

107 年度數學乙指定科目考試試卷

總 分

_____年 _____班 學號_____ 姓名_____

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 74 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

- () 1. 已知實係數多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 14x + 13$ 的餘式為 $ax + b$ ，且 $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 4，則 $a + b$ 的值為何？
(1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 4 (5) 13 .
- () 2. 有一配置一輛運貨車之快遞公司，要將貨品運送至 A, B, C, D, E 五個不同地點。已知這五個地點只有下列連絡道路，其所需時間如下表。例如：路線 $A \leftrightarrow B$ 表示可以由 A 站到 B 站，也可以由 B 站到 A 站，行車時間皆為 1 小時。
- | 路線 | $A \leftrightarrow B$ | $A \leftrightarrow C$ | $A \leftrightarrow D$ | $B \leftrightarrow E$ | $C \leftrightarrow D$ | $C \leftrightarrow E$ | $D \leftrightarrow E$ |
|------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 行車時間 | 1 小時 | 1 小時 | 2 小時 | 5 小時 | 1 小時 | 1 小時 | 1 小時 |
- 今有配送任務必須從 A 站出發，最後停留在 E 站，每一站至少經過一次，且路線可以重複，試問至少要花多少小時才能完成任務？
(1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7 (5) 8 .
- () 3. 設 $a < b < 2^{10}$ ，其中 $\log a = 3$ 。已知利用 $\log a$ 、 $\log(2^{10})$ 的值與內插法求得 $\log b$ 的近似值為 3.0025，試問 b 的值最接近下列哪一個選項？（註： $\log 2 \approx 0.3010$ ）
(1) 1002 (2) 1006 (3) 1010 (4) 1014 (5) 1018 .

二、多選題（占 32 分）

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

() 4. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ 、 $\langle d_n \rangle$ 、 $\langle e_n \rangle$ 定義如下：

$$a_n = (-1)^n; \quad b_n = a_n + a_{n+1}; \quad c_n = \left(\frac{-\sqrt{10}}{3} \right)^n; \quad d_n = \frac{1}{3}c_n; \quad e_n = \frac{1}{c_n}; \quad \text{其中 } n = 1, 2, 3, \dots$$

下列選項中，試選出會收斂的無窮級數。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} e_n$$

() 5. 設 $2^x = 3$ ， $3^y = 4$ 。試選出正確的選項。（註： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ）

$$(1) x < 2 \quad (2) y > \frac{3}{2} \quad (3) x < y \quad (4) xy = 2 \quad (5) x + y < 2\sqrt{2}$$

() 6. 某經銷商對甲、乙兩款血壓計作品管檢驗，發現從甲款每一批中抽出一個血壓計，其誤差超過 3mmHg（毫米汞柱）及超過 6mmHg 的機率分別為 0.32 及 0.1。從乙款每一批中抽出一個血壓計，其誤差超過 3mmHg 及超過 6mmHg 的機率分別為 0.16 及 0.05。在甲、乙兩款的檢驗是獨立事件的情況下，試選出正確的選項。

- (1) 從甲款中抽出一個血壓計，其誤差超過 3mmHg 但不超過 6mmHg 的機率大於 0.2
- (2) 若從待檢驗的甲款血壓計中連續抽兩次，每次抽一個血壓計檢驗後放回，假設這兩次的檢驗是獨立事件，其誤差依次為不超過 3mmHg 及超過 6mmHg 的機率為 0.136
- (3) 從甲、乙兩款中各抽出一個血壓計，其誤差都不超過 3mmHg 的機率大於 0.7
- (4) 從甲、乙兩款中各抽出一個血壓計，至少有一個誤差不超過 3mmHg 的機率大於 0.84
- (5) 從甲、乙兩款中各抽出一個血壓計，兩者誤差的平均超過 3mmHg 的機率小於 0.32×0.16 。

() 7. 保險公司把投保竊盜險的住宅分為 A、B 兩級，其所占比率分別為 60%、40%。過去一年 A、B 兩級住宅遭竊的比率分別為 15%、5%。據此，公司推估未來一年 A、B 兩級住宅被竊的機率分別為 0.15、0.05。今 A 級住宅中的 20% 經過改善，重新推估這些改善過的住宅未來一年被竊的機率會降為 0.03；而其他住宅被竊機率不變。根據以上資料，試選出正確的選項。

- (1) 全體投保的住宅中，過去一年遭竊的比率為 12%
- (2) 過去一年遭竊的投保住宅中，A 級所占的比率超過 90%
- (3) 推估未來一年，改善過的 A 級住宅的被竊機率為原來的 $\frac{1}{5}$
- (4) 經改善後，推估未來一年被竊機率，全體投保的 A 級住宅會小於全體投保的 B 級住宅
- (5) 經改善後，推估未來一年全體投保的住宅被竊機率小於 0.11。

