107 年度數學甲指定科目考試試卷

總　　分

_____年　_____班　學號________　姓名__________

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 **18** 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」. 各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算 .

(　　)1. 設 A 為 3×3 矩陣，且對任意實數 a，b，c，$A\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\c\\a\end{bmatrix}$ 均成立．試問矩陣 $A^2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ 為何?

(1)$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$　(2)$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$　(3)$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$　(4)$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$　(5)$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

(　　)2. 坐標平面上，考慮 $A(2,3)$ 與 $B(-1,3)$ 兩點，並設 O 為原點．令 E 為滿足 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $-1\le a\le1$， $0\le b\le4$ ．考慮函數 $f(x)=x^2+5$，試問當限定 x 為區域 E 中的點 $P(x,y)$ 的橫坐標時， $f(x)$ 的最大值為何?

(1)5　(2)9　(3)30　(4)41　(5)54 .

(　　)3. 某零售商店販賣「熊大」與「皮卡丘」兩種玩偶，其進貨來源有 A，B，C 三家廠商．已知此零售商店從每家廠商進貨的玩偶總數相同，且三家廠商製作的每一種玩偶外觀也一樣，而從 A，B，C 這三家廠商進貨的玩偶中，「皮卡丘」所占的比例分別為 $\frac{1}{4}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{2}$ ．阿德從這家零售商店隨機挑選一隻「皮卡丘」送給小安作為生日禮物，試問此「皮卡丘」出自 C 廠商的機率為何?

(1)$\frac{1}{3}$　(2)$\frac{2}{5}$　(3)$\frac{10}{23}$　(4)$\frac{10}{19}$　(5)$\frac{5}{9}$.

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」. 各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算 .

(　　)4. 設 $f(x)=-x^2+499$，且

$$A=\int_0^{10} f(x)dx \text{、} B=\sum_{n=0}^{9} f(n) \text{、} C=\sum_{n=1}^{10} f(n) \text{、} D=\sum_{n=0}^{9}\frac{f(n)+f(n+1)}{2}$$

試選出正確的選項 .

(1)A 表示在坐標平面上函數 $y=-x^2+499$ 的圖形與直線 $y=0$、$x=0$、$x=10$ 所圍成的有界區域的面積　(2) $B<C$　(3) $B<A$　(4) $C<D$　(5) $A<D$.

(　　)5. 坐標平面上，已知直線 L 與函數 $y=\log_2 x$ 的圖形有兩個交點 $P(a,b)$，$Q(c,d)$，且 $\overline{PQ}$ 的中點在 x 軸上 . 試選出正確的選項 .

(1)L 的斜率大於 0　(2) $bd=-1$　(3) $ac=1$　(4)L 的 y 截距大於 -1　(5)L 的 x 截距大於 1 .

(　　)6. 坐標空間中，有 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 、 $\overrightarrow{d}$ 四個向量，滿足外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{d}$，且 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 的向量長度均為 4 . 設向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ（其中 $0\le\theta\le\pi$），試選出正確的選項 .

(1) $\cos\theta=\frac{1}{4}$　(2) $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 所張出的平行六面體的體積為 16　(3) $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 、 $\overrightarrow{d}$ 兩兩互相垂直　(4) $\overrightarrow{d}$ 的長度等於 4　(5) $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{d}$ 的夾角等於 θ .

(　　)7. 設 O 為複數平面上的原點，並令點 A，B 分別代表複數 z_1，z_2，且滿足 $|z_1|=2$，$|z_2|=3$，$|z_2-z_1|=\sqrt{5}$. 若 $\frac{z_2}{z_1}=a+bi$，其中 a，b 為實數，$i=\sqrt{-1}$. 試選出正確的選項 .

(1) $\cos\angle AOB=\frac{2}{3}$　(2) $|z_2+z_1|=\sqrt{23}$　(3) $a>0$　(4) $b>0$　(5)設點 C 代表 $\frac{z_2}{z_1}$，則 $\angle BOC$ 可能等於 $\frac{\pi}{2}$.

(　　)8. 設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數 . 已知極限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\frac{|x|}{x}$ 存在，試選出正確的選項 .

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{|x|}\right)^2$ 存在　(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\frac{x}{|x|}$ 存在　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+1\right)\frac{x}{|x|}$ 存在　(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在

(5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2$ 存在 .

