106年 四技二專

統一入學測驗

數學（C）

一、試題分析

106 年統測數學 C 是一份四平八穩的試卷。如果與 105 年的繁瑣型來比較，106 年的題目略為回歸到 103、104 年的簡易型，其難易度大致非常平均，大都是中等上下的題目。當然 106 年的試卷也有搭配一些簡易、困難的題目，但不是送分題或繁瑣計算的題目，這樣可以讓不同程度的學生有所區別。這次各單元的試題順序，延續 105 年的處理模式，完全依照「99 課綱」的學習時間先後來安排，讓考生有很好的思考依循。另外，106 年首次提供參考公式，相信可以給考生適當的輔助。

106 年試卷的其他特色如下：

1. 應用題：第 16、18、20 題，以生活化的敘述融合數學觀念，這是切合實際應用的。
2. 考古題：106 年出現了很多類似的考古題，與這幾年統測 C 卷的題目來做對照，有點相似卻有調整敘述的感覺，都是很好把握的題目。如下：

106C	第 1 題	第 5 題	第 8 題	第 9 題	第 14 題	第 19 題	第 22 題
類似題號	103-7	104-24	103-6	105-9	105-15	105-19	102-16

綜合上述，106 年的考生的得分將會回歸正常的狀態，對於高、中、低程度的學生會有適當的鑑別度，而以往常見的圖形題、定義題、跨單元試題，此次都沒出現，實在有點可惜。105 年八月技專入學測驗中心曾召開統測試題研討會，與會老師的建議也開始被部分採納（如：參考公式、徵選命題），期待 107 年的試卷可以持續進步。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	數列與級數	1
三角函數	2	指數與對數及其運算	2
三角函數的應用	2	排列組合	2
向量	1	機率與統計	2
式的運算	1	圓	1
聯立方程式	3	二次曲線	1
複數	1	微分	3
不等式及其應用	1	積分	1

106 學年度四技二專統一入學測驗

數學（C）

總　　分

數學 C 參考公式及可能用到的數值

1. 三角函數的和角公式：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$。
2. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 為外接圓半徑。
3. $\triangle ABC$ 的面積$=\dfrac{1}{2}ab\sin C$。
4. $\triangle ABC$ 的面積$=sr$，其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，r 為內切圓半徑。
5. 若 α、β 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則 $\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$。
6. 若一複數 z，且其極式為 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $r=|z|$，則
   $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，其中 n 為正整數。
7. 對數值：$\log_{10}2\approx0.3010$，$\log_{10}3\approx0.4771$，$\log_{10}5\approx0.6990$，$\log_{10}7\approx0.8451$。
8. 雙曲線方程式：
   (1) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，其正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}$。
   (2) $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$，其正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}$。
9. 設有一組母體資料 $x_1,x_2,\cdots,x_N$，其算術平均數為 μ，則母體標準差為
   $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}}$。
10. 設有一組抽樣資料 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其算術平均數為 $\overline{x}$，則樣本標準差為
    $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}$。

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 設直線 $2x+y=11$ 與拋物線 $y=x^2-4$ 在第二象限的交點為 A，在第一象限的交點為 B，若線段 $\overline{AB}$ 上一點 P 滿足 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$，則 P 點坐標為何？
(A) $\left(\frac{1}{3},\frac{31}{3}\right)$　(B) $(-2,26)$　(C) $(-1,13)$　(D) $\left(\frac{-7}{3},\frac{47}{3}\right)$。

(　　) 2. 若 $\tan\theta\csc\theta=-1+6\cos\theta$，其中 θ 為第三象限角，則 $\tan\theta=$
(A) $2\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $-\sqrt{3}$　(D) $-2\sqrt{2}$。

(　　) 3. 求 $\sin^2 18°+\sin^2 36°+\sin^2 54°+\sin^2 72°+\sin^2 90°=$
(A) 2　(B) 2.5　(C) 3　(D) 3.5。

(　　) 4. 若 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，則 $\tan 2\theta=$
(A) $2-\sqrt{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\sqrt{3}$。

(　　) 5. 設三角形的三邊長為 7、24、25，其內切圓半徑為 r，外接圓半徑為 R，求 $\frac{r}{R}=$
(A) 0.12　(B) 0.24　(C) 0.25　(D) 0.48。

(　　) 6. 已知 $\left|\overrightarrow{a}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-2$。若 $t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直，其中 t 為實數，則 $t=$
(A) $\frac{7}{10}$　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$。