三、選填題（占 24 分）

說明：1. 第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(8-16)。

2. 每題完全答對給 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 地方上張安與李平兩位角逐鄉長，結果張安得票率 55%，李平得票率 45%，由張安勝選。民調機構預測，如果下任鄉長仍由張安與李平兩人競選，選民相同且每一張票都是有效票，則本屆支持張安的選民將有 25% 倒向支持李平，而本屆支持李平的選民將有 10% 倒向支持張安。若描述上述現象的轉移矩陣為 A ，則行列式 $\det A$ 的絕對值為 $\frac{\textcircled{8}\textcircled{9}}{\textcircled{10}\textcircled{11}}$ 。（請化為最簡分數）

B. 在坐標平面上的 $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{AB} 的中點，且點 E 在射線 \overrightarrow{AC} 上，滿足 $\overline{AE} = 3\overline{AC}$ 。若向量內積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 15$ ，則向量內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \underline{\textcircled{12}\textcircled{13}}$ 。

C. 有 100 元、200 元、300 元、400 元的紅包袋各一個，由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 個紅包袋，抽取後不放回。若每個紅包袋被抽取的機會都相等，則甲、乙、丙三人紅包金額總和的期望值為 $\underline{\textcircled{14}\textcircled{15}\textcircled{16}}$ 元。

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一、已知實係數二次多項式函數 $y = f(x)$ 滿足 $f(3) = f(-7)$ 。試回答下列問題。

(1) 寫出 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸方程式。（3 分）

(2) 若 $f(x) = a(x-k)^2 + b$ ，且 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於相異兩點，試判斷 ab 乘積的值為正或負，並請說明理由。（4 分）

(3) 若方程式 $f(x) = 0$ 有相異實根，試證兩根之積小於 4。（6 分）

二、某車商代理進口兩廠牌汽車，甲廠牌汽車每台成本 100 萬元，此次進口上限 20 台，售出一台淨利潤 11 萬元；乙廠牌汽車每台成本 120 萬元，此次進口上限 30 台，售出一台淨利潤 12 萬元。今車商準備 4400 萬元作為此次汽車進口成本，且保證所進口的車輛必定全部售完。試回答下列問題。

(1) 寫出此問題的線性規劃不等式及目標函數。（4 分）

(2) 在坐標平面上畫出可行解區域，並以斜線標示該區域。（3 分）

(3) 試問車商此次應進口甲、乙兩廠牌汽車各多少台，才能獲得最大利潤？又最大利潤是多少？（6 分）

試題大剖析

桃園高中／陳清風

答案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4) 2. (2) 3. (2)

二、多選題

4. (2)(5) 5. (1)(4) 6. (1)(4) 7. (3)(5)

三、選填題

A. $\frac{13}{20}$ B. 90 C. 750

第貳部分：非選擇題

一、(1) $x = -2$ (2) 負 (3) 見解析

二、(1) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 30 \\ 5x + 6y \leq 220 \\ x, y \text{ 為非負整數} \end{cases}$, 目標函數 $11x + 12y$ (2) 見解析 (3) 甲 20 台, 乙 20 台, 最大利潤 460 萬元

解析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 出處：第一冊 第三章 多項式

難易度：易

解：設 $f(x) = (x^2 - 14x + 13)q(x) + (ax + b)$, 其中 $q(x)$ 為商式 .

因為 $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 4 , 所以由餘式定理, 得知 $f(1) = 4$.

因此, $f(1) = 0 \times q(1) + (a + b) = 4$, 即 $a + b = 4$.

故選(4) .

2. 出處：第二冊 第二章 排列、組合

難易度：易

解：依題意, 畫示意圖如右 . 路線

$B \leftrightarrow E$ 要 5 小時;

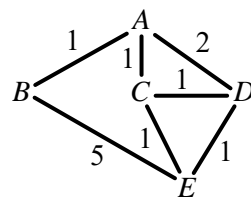
$A \leftrightarrow D$ 要 2 小時,

太花時間, 捨去不走, 可得最節省時間的路線為

$A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$

共花 5 小時完成任務 .

故選(2) .