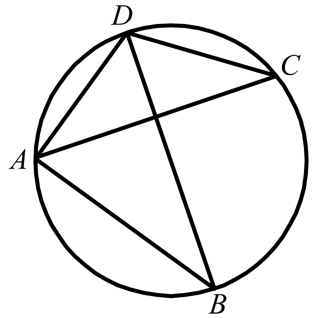
三、選填題（占 **18** 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(9－15)． 2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分．

A. 坐標平面上，已知圓 C 通過點 $P(0,-5)$，其圓心在 $x=2$ 上．若圓 C 截 x 軸所成之弦長為 6，則其半徑為 $\underline{\sqrt{⑨⑩}}$．（化成最簡根式）

B. 假設某棒球隊在任一局發生失誤的機率都等於 p（其中 $0<p<1$），且各局之間發生失誤與否互相獨立．令隨機變數 X 代表一場比賽 9 局中出現失誤的局數，且令 p_k 代表 9 局中恰有 k 局出現失誤的機率 $P(X=k)$．已知 $p_4+p_5=\frac{45}{8}p_6$，則該球隊在一場 9 局的比賽中出現失誤局數的期望值為 $\underline{\frac{⑪⑫}{⑬}}$．（化成最簡分數）

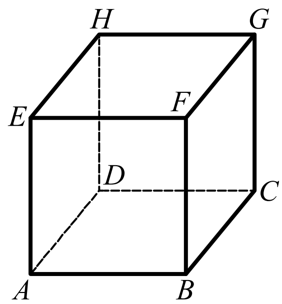
C. 設 A，B，C，D 為圓上的相異四點．已知圓的半徑為 $\frac{7}{2}$，$\overline{AB}=5$，兩線段 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直，如圖所示（此為示意圖，非依實際比例）．則 $\overline{CD}$ 的長度為 $\underline{⑭\sqrt{⑮}}$．（化成最簡根式）



第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分．作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆．若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔．每一子題配分標於題末．

一、坐標空間中有一個正立方體 $ABCDEFGH$，如圖所示（此為示意圖），試回答下列問題．



(1) 試證明 A 點到平面 BDE 的距離是對角線 AG 長度的三分之一．（4 分）

(2) 試證明向量 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 垂直．（2 分）

(3) 如果知道平面 BDE 的方程式為 $2x+2y-z=-7$，且 A 點坐標為 $(2,2,6)$，試求出 A 點到平面 BDE 的距離．（2 分）

(4) 承(3)，試求出 G 點的坐標．（4 分）

二、考慮三次多項式 $f(x)=-x^3-3x^2+3$ ．試回答下列問題．

(1) 在坐標平面上，試描繪 $y=f(x)$ 的函數圖形，並標示極值所在點之坐標．（4 分）

(2) 令 $f(x)=0$ 的實根為 a_1， a_2， a_3，其中 $a_1<a_2<a_3$ ．試求 a_1， a_2， a_3 分別在哪兩個相鄰整數之間．（2 分）

(3) 承(2)，試說明 $f(x)=a_1$ 、 $f(x)=a_2$ 、 $f(x)=a_3$ 各有幾個相異實根．（4 分）

(4) 試求 $f(f(x))=0$ 有幾個相異實根（註： $f(f(x))=-(f(x))^3-3(f(x))^2+3$ ）．（2 分）

試題大剖析

桃園高中／陳清風

答　案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)　2. (4)　3.(3)

二、多選題

4. (1)(4)　5. (1)(3)(5)　6. (2)(3)　7. (1)(3)(5)　8. (1)(2)(5)

三、選填題

A. $\sqrt{13}$　B. $\dfrac{18}{5}$　C. $2\sqrt{6}$

第貳部分：非選擇題

一、(1)見解析　(2)見解析　(3)3　(4)$\left(-4,-4,9\right)$

二、(1)見解析　(2)$\left(-3,-2\right)$，$\left(-2,-1\right)$，$\left(0,1\right)$　(3)分別有$1,1,3$個相異實根　(4)有 5 個相異實根

