龍騰文化

107 數學統測最前線

龍騰貼心服務，給您最精準的分析！！

電子檔案可於龍騰網下載
https://goo.gl/vYlDD2

107 年 統測數學 A 考情趨勢與考題剖析

107 年統測數學 A 考情趨勢

一、試題分析

107 年數學(A)各章節都有出題，但以「式的運算」、「不等式及其應用」兩章節均出現 4 題為史上最多，尤其是「不等式及其應用」，往年出題均為 1～2 題。整份考題幾乎都是常見題型，與往年難易度相差不大，其中以第 21 題、第 22 題較難拿分。

❶基本公式題：檢視考生是否能清楚題意、熟悉公式。

第 1 題：多項式乘法，最簡單的一題。

第 2 題：簡單化簡後，利用兩平行線距離公式。

第 3 題：利用根與係數關係直接代入。

第 6 題：最簡單的組合題型。

第 7 題：向量基本公式代入，即可求解。

第 9 題：因式分解求出後，判斷 $\sin x$ 的值域範圍。

第 10 題：標準的餘式定理考題，代入公式即可。

第 11 題：兩向量垂直內積為 0。

第 12 題：最標準的餘式定理考題，代入公式即可。

第 13 題：很常見的一元二次不等式題目。

第 15 題：線性規劃標準題型。

第 19 題：期望值標準題型。

32061N/B/0000000

❷**基本觀念題：著重考生對各單元觀念的理解。**

第 4 題：簡單移項整理即可求值。

第 5 題：多項式基本概念。

第 14 題：此題只要慢慢一一列出即可。

第 18 題：此題只要依定義耐心計算即可拿到分數。

第 23 題：取捨原理的基本題型。

第 24 題：機率標準題型。

第 25 題：此題考平均數與標準差的觀念，無須計算亦可知道答案。

❸**稍微有點變化題，但不難**

第 8 題：餘弦函數 $\cos x$ 在四個象限的正負，與遞增、遞減觀念。

第 16 題：此題型近幾年幾乎沒有出現過，須以兩圓關係的觀念來解題。

第 17 題：此題要做四次選項代入的判斷，較為耗時，但使用觀念其實不難。

第 20 題：除了詳解的方法之外，此題亦可以求出 a 之值，再將 b 代入檢測，但較為耗時。

❹**需思考與計算較久的難題**

第 21 題：此題除了考對數觀念之外，是所有題目中計算最為繁瑣的題目，小數要相除的步驟太多，容易計算錯誤，是 25 題中最難拿分的。

第 22 題：此題要用到等差中項的概念,但一開始的 Σ 符號,可能就會嚇到考生了。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	2	圓與直線	2
三角函數及其應用	3	數列與級數	2
向量	2	排列組合	1
式的運算	4	機率	3
指數與對數及其運算	1	統計	1
不等式及其應用	4		

總　　分

107 統測數學 A 考題剖析

數學 A 參考公式

1. 若α、β為一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根，則$\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$，
   其兩根公式解為$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。
2. 點$P(x_0,y_0)$到直線L：$ax+by+c=0$的距離為$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。
3. 首項為a_1，公差為d的等差數列，第n項為$a_n=a_1+(n-1)d$，前n項之和為
   $S_n=\dfrac{n\left(2a_1+(n-1)d\right)}{2}$。
4. 首項為a_1，公比為r的等比數列，第n項為$a_n=a_1\cdot r^{n-1}$。
5. 設有一組母體資料$x_1, x_2, \cdots, x_N$，其算術平均數為μ，則母體標準差為
   $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}}$。
6. $\triangle ABC$的餘弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 若$f(x)=x^3-5x^2-4$與$g(x)=x+7$為兩多項式，則$f(x)\cdot g(x)$的x^3項係數為何？
(A)12　(B)2　(C)1　(D)-8。

(　　) 2. 平面上L_1：$y=\dfrac{-3}{4}x+\dfrac{1}{4}$與$L_2$：$6x+8y=-13$為兩直線方程式，則$L_1$與$L_2$的距離為何？
(A)$\dfrac{6}{5}$　(B)$\dfrac{3}{2}$　(C)3　(D)12。

(　　) 3. 若α，β為$x^2+2x-7=0$的兩根，則$\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2=$
(A)-3　(B)-2　(C)2　(D)3。

( ) 4. 滿足不等式$\dfrac{2x+5}{4} \le \dfrac{x-7}{3}$的最大整數$x=$

(A)-19 (B)-20 (C)-21 (D)-22。

( ) 5. 若$f(x)=(a^2+a-2)x^2+(a+2)x+a$為一次多項式，$g(x)=(b-3)x+2018$為零次多項式，則數對$(a,b)=$

(A)$(3,1)$ (B)$(1,0)$ (C)$(2,3)$ (D)$(1,3)$。

( ) 6. 某幼兒園共有大班 6 班、中班 4 班及小班 3 班。若聖誕晚會需要從大班選取 4 班、中班選取 3 班及小班選取 2 班來支援，其搭配方式有幾種可能？

(A)180 (B)240 (C)360 (D)720。

( ) 7. 若$\overrightarrow{a}=(2,-2\sqrt{3})$及$\overrightarrow{b}=(1,0)$，則$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角為何？

(A)$\dfrac{\pi}{6}$ (B)$\dfrac{\pi}{3}$ (C)$\dfrac{2\pi}{3}$ (D)$\dfrac{5\pi}{3}$。

( ) 8. 若$a=\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$、$b=\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$且$c=\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)$，則$a$、$b$、$c$之大小關係為何？

(A)$a>b>c$ (B)$b>a>c$ (C)$b>c>a$ (D)$c>b>a$。

( ) 9. 若$0\le\theta\le\pi$且$9\sin^2\theta+3\sin\theta-2=0$，則$\sin\theta=$

(A)$\dfrac{-2}{3}$ (B)$\dfrac{-1}{3}$ (C)$\dfrac{1}{3}$ (D)$\dfrac{2}{3}$。

( ) 10. 若$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=5$、$\overline{CA}=6$且$\theta=\angle BAC$，則$\sin\theta=$

(A)$\dfrac{\sqrt{7}}{16}$ (B)$\dfrac{3\sqrt{7}}{16}$ (C)$\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$ (D)$\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$。

( ) 11. 若$\left|\overrightarrow{a}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=2$且$\overrightarrow{a}$垂直$\overrightarrow{b}$，則$\left|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right|=$

(A)17 (B)$\sqrt{17}$ (C)3 (D)$\sqrt{7}$。

( ) 12. 若$f(x)=(x+1)^{200}+2x+1$，則$f(x)$除以$x+2$的餘式為何？

(A)-4 (B)-2 (C)4 (D)6。

( ) 13. 若b、c為實數，且$x^2+bx+c\ge 0$的解為$x\le 1$或$x\ge 3$，則$2b+3c=$

(A)-2 (B)-1 (C)0 (D)1。

( ) 14. 滿足二元一次不等式$2x+3y-12\le 0$的正整數解x與y，所成的(x,y)數對共有多少組？

(A)8 (B)10 (C)12 (D)15。

(　　) 15. 若 x 與 y 滿足聯立不等式 $\begin{cases} 2x+y\le 8 \\ x+3y\le 9 \\ x\ge 0，y\ge 0 \end{cases}$，則 $f(x,y)=2x+3y$ 的最大值為何？

(A)6　(B)8　(C)12　(D)16。

(　　) 16. 平面上兩圓方程式各別為 C_1 ： $x^2+y^2-2x+6y=6$ 以及 C_2 ： $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$，若圓 C_1 上的所有點都在圓 C_2 內，下列敘述何者恆為真？

(A) $(1-a)^2+(3+b)^2<(c-4)^2$　(B) $(1-a)^2+(3+b)^2>(c-4)^2$

(C) $c<4$　(D) $c=4$ 。

(　　) 17. 平面上一圓方程式為 C ： $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 以及一直線方程式為 L ： $ax+by=1$ ，下列何組數據 (a,b) 使得 C 及 L 的關係為相交於兩點？

(A) $(3,4)$　(B) $(3,-4)$　(C) $(8,6)$　(D) $(12,-5)$ 。

(　　) 18. 若等比數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8$ 的首項 $a_1=2$ ，且前四項的乘積 $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=2^{16}$ ，則後四項的乘積 $a_5\times a_6\times a_7\times a_8=$

(A) 2^{32}　(B) 2^{48}　(C) 2^{64}　(D) 2^{80} 。

(　　) 19. 針對來勢洶洶的腸病毒，政府鼓勵藥廠開發新藥，針對臨床實驗結果給予不一樣的補助，成功治癒給予10萬元、病情持平給予3萬元及病情惡化給予6000元。若某種新藥對於治癒、持平及惡化的機率各為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{6}$ ，則開發此種新藥的期望值為何？

(A)61000 元　(B)86000 元　(C)100000 元　(D)136000 元。

(　　) 20. 若平面上兩直線 L_1 ： $y=ax+b$ 與 L_2 ： $x+2y-2=0$ 互相垂直，且 L_1 與 L_2 與另一直線 L_3 ： $x-2y+10=0$ 無法圍成一個三角形，則下列何者正確？

(A) $a=-2$　(B) $a=\frac{1}{2}$　(C) $b=5$　(D) $b=11$ 。

(　　) 21. 若 $\log 2$ 的近似值為 0.3010 ，則滿足 $2^{10}<\left(\frac{5}{4}\right)^n<2^{20}$ 的正整數 n 共有多少個？

(A)29　(B)30　(C)31　(D)32。

(　　) 22. 若等差級數 $\sum_{k=10}^{1018} a_k$ 之值為 2018，則 $a_{514}=$

(A)2018　(B)1008　(C)514　(D)2。

(　　) 23. 某麵包店欲招募人力，初選方式需具備烘焙西點丙級證照以及2年以上業界經驗，若有20個人投履歷，其中僅有2人兩條件都<u>不符合</u>，16人符合證照要求，11人符合2年以上業界經驗，則從此20人隨機選取1人，符合初選條件的機率為何？

(A)$\frac{18}{20}$　(B)$\frac{16}{20}$　(C)$\frac{9}{20}$　(D)$\frac{5}{20}$。

(　　) 24. 某大藥廠針對 Z 型流感，研發出10種不一樣的新藥，全部的藥對某人的臨床反應只有治癒或無效兩種可能，且機率相同，則這10種新藥中，恰有6種對此人治癒的機率為何？

(A)$\frac{5}{512}$　(B)$\frac{1}{64}$　(C)$\frac{15}{256}$　(D)$\frac{105}{512}$。

(　　) 25. 某次數學測驗，全班50人成績的平均為A，標準差為B，若小統跟小策的成績各為29分以及41分，老師特別允許他們重新測驗，兩人新成績各為30分及40分，且全班新成績平均為C，標準差為D，下列敘述何者恆為真？

(A)$A>C$　(B)$C>A$　(C)$B>D$　(D)$D>B$。

107 年統一入學測驗　數學(A)

答　案

1.B	2.B	3.A	4.D	5.D	6.A	7.B	8.A	9.C	10.C
11.B	12.B	13.D	14.A	15.C	16.A	17.B	18.B	19.A	20.D
21.C	22.D	23.C	24.D	25.C					

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 107 年 5 月 7 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

配對找出相乘為 x^3 即可，不用全部乘開

解析

$\left(x^3-5x^2-4\right)\left(x+7\right)$

$-5x^3$

$7x^3$

故 $f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$ 的 x^3 項係數為 $7+\left(-5\right)=2$