(　　) 7. 求方程式 $\frac{-x^2}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}$ 所有解的和為何？
(A) -3　(B) -2　(C) -1　(D) 0。

(　　) 8. 設 x、y、z 為整數，且 $2|x+y|+3|x-y-4|+5|2x+3y-z|=4$，則 z 可為下列何者？
(A) 0　(B) 3　(C) 5　(D) 11。

(　　) 9. 設 t 為實數，且三元一次聯立方程式 $\begin{cases}(t+1)x+(t-1)z=1\\(t+1)y+z=3\\(t+1)y+tz=5\end{cases}$ 無解，則 t 可為下列何者？
(A) -2　(B) 0　(C) 1　(D) 2。

(　　) 10. 求三階行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 10 & 121 \end{vmatrix}=0$所有解的和為何？

(A)11　(B)$\dfrac{34}{3}$　(C)12　(D)$\dfrac{40}{3}$。

(　　) 11. 設$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則$\dfrac{\omega^{107}}{\omega+1}=$

(A)-1　(B)$-\omega$　(C)ω^2　(D)1。

(　　) 12. 設a、b為實數，且不等式$-x^2+6x+b>0$與不等式$|x+a|<5$的解完全相同，則$a+b=$

(A)-13　(B)-7　(C)7　(D)13。

(　　) 13. 設a、b、c三數成等比數列，且滿足$a+b+c=9$及$a^2+b^2+c^2=189$，則等比中項$b=$

(A)-6　(B)-2　(C)$\dfrac{1}{2}$　(D)6。

(　　) 14. 設$a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$c=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$，則$a$、$b$、$c$大小順序為何？

(A)$a>c>b$　(B)$a>b>c$　(C)$c>a>b$　(D)$b>c>a$。

(　　) 15. 已知$\log_{10}3=0.4771$且$x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$，其中$\log_{10}x$的首數為$m$，而尾數的小數點後第一位數字為$n$，則$m+n=$

(A)-9　(B)-7　(C)-6　(D)-5。

(　　) 16. 將繞口令「四十個十四　十四個四十」中的文字全取排成一列，且其中四個「十」須相鄰排在一起，其排法有幾種？

(A)70　(B)105　(C)135　(D)210。

(　　) 17. 設$(x-2y)^4$與$(x-2y)^5$的展開式中所有項的係數和分別為a、b，則$\dfrac{b}{a}=$

(A)-2　(B)-1　(C)$\dfrac{1}{2}$　(D)2。

(　　) 18. 設袋子中分別有紅球、藍球、綠球各三個，現從中任取2個球，若每拿到一個紅球，一個藍球及一個綠球分別可得5千元，3千元及1千元獎金，求獎金的期望值為何？

(A)3千元　(B)4千元　(C)5千元　(D)6千元。

(　　) 19. 有一組資料：0、3、6、9、12、15，設其平均值與標準差分別為a、b，則關於另一組資料：-1、-2、-3、-4、-5、-6的平均值與標準差的敘述，何者正確？

(A)平均值為$-3a+1$，標準差為$\dfrac{b}{9}$　(B)平均值為$-\dfrac{a}{3}-1$，標準差為$\dfrac{b}{3}$

(C)平均值為$-3a+1$，標準差為$\dfrac{b}{3}$　(D)平均值為$-\dfrac{a}{3}-1$，標準差為$\dfrac{b}{9}$。

(　　) 20. 設打水漂遊戲中石頭落入水中的漣漪是以圓的形式展現。若某人向河面擲出石頭的方向是沿著直線$y=x-1$行進，下列哪一個圓方程式可為此漣漪的形式？

(A)$x^2-2x+y^2+4y+1=0$　(B)$x^2-4x+y^2-2y+4=0$

(C)$x^2-2x+y^2-4y+4=0$　(D)$x^2-4x+y^2-6y+9=0$。

(　　) 21. 若雙曲線$4x^2-16y^2+4x+16y+1=0$的貫軸長及正焦弦長分別為i、j，則$i+j=$

(A)$\dfrac{3}{2}$　(B)2　(C)$\dfrac{5}{2}$　(D)5。

(　　) 22. 已知a、b為實數，且$f(x)=x^3+ax^2+bx+13$。若$f'(-1)=1$且$f'(0)=2$，則$a+b=$

(A)-1　(B)0　(C)3　(D)4。

(　　) 23. 若$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+3$的相對極大值為$a$，相對極小值為$b$，則$a+b=$

