108 指考最前線-數學甲

總　　　分

_____年　_____班　學號_________　姓名__________

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 **18** 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」．各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算．

(　　)1. 某公司尾牙舉辦「紅包大放送」活動．每位員工擲兩枚均勻銅板一次，若出現兩個反面可得獎金 400 元；若出現一正一反可得獎金 800 元；若出現兩個正面可得獎金 800 元並且獲得再擲一次的機會，其獲得獎金規則與前述相同，但不再有繼續投擲銅板的機會（也就是說每位員工最多有兩次擲銅板的機會）．試問每位參加活動的員工可獲得獎金的期望值為何?
(1)850 元　(2)875 元　(3)900 元　(4)925 元　(5)950 元．

(　　)2. 設 n 為正整數．第 n 個費馬數(Fermat Number)定義為 $F_n=2^{(2^n)}+1$，例如 $F_1=2^{(2^1)}+1=2^2+1=5$，$F_2=2^{(2^2)}+1=2^4+1=17$．試問 $\dfrac{F_{13}}{F_{12}}$ 的整數部分以十進位表示時，其位數最接近下列哪一個選項?（ $\log 2\approx 0.3010$ ）
(1)120　(2)240　(3)600　(4)900　(5)1200．

(　　)3. 在一座尖塔的正南方地面某點 A，測得塔頂的仰角為 14°；又在此尖塔正東方地面某點 B，測得塔頂的仰角為 $18°30'$，且 A、B 兩點距離為 65 公尺．已知當在線段 $\overline{AB}$ 上移動時，在 C 點測得塔頂的仰角為最大，則 C 點到塔底的距離最接近下列哪一個選項?（ $\cot 14°\approx 4.01$，$\cot 18°30'\approx 2.99$ ）
(1)27 公尺　(2)29 公尺　(3)31 公尺　(4)33 公尺　(5)35 公尺．

龍騰文化

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」. 各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算 .

(　　)4. 設Γ為坐標平面上通過$(7,0)$與$\left(0,\frac{7}{2}\right)$兩點的圓．試選出正確的選項．

(1)Γ的半徑大於或等於 5　(2)當Γ的半徑達到最小可能值時，Γ通過原點　(3)Γ與直線$x+2y=6$有交點　(4)Γ的圓心不可能在第四象限　(5)若Γ的圓心在第三象限，則Γ的半徑大於 8．

(　　)5. 袋中有 2 顆紅球、3 顆白球與 1 顆藍球，其大小皆相同．今將袋中的球逐次取出，每次隨機取出一顆，取後不放回，直到所有球被取出為止．試選出正確的選項．

(1)「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率

(2)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件

(3)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件

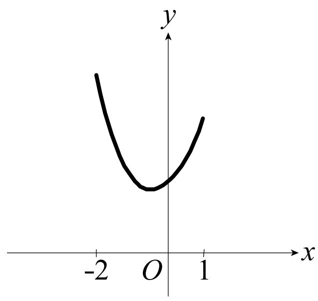
(4)「取出的第一、二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一、二顆皆為白球」的機率

(5)「取出的前三顆皆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率．

(　　)6. 設$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$為兩實數數列，且對所有的正整數n，$a_n<b_n^2<a_{n+1}$均成立．若已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$，試選出正確的選項．

(1)對所有的正整數n，$a_n>3$均成立　(2)存在正整數n，使得$a_{n+1}>4$　(3)對所有的正整數n，$b_n^2<b_{n+1}^2$均成立　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=4$　(5)$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$或$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-2$．

(　　)7. 已知三次實係數多項式函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$，在$-2\le x\le 1$範圍內的圖形如示意圖：試選出正確的選項．



(1)$a>0$　(2)$b>0$　(3)$c>0$　(4)方程式$f(x)=0$恰有三實根

(5)$y=f(x)$圖形的反曲點的y坐標為正．

(　　)8. 坐標平面上以原點O為圓心的單位圓上三相異點A、B、C滿足$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，其中$A$點的坐標為$(1,0)$．試選出正確的選項．

(1)向量$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$的長度為 4　(2)內積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$　(3)$\angle BOC$、$\angle AOC$、$\angle AOB$中，以$\angle BOC$的度數為最小　(4)$\overline{AB}>\frac{3}{2}$　(5)$3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$．

三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(9–18)．
2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分．