2. 技巧與分析

兩平行線之距離：（ x 、 y 項係數要化為相同，常數項在等號同側）

設直線 L_1 ： $ax+by+c_1=0$ 與

L_2 ： $ax+by+c_2=0$ 為兩平行線

則 L_1 與 L_2 之距離為 $d=\dfrac{\left|c_1-c_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

解析

L_1 ： $y=\dfrac{-3}{4}x+\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow\quad 4y=-3x+1$

$\Rightarrow\quad 3x+4y-1=0$

$\Rightarrow\quad 6x+8y-2=0$

L_2 ： $6x+8y+13=0$

由兩平行線距離公式得知

$d\left(L_1,L_2\right)=\dfrac{\left|-2-13\right|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{15}{10}=\dfrac{3}{2}$

3. 技巧與分析

根與係數關係：設 α ， β 為 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根，則

(1)兩根和 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

(2)兩根積 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

解析

$x^2+2x-7=0$

由根與係數關係得知

$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{1}=-2$

$\alpha\beta=\dfrac{-7}{1}=-7$

又 $\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2$

$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\alpha\beta$

$=\left(\alpha+\beta\right)^2+\alpha\beta=\left(-2\right)^2-7$

$=-3$

4. 技巧與分析

去分母、整理、移項，注意取值的大小

解析

$\dfrac{2x+5}{4}\le\dfrac{x-7}{3}$

$\Rightarrow\quad 3\left(2x+5\right)\le 4\left(x-7\right)$

$\Rightarrow\quad 6x+15\le 4x-28$

$\Rightarrow\quad 6x-4x\le -28-15$

$\Rightarrow\quad 2x\le -43$

$\Rightarrow\quad x\le -\dfrac{43}{2}=-21.5$

故取 $x=-22$

5. 技巧與分析

多項式基本定義概念：設多項式

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$

(1) 若 $f(x)$ 為 n 次，則 $a_n\neq 0$

(2) 若 $f(x)$ 為 $n-1$ 次，則 $a_n=0$ ， $a_{n-1}\neq 0$

解析

$\because\quad f(x)=(a^2+a-2)x^2+(a+2)x+a$

為一次多項式，則

$$\begin{cases}a^2+a-2=0\\a+2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+2)(a-1)=0\\a\neq -2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-2\text{ 或 }1\\a\neq -2\end{cases}$$

$\therefore\quad a=1$

$\because\quad g(x)=(b-3)x+2018$ 為零次多項式

則 $b-3=0\quad\Rightarrow\quad b=3$

故數對 $(a,b)=(1,3)$

6. 技巧與分析

(1) 乘法原理：

設完成一件事需經過 k 個步驟，若完成第 i（$i=1$、2、$\cdots$、k）個步驟有 m_i 種方法，則完成此件事的方法數共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ 種

(2) 組合定義：

自 n 件相異物中，任取 m 件（不重複）（$0\le m\le n$）為一組，同一組內的物品若不計其先後順序，稱為「n 中取 m 的組合」，其組合數以符號 $C^n_m=\dfrac{P^n_m}{m!}$ 表示

解析

(1) 自 6 班大班任選 4 班，有 C^6_4 種方法

(2) 自 4 班中班任選 3 班，有 C^4_3 種方法

(3) 自 3 班小班任選 2 班，有 C^3_2 種方法

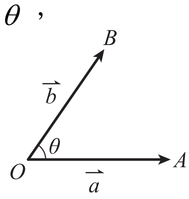
由乘法原理得知：

$$C^6_4\times C^4_3\times C^3_2=C^6_2\times C^4_1\times C^3_1$$
$$=15\times 4\times 3=180\text{（種）}$$

7. 技巧與分析

向量內積的定義：

(1) 兩向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ ，則其內積為



$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$$

即 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}$

(2) 設兩向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ ， $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ ，則

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

解析

$\overrightarrow{a}=(2,-2\sqrt{3})$

$\Rightarrow\quad\left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=4$

$\overrightarrow{b}=(1,0)\quad\Rightarrow\quad\left|\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{1^2+0^2}=1$

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2\times 1+(-2\sqrt{3})\times 0=2$

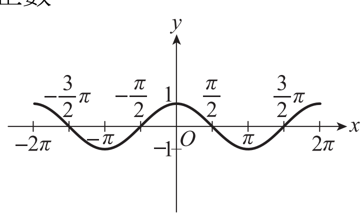
設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ ，則

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}=\frac{2}{4\times 1}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow\quad\theta=60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$

8. 技巧與分析

$y=\cos x$ ，當 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 時為遞減函數且函數值均為正數



解析

$a=\cos\dfrac{\pi}{5}>0$

$b=\cos\dfrac{3\pi}{5}=\cos\left(\pi-\dfrac{2\pi}{5}\right)=-\cos\dfrac{2\pi}{5}<0$

$c=\cos\dfrac{6\pi}{5}=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{5}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{5}<0$

又當 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\quad \cos\theta>0$，且 $\cos\theta$ 為遞減函數

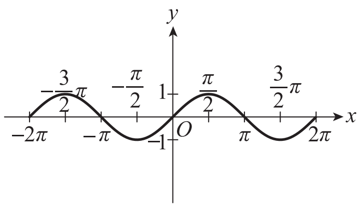
即 $\cos\dfrac{2\pi}{5}<\cos\dfrac{\pi}{5}\quad\Rightarrow\quad -\cos\dfrac{2\pi}{5}>-\cos\dfrac{\pi}{5}$

故 $a>b>c$

9. 技巧與分析

$y=\sin x$，值域：$-1\le\sin x\le1$，即

$|\sin x|\le1$



解析

$9\sin^2\theta+3\sin\theta-2=0$

$\Rightarrow\quad (3\sin\theta+2)(3\sin\theta-1)=0$

$\Rightarrow\quad \sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{1}{3}$

但 $0\le\theta\le\pi\quad\Rightarrow\quad\sin\theta\ge0$

故 $\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$（不合）

所以 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$

10. 技巧與分析

餘弦定理：（S 表示邊長，A 表示角度）

(1) SAS 型：（已知兩邊與夾角求第三邊）

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

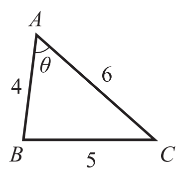
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

解析

已知：



由餘弦定理得知：

$5^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos\theta$

$\Rightarrow\quad \cos\theta=\dfrac{6^2+4^2-5^2}{2\times6\times4}=\dfrac{9}{16}$

又 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{9}{16}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{16\times16-9\times9}{16\times16}}=\sqrt{\dfrac{175}{16\times16}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

11. 技巧與分析

(1) 設 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為兩非零向量，則

$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$

(2) 設向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，則

$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$

(3) $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2=\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)$

$=\left|\overrightarrow{a}\right|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2$

解析

$\because\ \overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$

又 $\left|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2-4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4\left|\overrightarrow{b}\right|^2$

$=1^2-4\times0+4\times2^2=17$

故 $\left|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{17}$

12. 技巧與分析

餘式定理：

(1) 多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的餘式為 $f(a)$

(2) 多項式 $f(x)$ 除以 $x+a$ 的餘式為 $f(-a)$

(3) 多項式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的餘式為 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$

（$a\ne0$）

(4) 多項式 $f(x)$ 除以 $ax+b$ 的餘式為 $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

（$a\ne0$）

解析

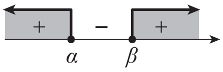
由餘式定理得知：$f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為

$f(-2)=(-2+1)^{200}+2\times(-2)+1$

$=1-4+1=-2$

13. 技巧與分析

$(x-\alpha)(x-\beta)\ge 0$ 之解為 $x\le\alpha$ 或 $x\ge\beta$



解析

$\because\quad x^2+bx+c\ge 0$ 的解為 $x\le 1$ 或 $x\ge 3$

$\Rightarrow\quad (x-1)(x-3)\ge 0$

$\Rightarrow\quad x^2-4x+3\ge 0$

與 $x^2+bx+c\ge 0$ 比較係數得

$b=-4$，$c=3$

故 $2b+3c=2\times(-4)+3\times 3=1$

14. 技巧與分析

一一列出所有狀況

解析

$2x+3y-12\le 0\quad\Rightarrow\quad 2x+3y\le 12\cdots①$

$x=1$ 代入①得 $3y\le 10\quad\Rightarrow\quad y=1$、$2$、$3$

$x=2$ 代入①得 $3y\le 8\quad\Rightarrow\quad y=1$、$2$

$x=3$ 代入①得 $3y\le 6\quad\Rightarrow\quad y=1$、$2$

$x=4$ 代入①得 $3y\le 4\quad\Rightarrow\quad y=1$

故共有 $(1,1)$、$(1,2)$、$(1,3)$

$(2,1)$、$(2,2)$

$(3,1)$、$(3,2)$

$(4,1)$

共8組

15. 技巧與分析

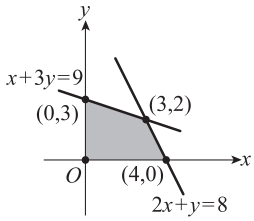
線性規劃的解法：

(1) 圖解聯立不等式，畫出可行解區域，並求出圖形之各頂點坐標

(2) 目標函數之最大值與最小值必發生在可行解區域之各頂點坐標上，將每一頂點分別代入目標函數 $f(x,y)$ 中，即可求得其最大值與最小值

解析

聯立不等式 $\begin{cases}2x+y\le 8\\ x+3y\le 9\\ x\ge 0\text{，}y\ge 0\end{cases}$ 的圖解如下：



頂點 (x,y)	$(0,0)$	$(4,0)$	$(3,2)$	$(0,3)$
$f(x,y)=2x+3y$	0	8	12	9

故 $f(x,y)=2x+3y$ 的最大值為12

16. 技巧與分析

設圓 C_1 圓心為 O_1，半徑為 r_1

圓 C_2 圓心為 O_2，半徑為 r_2

若 C_1 的點全部在 C_2 裡面，即兩圓關係為內離，則 $\overline{O_1O_2}<r_2-r_1$

解析

C_1：$x^2+y^2-2x+6y=6$

$\Rightarrow\quad (x-1)^2+(y+3)^2=4^2$

圓心為 $O_1(1,-3)$，半徑 $r_1=4$

C_2：$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$

圓心為 $O_2(a,b)$，半徑 $r_2=c$

又 C_1 的所有點都在 C_2 裡面，即兩圓關係為內離，則 $r_2>r_1\quad\Rightarrow\quad c>4$

且 $\overline{O_1O_2}<r_2-r_1$

$\Rightarrow\quad \overline{O_1O_2}^2<(r_1-r_2)^2$

$\Rightarrow\quad (a-1)^2+(b+3)^2<(4-c)^2$

即 $(1-a)^2+(3+b)^2<(c-4)^2$

故選(A)

17. 技巧與分析

直線與圓的關係：

設直線 L：$ax+by+c=0$

圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，且圓心 $O(h,k)$

與直線 L 之距離為 $d=\dfrac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，則可得

$d<r\ \Leftrightarrow\ L$ 與圓 C 相交於相異兩點

解析

$C:(x-3)^2+(y-2)^2=1^2$

$\Rightarrow$ 圓心 $O(3,2)$，半徑 $r=1$

$L: ax+by-1=0$

$\because$ C 與 L 要交於兩點

$\therefore$ $d(O,L)<r$

即 $\dfrac{|3a+2b-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$

$\Rightarrow$ $|3a+2b-1|<\sqrt{a^2+b^2}\cdots$①

(A) $(3,4)$ 代入① $\Rightarrow$ $|9+8-1|\not<5$

(B) $(3,-4)$ 代入① $\Rightarrow$ $|9-8-1|<5$

(C) $(8,6)$ 代入① $\Rightarrow$ $|24+12-1|\not<10$

(D) $(12,-5)$ 代入① $\Rightarrow$ $|36-10-1|\not<13$

故選(B)

