解，則兩方程組的個別方程式組合起來也會有相同的解

解析

∵ $\begin{cases}3x-4y+z=4\\ 5x+2y-2z=3\end{cases}$ 與 $\begin{cases}2x+3y-2z=a\\ 4x+5y-3z=1\end{cases}$

有相同解

∴ $\begin{cases}3x-4y+z=4\cdots\cdots①\\ 5x+2y-2z=3\cdots\cdots②\\ 4x+5y-3z=1\cdots\cdots③\end{cases}$ 也會有相同的解

①×2：$6x-8y+2z=8\cdots\cdots$④

②+④：$11x-6y=11\cdots\cdots$⑤

①×3：$9x-12y+3z=12\cdots\cdots$⑥

③+⑥：$13x-7y=13\cdots\cdots$⑦

⑤×7：$77x-42y=77\cdots\cdots$⑧

⑦×6：$78x-42y=78\cdots\cdots$⑨

⑨−⑧：$x=1$

$x=1$ 代回⑤：$11\times 1-6y=11 \quad\Rightarrow\quad y=0$

$x=1$，$y=0$ 代回①：$3\times 1-4\times 0+z=4$

$\Rightarrow\quad z=1$

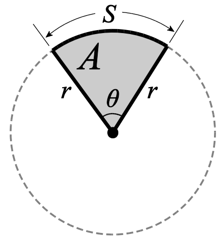
把 $x=1$，$y=0$，$z=1$ 代入 $2x+3y-2z=a$

則 $2\times 1+3\times 0-2\times 1=a \quad\Rightarrow\quad a=0$

5. 技巧與分析

(1) 扇形：被兩條半徑和半徑所截的圓弧所圍成的圖形

(2) 設扇形的半徑為 r，圓心角為 θ（$0<\theta<2\pi$），則其弧長 $S=r\theta$，面積 $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rS$



解析

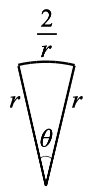
設扇形的半徑為 r，圓心角為 θ（弧度），弧長為 S

則扇形的面積 $A=\dfrac{1}{2}rS$

∵ 扇形的面積為1

∴ $\dfrac{1}{2}\times r\times S=1 \quad\Rightarrow\quad S=\dfrac{2}{r}$

又扇形的周長為5



得 $2r+\dfrac{2}{r}=5$

$\overset{\times r}{\Rightarrow}\quad 2r^2+2=5r$

$\Rightarrow\quad 2r^2-5r+2=0$

$\Rightarrow\quad (2r-1)(r-2)=0$

$\Rightarrow\quad r=\dfrac{1}{2}$ 或 2

(1) 當半徑 $r=\dfrac{1}{2}$ 時，弧長 $S=\dfrac{2}{r}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4$

其圓心角 $\theta=\dfrac{S}{r}=\dfrac{4}{\frac{1}{2}}=8>2\pi\fallingdotseq 6.28$（不合）

(2) 當半徑 $r=2$ 時，弧長 $S=\dfrac{2}{r}=\dfrac{2}{2}=1$

其圓心角 $\theta=\dfrac{S}{r}=\dfrac{1}{2}$

由(1)和(2)知：扇形的半徑 $r=2$

6. **技巧與分析**

(1) $30°-60°-90°$ 三角形的對邊比為

$1:\sqrt{3}:2$

(2) $45°-45°-90°$ 三角形的對邊比為

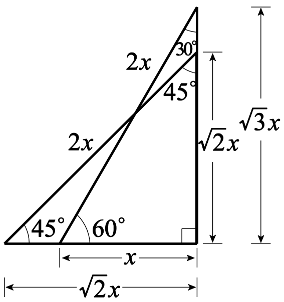
$1:1:\sqrt{2}=\sqrt{2}:\sqrt{2}:2$

解析

依據題意作圖

設梯子的長為 $2x$（公尺）

則兩個直角三角形的邊長如圖所示



$\because$ 梯子沿牆面下滑 $\frac{1}{2}$（公尺）

$\therefore$ $\sqrt{3}x-\sqrt{2}x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{1\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\left[\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right]}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$$