解　析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 出處：第四冊　第三章 矩陣

難易度：易

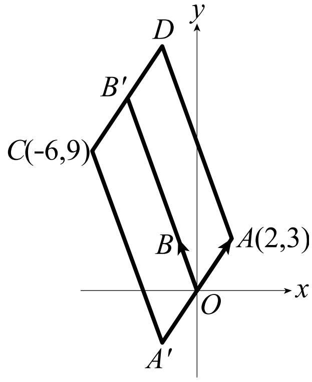
解：因為 $A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}$，所以 $A^2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=A\left(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$．

故選(2)．

2. 出處：第三冊　第三章 平面向量

難易度：中

解：依題意，可得區域 E 為平行四邊形 $AA'CD$，如圖所示．



因為 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}=\left(-2,-3\right)+\left(-4,12\right)=\left(-6,9\right)$，

所以 C 點的坐標為 $\left(-6,9\right)$．

因此，區域 E 的點，其 x 坐標的範圍為 $-6\le x\le 2$．

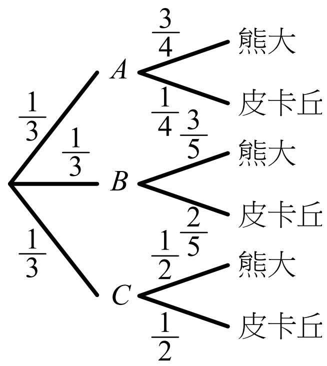
在此限制下，函數 $f\left(x\right)=x^2+5$ 的最大值為 $\left(-6\right)^2+5=41$．

故選(4)．

3. 出處：第二冊　第三章 機率

難易度：中

解：依題意畫樹狀圖如下：



根據貝氏定理，得所求機率為

$$P\left(C|\text{皮卡丘}\right)=\frac{P\left(C\cap\text{皮卡丘}\right)}{P\left(\text{皮卡丘}\right)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{10}{23}$$，故選(3)．

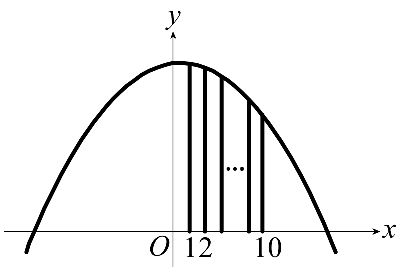
二、多選題

4. 出處：選修數甲(下)　第二章 多項式函數的微積分

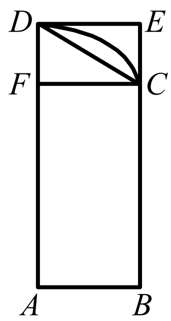
難易度：中

解：由定積分與面積的關係，得知選項(1)正確．

如圖(1)，將區間$\left[0,10\right]$分成 10 等分，每一長條的寬均為 1．



圖(1)



圖(2)

一般而言，每一長條皆如圖(2)，其中矩形 $ABED$ 為上矩形，矩形 $ABCF$ 為下矩形，梯形 $ABCD$ 全在長條形 $ABCD$ 的區域內．

由圖(2)得知：

矩形 $ABCF$ 面積<梯形 $ABCD$ 面積<長條形 $ABCD$ 面積<矩形 $ABED$ 面積．

因為 $f\left(x\right)$ 在區間$\left[0,10\right]$上為遞減函數，所以每個上矩形的高為左端點的函數值．因此，上和（10 個上矩形的和）為

$$1\times\left(f\left(0\right)+f\left(1\right)+\cdots+f\left(9\right)\right)=\sum_{n=0}^{9}f\left(n\right)=B$$；

因為每個下矩形的高為右端點的函數值，所以下和（10 個下矩形的和）為

$$1\times\left(f\left(1\right)+f\left(2\right)+\cdots+f\left(10\right)\right)=\sum_{n=1}^{10}f\left(n\right)=C$$；

又 10 個長條形內的梯形面積總和為

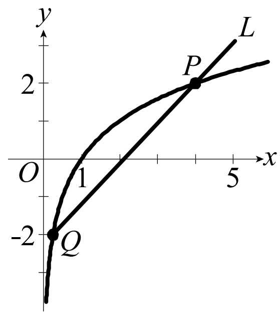
$$1\times\left(\frac{f(0)+f(1)}{2}+\frac{f(1)+f(2)}{2}+\cdots+\frac{f(9)+f(10)}{2}\right)=\sum_{n=0}^{9}\frac{f(n)+f(n+1)}{2}=D\ .$$

由面積的大小得知，$C<D<A<B$.