18. 技巧與分析

(1) 若一數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，滿足

$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=r\neq 0$，則稱為等比數列，$r$ 稱為公比

(2) 等比數列第 n 項：

① $a_n=a_1r^{n-1}$

② $a_n=a_mr^{n-m}$

解析

設公比為 r，$a_1=2$

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4=2^{16}$

$\Rightarrow$ $a_1\times a_1r\times a_1r^2\times a_1r^3=2^{16}$

$\Rightarrow$ $a_1{}^4\times r^{1+2+3}=2^{16}$

$\Rightarrow$ $2^4\times r^6=2^{16}$

$\Rightarrow$ $r^6=2^{12}=(2^2)^6$

$\Rightarrow$ $r=\pm 2^2$

又 $a_5\times a_6\times a_7\times a_8$

$=a_1r^4\times a_1r^5\times a_1r^6\times a_1r^7$

$=a_1{}^4\times r^{4+5+6+7}$

$=2^4\times r^{22}$

$=2^4\times(\pm 2^2)^{22}$

$=2^{4+44}=2^{48}$

19. 技巧與分析

試驗的期望值：

設 $\{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k\}$ 為樣本空間 S 的一個分割，若事件 A_i 發生的機率為 p_i（$i=1$、2、3、…、k），且可得報酬為 m_i（$i=1$、2、3、…、k），則 $E=p_1m_1+p_2m_2+\cdots+p_km_k$ 稱為此試驗報酬的數學期望值，簡稱為期望值，其中 $p_1+p_2+\cdots+p_k=1$

解析

由期望值

$E=p_1m_1+p_2m_2+p_3m_3$

$=\dfrac{1}{2}\times 100000+\dfrac{1}{3}\times 30000+\dfrac{1}{6}\times 6000$

$=50000+10000+1000$

$=61000$（元）

20. 技巧與分析

(1) 直線 $L: ax+by+c=0$ 之斜率 $m=-\dfrac{a}{b}$

(2) 斜率為 m，且 y 截距為 b 之直線方程式為 $y=mx+b$

(3) 三線共點無法構成一個三角形，三線某二條以上平行亦無法構成三角形

解析

$L_1\perp L_2$ $\Rightarrow$ $m_1\times m_2=-1$

$\Rightarrow$ $a\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$ $\Rightarrow$ $a=2$

$\because$ $m_1=2$、$m_2=-\dfrac{1}{2}$、$m_3=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}$ 皆不相等（皆不平行）

故三線共點

$\Rightarrow$ $\begin{cases}x+2y-2=0 & \cdots① \\ x-2y+10=0 & \cdots② \\ y=2x+b & \cdots③\end{cases}$ 有共同解

由①、②可得 $x=-4$、$y=3$

代入③得

$3=-8+b$ $\Rightarrow$ $b=11$

故選(D)

21. 技巧與分析

當 $a>1$ 時，$y=f(x)=\log_a x$ 為遞增函數，即

$0<x_1<x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1<\log_a x_2$

解析

$2^{10}<\left(\frac{5}{4}\right)^n<2^{20}$

將不等式同時取 $\log_{10}$

$\Rightarrow \quad \log 2^{10}<\log\left(\frac{5}{4}\right)^n<\log 2^{20}$

$\Rightarrow \quad 10\log 2<n\log\frac{5}{4}<20\log 2$

$\Rightarrow \quad 10\log 2<n(\log 5-\log 4)<20\log 2$

$\Rightarrow \quad 10\log 2<n\left[(\log 10-\log 2)-2\log 2\right]$
$<20\log 2$

$\Rightarrow \quad 10\times 0.3010<n(1-0.3010-2\times 0.3010)$
$<20\times 0.3010$

$\Rightarrow \quad 3.010<0.097\times n<6.020$

$\Rightarrow \quad \frac{3.010}{0.097}<n<\frac{6.020}{0.097}$

$\Rightarrow \quad 31.030<n<62.061$

故共有 $62-32+1=31$（個）

22. 技巧與分析

設 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 為一等差數列，則等差中項 $a_3=\frac{a_2+a_4}{2}=\frac{a_1+a_5}{2}$

解析

$\because \quad \sum_{k=10}^{1018} a_k$ 為等差級數

$\sum_{k=10}^{1018} a_k=a_{10}+a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1016}+a_{1017}+a_{1018}$

（共1009項）

$=\frac{(a_{10}+a_{1018})\times 1009}{2}$

$=\frac{(a_1+9d+a_1+1017d)\times 1009}{2}=2018$

$\Rightarrow \quad \frac{(2a_1+1026d)}{2}=2$

$\Rightarrow \quad a_1+513d=2$

$\Rightarrow \quad a_{514}=2$

23. 技巧與分析

(1) 有限集合的元素個數計算公式：

（$n(S)$ 表示集合 S 的元素個數）

取捨原理（排容原理）：

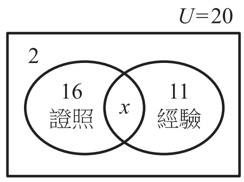
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(2) 機率的定義：

設樣本空間 S 中，每一個樣本發生的機會均等，若 $A\subset S$，則事件 A 發生的機率定義為

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{事件 } A \text{ 的元素個數}}{\text{樣本空間 } S \text{ 的元素個數}}$

解析



設同時符合的有 x 人，則 $16+11-x=20-2$

$\Rightarrow \quad 27-x=18$

$\Rightarrow \quad x=9$

故所求機率為 $\frac{9}{20}$

24. 技巧與分析

(1) 組合定義：

自 n 件相異物中，任取 m 件（不重複）（$0\le m\le n$）為一組，同一組內的物品若不計其先後順序，稱為「n 中取 m 的組合」，其組合數以符號 $C^n_m=\frac{P^n_m}{m!}$ 表示

(2) 機率的定義：

設樣本空間 S 中，每一個樣本發生的機會均等，若 $A\subset S$，則事件 A 發生的機率定義為

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{事件 } A \text{ 的元素個數}}{\text{樣本空間 } S \text{ 的元素個數}}$

解析

設樣本空間為 S，則 $n(S)=2^{10}=1024$

恰有6種治癒的事件為 A，則

$n(A)=C^{10}_6=C^{10}_4=210$

故所求 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{210}{1024}=\frac{105}{512}$

25. 技巧與分析

標準差的意義：

(1) 標準差的計算是以資料的算術平均數為中心，用於表明資料的離散情形

(2) 標準差的性質與算術平均數相類似，易受極端值影響

(3) 標準差愈小，表示資料愈集中在平均數的附近；標準差愈大，表示資料離平均數愈遠也就愈分散

解析

舊成績：29 分、41 分 $\Rightarrow \begin{cases} 29+41=70 \\ 41-29=12 \end{cases}$

新成績：30 分、40 分 $\Rightarrow \begin{cases} 30+40=70 \\ 40-30=10 \end{cases}$

(1) 新舊成績加總均為 70 分，因此平均分數不會改變，即 $A=C$

(2) 舊成績間距為 12，新成績間距為 10

間距縮小表示標準差縮小，即 $B>D$

（$\because$ 標準差表示資料的分散程度）

〔另解〕

$\left(29-\overline{x}\right)^2+\left(41-\overline{x}\right)^2=29^2+41^2-2\times 70\overline{x}+2\overline{x}^2$

$>\left(30-\overline{x}\right)^2+\left(40-\overline{x}\right)^2=30^2+40^2-2\times 70\overline{x}+2\overline{x}^2$

故 $B>D$

107 年 統測數學 B 考情趨勢與考題剖析

107 統測數學 B 考情趨勢

一、試題分析

1. 今年考題仍為中偏易，命題順序也盡可能符合章節順序。
2. 題目著重於各章節基本概念及運算，不需繁瑣的計算過程。但是對於執著於計算，觀念較少釐清的同學，則會因無法找到題目關鍵而擴大計算量。可以由下方「非簡易題型分析」了解。
3. 排列組合、機率兩單元題目設計較活，同學不易讀懂題意。
4. 「非簡易題型分析」：

第 6 題： 第 10 項為首項的 4 倍，僅推導出首項及公差的關係，並非真的求出，同學對此題型通常會以為無法求解。

第 10 題： 題目所求應為 $\log_2 10$，與省略底數的 $\log 2$ 為倒數，對於僅練習對數計算的同學容易忽略此特性。

第 13 題： 此題雖為常見考題，但同學往往計算容易出錯，且選項(B)為 $5\left(\sqrt{2}+1\right)$ 有混淆之陷阱。

第 15 題： 同學若沒用圓的判別式，而是配方化成圓標準式，再利用半徑平方為正去計算，將因為配方有分數增加其計算量及容易出錯。

第 17 題： 若沒看出兩組數字差 5 的關係，分別算出兩組標準差，將增加計算時間。

第 18 題： 技高對於拋物線給定兩個條件去畫圖求出方程式中，以給定「準線、焦點」最多計算步驟。

備註：但對於普高常使用定義平方展開，反而容易求解。

第 19 題： 相間隔時，需控制差量為 1，且有隱藏固定位置擺放的觀念，技高生對此觀念較薄弱，同學容易針對高麗菜作排列於哪裡有所混淆而無法下筆計算。

第 20 題： 計算量偏大，且須求出 M、m 兩個值。

第 21 題： 此為偏普高取捨原理之考題，同學對於大家都拿到不同物品（交錯）的排列方式較生疏，但因只有三個人，直接利用實際分物品就知只有 2 種方法，故不算超出範圍，但對技高生仍偏難。

第 22 題： 此題敘述理解較困難，且對於後面排列不規則，應利用樹狀圖求解為較簡易的方法，學生往往忽略導致不知如何分類排列。

第 24 題： 此題雖然可以用導函數基本定義求解，但同學容易使用兩多項式除法的微分規則處理，計算量仍屬於較大但不困難。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	不等式及其應用	2
三角函數	3	排列組合	2
向量	1	機率	3
指數與對數及其運算	2	統計	1
數列與級數	1	三角函數的應用	1
式的運算	1	二次曲線	2
方程式	2	微積分及其應用	3

總　　分

107 統測數學 B 考題剖析

數學 B 參考公式

1. 首項為 a_1，公差為 d 的等差數列，第 n 項為 $a_n = a_1 + (n-1)d$，前 n 項之和為 $S_n = \dfrac{n\left(2a_1 + (n-1)d\right)}{2}$
2. 設有一組母體資料 $x_1, x_2, \cdots, x_N$，其算術平均數為 μ，則母體標準差為 $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}}$
3. 若 α、β 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則 $\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$，其兩根為 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 若 $\sin\theta=\dfrac{33}{65}$，且 $\tan\theta=\dfrac{-33}{56}$，則 θ 為哪一象限角？
(A)第一象限角　(B)第二象限角　(C)第三象限角　(D)第四象限角。

(　　) 2. 已知坐標平面上三個點 $A(1,2)$、$B(2,5)$、$C(0,-1)$，則向量 $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=$
(A) $(-2,5)$　(B) $(3,0)$　(C) $(1,3)$　(D) $(3,15)$。