3. 出處：第一冊 第三章 指數、對數函數

難易度：易

解：利用內插法，得

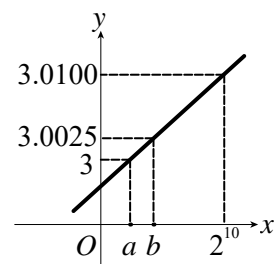
$$\frac{2^{10} - b}{b - a} = \frac{3.0100 - 3.0025}{3.0025 - 3} = \frac{3}{1},$$

$$\text{即 } 2^{10} - b = 3b - 3a.$$

移項並將 $a = 10^3 = 1000$, $2^{10} = 1024$ 代入，得

$$b = \frac{2^{10} + 3a}{4} = \frac{1024 + 3000}{4} = 1006.$$

故選(2)。



二、多選題

4. 出處：選修數乙(下) 第一章 極限與函數

難易度：中

解：(1) 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots$ 是公比 $r = -1$ 的無窮等比級數。

因為 $r = -1$ 不滿足 $-1 < r < 1$ ，所以不收斂。

(2) 因為 $b_n = a_n + a_{n+1} = (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$ ，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

為收斂級數。

(3) 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^3 + \dots$ 是公比 $r = -\frac{\sqrt{10}}{3}$ 的無窮等比級數。

因為 $r < -1$ 不滿足 $-1 < r < 1$ ，所以不收斂。

(4) 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^3 + \dots$ 是公比 $r = -\frac{\sqrt{10}}{3}$ 的無窮等比級數。

因為 $r < -1$ 不滿足 $-1 < r < 1$ ，所以不收斂。

(5) 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} e_n = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^3 + \dots$ 是公比 $r = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ 的無窮等比級數。

因為 r 滿足 $-1 < r < 1$ ，所以收斂。

故選(2)(5)。

5. 出處：第一冊 第三章 指數、對數函數

難易度：中

解：(1) 因為 $2^x = 3$ ，所以 $x = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0.4771}{0.3010} \approx 1.59 < 2$ 。

(2) 因為 $3^y = 4$ ，所以 $y = \log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{2 \log 2}{\log 3} \approx \frac{0.6020}{0.4771} \approx 1.26 < \frac{3}{2}$ 。

(3) 由(1)與(2)得， $x > y$ 。

$$(4) xy = \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{2 \log 2}{\log 3} = 2 .$$

(5) 因為 $x + y \approx 1.59 + 1.26 = 2.85$, $2\sqrt{2} \approx 2 \times 1.414 = 2.828$, 所以 $x + y > 2\sqrt{2}$.

[另解]利用算幾不等式及 $xy = 2$, 得

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow x+y \geq 2\sqrt{2} .$$

故選(1)(4) .

6. 出處：選修數學乙(上) 第一章 機率與統計

難易度：中

解：(1) 機率為 $0.32 - 0.1 = 0.22 > 0.2$.

(2) 機率為 $(1 - 0.32) \times 0.1 = 0.068$.

(3) 機率為 $(1 - 0.32) \times (1 - 0.16) = 0.68 \times 0.84 = 0.5712 < 0.7$.

(4) 機率為 $1 - P(\text{兩個誤差都超過} 3 \text{ mmHg}) = 1 - 0.32 \times 0.16 = 0.9488 > 0.84$.

(5) $P(\text{兩個誤差的平均超過} 3 \text{ mmHg}) > P(\text{兩個誤差都超過} 3 \text{ mmHg}) = 0.32 \times 0.16$.

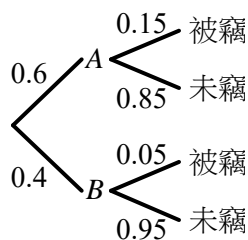
故選(1)(4) .

7. 出處：第二冊 第三章 機率

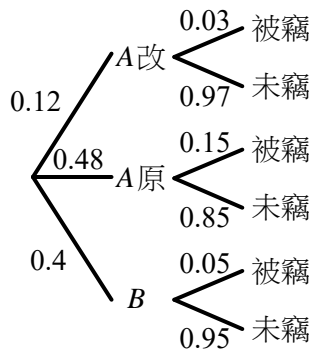
難易度：難

解：依題意畫樹狀圖如下：

(i)過去一年



(ii)未來一年



(1) 比率為 $0.6 \times 0.15 + 0.4 \times 0.05 = 0.11 = 11\%$.

(2) 由(1)得, A所占的比率為 $\frac{0.6 \times 0.15}{0.11} = \frac{9}{11} < 90\%$.

(3) 推估改善過的 A 被竊的機率為原來的 $\frac{0.03}{0.15} = \frac{1}{5}$.

(4) 推估未來一年,

全體 A 被竊的機率為 $0.2 \times 0.03 + 0.8 \times 0.15 = 0.126$,

全體 B 被竊的機率為 0.05

因此, 全體 A 被竊的機率大於全體 B 被竊的機率 .

(5) 由(4)得, 全體住宅被竊的機率為 $0.12 \times 0.03 + 0.48 \times 0.15 + 0.4 \times 0.05 = 0.0956 < 0.11$.

故選(3)(5) .