故選(1)(4) .

5. 出處：第一冊　第三章 指數、對數函數

難易度：中



解：(1) 由右圖，得知 L 的斜率為正 .

(2) 錯，如 $P(4,2),Q\left(\frac{1}{4},-2\right)$，則 $bd=2\times(-2)=-4\neq-1$.

(3) 因為 P,Q 的中點在 x 軸上，

所以 $b+d=\log_2 a+\log_2 c=0\Rightarrow\log_2 ac=0\Rightarrow ac=1$.

(4) 錯，如 $P(4,2)$，$Q\left(\frac{1}{4},-2\right)$，則 L 的 y 截距小於 -1 .

(5) 因為 $y=\log_2 x$ 的圖形與 x 軸交於 $(1,0)$，所以 L 的 x 截距大於 1 .

故選(1)(3)(5) .

6. 出處：第四冊　第一章 空間向量

難易度：中

解：(1) 因為 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$，所以 $\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{c}\right|$.

因此 $\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\sin\theta=\left|\overrightarrow{c}\right|\Rightarrow 4\times4\times\sin\theta=4$.

解得 $\sin\theta=\frac{1}{4}$，再得 $\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$.

(2) 因為 $\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}=\left|\overrightarrow{c}\right|^2=16$，

所以平行六面體的體積為 $\left|\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}\right|=16$.

(3) 因為 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$，所以 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$.

又因為 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{d}$，所以 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{d}$ 且 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{d}$.

因此 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}$ 兩兩互相垂直 .

(4) 因為 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{d}$，所以 $\left|\overrightarrow{d}\right|=\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}\right|=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{c}\right|\sin90^\circ=4\times4\times1=16$.

(5) 因為 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 所張的平行六面體的體積為 16，所以 $\left|\overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}\right)\right|=16$.

又因為 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{d}$ 的夾角 ϕ 滿足

$$\cos\phi=\frac{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}}{\left|\overrightarrow{b}\right|\left|\overrightarrow{d}\right|}=\frac{\overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}\right)}{4\times16}=\pm\frac{16}{64}=\pm\frac{1}{4},$$

所以$\theta\neq\phi$．

故選(2)(3)．

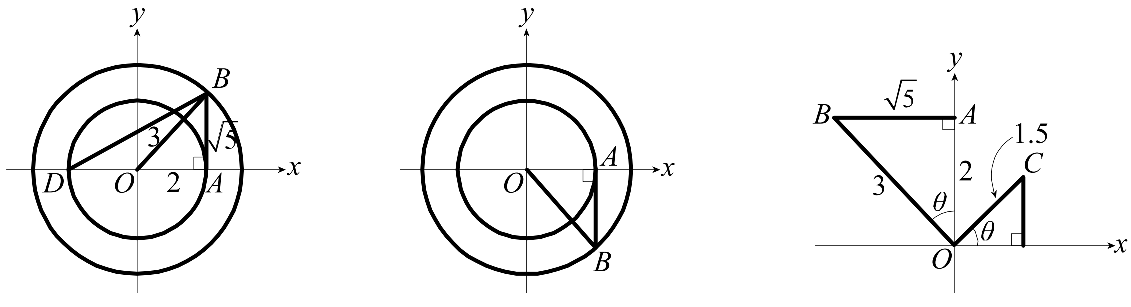
7. 出處：選修數學甲(上)　第二章 三角函數

難易度：難

解：因為$|z_1|=2,|z_2|=3$，所以A,B兩點分別在以原點O為圓心，半徑為 2，3 的圓上．

又因為$|z_2-z_1|=\sqrt{5}$，所以$\overline{BA}=\sqrt{5}$．

如圖(1)，由畢氏定理得知，$\triangle OAB$為直角三角形．令$\angle AOB=\theta$．



圖(1)　圖(2)　圖(3)

(1) 如圖(1)，$\cos\angle AOB=\cos\theta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{2}{3}$．

(2) 如圖(1)，令點D代表複數$-z_1$．

因為$|z_2+z_1|=|z_2-(-z_1)|=\overline{BD}$，且$\triangle BDA$為直角三角形，

$\therefore\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2=4^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=21$,