(　　) 3. 在坐標平面上，若直線 L 的方程式為 $ax-y=3$，其中 $a\neq 0$ 且經過點 $(1,2)$，則直線 L 的斜率為何？
(A) 5　(B) 3　(C) -3　(D) -5。

(　　) 4. 若多項式 $2x^3-kx^2+3x+5$ 除以 $x+1$ 的餘式為 1，則 k 值為何？
(A) -9　(B) -1　(C) 1　(D) 9。

(　　) 5. 若 $x^2-2x-1=0$ 的兩根為 α、β，則 $(\alpha-2)(\beta-2)$ 之值為何？
(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 5。

(　　) 6. 若一等差數列的第10項為首項的4倍，且首項不為0，則該數列的第6項為第2項的幾倍？

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5。

(　　) 7. 若$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且$\sin\theta=\frac{3}{5}$，則$\tan\theta+\sec\theta=$

(A)$\frac{12}{35}$　(B)$\frac{1}{2}$　(C) 2　(D)$\frac{35}{12}$。

(　　) 8. 若$\tan\theta=\frac{8}{15}$，則$\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta=$

(A)$\frac{514}{225}$　(B)$\frac{38}{15}$　(C)$\frac{64}{225}$　(D)$\frac{49}{625}$。

(　　) 9. 若$2^4\times4^{3x}\times8^2=16^x\times32$，則$x=$

(A) -3　(B) -2.5　(C) 2.5　(D) 3。

(　　) 10. 已知$\log2$之近似值為0.3010。若$2^x=10$，則x之值最接近下列何者？

(A) 3.16　(B) 3.23　(C) 3.32　(D) 3.52。

(　　) 11. 若二階行列式$\begin{vmatrix}x & 1\\ y & 2\end{vmatrix}=5$，且$\begin{vmatrix}x & 2y\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$，則$x+y$之值為何？

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 5。

(　　) 12. 若一元二次不等式$ax^2+bx-6\geq0$的解為$2\leq x\leq3$，則數對(a,b)為下列何者？

(A)$(-1,-5)$　(B)$(-1,5)$　(C)$(1,-5)$　(D)$(1,5)$。

(　　) 13. 一輛遙控小車在平坦無坡度的操場行駛，正前方遠處有一座直立水塔，測得塔頂的仰角30°。若小車往水塔方向移動10公尺後，測得塔頂的仰角45°，則水塔的高度為多少公尺？

(A)$5\sqrt{3}$　(B)$5\left(\sqrt{2}+1\right)$　(C)$4\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$　(D)$5\left(\sqrt{3}+1\right)$。

(　　) 14. 某青年創業開餐廳，擬設計一份有5種菜色的菜單。若在原始構思的7種菜色中有2種為必選，則有幾種<u>不同</u>菜單？

(A) 6　(B) 10　(C) 21　(D) 35。

(　　) 15. 若$x^2+y^2+kx+2y+k+1=0$表示一圓，則k的範圍為何？

(A)$2<k<4$　(B)$0<k<3$　(C)$k<2$或$k>3$　(D)$k<0$或$k>4$。

(　　) 16. 已知小王、小洋的上壘率分別為0.425、0.385。若在一場棒球比賽兩人分別擔任第2、3棒，則兩人第一次打擊皆上壘的機率滿足下列何者？

(A)大於0.6　(B)介於0.5和0.6　(C)介於0.4和0.5　(D)小於0.4。

(　　) 17. 若有一組數字為 73、58、64、85、91，其標準差為 σ_1，而另一組數字為 78、63、69、90、96，其標準差為 σ_2，則 $|\sigma_1-\sigma_2|$ 之值為何？

(A) 0　(B) $\sqrt{5}$　(C) 5　(D) 25。

(　　) 18. 若一拋物線之準線為 $x=-1$，焦點為 $(3,3)$，則此拋物線之方程式為何？

(A) $y^2-4x-6y+13=0$　(B) $y^2-4x-2y+13=0$　(C) $y^2-8x-2y+25=0$
(D) $y^2-8x-6y+17=0$。

(　　) 19. 某人想在自家後院牆邊的長條空地種植一列菜苗，共有高麗菜 5 株，萵苣 4 株，菠菜 4 株。若他決定在每兩株高麗菜之間任意種植萵苣或菠菜共兩株，則種植的排列方法有幾種？

(A) $\dfrac{8!}{4!4!}$　(B) 2^8　(C) $\dfrac{13!}{4!4!5!}$　(D) $5!4!4!$。

(　　) 20. 在滿足二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 0 \\ x-y\le 3 \\ x+y\le 4 \end{cases}$ 的條件下。若 $3x-5y$ 的最大值及最小值分別為 M 及 m，則 $M+m$ 之值為何？

(A) -9　(B) -4　(C) -3　(D) 3。

(　　) 21. 五個好朋友各自準備一份禮物，編號後進行摸彩，從摸彩箱抽取號碼後換對應禮物，則恰有兩人得到自己帶來之禮物的機率為何？

(A) $\dfrac{1}{12}$　(B) $\dfrac{1}{6}$　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) $\dfrac{1}{3}$。

(　　) 22. 依過去經驗，某生如果當天第一節上課遲到，隔天第一節上課遲到的機率是 $\dfrac{1}{4}$。如果當天第一節準時上課，隔天第一節上課遲到的機率是 $\dfrac{2}{5}$。若某生星期一第一節上課遲到，則後天星期三第一節上課遲到的機率為何？

(A) $\dfrac{1}{16}$　(B) $\dfrac{3}{10}$　(C) $\dfrac{29}{80}$　(D) $\dfrac{7}{10}$。

(　　) 23. 在坐標平面上，函數 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-3x+1$ 的圖形於切點 $(2,1)$ 的切線斜率為何？

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3。

(　　) 24. 若 $f(x)=\dfrac{-3(x+1)}{x^4+x^2+1}$，則 $f'(-1)$ 之值為何？

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2。

(　　) 25. 若 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}$（$x\neq\pm1$），則 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 之值為何？

(A)不存在　(B) 0　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 1。

107 年統一入學測驗 數學(B)

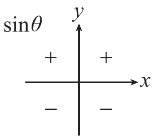
答 案

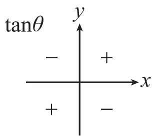
1.B	2.C	3.A	4.B	5.B	6.A	7.C	8.A	9.B	10.C
11.D	12.B	13.D	14.B	15.D	16.D	17.A	18.D	19.A	20.C
21.B	22.C	23.D	24.A	25.C					

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 107 年 5 月 7 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

三角函數正負表





解析

$\sin\theta=\frac{33}{65}>0$

$\Rightarrow$ θ 為第一或第二象限角…①

$\tan\theta=-\frac{33}{56}<0$

$\Rightarrow$ θ 為第二或第四象限角…②

根據①②得 θ 為第二象限角

故選(B)

2. 技巧與分析

(1) 已知 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 為坐標平面上的兩點，則兩點 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

(2) $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$、$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$

(3) $\overrightarrow{a}=(x,y)$ $\Rightarrow$ $k\overrightarrow{a}=(kx,ky)$

解析

$\overrightarrow{AB}=(2-1,5-2)=(1,3)$

$\overrightarrow{AC}=(0-1,-1-2)=(-1,-3)$

$\overrightarrow{BC}=(0-2,-1-5)=(-2,-6)$

$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

$=2(1,3)+3(-1,-3)-(-2,-6)$

$=(2-3+2,6-9+6)=(1,3)$

故選(C)

〔另解〕

$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

$=2(B-A)+3(C-A)-(C-B)$

$=2B-2A+3C-3A-C+B$

$=-5A+3B+2C$

$=-5(1,2)+3(2,5)+2(0,-1)$

$=(-5+6,-10+15-2)=(1,3)$

3. 技巧與分析

已知直線一般式 $ax+by+c=0$

則此直線斜率 $m=-\frac{a}{b}$

解析

$(1,2)$ 代入 $ax-y=3$

$\Rightarrow$ $a-2=3$ $\Rightarrow$ $a=5$

直線方程式：$5x-y=3$

直線斜率：$-\frac{5}{-1}=5$

故選(A)

4. 技巧與分析

餘式定理：$f(x)$ 除以 $x-a$ 之餘式為 $f(a)$

解析

令多項式 $2x^3-kx^2+3x+5=f(x)$

$f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式 $=f(-1)=1$

$\Rightarrow$ $-2-k-3+5=1$ $\Rightarrow$ $k=-1$

故選(B)

5. 技巧與分析

根與係數關係：

α 、β 為方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根

則 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

解析

α 、β 為 $x^2-2x-1=0$ 之兩根

$\Rightarrow\quad \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=2$ ，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=-1$

$$\begin{aligned}(\alpha-2)(\beta-2)&=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\\&=-1-2\times2+4=-1\end{aligned}$$

故選(B)

〔另解〕

α 、β 為 $x^2-2x-1=0$ 之兩根

$\Rightarrow\quad (x-\alpha)(x-\beta)=x^2-2x-1$

$\Rightarrow\quad (2-\alpha)(2-\beta)=4-4-1=-1$

$\Rightarrow\quad (\alpha-2)(\beta-2)=-1$

6. 技巧與分析

等差數列：$a_n=a_1+(n-1)d$

解析

$a_{10}=a_1+9d=4a_1$

$\Rightarrow\quad 3a_1=9d$

$\Rightarrow\quad a_1=3d$（其中 $a_1\neq0\quad\Rightarrow\quad d\neq0$）

$\therefore\quad \dfrac{a_6}{a_2}=\dfrac{a_1+5d}{a_1+d}=\dfrac{3d+5d}{3d+d}=\dfrac{8d}{4d}=2$

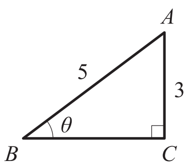
故選(A)

7. 技巧與分析

已知三角函數之基本定義即可

解析

根據 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ 可畫圖



畢氏定理可得 $\overline{BC}=4$

$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$ ，$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\frac{4}{5}}=\dfrac{5}{4}$

$\therefore\quad \tan\theta+\sec\theta=\dfrac{8}{4}=2$

故選(C)

8. 技巧與分析

三角函數平方關係：

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(2) $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

解析

$$\begin{aligned}\text{所求}&=\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)+\sec^2\theta=1+\sec^2\theta\\&=1+\left(1+\tan^2\theta\right)=2+\frac{64}{225}=\frac{514}{225}\end{aligned}$$

故選(A)

9. 技巧與分析

(1) 指數律：$\left(a^n\right)^m=a^{nm}$

(2) 指數方程式：

$a^x=a^y$（$a\neq1$）$\quad\Rightarrow\quad x=y$

解析

$2^4\times4^{3x}\times8^2=16^x\times32$

$\Rightarrow\quad 2^4\times\left(2^2\right)^{3x}\times\left(2^3\right)^2=\left(2^4\right)^x\times2^5$

$\Rightarrow\quad 2^{4+6x+6}=2^{4x+5}$

$\Rightarrow\quad 10+6x=4x+5$

$\Rightarrow\quad 2x=-5$

$\Rightarrow\quad x=-2.5$

故選(B)

10. 技巧與分析

(1) 指數與對數關係：$a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$

（$a>0$，且 $a\neq1$）

(2) 對數之倒數關係：$\log_a b\times\log_b a=1$

（a 、$b>0$，且 $a\neq1$，$b\neq1$）

解析

$2^x=10$

$\Rightarrow\quad x=\log_2 10=\dfrac{1}{\log_{10}2}=\dfrac{1}{0.3010}\fallingdotseq3.32$