A. 在坐標平面上，定義一個坐標變換$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$代表舊坐標，$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$代表新坐標．若舊坐標為$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$的點 P 經此坐標變換得到的新坐標為$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，則$(r,s)=$ ＿(⑨,⑩⑪)＿．

B. 在坐標平面上，$A(a,r)$、$B(b,s)$為函數圖形 $y=\log_2 x$ 上之兩點，其中 $a<b$．已知 A、B 連線的斜率等於 2，且線段 $\overline{AB}$ 的長度為 $\sqrt{5}$，則$(a,b)=$ ＿$\left(\dfrac{⑫}{⑬},\dfrac{⑭}{⑮}\right)$＿．（化成最簡分數）

C. 設 z 為複數．在複數平面上，一個正六邊形依順時針方向的連續三個頂點為 z、0、$z+5-2\sqrt{3}i$（其中 $i=\sqrt{-1}$），則 z 的實部為 ＿$\dfrac{⑯⑰}{⑱}$＿．（化成最簡分數）

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分．作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆．若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔．每一子題配分標於題末．

一、坐標空間中以 O 表示原點，給定兩向量$\overrightarrow{OA}=(1,\sqrt{2},1)$、$\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$．試回答下列問題．

(1) 若$\overrightarrow{OP}$是長度為 2 的向量，且與$\overrightarrow{OA}$之夾角為 60°，試求向量$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OP}$的內積．（2 分）

(2) 承(1)，已知滿足此條件的所有點 P 均落在一平面 E 上，試求平面 E 的方程式．（2 分）

(3) 若$\overrightarrow{OQ}$是長度為 2 的向量，分別與$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$之夾角皆為 60°，已知滿足此條件的所有點 Q 均落在一直線 L 上，試求直線 L 的方向向量．（4 分）

(4) 承(3)，試求出滿足條件的所有 Q 點之坐標．（4 分）

二、設 $f(x)$為實係數多項式函數，且 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)\,dt$ 對 $x\ge 1$ 恆成立．試回答下列問題．

(1) 試求 $f(1)$．（2 分）

(2) 試求 $f'(x)$．（4 分）

(3) 試求 $f(x)$．（2 分）

(4) 試證明恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足$\int_0^a f(x)\,dx=1$．（4 分）

試題大剖析

桃園高中／陳清風

答　案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)　2. (5)　3.(3)

二、多選題

4. (2)(5)　5. (1)(5)　6. (3)(4)　7. (2)(3)(5)　8. (1)(5)

三、選填題

A. $(3,-1)$　B. $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$　C. $-\frac{7}{2}$

第貳部分：非選擇題

一、(1)2　(2) $x+\sqrt{2}y+z=2$　(3) $\left(0,1,-\sqrt{2}\right)$　(4) $\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{5}{3}\right)$ 或 $\left(1,\sqrt{2},-1\right)$

二、(1)2　(2) $12x^2-6x+2$　(3) $4x^3-3x^2+2x-1$　(4)見詳解

解　析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 出處：選修數甲(上)　第一章　機率與統計

難易度：易

解：令隨機變數 X 為獲得的獎金，則 X 的可能取值為

$400,800,800+400=1200,800+800=1600$（元），

其機率分布如下：

X	400	800	1200	1600
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}$

得期望值為 $E(X)=400\times\frac{1}{4}+800\times\frac{1}{2}+1200\times\frac{1}{16}+1600\times\frac{3}{16}=875$ 元．

故選(2)．

2. 出處：第一冊　第三章 指數、對數函數

難易度：易

解：因為

$$\log\frac{F_{13}}{F_{12}}=\log F_{13}-\log F_{12}=\log\left(2^{\left(2^{13}\right)}+1\right)-\log\left(2^{\left(2^{12}\right)}+1\right)$$

$$\approx\log 2^{\left(2^{13}\right)}-\log 2^{\left(2^{12}\right)}=\left(2^{13}-2^{12}\right)\times\log 2$$

$$=2^{12}\times(2-1)\times\log 2\approx 4096\times 1\times 0.3010$$

$$=1232.896,$$

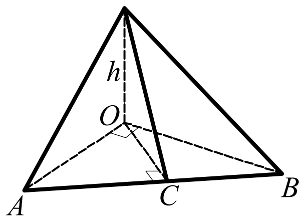
所以 $\log\frac{F_{13}}{F_{12}}$ 的首數約為 1232，即 $\frac{F_{13}}{F_{12}}$ 約為 1233 位數．