(A)$\dfrac{-27}{2}$　(B)$\dfrac{-3}{2}$　(C)$\dfrac{-1}{2}$　(D)$\dfrac{27}{2}$。

(　　) 24. 設$f(x)$為多項式函數，若$\int_1^3 f(x)dx=1$、$\int_2^5 f(x)dx=4$且$\int_2^3 f(x)dx=2$，則$\int_1^5 f(x)dx=$

(A)1　(B)3　(C)5　(D)7。

(　　) 25. 若$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & ，x<-1 \\ 2 & ，x=-1 \\ 6-3x^2 & ，x>-1 \end{cases}$，則$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3。

106 年統一入學測驗 數學(C)

答 案

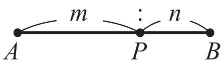
1.A	2.A	3.C	4.C	5.B	6.A	7.C	8.B	9.C	10.D
11.A	12.D	13.A	14.C	15.C	16.B	17.B	18.D	19.B	20.B
21.D	22.D	23.C	24.B	25.D					

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 106 年 5 月 8 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

若 P 點在線段 $\overline{AB}$ 上，



且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，

則 $P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

即 $P=\dfrac{mB+nA}{m+n}$

解析

(1) 先求交點 A、B：

直線 $2x+y=11 \quad \Rightarrow \quad y=-2x+11$

而拋物線 $y=x^2-4$

令 $x^2-4=-2x+11$

$\Rightarrow \quad x^2+2x-15=0$

$\Rightarrow \quad (x+5)(x-3)=0$

$\Rightarrow \quad x=-5$ 或 3

當 $x=-5$ 時，$y=-2\times(-5)+11=21$

當 $x=3$ 時，$y=-2\times3+11=5$

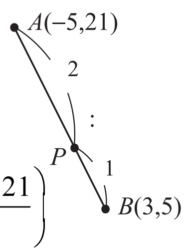
$\because$ 交點 A 在第二象限，

交點 B 在第一象限

$\therefore$ 點 A 的坐標為 $(-5,21)$，

點 B 的坐標為 $(3,5)$

(2) 求線段 $\overline{AB}$ 上的點 P：



$\because \quad \overline{AP}:\overline{BP}=2:1$

$\therefore \quad P$ 點坐標為

$\left(\dfrac{2\times3+1\times(-5)}{2+1},\dfrac{2\times5+1\times21}{2+1}\right)$

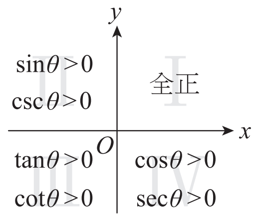
$=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{31}{3}\right)$

2. 技巧與分析

(1) 商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) 倒數關係：$\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

(3) 三角函數值的正負：



解析

$\tan\theta\csc\theta=-1+6\cos\theta$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\dfrac{1}{\sin\theta}=-1+6\cos\theta$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\cos\theta}=-1+6\cos\theta$

$\overset{\times\cos\theta}{\Rightarrow} \quad 1=-\cos\theta+6\cos^2\theta$

$\Rightarrow \quad 6\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

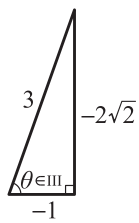
$\Rightarrow \quad (3\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$

$\Rightarrow \quad \cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{1}{2}$

$\because \quad \theta$ 為第三象限角

$\therefore \quad \cos\theta<0$

故 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$



用 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ 來作直角三角形

取斜邊 $=3$，鄰邊 $=-1$

則對邊 $=-\sqrt{3^2-(-1)^2}=-2\sqrt{2}$

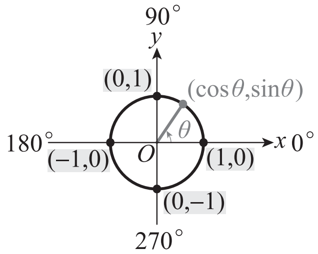
因此 $\tan\theta=\dfrac{-2\sqrt{2}}{-1}=2\sqrt{2}$

3. 技巧與分析

(1) 餘角關係：$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

(2) 平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(3) 象限角的三角函數值：



解析

$\sin 54^\circ=\sin(90^\circ-36^\circ)=\cos 36^\circ$

$\sin 72^\circ=\sin(90^\circ-18^\circ)=\cos 18^\circ$

$\sin 90^\circ=1$

所求

$=\sin^2 18^\circ+\sin^2 36^\circ+\cos^2 36^\circ+\cos^2 18^\circ+1^2$

$=(\sin^2 18^\circ+\cos^2 18^\circ)+(\sin^2 36^\circ+\cos^2 36^\circ)+1$

$=1+1+1=3$

4. 技巧與分析

15° 的三角函數值：$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

解析

$\because\quad \sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 且 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