所以$|z_2+z_1|=\sqrt{21}$．

(3)(4) 有圖(1)與圖(2)兩種情形：

(i) 如圖(1)，由複數極式的幾何意涵，得

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{3}{2}\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i\right)=1+\frac{\sqrt{5}}{2}i\ .$$

(ii) 如圖(2)，由複數極式的幾何意涵，得

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{3}{2}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}i\right)=1-\frac{\sqrt{5}}{2}i\ .$$

因此$a=1$，$b=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$．

(5) 如圖(3)，$z_1=2\left(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ\right), z_2=3\left(\cos\left(90^\circ+\theta\right)+i\sin\left(90^\circ+\theta\right)\right)$，

則$\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{3}{2}\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$，此時$\angle BOC=90^\circ$．

故選(1)(3)(5)．

8. 出處：選修數學甲(下)　第一章 極限與函數

難易度：難

解：令$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\dfrac{|x|}{x}=a$，則

$$a=\lim_{x\to 0^+}f(x)\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}f(x)\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}f(x),$$

$$a=\lim_{x\to 0^-}f(x)\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}f(x)\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-f(x)\right).$$

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$．

(2) 因為

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}f(x)\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}f(x)=a,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}f(x)\frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-f(x)\right)=a,$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\dfrac{x}{|x|}=a$．

(3) 因為

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)+1\right)\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)+1\right)\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)+1\right)=a+1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(f(x)+1\right)\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\left(f(x)+1\right)\frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-f(x)-1\right)=a-1$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+1\right)\dfrac{x}{|x|}$不存在．

(4) 當$a\neq 0$時，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a\neq -a=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在．

(5) 因為$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\dfrac{|x|}{x}=a$且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\dfrac{x}{|x|}=a$，所以

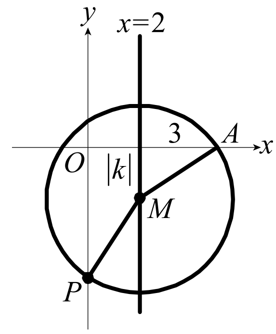
$$\lim_{x\to 0}f(x)^2=\lim_{x\to 0}\left(f(x)\frac{|x|}{x}\cdot f(x)\frac{x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0}f(x)\frac{|x|}{x}\cdot\lim_{x\to 0}f(x)\frac{x}{|x|}=a\cdot a=a^2.$$

故選(1)(2)(5)．

三、選填題

A. 出處：第三冊　第二章 直線與圓

難易度：易



解：如圖，設圓心 M 的坐標為 $(2,k)$.

因為 $\overline{MP}=\overline{MA}$，所以

$\sqrt{(2-0)^2+(k+5)^2}=\sqrt{k^2+3^2}$,

兩邊平方，得 $4+k^2+10k+25=k^2+9$,

整理得 $10k=-20$，解得 $k=-2$.

故半徑為 $\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$.

B. 出處：選修數甲(上)　第一章 機率與統計

難易度：中

解：由二項分布，得 $p_k=C_k^9p^k(1-p)^{9-k}$.

因為 $p_4+p_5=\frac{45}{8}p_6$，所以

$C_4^9p^4(1-p)^5+C_5^9p^5(1-p)^4=\frac{45}{8}C_6^9p^6(1-p)^3$.

兩邊同除 $p^4(1-p)^3$，得 $C_4^9(1-p)^2+C_5^9p(1-p)=\frac{45}{8}C_6^9p^2$

$\Rightarrow 126(1-p)^2+126p(1-p)=\frac{45}{8}\times 84p^2$

$\Rightarrow (1-p)^2+p(1-p)=\frac{15}{4}p^2$

$\Rightarrow 15p^2+4p-4=0$.

解得 $p=\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{3}$（不合）.

故期望值等於 $np=9\times\frac{2}{5}=\frac{18}{5}$.

C. 出處：第三冊　第一章 三角

難易度：中

解：利用正弦定理，得 $\frac{5}{\sin\angle ADB}=2\times\frac{7}{2}\Rightarrow \sin\angle ADB=\frac{5}{7}$.

再利用正弦定理，得 $\frac{\overline{CD}}{\sin\angle CAD}=2\times\frac{7}{2}\Rightarrow \overline{CD}=7\sin\angle CAD$.