而 $2x=2\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

故梯長為 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$（公尺）

7. **技巧與分析**

(1) 除法原理：

$f(x)\div g(x)=Q(x)\cdots r(x)$

則 $f(x)=g(x)\times Q(x)+r(x)$

(2) 餘式定理：

以 $x-a$ 除 $f(x)$ 的餘式為 $f(a)$

解析

設 $f(x)\div\left(x^2-3x+2\right)=Q(x)\cdots(3x-4)$

$\Rightarrow$ $f(x)=\left(x^2-3x+2\right)\times Q(x)+(3x-4)$

得 $f(1)=\left(1^2-3\times1+2\right)\times Q(1)+(3\times1-4)$

$\quad =0\times Q(1)+(-1)=-1$

又 $x-1$ 除 $g(x)$ 所得餘式為 5 $\Rightarrow$ $g(1)=5$

故以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 的餘式為

$f(1)+g(1)=-1+5=4$

8. **技巧與分析**

(1) 處理部分分式時，先消去分母

(2) 當兩多項式相等時，其相對應的次數與係數均相等

解析

$$\frac{x^2+5x+6}{(x-2)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

上式等號的兩側同乘以 $(x-2)\left(x^2+1\right)$，得

$$x^2+5x+6=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(x-2)$$

$$=\left(Ax^2+A\right)+\left(Bx^2-2Bx+Cx-2C\right)$$

$$=(A+B)x^2+(-2B+C)x+(A-2C)$$

$$\text{則}\begin{cases}A+B=1\cdots\cdots①\\-2B+C=5\cdots\cdots②\\A-2C=6\cdots\cdots③\end{cases}$$

①–③：$B+2C=-5\cdots\cdots④$

④×2：$2B+4C=-10\cdots\cdots⑤$

②+⑤：$5C=-5$ $\Rightarrow$ $C=-1$

$C=-1$ 代回②：$-2B+(-1)=5$ $\Rightarrow$ $B=-3$

$C=-1$ 代回③：$A-2\times(-1)=6$ $\Rightarrow$ $A=4$

故得 $A+2B+3C=4+2\times(-3)+3\times(-1)=-5$

9. 技巧與分析

三條相異直線將平面分成六個區域有以下兩種情況：

(1) 三條直線共點

(2) 三條直線之中恰有兩條直線平行

解析

(1) 當三直線 L_1 、 L_2 、 L_3 通過同一點時，三直線可以把平面分成六個區域

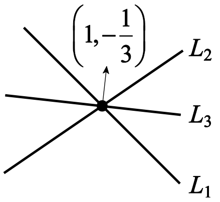
先求 L_1 與 L_2 的交點：

解 $\begin{cases} 3x+3y=2 \cdots\cdots ① \\ 2x-3y=3 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①+② ： $5x=5 \quad \Rightarrow \quad x=1$

$x=1$ 代回① ： $3\times1+3y=2$

$\Rightarrow \quad y=-\dfrac{1}{3}$



將交點 $\left(1,-\dfrac{1}{3}\right)$ 代入 $L_3: x-ay=-2$

$1-a\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-2 \quad \Rightarrow \quad a=-9$

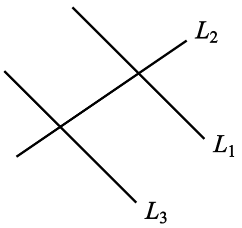
(2) 當三直線 L_1 、 L_2 、 L_3 之中恰有兩直線平行時，三直線可以把平面分成六個區域

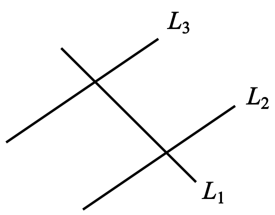
直線 L_1 的斜率 $m_1=-\dfrac{3}{3}=-1$

直線 L_2 的斜率 $m_2=-\dfrac{2}{-3}=\dfrac{2}{3}$

直線 L_3 的斜率 $m_3=-\dfrac{1}{-a}=\dfrac{1}{a}$

則 $\dfrac{1}{a}=-1$ 或 $\dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad a=-1$ 或 $\dfrac{3}{2}$