故選(5)．

3. 出處：第三冊　第一章 三角

難易度：中

解：如圖，設尖塔的高為 h．在直角三角形 OAB 中，因為



$\overline{OA}=h\cot 14°\approx 4.01h\approx 4h$，$\overline{OB}=h\cot 18°30'\approx 2.99h\approx 3h$，

所以由畢氏定理，得 $(4h)^2+(3h)^2\approx 65^2$，

解得 $h\approx 13$，再得 $\overline{OA}\approx 52,\overline{OB}\approx 39$．

因為離塔底愈近仰角愈大，且在 C 的仰角最大，所以 $\overline{OC}\perp\overline{AB}$．

又因為 $\triangle OAB$ 的面積 $=\frac{65\times\overline{OC}}{2}\approx\frac{52\times 39}{2}$，

所以 $\overline{OC}\approx\frac{52\times 39}{65}=\frac{156}{5}=31.2$．

故選(3)．

二、多選題

4. 出處：第三冊　第二章 直線與圓

難易度：中

解：令 $A(7,0),B\left(0,\frac{7}{2}\right)$．

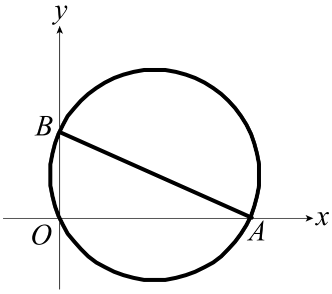
(1) 如圖一，Γ 半徑的最小值為 $\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{49+\frac{49}{4}}=\frac{7\sqrt{5}}{4}<5$．

(2) 如圖一，當 Γ 的半徑達到最小值時，$\overline{AB}$ 為直徑．因為 $\triangle OAB$ 為直角三角形，所以由直徑的圓周角為直角得知，Γ 通過原點 O．

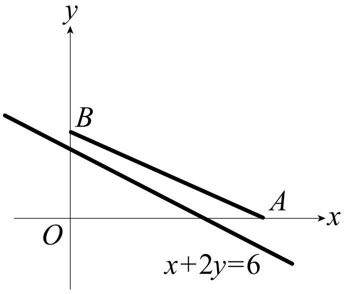
(3) 如圖二，以 $\overline{AB}$ 為弦的圓可能與直線 $x+2y=6$ 不相交（圓心在右上方且半徑夠大）．

(4) 如圖三，因為Γ的圓心必落在$\overline{AB}$的中垂線$y=2x-\dfrac{21}{4}$上，且此中垂線通過第四象限，所以圓心可能在第四象限．

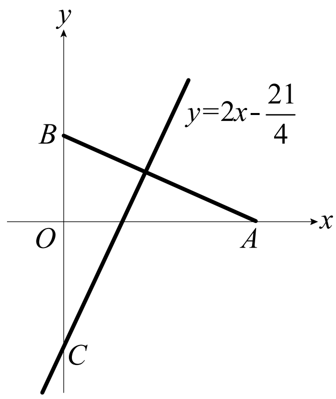
(5) 如圖三，因為中垂線$y=2x-\dfrac{21}{4}$與y軸的交點為$C\left(0,-\dfrac{21}{4}\right)$，且$\overline{CB}=\dfrac{7}{2}-\left(-\dfrac{21}{4}\right)=\dfrac{35}{4}$，所以若圓心在第三象限，則$\Gamma$的半徑大於$\dfrac{35}{4}$．又因為$\dfrac{35}{4}>8$，所以此選項正確．



圖一



圖二



圖三

故選(2)(5)．

5. 出處：第二冊　第三章 機率
難易度：易
解：令A表示取出的第一顆為紅球的事件，B表示取出的第二顆為紅球的事件．

(1) 因為$P(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$，

所以$P(A)=P(B)$．

(2) 計算$P(A\cap B)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{15}$．因為$P(A\cap B)=\dfrac{1}{15}\neq\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=P(A)\times P(B)$，

所以A與B不是獨立事件．

(3) 令C表示取出的第二顆為白球或藍球的事件．因為$P(A\cap C)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{15}\neq 0$．

所以A與C不是互斥事件．

(4) 因為$P(\text{第一、二皆紅})=P(A\cap B)=\dfrac{1}{15}$，$P(\text{第一、二皆白})=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$，

所以$P(\text{第一、二皆紅})\neq P(\text{第一、二皆白})$．

(5) 因為$P(\text{前三皆白})=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{20}$，$P(\text{前三皆異色})=\dfrac{3\times2\times1}{6\times5\times4}\times3!=\dfrac{3}{10}$，

所以$P(\text{前三皆白})<P(\text{前三皆異色})$．

故選(1)(5)．

6. 出處：選修數學甲(下)　第一章 極限與函數
難易度：中

解：(1) 錯：例如，$a_n = 4 - \dfrac{1}{n}$ 滿足題意，但 $a_1 = 3$.