而 $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\quad \theta=15^\circ$

故 $\tan 2\theta=\tan(2\times 15^\circ)=\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5. 技巧與分析

(1) $\triangle ABC$ 的正弦定理：

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，

其中 R 為外接圓半徑

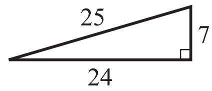
(2) $\triangle ABC$ 的面積 $=rs$，

其中 r 為內切圓半徑，

$s=\dfrac{1}{2}\times(a+b+c)$

解析

(1) 三角形的面積：



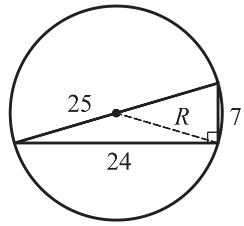
$\because\quad 7^2+24^2=25^2$

$\therefore\quad$ 此三角形為直角三角形

面積為 $\dfrac{1}{2}\times 24\times 7=84$

(2) 三角形的外接圓半徑 R：

由正弦定理可知：



$\dfrac{25}{\sin 90^\circ}=2R$

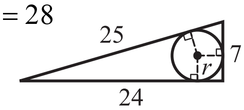
$\Rightarrow\quad \dfrac{25}{1}=2R$

$\Rightarrow\quad R=\dfrac{25}{2}$

(3) 三角形的內切圓半徑 r：

令 $s=\dfrac{1}{2}\times(7+24+25)=28$

三角形面積 $=rs$



$\Rightarrow\quad 84=r\times 28\quad\Rightarrow\quad r=3$

由(2)和(3)可知：

$\dfrac{r}{R}=\dfrac{3}{\frac{25}{2}}=\dfrac{6}{25}=0.24$

6. 技巧與分析

設兩非零向量 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$：

(1) 若 $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$，則 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

(2) 正定性：$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\left|\overrightarrow{u}\right|^2$

(3) 交換性：$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$

解析

$\because\quad t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直

$\therefore\quad \left(t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=0$

$\Rightarrow\quad t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+(1-t)\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$

$-(1-t)\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}=0$

$\Rightarrow\quad t\left|\overrightarrow{a}\right|^2\underline{-t\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)+(1-t)\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)}$

$-(1-t)\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$

$$\Rightarrow\quad t\left|\overrightarrow{a}\right|^2+(1-2t)\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)-(1-t)\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$$

$$\Rightarrow\quad t\times 1^2+(1-2t)\times(-2)-(1-t)\times\left(\sqrt{5}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\quad 10t-7=0\quad\Rightarrow\quad t=\frac{7}{10}$$

7. 技巧與分析

分式方程式的處理原則：

(1) 同乘各分母的最低公倍式之後，再當作 n 次方程式來求解

(2) 若所求的解會使分母的值為 0，則必須剔除，其餘的才是方程式的解

解析

方程式的分母 x^2-4 、 $x+2$ 、 $x-2$ 的最低公倍式為 $(x+2)(x-2)=x^2-4$

方程式的左、右兩側同乘 $(x+2)(x-2)$ ，得

$-x^2=1\times(x-2)+2\times(x+2)$

$\Rightarrow\quad x^2+3x+2=0$

$\Rightarrow\quad (x+1)(x+2)=0$

$\Rightarrow\quad x=-1$ 或 -2

(1) 當 $x=-1$ 時，各分母的值 $\neq 0$

(2) 當 $x=-2$ 時，分母 $x^2-4=0$ ，應剔除

由(1)和(2)可知：方程式的解為 -1

故所有解的和也是 -1

8. 技巧與分析

(1) 設 x 、 y 為整數，則 $x\pm y$ 也是整數

(2) 利用加減消去法解三元一次方程組

解析

$\because\quad x$ 、 y 、 z 為整數

$\therefore\quad x+y$ 、 $x-y-4$ 、 $2x+3y-z$ 也是整數

$2|x+y|+3|x-y-4|+5|2x+3y-z|=4$

而 $2\times\underset{\sim}{2}+3\times\underset{\sim}{0}+5\times\underset{\sim}{0}=4$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}|x+y|=2\\|x-y-4|=0\\|2x+3y-z|=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}x+y=\pm 2\\x-y-4=0\\2x+3y-z=0\end{cases}$$