由(1)和(2)知： $a=-9$ 、 -1 或 $\dfrac{3}{2}$

因此 a 不可以是選項(B)

10. 技巧與分析

從 n 個相異物之中，取出 k 個，其方法數為

$C^n_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

解析

(1) 選 2 名男生與 6 名女生：

$C^4_2\times C^6_6=\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{6!}{6!0!}=6\times1=6$（種）

(2) 選 3 名男生與 5 名女生：

$C^4_3\times C^6_5=\dfrac{4!}{3!1!}\times\dfrac{6!}{5!1!}=4\times6=24$（種）

(3) 選 4 名男生與 4 名女生：

$C^4_4\times C^6_4=\dfrac{4!}{4!0!}\times\dfrac{6!}{4!2!}=1\times15=15$（種）

由(1)、(2)和(3)知：

男、女生均至少 2 人的方法有 $6+24+15=45$ 種

11. 技巧與分析

(1) 相異物的排列

(2) 二項式定理

(3) 有相同物的排列

(4) 重複組合

解析

(A) P^8_3

(B) $(x-1)^8=\left[x+(-1)\right]^8$

x^3 項： $C^8_3\times x^3\times(-1)^5=-C^8_3x^3$

則 x^3 項的係數為 $-C^8_3$

(C) 3 個 A、5 個 B 排成一列： $\dfrac{8!}{3!5!}=C^8_3$

(D) 設三人各分得 x_1 、 x_2 、 x_3 枝筆

則 $x_1+x_2+x_3=8$

$\because$ 每人至少分得1枝

$\therefore$ 令 $x_1=x_1'+1$，$x_2=x_2'+1$，$x_3=x_3'+1$

得 $(x_1'+1)+(x_2'+1)+(x_3'+1)=8$

$\Rightarrow \quad x_1'+x_2'+x_3'=5$

所求為上式的非負整數解個數

$H^3_5=C^{3+5-1}_5=C^7_5$

故選項(C)的值為 C^8_3

12. 技巧與分析

(1) 事件 A 的機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$，

其中 S 為樣本空間

(2) $C_k^n=\dfrac{\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)}^{\text{從 } n \text{ 往下 } k \text{ 個正整數相乘}}}{k!}$

解析

設10位同學中有 n 位男生、$10-n$ 位女生

P(選中2位同學均為男生)

$$=\frac{C_2^n}{C_2^{10}}=\frac{\frac{n(n-1)}{2!}}{\frac{10\times 9}{2!}}=\frac{n(n-1)}{90}$$

由題意知：$\dfrac{n(n-1)}{90}<\dfrac{1}{10} \Rightarrow n(n-1)<9$

$\because$ n 是非負整數，得 $n=3$、2、1或0

則女生可能有7、8、9或10位

而當女生的人數愈少時

選中2位女生的機率會最小

$\therefore$ 當10位同學中有3位男生和7位女生時

選中2位女生的機率有最小值為

$$\frac{C_2^7}{C_2^{10}}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$$

13. 技巧與分析

設 $\{a_n\}$ 為等差數列，則

(1) 公差 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$，其中 $n\neq m$

(2) $a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$

解析

設等差數列 $\{a_n\}$ 的公差為 d

則 $d=\dfrac{a_{12}-a_5}{12-5}=\dfrac{a_{12}-3a_{12}}{7}=-\dfrac{2}{7}a_{12}$

$\Rightarrow a_{12}=-\dfrac{7}{2}d$

而 $a_{12}=a_1+(12-1)d=a_1+11d$

$\Rightarrow a_1=a_{12}-11d=-\dfrac{7}{2}d-11d=-\dfrac{29}{2}d$

又 $a_1>0$，得 $d<0$

設第 n 項 $a_n<0$

則 $a_n=a_1+(n-1)d=-\dfrac{29}{2}d+(n-1)d<0$

$\Rightarrow (n-1)d<\dfrac{29}{2}d$

$\underset{\text{且}d<0}{\overset{\div d}{\Rightarrow}} n-1>\dfrac{29}{2} \Rightarrow n>\dfrac{31}{2}=15.5$