故選(C)

11. 技巧與分析

(1) 二階行列式求值：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

(2) 解二元一次聯立方程式

解析

$\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x - y = 5 \cdots ①$

$\begin{vmatrix} x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2y = 0 \cdots ②$

①×2−② 可解出 $3x = 10$

又 $x - 2y = 0$

$\Rightarrow \quad x = 2y \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x}{2}$

則 $x + y = x + \dfrac{x}{2} = \dfrac{3x}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

故選(D)

12. 技巧與分析

二次不等式 $a \le x \le b \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \le 0$

解析

$2 \le x \le 3$

$\Rightarrow \quad (x-2)(x-3) \le 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 \le 0$

$\Rightarrow \quad -x^2 + 5x - 6 \ge 0$

比較題目 $ax^2 + bx - 6 \ge 0$

可得 $a = -1$，$b = 5$

數對 $(a,b) = (-1,5)$

故選(B)

〔另解〕

若 $ax^2 + bx - 6 = 0$ 之解必為 $x = 2$ 或 3

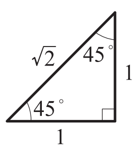
$\Rightarrow \quad \begin{cases} 4a + 2b - 6 = 0 \\ 9a + 3b - 6 = 0 \end{cases}$

解聯立得 $a = -1$，$b = 5$

$\Rightarrow \quad (a,b) = (-1,5)$

13. 技巧與分析

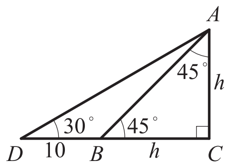
(1)



(2) $\tan 30° = \dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

解析

依題意作圖如下：



令水塔高度為 h（公尺），則 $\overline{BC} = h$

在△ADC 中，$\tan 30° = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{10+h}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}h = 10 + h$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}h - h = 10$

$\Rightarrow \quad h\left(\sqrt{3}-1\right) = 10$

$\Rightarrow \quad h = \dfrac{10}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{10\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = 5\left(\sqrt{3}+1\right)$

則水塔高為 $5\left(\sqrt{3}+1\right)$ 公尺

故選(D)

14. 技巧與分析

(1) 乘法原理：

設完成一件事需經過 k 個步驟，若完成第 i（$i=1$、2、⋯、k）個步驟有 m_i 種方法，則完成此件事的方法數共有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$ 種

(2) 組合定義：

自 n 件相異物中，任取 m 件（不重複）（$0 \le m \le n$）為一組，同一組內的物品若不計其先後順序，稱為「n 中取 m 的組合」，其組合數以符號 $C^n_m = \dfrac{P^n_m}{m!}$ 表示

解析

所求方法共有：

$C^2_2 \quad \times \quad C^5_3 \quad = 10$（種）

$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$

(2 種必選)×(剩下 5 種選 3 種)

故選(B)

15. 技巧與分析

圓的判別式：$\Delta = d^2 + e^2 - 4f$

$\Delta > 0$ 即為圓，$\Delta = 0$ 即為點，$\Delta < 0$ 無圖形

解析

圓一般式：$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

題目：$x^2 + y^2 + kx + 2y + (k+1) = 0$

$\therefore \quad d = k$，$e = 2$，$f = k+1$

圓的判別式 $d^2 + e^2 - 4f > 0$ 即為一圓

$\Rightarrow \quad k^2 + 2^2 - 4(k+1) > 0$

$\Rightarrow \quad k^2 - 4k > 0$

$\Rightarrow \quad k(k-4) > 0$

$\Rightarrow \quad k < 0$ 或 $k > 4$

故選(D)

16. 技巧與分析

A、B 為獨立事件：$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

解析

〈方法一〉

小王及小洋上壘為獨立事件

若 $P(\text{小王}) = 0.425$ 表示小王上壘機率

$P(\text{小洋}) = 0.385$ 表示小洋上壘機率

小王及小洋皆上壘機率 $= P(\text{小王} \cap \text{小洋})$

$\overset{\text{因為獨立}}{=} P(\text{小王}) \times P(\text{小洋})$

$= 0.425 \times 0.385 = 0.163625 < 0.4$

故選(D)

〈方法二〉

承方法一，

所求 $P(\text{小王} \cap \text{小洋}) < P(\text{小洋}) = 0.385 < 0.4$

故選(D)

17. 技巧與分析

$y_i = ax_i + b$，其中 x_i、y_i 為兩組資料

則標準差 $S_y = |a| S_x$

解析

將兩組數字由小到大排列

第一組：58, 64, 73, 85, 91

第二組：63, 69, 78, 90, 96

平移

觀察第二組數字皆比第一組數字多 5

根據標準差定義可得兩組標準差相同

$\therefore \quad \sigma_1 = \sigma_2 \quad \Rightarrow \quad |\sigma_1 - \sigma_2| = 0$

故選(A)

備註：資料的平移，標準差不變

18. 技巧與分析

(1) 拋物線標準式：$(y-k)^2 = 4c(x-h)$

其圖形為開口左右型，頂點 (h,k)、焦距 $|c|$

(2) 頂點到準線距離 = 頂點到焦點距離

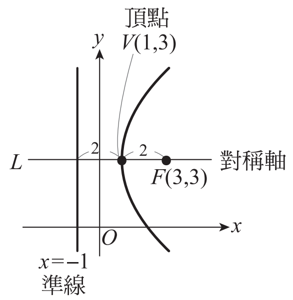
解析

$\because \quad$ 焦點 $(3,3)$ 在準線 $x = -1$ 右方

$\Rightarrow \quad$ 拋物線開口向右（$c > 0$）

畫出圖形得頂點為 $(1,3)$

焦距為 2 $\quad \Rightarrow \quad c = 2$



代入標準式為

$(y-3)^2 = 4 \times 2 \times (x-1)$

$\Rightarrow \quad y^2 - 6y + 9 = 8x - 8$

$\Rightarrow \quad y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$

故選(D)

19. 技巧與分析

不盡相異物排列：n 個相同物與另外 m 個相同物作直線排列的方法數：$\dfrac{(n+m)!}{n!m!}$

解析

高□□高□□高□□高□□高

第一步：高麗菜先排有 $\dfrac{5!}{5!}=1$ 種

第二步：再將萵苣與菠菜任意排入 8 個空格有 $\dfrac{8!}{4!4!}$ 種

由乘法原理知：共有 $1\times\dfrac{8!}{4!4!}=\dfrac{8!}{4!4!}$

故選(A)

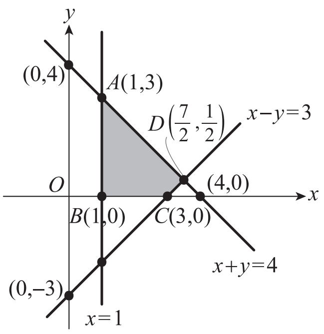
20. 技巧與分析

(1) 知悉二元一次不等式之作圖

(2) 利用頂點法求線性規劃之最大值及最小值

解析

依不等式 $x\geq 1$ 、 $y\geq 0$ 、 $x-y\leq 3$ 、 $x+y\leq 4$ 作圖如下



並將可行解畫出及求出頂點

頂點	$A(1,3)$	$B(1,0)$	$C(3,0)$	$D\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{1}{2}\right)$
$3x-5y$	-12	3	9	8

得 $M=9$ ， $m=-12$ $\Rightarrow$ $M+m=-3$

故選(C)

21. 技巧與分析

古典機率：$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

解析

所求分兩步驟：

第一步：先計算自 5 人取出 2 人得到自己的禮物之方法數 $=C^5_2$

第二步：考慮另外三人皆要確實交換到別人禮物之方法數

A	B	C
B	C	A

及

A	B	C
C	A	B

兩種

共 $C^5_2\times 2=20$ 種

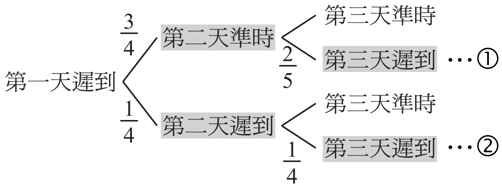
所求機率 $=\dfrac{20}{5!}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$

故選(B)

22. 技巧與分析

利用樹狀圖分析所有情形

解析



所求為①+② 兩種情況

即 $\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{6}{20}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{29}{80}$

故選(C)

23. 技巧與分析

$f(x)$ 在 $x=a$ 上的切線斜率 $=f'(a)$

解析

$f(x)$ 對 x 作一次微分 $f'(x)=3x-3$

切點 $(2,1)$ 的切線斜率即為

$f'(2)=3\times 2-3=3$

故選(D)

24. 技巧與分析

(1) $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(2) 若 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

則 $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

解析

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{-3(x+1)}{x^4+x^2+1}-0}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-3}{x^4+x^2+1}=\frac{-3}{1+1+1}=-1$$

故選(A)

〔另解〕

$f(x)$ 對 x 作一次微分之導函數

$f'(x)$

$$=\frac{\left[-3(x+1)\right]'\left(x^4+x^2+1\right)-\left[-3(x+1)\right]\left(x^4+x^2+1\right)'}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{(-3)\left(x^4+x^2+1\right)-(-3x-3)\left(4x^3+2x\right)}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}$$

$$f'(-1)=\frac{(-3)\times 3-0\times(-6)}{3^2}=-1$$

25. 技巧與分析

先通分化簡，再求極限

解析

$$f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}$$

$$=\frac{x(x+1)-2x}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2-x}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

故選(C)

107 年 統測數學 C 考情趨勢與考題剖析

107 統測數學 C 考情趨勢

一、試題分析

107 年統測數學 C 是一份力求有鑑別度的試卷，如果與 106 年的試卷來比較，其簡易、中等、困難的題目區別更加明顯，大約各占三分之一，考題鑑別度高。這次的試題順序，不再依照「99 課綱」的學習時間先後來安排，而是改採簡易、中等、困難的順序來安排，也許可以讓考生寫起來更有信心。此份試卷的其他特色如下：

1. 爭議試題：第 24 題未說明清楚骰子是相同或相異，這是很嚴重的題意瑕疵。
2. 參考書題：
   (1) 第 8 題：這類題目在技術高中的數學課本（如：龍騰數學 C(I)）或講義都有。
   (2) 第 23 題：本題並不是單純的用對數的遞增（減）來判斷對數的大小順序，對考生而言不易處理（除非以常用對數來計算，但是試卷上也沒有提供該給的常用對數值），而這種題目在普通高中的數學參考書上都有。
3. 罕見試題：
   (1) 第 9 題：使用整係數一次因式檢驗法來尋找可能的因式，再用因式定理解題。
   (2) 第 25 題：把圓方程式轉化成參數式，再代入求三角函數的極值。
4. 綜合試題：第 9、12、15、18、20、25 題都是跨單元的試題，是很好的綜合聯繫。
5. 考古題：

107C	第 3 題	第 7 題	第 10 題	第 16 題	第 18 題
類似題號	105-9、10	106-5	106-8	105-23	101-19、106-23

綜合上述，107 年的試卷對於低、中、高程度的考生應該會有良好的鑑別度。另外，在試卷印製前，也有徵求現職技術高中的數學老師入闈，只可惜仍然出現了一些容易引起爭論的試題，期待 108 年的試卷可以謹慎審題。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	數列與級數	1
三角函數	3	指數與對數及其運算	2
三角函數的應用	1	排列組合	2
向量	1	機率與統計	2
式的運算	1	圓	2
聯立方程式	2	二次曲線	0
複數	1	微分	1
不等式及其應用	2	積分	3