因為 $\sin\angle CAD=\sin(90^\circ-\angle ADB)=\cos\angle ADB=\frac{2\sqrt{6}}{7}$,

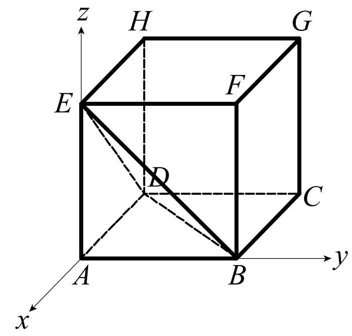
所以 $\overline{CD}=7\times\frac{2\sqrt{6}}{7}=2\sqrt{6}$.

第貳部分：非選擇題

一、出處：第四冊　第二章 空間中的平面與直線

難易度：中

解：(1) 設正立方體的邊長為 1，並將其放在空間坐標中，如圖所示，其中



$A(0,0,0),B(0,1,0),D(-1,0,0),E(0,0,1),G(-1,1,1)$.

由截距式，得平面 BDE 的方程式為

$\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \Rightarrow x-y-z+1=0$.

利用公式，得點 A 到平面 BDE 的距離為

$\frac{|0-0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又因為 $\overline{AG}=\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$，所以點 A 到平面 BDE 的距離是 $\frac{1}{3}\times\overline{AG}$.

(2) 因為向量 $\overrightarrow{AG}=(-1,1,1)$ 與平面 $BDE: x-y-z+1=0$ 的法向量為 $\overrightarrow{n}=(1,-1,-1)$ 平行，

所以 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 垂直 .

(3) 利用公式，得點 A 到平面 BDE 的距離為 $\frac{|2\times2+2\times2-6+7|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{9}{3}=3$.

(4) 因為平面 BDE 的法向量 $(2,2,-1)$ 平行直線 AG，所以直線 AG 參數式為

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=2+2t \quad (\ t\in\mathbb{R}\ ). \\ z=6-t \end{cases}$$

代入平面 $BDE: 2x+2y-z=-7$，得 $2(2+2t)+2(2+2t)-(6-t)=-7 \Rightarrow 9t+2=-7$，

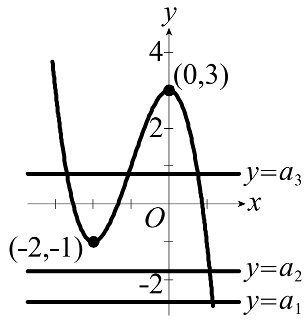
解得 $t=-1$，即直線 AG 與平面 BDE 的交點為 $P(0,0,7)$.

因為 $\overline{AG}=3\overline{AP}$，所以 $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AP}=3(-2,-2,1)=(-6,-6,3)$.

故 G 點的坐標為 $(-4,-4,9)$.

二、出處：選修數甲(下)　第二章 多項式函數的微積分

難易度：難



解：(1) 函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=-3x^2-6x=-3x(x+2)$.

當 $f'(x)=0$ 時，解得 $x=-2,0$.

將 $f'(x)$ 的正、負整理成下表：

x		-2		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

畫函數 $y=f(x)$ 的圖形如右，其中極值所在的點為 $(-2,-1)$ 與 $(0,3)$.

(2) 因為

$f(-3)f(-2)=3\times(-1)=-3<0$， $f(-2)f(-1)=(-1)\times 1=-1<0$，

$f(0)f(1)=3\times(-1)=-3<0$，

所以由勘根定理得知， a_1,a_2,a_3 分別在相鄰整數 $(-3,-2),(-2,-1),(0,1)$ 之間 .

(3) 如圖，因為直線 $y=a_1,y=a_2,y=a_3$ 分別與 $y=f(x)$ 的圖形有 $1,1,3$ 個交點，

所以方程式 $f(x)=a_1,f(x)=a_2,f(x)=a_3$ 分別有 $1,1,3$ 個相異實根 .

(4) 根據合成函數的定義，得 $f(f(x))=0\Rightarrow-(f(x))^3-3(f(x))^2+3=0$，

由(2)得知，此方程式的三個實根為 $f(x)=a_1,a_2,a_3$.

再由(3)得知，方程式 $f(f(x))=0$ 共有 $1+1+3=5$ 個相異實根 .