故當 $n=16$ 時，a_n 開始為負數

14. 〈法一〉

技巧與分析

微積分第一基本定理：

若函數 f 在 $[a,b]$ 上連續，

且 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$

則 $\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

解析

$$F(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_1^x (t^2+1)dt\right]$$

$=x^2+1$（由微積分第一基本定理）

則 $F(1)=1^2+1=2$

〈法二〉

技巧與分析

微積分第二基本定理：

若函數 f 在 $[a,b]$ 上連續，且 F 為 f 的反導函數，則 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

解析

$$\int_1^x (t^2+1)dt$$

$$=\left(\frac{1}{2+1}t^{2+1}+t\right)\Big|_1^x=\left(\frac{1}{3}t^3+t\right)\Big|_1^x$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{1}{3}x^3+x-\frac{4}{3}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x (t^2+1)dt\right]=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+x-\frac{4}{3}\right)=x^2+1$$

故 $F(x)=x^2+1$，因此 $F(1)=1^2+1=2$

15. 技巧與分析

導數的定義：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

解析

$\because$ $f(x)$ 的導函數為 $g(x)=x^2-4x+2$

$\therefore$ $f'(x)=x^2-4x+2$

而 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

又 $f'(1)=1^2-4\times 1+2=-1$

因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$

16. 技巧與分析

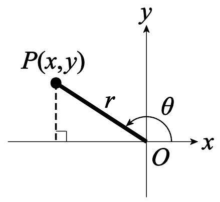
任意角三角函數的定義：

在標準位置角 θ 的終邊上，取異於原點 O 的點 $P(x,y)$，令 $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}>0$，則

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}\leftrightarrow\csc\theta=\dfrac{r}{y}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}\leftrightarrow\sec\theta=\dfrac{r}{x}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}\leftrightarrow\cot\theta=\dfrac{x}{y}$



解析

為了方便討論，把有向角 θ 的頂點與直角坐標中的原點重合，始邊與 x 軸的正向重合

這樣形成標準位置角 θ

其終邊上有一點 $P(x,y)$

令 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，而 x、y 的正負未定，則

(A) $x\sin\theta=x\times\dfrac{y}{r}=\dfrac{xy}{r}$ ：無法判斷正負

(B) $y\cos\theta=y\times\dfrac{x}{r}=\dfrac{xy}{r}$ ：無法判斷正負

(C) $x\cot\theta=x\times\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2}{y}$ ：無法判斷正負

(D) $y\csc\theta=y\times\dfrac{r}{y}=r>0$

故選項(D)正確

17. 技巧與分析

極式的乘除：

設 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，

$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，

則

(1) $z_1\times z_2=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$

解析

$$\frac{\cos B+i\sin B}{(\cos A+i\sin A)(\cos C+i\sin C)}$$

$$=\frac{\cos B+i\sin B}{\cos(A+C)+i\sin(A+C)}$$

$$=\cos\left[B-(A+C)\right]+i\sin\left[B-(A+C)\right]$$

由於上式的值為實數

故其虛部 $\sin\left[B-(A+C)\right]=0$

而 $\sin 0^\circ=0$，

則 $\angle B-(\angle A+\angle C)=0^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle B=\angle A+\angle C$

又三角形內角和 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

$\Rightarrow$ $(\angle A+\angle C)+\angle B=180^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle B+\angle B=180^\circ$

$\Rightarrow$ $2\angle B=180^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle B=90^\circ$

因此 $\triangle ABC$ 必為直角三角形

18. 技巧與分析

(1) 當數據愈集中時，標準差愈小

(2) 當數據愈分散時，標準差愈大

解析

(A)

分數 組別	30 ~ 40	40 ~ 50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	8	6	7	7	6	8