總　分

107 統測數學 C 考題剖析

數學 C 參考公式

1. 首項為a_1，公差為d的等差數列前n項之和為$S_n=\dfrac{n\left(2a_1+(n-1)d\right)}{2}$。

   首項為a_1，公比為r（$r\neq 1$）的等比數列前n項之和為$S_n=\dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$。

2. $\triangle ABC$的面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs$，其中$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，$r$為內切圓半徑。

3. 圓$C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$的參數式為$\begin{cases}x=h+r\cos\theta\\ y=k+r\sin\theta\end{cases}$，其中$0\le\theta<2\pi$，式子中的$\theta$為參數。

4. 點$P(x_0,y_0)$到直線$L:ax+by+c=0$的距離為$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

5. 三角函數的二倍角公式：
   $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，
   $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$。

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 已知直線L_1通過$(2,3)$、$(1,5)$兩點，且直線L_2的x截距是1、y截距是4。若L_1與L_2的斜率分別為m_1與m_2，則下列何者正確？
(A) $0<m_1<m_2$　(B) $m_1<0<m_2$　(C) $m_2<0<m_1$　(D) $m_2<m_1<0$。

(　　) 2. 若兩直線$3x+4y=6$與$9x+12y=k$的距離為2，則k的值可能為下列何者？
(A) -48　(B) -12　(C) 10　(D) 24。

(　　) 3. 設b_1、b_2、b_3、c_1、c_2及c_3均為實數，若二階行列式$\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}=13$、$\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}=7$、$\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}=2$，則三階行列式$\begin{vmatrix}1 & b_1 & c_1\\ 2 & b_2 & c_2\\ 3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=$
(A) 5　(B) 13　(C) 25　(D) 33。

(　　) 4. 某線上遊戲每場比賽可得的分數分別為0分、1分、2分、3分，現在A,B,C三人分別玩此線上遊戲20場，得分情形如表(一)。若a,b,c分別為三人得分的平均分數，則下列何者正確？

表(一)

得分 \ 人	0 分	1 分	2 分	3 分
A	3 場	8 場	5 場	4 場
B	5 場	4 場	6 場	5 場
C	6 場	5 場	3 場	6 場

(A)$a>b$　(B)$c>a$　(C)$b>c$　(D)$c+0.5=a$。

(　　) 5. 坐標平面上滿足不等式$\begin{cases}2x+y\le 10\\ x+2y\le 8\\ x\ge 0，y\ge 0\end{cases}$的區域面積為何？

(A)12　(B)13　(C)15　(D)16。

(　　) 6. 若編號為$1,2,3,\cdots,10$的十顆羽毛球中，任意取出三顆作為比賽用球，則編號2與編號3均被取出的機率為何？

(A)$\frac{1}{20}$　(B)$\frac{1}{15}$　(C)$\frac{3}{20}$　(D)$\frac{3}{10}$。

(　　) 7. 設三角形三邊長分別為5、6、7，若三角形面積為A，內切圓半徑為r，則$A\cdot r=$

(A)24　(B)35　(C)105　(D)210。

(　　) 8. $\cos 0^\circ+\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 30^\circ+\cdots+\cos 350^\circ+\cos 360^\circ=$

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3。

(　　) 9. 若$f(x)=x^4-x^3+kx^2-2$為整係數多項式，其中$k>0$且$f(x)$有整係數一次因式$x-h$，則$k+h=$

(A)3　(B)2　(C)1　(D)0。

(　　) 10. 設$\begin{cases}3x+5y+z=15\\ 2x+4y+z=12\\ 5x+y+2z=3\end{cases}$，則$y=$

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5。

(　　) 11. 已知$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，且$\bar{z}$為其共軛複數。若$\frac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$，其中$a,b$為實數，則點$(a,b)$在第幾象限？

(A)一　(B)二　(C)三　(D)四。

( ) 12. 若$x=\dfrac{\log_{10}7}{\log_{10}9}$，則$81^x=$

(A)3 (B)7 (C)25 (D)49。

( ) 13. $\sum_{n=1}^{10}\left(2^n+3n+2\right)=$

(A)1268 (B)1298 (C)2017 (D)2231。

( ) 14. 若從11件相異物中分別取出5、6、7件的組合數分別為A、B、C，而從12件相異物中取出6件的組合數為D，則下列何者正確？

(A)$B>A$ (B)$C>A$ (C)$D=A+B$ (D)$D=B+C$。

( ) 15. 設點O_1為圓$C:x^2+y^2-6x+4y+9=0$之圓心。今以另一點O_2為圓心、$\overline{O_1O_2}$為半徑作一圓，且此圓與圓C交於A、B兩點。若$\overline{AO_2}=3$，則$\overline{AB}=$

(A)$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (B)$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (C)$2\sqrt{2}$ (D)$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$。

( ) 16. $\int_{-4}^{0}\left|2x+5\right|dx=$

(A)$\dfrac{17}{2}$ (B)8 (C)$\dfrac{17}{4}$ (D)4。

( ) 17. 若直線L過點$(9,5)$，且與函數$y=f(x)$的圖形相切於點$(3,1)$，則$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=$

(A)$\dfrac{1}{3}$ (B)$\dfrac{2}{3}$ (C)$\dfrac{3}{2}$ (D)3。

( ) 18. 若函數$f(x)$的導函數$f'(x)=x^2-2x-3$，且$f(0)=6$，則$f(x)$的相對極小值為何？

(A)-5 (B)-4 (C)-3 (D)-2。

( ) 19. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(4x-1)^3\,dx=$

(A)$\dfrac{1}{16}$ (B)$\dfrac{1}{12}$ (C)$\dfrac{1}{4}$ (D)$\dfrac{1}{3}$。

( ) 20. 若一元二次方程式$x^2+(a-5)x+a+3=0$有兩正根，滿足a的實數解為$m<a\le n$，則$m+n=$

(A)-4 (B)-3 (C)-2 (D)1。

( ) 21. 若$\tan 19^\circ=a$，則$\sin 2018^\circ=$

(A)$\dfrac{-2}{1+a^2}$ (B)$\dfrac{-2a}{1+a^2}$ (C)$\dfrac{a}{1+a^2}$ (D)$\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$。

(　　) 22. 設 $f(x)=4\sin x+\cos(2x)+7$ 的最小值為 m，最大值為 M，則 $m+M=$

(A) -7　(B) 1　(C) 12　(D) 21。

(　　) 23. 設 $a=\log_{0.3}0.5$、$b=\log_{3}5$、$c=\log_{30}50$，則 a、b、c 大小順序為何？

(A) $c>b>a$　(B) $b>a>c$　(C) $b>c>a$　(D) $a>b>c$。

(　　) 24. 同時投擲四個公正骰子，點數3出現至多一次的情形共有幾種？

(A)1125　(B)1185　(C)1245　(D)1365。

(　　) 25. 設 $P(x,y)$ 為圓 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 上的動點，若 $4x+3y+5$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$

(A) -5　(B) 0　(C) 5　(D) 10。

107 年統一入學測驗　數學(C)

答　案

1.D	2.B	3.A	4.C	5.B	6.B	7.A	8.B	9.A	10.B
11.D	12.D	13.D	14.C	15.D	16.A	17.B	18.C	19.A	20.C
21.B	22.C	23.C	24.A	25.D					

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 107 年 5 月 7 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

(1) 通過兩相異點$\left(x_1,y_1\right)$、$\left(x_2,y_2\right)$的直線斜率$m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

(2) 若直線的x截距為a，則直線與x軸交於點$\left(a,0\right)$

(3) 若直線的y截距為b，則直線與y軸交於點$\left(0,b\right)$

解析

(1) 直線L_1的斜率$m_1=\dfrac{3-5}{2-1}=-2$

(2) 直線L_2的x、y截距分別是1、4

則直線L_2與x軸交於點$\left(1,0\right)$，與y軸交於點$\left(0,4\right)$

直線L_2的斜率$m_2=\dfrac{0-4}{1-0}=-4$

由(1)、(2)知：$m_2<m_1<0$

2. 技巧與分析

(1) 兩平行線$\begin{cases}L_1:ax+by=c_1\\L_2:ax+by=c_2\end{cases}$之間的距離

$$d\left(L_1,L_2\right)=\frac{\left|c_1-c_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(2) $\left|a-b\right|=\left|b-a\right|$

解析

$3x+4y=6\quad\overset{\times3}{\Rightarrow}\quad9x+12y=18$

$9x+12y=18$與$9x+12y=k$的距離為

$$\frac{\left|18-k\right|}{\sqrt{9^2+12^2}}=\frac{\left|18-k\right|}{15}=\frac{\left|k-18\right|}{15}$$

則$\dfrac{\left|k-18\right|}{15}=2\quad\Rightarrow\quad\left|k-18\right|=30$

$\Rightarrow\quad k-18=\pm30$

$\Rightarrow\quad k=18\pm30=48$或$-12$

故選(B)

3. 技巧與分析

三階行列式依第一行降階展開：

$$\begin{vmatrix}a&p&x\\b&q&y\\c&r&z\end{vmatrix}=a\times\begin{vmatrix}q&y\\r&z\end{vmatrix}-b\times\begin{vmatrix}p&x\\r&z\end{vmatrix}+c\times\begin{vmatrix}p&x\\q&y\end{vmatrix}$$

解析

$$\begin{vmatrix}1&b_1&c_1\\2&b_2&c_2\\3&b_3&c_3\end{vmatrix}\text{（第一行降階展開）}$$

$$=1\times\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_3&c_3\end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}$$

$=1\times13-2\times7+3\times2=5$

4. 技巧與分析

算術平均數：

平均分數$=\dfrac{\text{總得分}}{\text{總場次}}$

解析

(1) A 的總得分$=0\times3+1\times8+2\times5+3\times4=30$

A 的平均分數$a=\dfrac{30}{20}=1.5$

(2) B 的總得分$=0\times5+1\times4+2\times6+3\times5=31$

B 的平均分數$b=\dfrac{31}{20}=1.55$

(3) C 的總得分$=0\times6+1\times5+2\times3+3\times6=29$

C 的平均分數$c=\dfrac{29}{20}=1.45$

由(1)、(2)、(3)知：$c<a<b$ 且 $c+0.05=a$

故選(C)

5. 技巧與分析

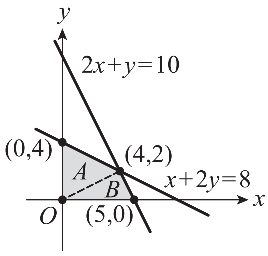
(1) 設 $a>0$，則 $ax+by\le c$ 的圖解在直線 $ax+by=c$ 的左側半平面（含直線）

(2) $x\ge 0$ 的圖解是直線 $x=0$（y 軸）的右側半平面（含直線）

(3) $y\ge 0$ 的圖解是直線 $y=0$（x 軸）的上側半平面（含直線）

解析

不等式的圖解如下：



區域 A 的面積 $=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

區域 B 的面積 $=\frac{1}{2}\times 5\times 2=5$

∴　不等式的區域面積

$=$ 區域 A、B 的面積和

$=8+5=13$

6. 技巧與分析

(1) 事件 A 的機率 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$，其中 S 為樣本空間

(2) $C_k^n=\frac{\overbrace{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}^{n\text{ 往下，}k\text{個數相乘}}}{k!}$