(2) 錯：因為 $a_n < a_{n+1}$，所以 $\langle a_n \rangle$ 為遞增數列 .

又因為 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$，所以對所有正整數 n，均使得 $a_{n+1} \le 4$.

(3) 對：因為 $a_n < b_n^{\ 2} < a_{n+1} < b_{n+1}^{\ \ 2} < a_{n+2}$，所以 $b_n^{\ 2} < b_{n+1}^{\ \ 2}$.

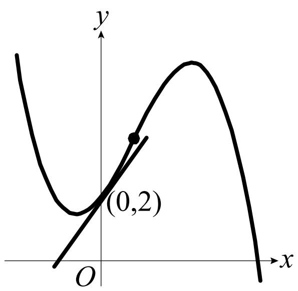
(4) 對：根據夾擠定理，因為 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 4$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{\ 2} = 4$.

(5) 錯：例如，$a_n = 4 - \dfrac{1}{n}$，$b_n = (-1)^n \times \sqrt{4 - \dfrac{1}{n+0.5}}$ 滿足題意，但 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 不存在 .

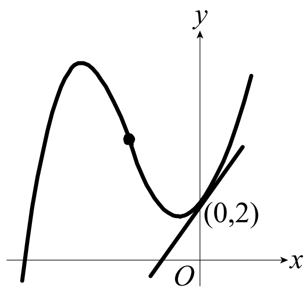
故選(3)(4) .

7. 出處：選修數甲(下)　第二章 多項式函數的微積分
難易度：中

解：依題意，函數 $f(x)$ 的圖形有以下兩種情形（其中圖形上的黑點為反曲點）：



圖一



圖二

(1) 錯：若是圖一，其圖形的最右方下沉，則 $a < 0$.

(2) 對：反曲點的坐標為 $\left(-\dfrac{b}{3a}, f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$.

若是圖一，則 $\begin{cases} a < 0 \\ -\dfrac{b}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow b > 0$；若是圖二，則 $\begin{cases} a > 0 \\ -\dfrac{b}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow b > 0$.

因此，無論圖一或圖二，$b > 0$.

(3) 對：無論圖一或圖二，以點 $(0,2)$ 為切點的切線斜率 $f'(0)$ 皆為正 .

因為 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$，所以 $f'(0) = c > 0$.

(4) 錯：無論圖一或圖二，函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸恰交一點且此點非反曲點 .

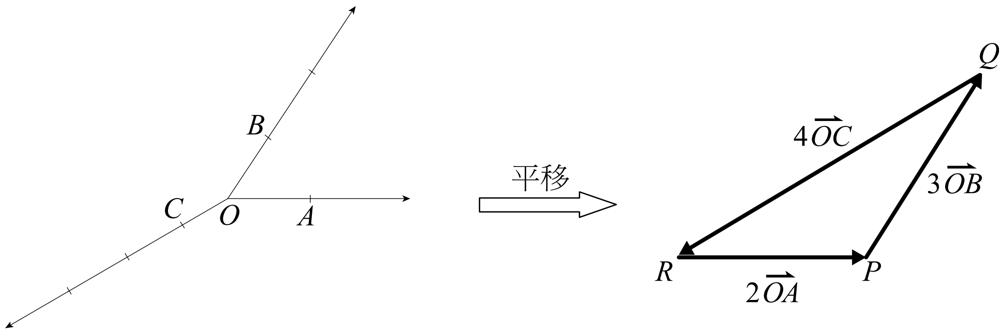
因此，方程式 $f(x) = 0$ 有一實根二虛根 .

(5) 對：無論圖一或圖二，反曲點的 y 坐標皆為正 .
故選(2)(3)(5) .