(1) $\begin{cases}x+y=2\cdots\cdots①\\x-y-4=0\cdots\cdots②\\2x+3y-z=0\cdots\cdots③\end{cases}$

①+② ： $2x-4=2\quad\Rightarrow\quad x=3$

$x=3$ 代入① ： $3+y=2\quad\Rightarrow\quad y=-1$

$x=3$ 、 $y=-1$ 代入③ ：

$2\times 3+3\times(-1)-z=0\quad\Rightarrow\quad z=3$

(2) $\begin{cases}x+y=-2\cdots\cdots④\\x-y-4=0\cdots\cdots⑤\\2x+3y-z=0\cdots\cdots⑥\end{cases}$

④+⑤ ：

$2x-4=-2\quad\Rightarrow\quad 2x=2\quad\Rightarrow\quad x=1$

$x=1$ 代入④ ： $1+y=-2\quad\Rightarrow\quad y=-3$

$x=1$ 、 $y=-3$ 代入⑥ ：

$2\times 1+3\times(-3)-z=0\quad\Rightarrow\quad z=-7$

由(1)和(2)可知： $z=3$ 或 -7

故選(B)

9. 技巧與分析

克拉瑪公式：

設 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ ，

令 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ ，

(1) 當 $\Delta\neq 0$ 時，方程組有一組解

(2) 當 $\Delta=0$ 時，方程組無解或無限多組解

解析

原方程組： $\begin{cases}(t+1)x+0y+(t-1)z=1\\0x+(t+1)y+z=3\\0x+(t+1)y+tz=5\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}t+1&0&t-1\\0&t+1&1\\0&t+1&t\end{vmatrix}\text{（第一、二行提出}(t+1)\text{）}$$

$$=(t+1)^2\times\begin{vmatrix}1&0&t-1\\0&1&1\\0&1&t\end{vmatrix}\text{（第一行降階展開）}$$

$$=(t+1)^2\times 1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&t\end{vmatrix}$$

$=(t+1)^2\times1\times(1\times t-1\times1)=(t+1)^2(t-1)$

若 $\Delta=0$，則 $t=-1$ 或 1

(1) 當 $t=-1$ 時：

原方程組：$\begin{cases}-2z=1\\ z=3\\ -z=5\end{cases}$ 無解

(2) 當 $t=1$ 時：

原方程組：$\begin{cases}2x=1\\ 2y+z=3\\ 2y+z=5\end{cases}$ 無解

由(1)和(2)可知：

當方程組無解時，t 可為 -1 或 1

故選(C)

10. 技巧與分析

(1) $\begin{vmatrix}a&b&c\\p&q&r\\x&y&z\end{vmatrix}$

$=aqz+brx+cpy-xqc-yra-zpb$

加前兩行：

$$\begin{array}{ccccc}a&b&c&a&b\\p&q&r&p&q\\x&y&z&x&y\end{array}\quad\ominus\ \oplus$$

(2) 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根和

為 $-\dfrac{b}{a}$

解析

$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&x&x^2\\1&10&121\end{vmatrix}$

$$\begin{array}{ccccc}1&1&1&1&1\\1&x&x^2&1&x\\1&10&121&1&10\end{array}\quad\ominus\ \oplus$$

$=1\times x\times121+1\times x^2\times1+1\times1\times10$

$\quad-1\times x\times1-10\times x^2\times1-121\times1\times1$

$=121x+x^2+10-x-10x^2-121$

$=-9x^2+120x-111$

則方程式 $-9x^2+120x-111=0$

所有解的和（兩根和）為 $-\dfrac{120}{-9}=\dfrac{40}{3}$

11. 技巧與分析

設 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則

(1) ω 為 $x^3=1$ 的虛根，即 $\omega^3=1$

(2) $\omega^2+\omega+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \omega+1=-\omega^2$

解析

$\because\quad \omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\quad \omega^3=1$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{107}=\omega^{3\times35+2}=\omega^{3\times35}\times\omega^2=\left(\omega^3\right)^{35}\times\omega^2$

$\quad=1^{35}\times\omega^2=\omega^2$

(2) $\omega^2+\omega+1=0 \quad\Rightarrow\quad \omega+1=-\omega^2$

故 $\dfrac{\omega^{107}}{\omega+1}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$