數據均勻散布

(B)

分數 組別	30 ~ 40	40 ~ 50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	18	2	1	1	2	18

數據極端

(C)

分數 組別	30 ~ 40	40 ~ 50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	1	2	18	18	2	1

數據集中

(D)

分數 組別	30 ~ 40	40 ~ 50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	10	10	1	1	10	10

數據非常分散

四個班級的數據中，(C)的數據最集中，
故(C)的標準差最小

19. 技巧與分析

斜截式：
斜率為 m 且 y 截距為 k 的直線方程式為
$y = mx + k$

解析

設直線 L_1 與 L_2 交於原點 $O(0,0)$
即 y 截距為 0

則 $L_1 : y = \frac{2}{3}x$ ，$L_2 : y = -\frac{3}{2}x$

另外，設水平線 $L : y = k$（$k > 0$）與直線 L_1、L_2 交於點 $A\left(\frac{3}{2}k, k\right)$ ，$B\left(-\frac{2}{3}k, k\right)$

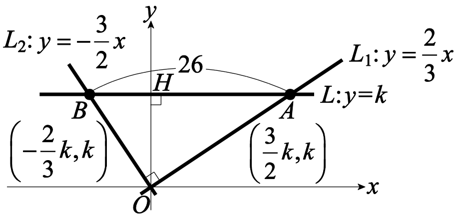
則 $\overline{AB} = \frac{3}{2}k - \left(-\frac{2}{3}k\right) = \frac{13}{6}k$

$\because$ 直線 L 被 L_1 與 L_2 所截出的線段長為 26

$\therefore$ $\frac{13}{6}k = 26 \Rightarrow k = 12$

因此三直線所圍成的三角形面積為

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH} = \frac{1}{2} \times 26 \times 12 = 156$（平方單位）



20. 技巧與分析

(1) 對數的定義：

$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b$

(2) 當 $a > 0$ 時，a^x 恆為正數

解析

$\log_4\left(4^x - 2^x + 52\right) = x + 1$

$\Rightarrow 4^{x+1} = 4^x - 2^x + 52$

$\Rightarrow 4 \times 4^x = 4^x - 2^x + 52$

$\Rightarrow 4 \times 4^x - 4^x + 2^x - 52 = 0$

$\Rightarrow (4-1) \times 4^x + 2^x - 52 = 0$

$\Rightarrow 3 \times 4^x + 2^x - 52 = 0$

令 $t = 2^x$ ，則 $t^2 = \left(2^x\right)^2 = \left(2^2\right)^x = 4^x$

得 $3t^2 + t - 52 = 0$

$\Rightarrow (t-4)(3t+13) = 0$

$\Rightarrow t = 4$ 或 $-\frac{13}{3}$（不合，$\because$ $t = 2^x > 0$）

則 $t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

因此 $\log\left(x^2 \cdot 5^x\right) = \log\left(2^2 \cdot 5^2\right) = \log 100 = 2$

21. 技巧與分析

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) 設 $f(n)$ 與 $g(n)$ 均為 n 的多項式，且次數相等，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{f(n)\text{的領導係數}}{g(n)\text{的領導係數}}$

解析

$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \left(1 + \frac{3}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)$

$= n + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\right)$

$= n + \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

$= n + \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}$

$= n + \frac{n+1}{2} = \frac{3n+1}{2}$

$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{3n+1}{2} = \frac{3n+1}{2n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n} = \frac{3}{2}$

（$\because$ 分子、分母的次數相等
$\therefore$ 極限為領導係數的比值）

22. 技巧與分析

(1) 已知橢圓 $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

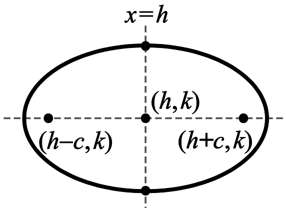
（$a>b>0$），

若 $a^2=b^2+c^2$，則

① 中心 (h,k)