解析

設樣本空間為 S，編號 2 與 3 的球被取出的事件為 A

則 $n(S)=C_3^{10}=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=120$

$n(A)=\underbrace{C_2^2}_{\text{取 2、3 號球}}\times\underbrace{C_1^{10-2}}_{\text{剩下的球取 1 球}}=1\times C_1^8=8$

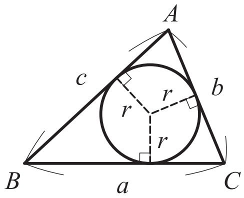
故所求機率 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$

7. 技巧與分析

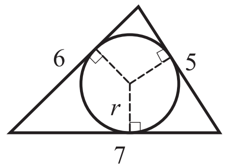
(1) $\triangle ABC$ 的面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

(2) 若 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 r，則 $\triangle ABC$ 的面積 $=r\times s$



解析



令 $s=\frac{1}{2}\times(5+6+7)=9$

三角形面積 A

$=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$

$=6\sqrt{6}$

∵　三角形的內切圓半徑為 r

∴　三角形面積 $A=r\times s=r\times 9=9r$

故 $9r=6\sqrt{6}$　$\Rightarrow$　$r=\frac{6\sqrt{6}}{9}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

因此 $A\times r=6\sqrt{6}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=24$

8. 技巧與分析

(1) $\cos 0^\circ=1$

(2) $\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta$

解析

令 $A=\cos 0^\circ+\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cdots+\cos 180^\circ$

$B=\cos 190^\circ+\cos 200^\circ+\cos 210^\circ+\cdots+\cos 360^\circ$

∵　$\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta$

∴　$\cos 190^\circ=\cos(180^\circ+10^\circ)=-\cos 10^\circ$

$\cos 200^\circ=\cos(180^\circ+20^\circ)=-\cos 20^\circ$

$\vdots$

$\cos 360^\circ=\cos(180^\circ+180^\circ)=-\cos 180^\circ$

則 $B=-\cos 10^\circ-\cos 20^\circ-\cdots-\cos 180^\circ$

故所求 $=A+B=\cos 0^\circ=1$

9. 技巧與分析

(1) 整係數一次因式檢驗法：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 為整係數多項式，若 $ax+b$ 是 $f(x)$ 的一次因式，其中 a 、b 為互質整數，則 a 是 a_n 的因數，b 是 a_0 的因數

(2) 因式定理：若 $x-a$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $f(a)=0$

解析

$\because$ $f(x)=x^4-x^3+kx^2-2$ 為整係數多項式且 $k>0$

$\therefore$ k 為正整數

$\because$ $f(x)$ 有整係數一次因式 $x-h$

$\therefore$ 由整係數一次因式檢驗法知 $h=\pm1$ 或 ±2

(1) 當 $h=1$ 時，即 $f(x)$ 有因式 $x-1$

則 $f(1)=1-1+k-2=0 \quad \Rightarrow \quad k=2$

(2) 當 $h=-1$ 時，即 $f(x)$ 有因式 $x+1$

則 $f(-1)=1-(-1)+k-2=0$

$\Rightarrow \quad k=0$（不合）

(3) 當 $h=2$ 時，即 $f(x)$ 有因式 $x-2$

則 $f(2)=16-8+4k-2=0$

$\Rightarrow \quad k=-\dfrac{3}{2}$（不合）

(4) 當 $h=-2$ 時，即 $f(x)$ 有因式 $x+2$

則 $f(-2)=16-(-8)+4k-2=0$

$\Rightarrow \quad k=-\dfrac{11}{2}$（不合）

由(1)、(2)、(3)、(4)知：$h=1$ ，$k=2$

故 $k+h=2+1=3$

10. 技巧與分析

解聯立方程式的加減消去法

解析

$$令\begin{cases}3x+5y+z=15\cdots\cdots①\\2x+4y+z=12\cdots\cdots②\\5x+y+2z=3\cdots\cdots③\end{cases}$$

①+②：$5x+9y+2z=27\cdots\cdots④$

④−③：$8y=24 \quad \Rightarrow \quad y=3$

11. 〈法一〉

技巧與分析

設 a 、b 、c 、d 均為實數，

(1) $z=a+bi$ 的共軛複數

$\bar{z}=a-bi$

(2) $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

(3) 複數的相等：

若 $a+bi=c+di$ ，則 $a=c$ 且 $b=d$

解析

$z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ，則 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$1+z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ，$1+\bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\frac{1+z}{1+\bar{z}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

而 $\dfrac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$ ，其中 a 、b 為實數

故 $a=\dfrac{1}{2}$ ，$b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

因此點 (a,b) 在第四象限

〈法二〉

技巧與分析

設 a 、b 、c 、d 為實數，

(1) 若 $z=a+bi$ ，則 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

(2) $z\times\bar{z}=|z|^2$

(3) 若 $a+bi=c+di$ ，則 $a=c$ 且 $b=d$

解析

$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow\quad |z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

$\because\quad z\times\bar{z}=|z|^2$

$\therefore\quad z\times\bar{z}=1$

$\frac{1+z}{1+\bar{z}}=\frac{z\times\bar{z}+z}{1+\bar{z}}=\frac{z(\bar{z}+1)}{1+\bar{z}}=z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

而$\frac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$，其中$a$、$b$為實數

則$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

故點$(a,b)=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在第四象限

12. 技巧與分析

設a、b、$c>0$且a、$c\neq1$，

(1) 對數的定義：

$\log_a b=x \quad\Leftrightarrow\quad a^x=b$

(2) 換底公式：

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

解析

由換底公式知：

$x=\frac{\log_{10}7}{\log_{10}9}=\log_9 7$

則由對數的定義知：

$x=\log_9 7 \quad\Leftrightarrow\quad 9^x=7$

故$81^x=(9^2)^x=9^{2x}=(9^x)^2=7^2=49$

13. 技巧與分析

(1) $a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-1}$

共n項的和$=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$，其中$r\neq1$

(2) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

解析

$\sum_{n=1}^{10}(2^n+3n+2)=\sum_{n=1}^{10}2^n+\sum_{n=1}^{10}3n+\sum_{n=1}^{10}2$

(1) $\sum_{n=1}^{10}2^n=2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$

$=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2046$

(2) $\sum_{n=1}^{10}3n=3\sum_{n=1}^{10}n=3\times(1+2+3+\cdots+10)$

$=3\times\frac{10\times(10+1)}{2}=165$

(3) $\sum_{n=1}^{10}2=\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{\text{共10個}}=10\times2=20$

由(1)、(2)、(3)知：

所求$=2046+165+20=2231$

14. 技巧與分析

(1) $C^n_k=\frac{\overbrace{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}^{n\text{ 往下，}k\text{個數相乘}}}{k!}$

(2) $C^n_k=C^n_{n-k}$

解析

$A=C^{11}_5=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}=462$

$B=C^{11}_6=C^{11}_{11-6}=C^{11}_5=462$

$C=C^{11}_7=C^{11}_{11-7}=C^{11}_4=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$

$D=C^{12}_6=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=924$

則$C<A=B<D$

$D=A+B$（這也是巴斯卡性質）

$D\neq B+C$

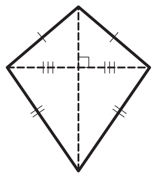
故選(C)

15. 技巧與分析

(1) 圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的半徑

為 $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$

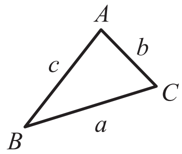
(2) 兩對鄰邊相等的四邊形為鳶形，對角線互相垂直，且其中一條對角線平分另一條對角線



(3) $\triangle ABC$ 的面積

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，

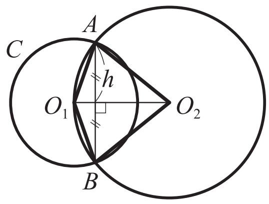
其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$



解析

圓 C 的半徑 $=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+4^2-4\times 9}=2$

依題意作圖如下：



$\because\ \overline{AO_2}=3$

$\therefore\ \overline{O_1O_2}=\overline{BO_2}=3$（相同圓的半徑）

而 $\overline{AO_1}=\overline{BO_1}=$ 圓 C 的半徑 $=2$

故四邊形 O_1AO_2B 為鳶形，其對角線 $\overline{O_1O_2}$ 與 $\overline{AB}$ 垂直，且 $\overline{AB}$ 被 $\overline{O_1O_2}$ 所平分

(1) $\triangle AO_1O_2$ 的面積：

令 $s=\frac{1}{2}\times(2+3+3)=4$

$\triangle AO_1O_2$ 的面積

$=\sqrt{4(4-2)(4-3)(4-3)}=2\sqrt{2}$

(2) $\triangle AO_1O_2$ 的邊 $\overline{O_1O_2}$ 的高：

設高為 h

$\triangle AO_1O_2$ 的面積

$=\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times h=\frac{1}{2}\times 3\times h=\frac{3}{2}h$

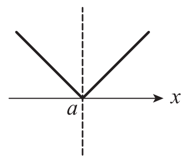
由(1)知：$\frac{3}{2}h=2\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad h=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(3) $\overline{AB}$ 的長：

$\overline{AB}=2\times h=2\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

16. 技巧與分析

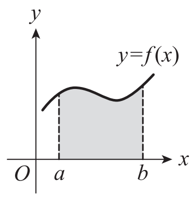
(1) $y=|x-a|$ 的圖形：



(2) 定積分的幾何意義：

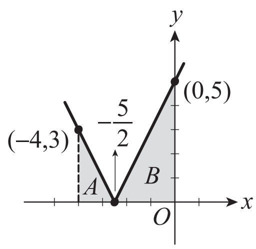
設函數 $f(x)\geq 0$，

則 $\int_a^b f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的圖形與 x 軸在區間 $[a,b]$ 所圍的區域面積



解析

$y=|2x+5|$ 的圖形如下：



區域 A 的面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 3=\frac{9}{4}$

區域 B 的面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 5=\frac{25}{4}$

則 $\int_{-4}^{0}|2x+5|dx$

$=$ 區域 A 、 B 的面積和

$=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{34}{4}=\frac{17}{2}$

17. 技巧與分析

(1) 通過相異兩點 (x_1,y_1) 、 (x_2,y_2) 的直線斜率 $m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

(2) 導數的定義：

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(3) 函數 $f(x)$ 的圖形在 $x=a$ 處之切線斜率為 $f'(a)$

解析

∵ 直線 L 與函數 $f(x)$ 的圖形相切於點 $(3,1)$

∴ 直線 L 是函數 $f(x)$ 的圖形在 $x=3$ 處的切線，其斜率為 $\dfrac{5-1}{9-3}=\dfrac{2}{3}$

而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$

且 $f'(3)$ 是 $f(x)$ 在 $x=3$ 處的切線斜率

因此 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\dfrac{2}{3}$

18. 技巧與分析

(1) $\int f'(x)dx=f(x)+c$，其中 c 為常數

(2) 設 $f(x)$ 為多項式函數：

①若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有極值，則 $f'(a)=0$

②

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f(x)$	↗	極大值 $f(a)$	↘
$f'(x)$	$+$	0	$-$

③

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f(x)$	↘	極小值 $f(a)$	↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$