12. **〈法一〉**

技巧與分析

不等式的解：

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha<x<\beta$

其中 $\alpha<\beta$

(2) $|f(x)|<k \quad\Leftrightarrow\quad -k<f(x)<k$

其中 $k>0$

解析

$|x+a|<5$

$\Rightarrow\quad -5<x+a<5$

$\overset{-a}{\Rightarrow}\quad -5-a<x<5-a$

$\Rightarrow\quad [x-(-5-a)][x-(5-a)]<0$

$\Rightarrow\quad x^2+2ax+(a^2-25)<0$

$\overset{\times(-1)}{\Rightarrow}\quad -x^2-2ax+(25-a^2)>0$

與 $-x^2+6x+b>0$ 作係數比較：

則 $-2a=6 \quad\Rightarrow\quad a=-3$

$25-a^2=b \quad\Rightarrow\quad 25-(-3)^2=b$

$\Rightarrow\quad b=16$

故 $a+b=-3+16=13$

〈法二〉

技巧與分析

設 $k>0$，則 $|f(x)|<k \quad \Leftrightarrow \quad [f(x)]^2<k^2$

解析

$|x+a|<5$

$\Rightarrow \quad (x+a)^2<5^2$

$\Rightarrow \quad x^2+2ax+a^2<25$

$\Rightarrow \quad x^2+2ax+(a^2-25)<0$

$\overset{\times(-1)}{\Rightarrow} \quad -x^2-2ax+(25-a^2)>0$

與 $-x^2+6x+b>0$ 作係數比較：

則 $-2a=6 \quad \Rightarrow \quad a=-3$

$25-a^2=b \quad \Rightarrow \quad 25-(-3)^2=b$

$\Rightarrow \quad b=16$

故 $a+b=-3+16=13$

13.〈法一〉

技巧與分析

設 a 、 b 、 c 成等比數列，則 $b^2=ac$

解析

$\because \quad a$ 、 b 、 c 成等比數列

$\therefore \quad b^2=ac$

$a^2+b^2+c^2=189 \quad \Rightarrow \quad a^2+c^2=189-b^2$

$a+b+c=9$

$\Rightarrow \quad a+c=9-b$

$\Rightarrow \quad (a+c)^2=(9-b)^2$

$\Rightarrow \quad a^2+2ac+c^2=81-18b+b^2$

$\Rightarrow \quad \underline{(a^2+c^2)}+2\,\underline{ac}=81-18b+b^2$

$\Rightarrow \quad \underline{(189-b^2)}+2\,\underline{b^2}=81-18b+b^2$

$\Rightarrow \quad 18b=-108$

$\Rightarrow \quad b=-6$

〈法二〉

技巧與分析

(1) 設 a 、 b 、 c 為等比數列，

若公比為 r ，則 $b=ar$ ， $c=ar^2$

(2) $1+r^2+r^4=(1+r+r^2)(1-r+r^2)$

解析

設等比數列 a 、 b 、 c 的公比為 r

則 $b=ar$ ， $c=ar^2$

$a+b+c=9$

$\Rightarrow \quad a+ar+ar^2=9\cdots\cdots①$

$\Rightarrow \quad a(1+r+r^2)=9\cdots\cdots②$

$a^2+b^2+c^2=189$

$\Rightarrow \quad a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=189$

$\Rightarrow \quad a^2+a^2r^2+a^2r^4=189$

$\Rightarrow \quad a^2(1+r^2+r^4)=189\cdots\cdots③$

$\dfrac{③}{②}: \quad \dfrac{a^2(1+r^2+r^4)}{a(1+r+r^2)}=\dfrac{189}{9}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{a^2(1+r+r^2)(1-r+r^2)}{a(1+r+r^2)}=21$

$\Rightarrow \quad a(1-r+r^2)=21$

$\Rightarrow \quad a-ar+ar^2=21\cdots\cdots④$

①−④ ： $2ar=-12 \quad \Rightarrow \quad ar=-6$

$\because \quad b=ar \qquad \therefore \quad b=-6$

14. 技巧與分析

不同底數的指數式之大小關係：

設 a 、 $b>0$ 且 $n>0$ ，

若 $a^n<b^n$ ，則 $a<b$

解析

$$a^6=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^6=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\times 6}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$b^6=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^6=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}\times 6}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

$$c^2=\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}\right]^6=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}\times 6}=\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{1}{6}$$

則 $b^6<a^6<c^6 \quad \Rightarrow \quad b<a<c$

15. 技巧與分析

首數與尾數：

設 $\log_{10}x=n+c$ ， n 為整數且 $0\le c<1$ ，

則 $\log_{10}x$ 的首數為 n ，尾數為 c

解析

$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{20}=\left(3^{-1}\right)^{20}=3^{-1\times 20}=3^{-20}$