8. 出處：第三冊　第三章 平面向量

難易度：中

解：因為 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，所以三向量恰可圍成一個三邊長為 $2,3,4$ 的 $\triangle PQR$，如圖所示．



(1) $\left|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|=\left|-4\overrightarrow{OC}\right|=4\times 1=4$．

(2) 因為 $\cos\angle P=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times 2\times 3}=-\dfrac{1}{4}<0$，所以 $\angle P$ 為鈍角．

因此，$\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的夾角 $180^\circ-\angle P$ 為銳角，得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$．

(3) 因為 $\triangle PQR$ 的最小邊為 $\overline{RP}$，所以 $\overline{RP}$ 所對的角 $\angle Q$ 是三內角中的最小角．

又因為 $\angle BOC=180^\circ-\angle Q$，$\angle AOC=180^\circ-\angle R$，$\angle AOB=180^\circ-\angle P$，

所以在上述三個角中，以 $\angle BOC$ 最大．

(4) 因為 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2$$

$$=1^2-2\times 1\times 1\times\cos\left(180^\circ-\angle P\right)+1^2$$

$$=1-2\times\left(-\cos\angle P\right)+1$$

$$=1-2\times\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2},$$

得 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}<\dfrac{3}{2}$．

(5) 在 $\triangle PQR$ 中，利用正弦定理，得 $\dfrac{3}{\sin\angle R}=\dfrac{4}{\sin\angle P}\Rightarrow 3\sin\angle P=4\sin\angle R$．

因為 $\sin\angle AOB=\sin\left(180^\circ-\angle P\right)=\sin\angle P$，$\sin\angle AOC=\sin\left(180^\circ-\angle R\right)=\sin\angle R$，

所以 $3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$．

故選(1)(5)．

三、選填題

A. 出處：第四冊　第三章 矩陣

難易度：易

解：依題意，得$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$．

移項得$\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$,

因此，$\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$．

故$(r,s)=(3,-1)$．

B. 出處：第一冊　第三章 指數、對數函數

難易度：中

解：因為A,B在$y=\log_2 x$的圖形上，所以$A(a,\log_2 a),B(b,\log_2 b)$．

因為直線AB的斜率為 2，所以

$\frac{\log_2 a-\log_2 b}{a-b}=2\Rightarrow \log_2 a-\log_2 b=2(a-b)$．……①

又因為$\overline{AB}=\sqrt{5}$，所以

$\sqrt{(a-b)^2+(\log_2 a-\log_2 b)^2}=\sqrt{5}\Rightarrow (a-b)^2+(\log_2 a-\log_2 b)^2=5$．……②

將①代入②，得$(a-b)^2+4(a-b)^2=5\Rightarrow (a-b)^2=1$,

因為$a<b$，所以$a-b=-1$．……③

將③代入①，得$\log_2 a-\log_2 b=-2\Rightarrow \log_2\frac{a}{b}=-2$,

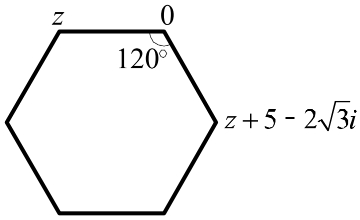
再得$\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$，即$b=4a$．……④

由③④解得$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{4}{3}$，故$(a,b)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$．

C. 出處：選修數學甲(上)　第二章 三角函數

難易度：中

解：設 $z=x+yi$，其中 x,y 為實數．依題意，作圖如右．



由圖知，點 z 以原點為中心，逆時針旋轉 $120°$，得點 $z+5-2\sqrt{3}i$ ．

利用複數乘法的幾何意義，得 $z+5-2\sqrt{3}i=z\cdot(\cos120°+i\sin120°)$，

將 $z=x+yi$ 代入，得 $(x+5)+\left(y-2\sqrt{3}\right)i=(x+yi)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)i$ ．

根據複數相等的定義，得 $\begin{cases}x+5=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\\ y-2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+\sqrt{3}y=-10\\ \sqrt{3}x-3y=-4\sqrt{3}\end{cases}$ ．

解得 $x=-\frac{7}{2},y=\frac{\sqrt{3}}{6}$ ．故 z 的實部為 $-\frac{7}{2}$ ．

第貳部分：非選擇題

一、出處：第四冊　第二章 空間中的平面與直線

難易度：中

解：(1) 因為 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=2$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\times\left|\overrightarrow{OP}\right|\times\cos60°=2\times2\times\frac{1}{2}=2$ ．