解析

∵ $\int f'(x)dx$

$=\int (x^2-2x-3)dx$

$=\dfrac{1}{2+1}x^{2+1}-2\times\dfrac{1}{1+1}x^{1+1}-3x+c$

$=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+c$，其中 c 為常數

∴ 可設 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+k$

而 $f(0)=0-0-0+k=k$

又 $f(0)=6$，因此 $k=6$

則 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+6$

(1) 令 $f'(x)=0$

$\Rightarrow\ x^2-2x-3=0$

$\Rightarrow\ (x+1)(x-3)=0$

$\Rightarrow\ x=-1$ 或 3

而 $f(-1)=\dfrac{1}{3}\times(-1)^3-(-1)^2-3\times(-1)+6$

$=\dfrac{23}{3}$

$f(3)=\dfrac{1}{3}\times 3^3-3^2-3\times 3+6=-3$

(2) 若 $f'(x)<0$

$\Rightarrow\ x^2-2x-3<0$

$\Rightarrow\ (x+1)(x-3)<0$

$\Rightarrow\ -1<x<3$

(3) 若 $f'(x)>0$

$\Rightarrow\ x^2-2x-3>0$

$\Rightarrow\ (x+1)(x-3)>0$

$\Rightarrow\ x<-1$ 或 $x>3$

將(1)、(2)、(3)列表如下：

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f(x)$	↗	$\dfrac{23}{3}$	↘	-3	↗
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

因此 $f(x)$ 的相對極小值為 $f(3)=-3$

19. 技巧與分析

代換積分：

$\int_a^b \left[f(g(x))\times g'(x)\right]dx$

$=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$，

其中 $u=g(x)$ 是可微分函數

解析

令 $u=4x-1$，則 $\dfrac{du}{dx}=4$

$\Rightarrow\ du=4dx\ \Rightarrow\ dx=\dfrac{1}{4}du$

x	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$
u	0	1

所求 $=\int_0^1 u^3\times\dfrac{1}{4}du=\int_0^1\dfrac{1}{4}u^3du$

$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3+1}u^{3+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{16}u^4\Big|_0^1$

$=\dfrac{1}{16}\times 1^4-\dfrac{1}{16}\times 0^4=\dfrac{1}{16}$

20. 技巧與分析

設方程式 $ax^2+bx+c=0$ （ $a\neq 0$ ）

有兩根 α 、 β ，

(1) 兩根和： $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

(2) 兩根積： $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

(3) 方程式有實根：判別式 $b^2-4ac\geq 0$

解析

設 $x^2+(a-5)x+(a+3)=0$ 的兩根為 α 、 β

(1) 兩根和： $\alpha+\beta=-\dfrac{a-5}{1}=-a+5$

$\because$ 兩根均為正根

$\therefore$ $-a+5>0$ $\Rightarrow$ $a<5$

(2)兩根積： $\alpha\beta=\dfrac{a+3}{1}=a+3$

$\because$ 兩根均為正根

$\therefore$ $a+3>0$ $\Rightarrow$ $a>-3$

(3) 方程式的判別式：

$(a-5)^2-4\times 1\times(a+3)$

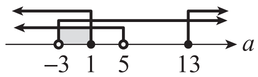
$=a^2-14a+13=(a-1)(a-13)$

$\because$ 方程式的兩根均為正根

$\therefore$ 判別式 $(a-1)(a-13)\geq 0$

$\Rightarrow$ $a\leq 1$ 或 $a\geq 13$

由(1)、(2)、(3)知： $-3<a\leq 1$

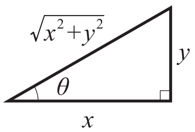


而滿足 a 的實數解為 $m<a\leq n$

故 $m=-3$ ， $n=1$ ，因此 $m+n=-3+1=-2$

21. 技巧與分析

(1) $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 的對應三角形如下：



(2) $\sin(360^\circ\times n+\theta)=\sin\theta$ ，

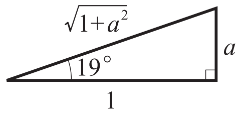
其中 n 為整數

(3) $\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta$

(4) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

解析

$\tan 19^\circ=a=\dfrac{a}{1}$ ，依此作圖如下：



則 $\sin 19^\circ=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ ， $\cos 19^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

(1) $\sin 2018^\circ=\sin(5\times 360^\circ+218^\circ)=\sin 218^\circ$

$=\sin(180^\circ+38^\circ)=-\sin 38^\circ$

(2) $\sin 38^\circ=\sin(2\times 19^\circ)=2\sin 19^\circ\cos 19^\circ$

$=2\times\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{2a}{1+a^2}$

由(1)、(2)知： $\sin 2018^\circ=-\sin 38^\circ=\dfrac{-2a}{1+a^2}$

22. 技巧與分析

(1) $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

(2) 二次函數的配方法

(3) $-1\leq\sin x\leq 1$

解析

$f(x)=4\sin x+\cos 2x+7$

$=4\sin x+(1-2\sin^2 x)+7$

$=-2\sin^2 x+4\sin x+8$

$=-2(\sin^2 x-2\sin x+1)+8+2$

$=-2(\sin x-1)^2+10\leq 10$

當 $\sin x=1$ 時， $f(x)$ 有最大值 $M=10$

而 $-1\leq\sin x\leq 1$

當 $\sin x=-1$ 時， $f(x)$ 有最小值

$m=-2(-1-1)^2+10=2$

因此 $m+M=2+10=12$

23.〈法一〉

技巧與分析

(1) 當$0<a<1$時：

若$0<x<y$，則$\log_a x>\log_a y$

(2) 當$a>1$時：

若$0<x<y$，則$\log_a x<\log_a y$

(3) 換底公式：

$$\log_a b=\frac{\log b}{\log a}，$$

其中a、$b>0$且$a\neq 1$

解析

(1) $\because\ 0.3<0.5<1$

$\therefore\ \log_{0.3}0.3>\log_{0.3}0.5>\log_{0.3}1$

$\Rightarrow\ 1>a>0$

(2) $b=\log_3 5>\log_3 3=1$

$c=\log_{30}50>\log_{30}30=1$

$$b-c=\log_3 5-\log_{30}50$$

$$=\frac{\log 5}{\log 3}-\frac{\log 50}{\log 30}$$

$$=\frac{\log 5}{\log 3}-\frac{\log(5\times 10)}{\log(3\times 10)}$$

$$=\frac{\log 5}{\log 3}-\frac{\log 5+\log 10}{\log 3+\log 10}$$

$$=\frac{\log 5}{\log 3}-\frac{\log 5+1}{\log 3+1}$$

$$=\frac{\log 5(\log 3+1)-\log 3(\log 5+1)}{\log 3(\log 3+1)}$$

$$=\frac{\log 5-\log 3}{\log 3(\log 3+1)}>0$$

則$b>c>1$

由(1)、(2)知：$b>c>a$

〈法二〉

技巧與分析

(1) 換底公式：

$$\log_a b=\frac{\log b}{\log a}，$$

其中a、$b>0$且$a\neq 1$

(2) 常用對數值：

$\log 2=0.3010$

$\log 3=0.4771$

解析

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2$$

$$=1-0.3010=0.6990$$

$$a=\log_{0.3}0.5=\frac{\log 0.5}{\log 0.3}=\frac{\log(5\times 10^{-1})}{\log(3\times 10^{-1})}$$

$$=\frac{\log 5+\log 10^{-1}}{\log 3+\log 10^{-1}}=\frac{0.6990+(-1)}{0.4771+(-1)}\fallingdotseq 0.5756$$

$$b=\log_3 5=\frac{\log 5}{\log 3}=\frac{0.6990}{0.4771}\fallingdotseq 1.4651$$

$$c=\log_{30}50=\frac{\log 50}{\log 30}=\frac{\log(5\times 10)}{\log(3\times 10)}$$

$$=\frac{\log 5+\log 10}{\log 3+\log 10}=\frac{0.6990+1}{0.4771+1}\fallingdotseq 1.1502$$

故$b>c>a$

24. 技巧與分析

(1) 當骰子相同時，此題為重複組合的概念

(2) 當骰子相異時，此題為重複排列的概念

(3) 重複組合：

① $H^n_k=C^{n+k-1}_k$

② n類相異物可以重複取出k個的方法有H^n_k種

解析

(1) 當四個骰子相同時：

①點數3沒有出現的情形：

從5種點數（1、2、4、5、6點）可重複地出現4個點數

有$H^5_4=C^{5+4-1}_4=C^8_4=70$種

②點數3只有出現一次的情形：

從5種點數（1、2、4、5、6點）可重複地出現3個點數

有$H^5_3=C^{5+3-1}_3=C^7_3=35$種

由①、②知：

同時投擲四個相同的公正骰子，點數3出現至多一次的情形共有$70+35=105$種

(2) 當四個骰子相異時：

①點數3沒有出現的情形：

□□□□

每個骰子出現的點數（1、2、4、5、6點）有5種可能

則有$5\times 5\times 5\times 5=625$種

②點數3只有出現一次的情形：

3□□□，□3□□，□□3□，

□□□3

其他骰子出現的點數（1、2、4、5、6點）有5種可能

則有 $4\times(5\times5\times5)=500$ 種

由①、②知：

同時投擲四個相異的公正骰子

點數3出現至多一次的情形共有

$625+500=1125$ 種

〔結論〕：本題的題意不清楚，應該予以送分

25.〈法一〉

技巧與分析

(1) 圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

圓心 $\left(-\dfrac{d}{2},-\dfrac{e}{2}\right)$，

半徑 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$

(2) 圓心 (h,k)，半徑 r 的圓之參數式

$\begin{cases}x=h+r\cos\theta\\y=k+r\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

(3) $a\sin\theta+b\cos\theta+c$ 的

最大值 $=\sqrt{a^2+b^2}+c$，

最小值 $=-\sqrt{a^2+b^2}+c$

解析

圓 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 的

圓心 $\left(-\dfrac{-6}{2},-\dfrac{8}{2}\right)=(3,-4)$

半徑 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+8^2-4\times0}=5$

則圓的參數式為 $\begin{cases}x=3+5\cos\theta\\y=-4+5\sin\theta\end{cases}$，

其中 $0\le\theta<2\pi$

$\because$ $P(x,y)$ 為圓上的動點

$\therefore$ $4x+3y+5$

$=4(3+5\cos\theta)+3(-4+5\sin\theta)+5$

$=15\sin\theta+20\cos\theta+5$

其最大值 $M=\sqrt{15^2+20^2}+5=25+5=30$

最小值 $m=-\sqrt{15^2+20^2}+5=-25+5=-20$

故 $M+m=30+(-20)=10$

〈法二〉

技巧與分析

(1) 柯西不等式：

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$

(2) 絕對值不等式：

$[f(x,y)]^2\le k^2$

$\Leftrightarrow$ $|f(x,y)|\le k$

$\Leftrightarrow$ $-k\le f(x,y)\le k$

其中 k 為正數

解析

圓 $x^2+y^2-6x+8y=0$

$\Rightarrow$ $(x^2-6x+\underset{\sim}{3^2})+(y^2+8y+\underset{\sim}{4^2})=\underset{\sim}{3^2}+\underset{\sim}{4^2}$

$\Rightarrow$ $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

由柯西不等式知：

$(4^2+3^2)\times\left[(x-3)^2+(y+4)^2\right]$

$\ge\left[4(x-3)+3(y+4)\right]^2$

$\Rightarrow$ $25\times25\ge(4x+3y)^2$

$\Rightarrow$ $(4x+3y)^2\le25^2$

$\Rightarrow$ $|4x+3y|\le25$

$\Rightarrow$ $-25\le4x+3y\le25$

$\overset{+5}{\Rightarrow}$ $-20\le4x+3y+5\le30$

故 $4x+3y+5$ 的最大值 $M=30$

最小值 $m=-20$

因此 $M+m=30+(-20)=10$