$\log_{10}x=\log_{10}3^{-20}=(-20)\times\log_{10}3$

$=(-20)\times 0.4771=-9.542=-10+0.458$

$\log_{10}x$ 的首數 $m=-10$，尾數為 0.458

而尾數的小數點後第一位數字為 n，則 $n=4$

故 $m+n=-10+4=-6$

16. 技巧與分析

(1) 相鄰的排法：讓相鄰的當作一物與他物一起排列，最後再算相鄰物的排法

(2) 有相同物的排列：若 n 個事物可以分成相異的 k 類（同類的事物均相同），第1類有 n_1 個，第2類有 n_2 個，…，第 k 類有 n_k 個，且 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，則排成一列的方法為 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ 個

解析

繞口令的文字有4個「四」、4個「十」、2個「個」

$\boxed{\text{十十十十}}$四四四四個個

(1) 把4個「十」視為1字與4個「四」、2個「個」排列：$\frac{7!}{4!2!}=105$ 種

(2) 4個「十」須相鄰排在一起：1種

由(1)和(2)可知：所求排法有 $105\times 1=105$ 種

17. 技巧與分析

設 $f(x,y)$ 為 x、y 的展開式，其所有項的係數和為 $f(1,1)$，即 $x=1$、$y=1$ 代入 $f(x,y)$

解析

(1) 令 $x=1$、$y=1$ 代入 $(x-2y)^4$：

$(1-2\times 1)^4=(-1)^4=1$

則 $(x-2y)^4$ 的展開式中

所有項係數和為1

(2) 令 $x=1$、$y=1$ 代入 $(x-2y)^5$：

$(1-2\times 1)^5=(-1)^5=-1$

則 $(x-2y)^5$ 的展開式中

所有項係數和為 -1

由(1)和(2)可知：$a=1$，$b=-1$

故 $\frac{b}{a}=\frac{-1}{1}=-1$

18. 技巧與分析

期望值的意義：

(1) 袋中任取1球的期望值可以視為各球獎金的平均值

(2) 當取出1球的獎金期望值為 E 時，則取出 n 個球的獎金期望值為 $n\times E$

解析

袋子中共有 $3\times 3=9$ 個球，總獎金為

$3\times 5000+3\times 3000+3\times 1000=27000$（元）

任取1球的獎金期望值為

$E=\frac{\text{總獎金}}{\text{總球數}}=\frac{27000}{9}=3000$（元）

任取2球的獎金期望值為

$2E=2\times 3000=6000$（元）

19. 技巧與分析

資料的伸縮、平移：

資料數據	平均值	標準差
$\times m$（伸縮）	$\times m$	$\times\lvert m\rvert$
$+n$（平移）	$+n$	不變

解析

令 $S_1=\{0,3,6,9,12,15\}=\{x_k \mid k=1,2,3,4,5,6\}$

則 S_1 的平均值與標準差為 a、b

設題目的另一組資料為 S_2

則 $S_2=\left\{-\frac{1}{3}x_k-1 \,\middle|\, k=1,2,3,4,5,6\right\}$

其平均值為 $-\frac{1}{3}\times a-1=-\frac{a}{3}-1$

標準差為 $\left|-\frac{1}{3}\right|\times b=\frac{b}{3}$

20. 技巧與分析

圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的圓心為

$\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$

解析

∵ 擲出石頭的方向是沿著直線 $y=x-1$

∴ 當圓的圓心在直線上時，則圓可為漣漪

(A) 圓 $x^2-2x+y^2+4y+1=0$

的圓心 $\left(-\frac{-2}{2},-\frac{4}{2}\right)=(1,-2)$

圓心 $(1,-2)$ 代入 $y=x-1$ ：$-2\neq 1-1$

(B) 圓 $x^2-4x+y^2-2y+4=0$

的圓心 $\left(-\frac{-4}{2},-\frac{-2}{2}\right)=(2,1)$

圓心 $(2,1)$ 代入 $y=x-1$ ：$1=2-1$

(C) 圓 $x^2-2x+y^2-4y+4=0$

的圓心 $\left(-\frac{-2}{2},-\frac{-4}{2}\right)=(1,2)$

圓心 $(1,2)$ 代入 $y=x-1$ ：$2\neq 1-1$

(D) 圓 $x^2-4x+y^2-6y+9=0$

的圓心 $\left(-\frac{-4}{2},-\frac{-6}{2}\right)=(2,3)$

圓心 $(2,3)$ 代入 $y=x-1$ ：$3\neq 2-1$

故選(B)