(2) 設 P 點的坐標為 (x,y,z) ．

因為 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\left(1,\sqrt{2},1\right)\cdot(x,y,z)=2$，所以 $x+\sqrt{2}y+z=2$，

此即為平面 E 的方程式．

(3) 設 Q 點的坐標為 (x,y,z) ．與(1)(2)同理，

得 $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(1,\sqrt{2},1\right)\cdot(x,y,z)=2\\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}=(2,0,0)\cdot(x,y,z)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\sqrt{2}y+z=2\\ 2x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\sqrt{2}y+z=2\\ x=1\end{cases}$ ．

此即為直線 L 的兩面式．直線 L 的一個方向向量為兩平面法向量的外積，

即 $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\left(1,\sqrt{2},1\right)\times(1,0,0)=\left(\begin{vmatrix}\sqrt{2}&1\\0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&\sqrt{2}\\1&0\end{vmatrix}\right)=\left(0,1,-\sqrt{2}\right)$ ．

故直線 L 的方向向量為 $k\left(0,1,-\sqrt{2}\right)$，$k$ 為非零實數．

(4) 將 $y=t$ 代入 L 的兩面式，得 $\begin{cases} x+z=2-\sqrt{2}t \\ x=1 \end{cases}$，

解得 $x=1, z=1-\sqrt{2}t$ ．因此，可設 Q 點的坐標為 $\left(1,t,1-\sqrt{2}t\right)$ ．

因為 $\left|\overrightarrow{OQ}\right|=2$，所以 $\sqrt{1^2+t^2+\left(1-\sqrt{2}t\right)^2}=2 \Rightarrow 3t^2-2\sqrt{2}t-2=0$，

即 $\left(3t+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}\right)=0$，解得 $t=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 或 $\sqrt{2}$ ．故 Q 點的坐標為 $\left(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{5}{3}\right)$ 或 $\left(1,\sqrt{2},-1\right)$ ．

二、出處：選修數甲(下)　第二章 多項式函數的微積分

難易度：難

解：(1) 將 $x=1$ 代入原式，因為 $\int_1^1 f(t)\,dt=0$，所以 $1\times f(1)=3-2+1+0=2$，

解得 $f(1)=2$ ．

(2) 將原式兩邊同時對 x 微分，因為 $\left(\int_1^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$，

所以 $1\times f(x)+xf'(x)=12x^3-6x^2+2x+f(x)$

整理得 $f'(x)=\dfrac{12x^3-6x^2+2x}{x}=12x^2-6x+2$ ．

(3) 由(2)，因為 $f'(x)=12x^2-6x+2$，所以 $f(x)=4x^3-3x^2+2x+c$（c 為常數）．

又由(1)，因為 $f(1)=2$，所以 $f(1)=4-3+2+c=2$，解得 $c=-1$ ．

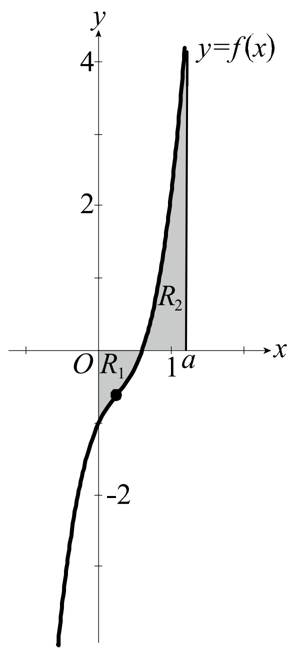
故 $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$ ．

(4) 因為 $f'(x)=12x^2-6x+2=0$ 無實數解，

所以 $f(x)$ 的圖形沒有水平切線．

解 $f''(x)=24x-6=0$，得 $x=\dfrac{1}{4}$，即 $\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{5}{8}\right)$ 為圖形的反曲點．

將 $f(x)$ 的圖形描繪如右．由定積分的幾何意義，



得知 $\int_0^a f(x)\,dx=R_2$ 的面積 $-R_1$ 的面積

其中 R_1 的面積是定值，R_2 的面積隨 a 增大而增大．

因為 $a=1$ 時，$\int_0^1 f(x)\,dx=\left(x^4-x^3+x^2-x\right)\Big|_0^1=0$，

所以必恰有一個大於 1 的正實數 a 使得 $\int_0^a f(x)\,dx=R_2$ 的面積 $-R_1$ 的面積 $=1$ ．