三、選填題

A. 出處：第四冊 第三章 矩陣

難易度：易

解：依題意畫樹狀圖如右．因為下任的得票率分布為

$$\begin{bmatrix} 0.55 \times 0.75 + 0.45 \times 0.1 \\ 0.55 \times 0.25 + 0.45 \times 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.1 \\ 0.25 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{bmatrix},$$

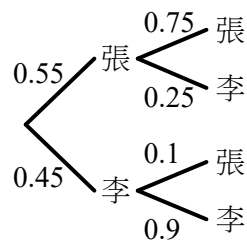
所以轉移矩陣為

$$A = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.1 \\ 0.25 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

得行列式

$$\det A = \begin{vmatrix} 0.75 & 0.1 \\ 0.25 & 0.9 \end{vmatrix} = 0.75 \times 0.9 - 0.25 \times 0.1 = 0.65 = \frac{13}{20},$$

故 $\det A$ 的絕對值為 $\frac{13}{20}$.

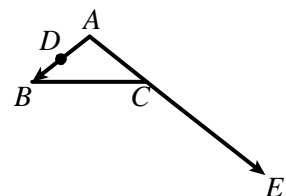


B. 出處：第三冊 第三章 平面向量

難易度：易

解：因為 $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = 15$ ，所以

$$\vec{AB} \cdot \vec{AE} = 2\vec{AD} \cdot 3\vec{AC} = 6\vec{AD} \cdot \vec{AC} = 6 \times 15 = 90.$$



C. 出處：選修數乙(上) 第一章 機率與統計

難易度：中

解：令隨機變數 X 為三人紅包金額總和，則 X 可能取值有

$$100 + 200 + 300 = 600, 100 + 200 + 400 = 700,$$

$$100 + 300 + 400 = 800, 200 + 300 + 400 = 900,$$

四種結果，且其機率相等． X 的取值與機率分布如下：

X	600	700	800	900
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

故期望值

$$E(X) = 600 \times \frac{1}{4} + 700 \times \frac{1}{4} + 800 \times \frac{1}{4} + 900 \times \frac{1}{4} = \frac{3000}{4} = 750 \text{ (元)}$$

第貳部分：非選擇題

一、出處：第一冊 第二章 多項式

難易度：中

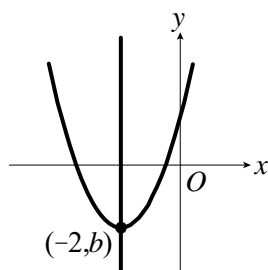
解：(1) 因為 $f(3) = f(-7)$ ，所以由對稱性及 $\frac{3+(-7)}{2} = -2$ ，得對稱軸方程式為 $x = -2$.

(2) 因為對稱軸為 $x = -2$ ，且 $f(x) = a(x-k)^2 + b$ ，所以

$$f(x) = a(x+2)^2 + b, \text{ 且頂點為 } (-2, b).$$

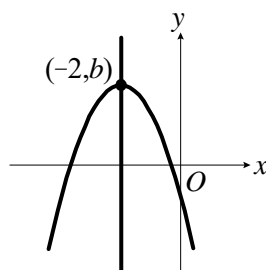
函數 $f(x)$ 的圖形有底下兩種情形：

(i) 開口向上



(此時 $a > 0, b < 0$)

(ii) 開口向下



(此時 $a < 0, b > 0$)

綜合(i)(ii)，得 $ab < 0$. 故 ab 為負 .

(3) 由(2)，得 $f(x) = a(x+2)^2 + b = ax^2 + 4ax + (4a+b)$.

令 $f(x) = 0$ 的兩個實根為 α, β ，則由根與系數的關係，得

$$\alpha\beta = \frac{4a+b}{a} = 4 + \frac{b}{a} .$$

因為 $ab < 0$ ，所以 $\frac{b}{a} < 0$. 故 $\alpha\beta < 4$ ，即兩根之積小於 4 .

二、出處：第三冊 第二章 直線與圓

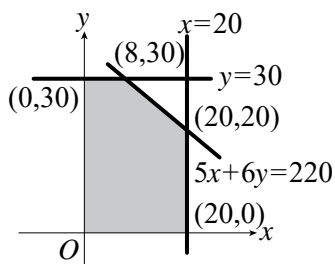
難易度：中

解：(1) 設甲進口 x 台，乙進口 y 台 . 依題意，得不等式

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 30 \\ 100x + 120y \leq 4400 \\ x, y \text{ 為非負整數} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 30 \\ 5x + 6y \leq 220 \\ x, y \text{ 為非負整數} \end{cases} ,$$

目標函數為 $11x + 12y$.

(2) 可行解區域，如下圖：



(3) 利用頂點法：

(x, y)	$(0, 0)$	$(20, 0)$	$(20, 20)$	$(8, 30)$	$(0, 30)$
$11x + 12y$	0	220	460	448	360

當 $x = 20$ ， $y = 20$ 時， $11x + 12y$ 有最大值 460 .

故甲進口 20 台，乙進口 20 台，獲利最大，最大利潤為 460 萬元 .