② 焦點 $(h\pm c,k)$

③ 短軸在直線 $x=h$ 上



(2) 拋物線的標準式：

頂點在 (h,k)，且焦距為 $|c|$，

開口向右（左）的拋物線方程式為

$(y-k)^2=4c(x-h)$（其中 $c>0$ 時，開口向右；$c<0$ 時，開口向左）

解析

橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

$\Rightarrow\quad \frac{x^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{3^2}=1$

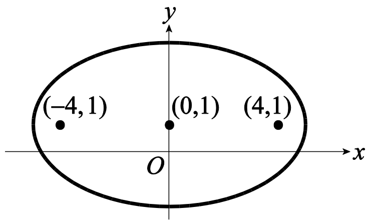
則中心 $(0,1)$，$a_{橢}=5$，$b_{橢}=3$

而 $a_{橢}{}^2=b_{橢}{}^2+c_{橢}{}^2$

$\Rightarrow\quad 5^2=3^2+c_{橢}{}^2 \quad\Rightarrow\quad c_{橢}=4$

得橢圓的焦點為 $(4,1)$ 和 $(-4,1)$

短軸在直線 $x=0$ 上，即短軸在 y 軸



(1) 以 y 軸為準線，焦點 $(4,1)$ 的拋物線

其頂點為 $(2,1)$，開口向右，焦距為 2

拋物線的方程式為

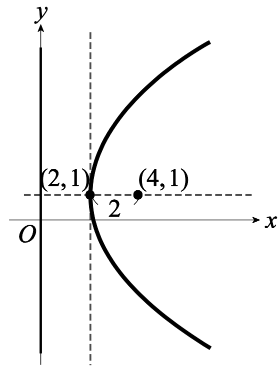
$(y-1)^2=4\times2\times(x-2)$

$\Rightarrow\quad 8(x-2)=(y-1)^2$

與 $4c(x-h)=(y-k)^2$ 比較，得

$c=2$，$h=2$，$k=1$

則 $|chk|=|2\times2\times1|=4$



(2) 以 y 軸為準線，焦點 $(-4,1)$ 的拋物線

其頂點為 $(-2,1)$，開口向左，焦距為 2

拋物線的方程式為

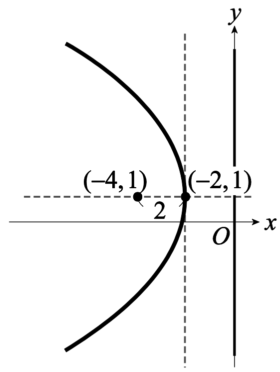
$(y-1)^2=-4\times2\times(x+2)$

$\Rightarrow\quad -8(x+2)=(y-1)^2$

與 $4c(x-h)=(y-k)^2$ 比較，得

$c=-2$，$h=-2$，$k=1$

則 $|chk|=|(-2)\times(-2)\times1|=4$



由(1)和(2)知：$|chk|=4$

23. 技巧與分析

(1) 若橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的焦點是 F_1、F_2，則橢圓上任一點 P 滿足

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

(2) 若雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦點是 F_1、F_2，則雙曲線上任一點 P 滿足

$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$

解析

(1) 橢圓 $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{13^2}+\dfrac{y^2}{12^2}=1$

$\Rightarrow \quad a_{橢}=13$，$b_{橢}=12$

而 $a_{橢}{}^2=b_{橢}{}^2+c_{橢}{}^2$

$\Rightarrow \quad 13^2=12^2+c_{橢}{}^2 \quad \Rightarrow \quad c_{橢}=5$

則橢圓的兩焦點為 $F_1(-5,0)$、$F_2(5,0)$

(2) 雙曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$

$\Rightarrow \quad a_{雙}=4$，$b_{雙}=3$

而 $c_{雙}{}^2=a_{雙}{}^2+b_{雙}{}^2$

$\Rightarrow \quad c_{雙}{}^2=4^2+3^2=25 \quad \Rightarrow \quad c_{雙}=5$

則雙曲線的兩焦點為 $F_3(-5,0)$、$F_4(5,0)$

由(1)和(2)知：橢圓和雙曲線有共同的焦點

此時 $F_1=F_3$，$F_2=F_4$

由於 P 點是橢圓與雙曲線的交點

因此

$\overline{PF_3}+\overline{PF_4}=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a_{橢}=2\times13=26$