21. 技巧與分析

(1) 雙曲線的一般式配方成標準式

(2) 設雙曲線方程式如下：

① $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

② $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

則貫軸長為 $2a$ ，正焦弦長為 $\frac{2b^2}{a}$

解析

將雙曲線方程式配方成標準式：

$4(x^2+x)-16(y^2-y)=-1$

$$\Rightarrow 4\left(x^2+2\times\frac{1}{2}\times x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$-16\left(y^2-2\times\frac{1}{2}\times y+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$=-1+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-16\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-16\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=-4$$

$$\overset{\div(-4)}{\Rightarrow} -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow 4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{1}=1$$

則 $a^2=\frac{1}{4}$ ，$b^2=1$ $\Rightarrow$ $a=\frac{1}{2}$ ，$b=1$

貫軸長 $i=2a=2\times\frac{1}{2}=1$

正焦弦長 $j=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 1^2}{\frac{1}{2}}=4$

故 $i+j=1+4=5$

22. 技巧與分析

微分公式：

設 k 、 n 為實數，

(1) 若 $f(x)=k$ ，則 $f'(x)=0$

(2) 若 $f(x)=x^n$ ，則 $f'(x)=nx^{n-1}$

(3) 若 $f(x)=k\times p(x)$ ，則 $f'(x)=k\times p'(x)$

(4) 若 $f(x)=p(x)\pm q(x)$ ，

則 $f'(x)=p'(x)\pm q'(x)$

解析

$f(x)=x^3+ax^2+bx+13$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=3\times(-1)^2+2a\times(-1)+b=1$

$\Rightarrow$ $-2a+b=-2$……①

$f'(0)=3\times 0^2+2a\times 0+b=2$ $\Rightarrow$ $b=2$

$b=2$ 代入 ① ：$-2a+2=-2$ $\Rightarrow$ $a=2$

故 $a+b=2+2=4$

23. 技巧與分析

設 $f(x)$ 為多項式函數，

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有極值，則 $f'(a)=0$

(2)

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f(x)$	$\nearrow$	極大值 $f(a)$	$\searrow$
$f'(x)$	+	0	−

(3)

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f(x)$	$\searrow$	極小值 $f(a)$	$\nearrow$
$f'(x)$	−	0	+

解析

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+3$

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x^2-x-2)$

$=3(x+1)(x-2)$

(1) 令 $f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 3(x+1)(x-2)=0$

$\Rightarrow \quad x=-1$ 或 2

$f(-1)=(-1)^3-\frac{3}{2}\times(-1)^2-6\times(-1)+3=\frac{13}{2}$

$f(2)=2^3-\frac{3}{2}\times 2^2-6\times 2+3=-7$

(2) 若 $f'(x)<0 \quad \Rightarrow \quad 3(x+1)(x-2)<0$

$\Rightarrow \quad -1<x<2$

(3) 若 $f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad 3(x+1)(x-2)>0$

$\Rightarrow \quad x<-1$ 或 $x>2$

將(1)、(2)、(3)列表如下：

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$	$\searrow$	-7	$\nearrow$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

故 $f(x)$ 的相對極大值 $a=\frac{13}{2}$，

相對極小值 $b=-7$

因此 $a+b=\frac{13}{2}+(-7)=-\frac{1}{2}$

24. 技巧與分析

若 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 為連續函數，

則 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$，

其中 $a\le c\le b$

解析

$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$

$\Rightarrow \quad 1=\int_1^2 f(x)dx+2$

$\Rightarrow \quad \int_1^2 f(x)dx=-1$

故 $\int_1^5 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$

$=-1+4=3$

25. 技巧與分析

函數的左、右極限：

(1) 當 $x<a$ 且 $x\to a$ 時，$f(x)\to L_1$，

則 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_1$

(2) 當 $x>a$ 且 $x\to a$ 時，$f(x)\to L_2$，

則 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_2$

(3) 若 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$，

則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

(4) 若 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\ne\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，

則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在

解析

(1) 當 $x<-1$ 時，$f(x)=x^2+2$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2+2)=(-1)^2+2=3$

(2) 當 $x>-1$ 時，$f(x)=6-3x^2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(6-3x^2)$

$=6-3\times(-1)^2=3$

由(1)和(2)可知：$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=3$

故 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3$