$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=\left|\overline{PF_3}-\overline{PF_4}\right|=2a_{雙}=2\times4=8$

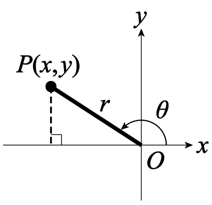
故選項(B)正確

24. 技巧與分析

(1) 任意角三角函數的定義：

在標準位置角 θ 的終邊上，取異於原點 O 的點 $P(x,y)$，令 $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$，則

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$



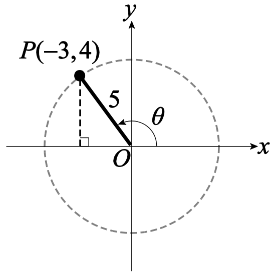
(2) 和差角公式：

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

解析

如下圖，$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$



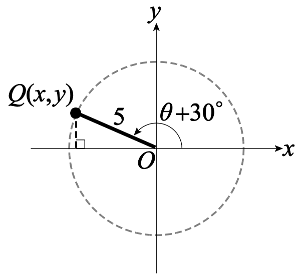
設標準位置角 θ 的終邊為 $\overline{OP}$

由任意角三角函數的定義可知：

$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{-3}{5}$

以 O 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑，逆時針方向轉動 $30°$ 後，P 點與 Q 點重疊

如下圖，$\overline{OQ}=5$



則 $\sin(\theta+30°)=\dfrac{y}{5}$，$\cos(\theta+30°)=\dfrac{x}{5}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad x&=5\cos(\theta+30°)\\
&=5(\cos\theta\cos30°-\sin\theta\sin30°)\\
&=5\left(-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\right)\\
&=5\times\frac{-3\sqrt{3}-4}{10}=\frac{-3\sqrt{3}-4}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y&=5\sin(\theta+30°)\\
&=5(\sin\theta\cos30°+\cos\theta\sin30°)\\
&=5\left(\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{-3}{5}\right)\times\frac{1}{2}\right)\\
&=5\times\frac{4\sqrt{3}-3}{10}=\frac{4\sqrt{3}-3}{2}
\end{aligned}
$$

故選項(A)正確

25. 技巧與分析

已知函數 $f(t)$，

(1) 若 $f(t)$ 在 $t=a$ 處有極值，則 $f'(a)=0$

(2)

t	$\cdots$	a	$\cdots$
$f(t)$	$\nearrow$	極大值 $f(a)$	$\searrow$
$f'(t)$	$+$	0	$-$

解析

已知 $f(t)=\dfrac{100t}{t^2+9}$，其中 $t\geq 0$

$$f'(t)=\frac{(100t)'\times(t^2+9)-(t^2\times 9)'\times 100t}{(t^2+9)^2}$$

$$=\frac{100(t^2+9)-2t\times 100t}{(t^2+9)^2}=\frac{-100t^2+900}{(t^2+9)^2}$$

$$=\frac{-100(t^2-9)}{(t^2+9)^2}=\frac{-100(t+3)(t-3)}{(t^2+9)^2}$$

(1) 令 $f'(t)=0$

$\Rightarrow \dfrac{-100(t+3)(t-3)}{(t^2+9)^2}=0$

$\Rightarrow (t+3)(t-3)=0$

$\Rightarrow t=-3$ 或 3（$\because\ t\geq 0$，$\therefore\ -3$ 不合）

故 $t=3$

(2) 當 $0\leq t<3$ 時，$f'(t)>0$

(3) 當 $t>3$ 時，$f'(t)<0$

將(1)、(2)、(3)列表如下：

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f(t)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$
$f'(t)$	$+$	$+$	0	$-$

因此，當 $t=3$ 時，$f(t)$ 有最大值

故 $t_0=3$