

數學 (B)

一、試題分析

- 今年考題仍為偏易，且命題順序與四冊章節相同，讓考生在解題過程中，有集中思考方向之優勢。
- 考題著重各章節之基本定義及基礎概念之運算，對於不放棄的考生皆可獲得 60 分以上的機會。
- 此份考題部分強調幾何與代數的結合，如第 2、23 題，皆可用繪圖輕易求出。
- (1) 計算型的題目：
 答案皆調整為整數，大幅降低考生失誤率及提升信心，更能讓學生於計算後，簡易的代回題目驗算確認。
 如第 1、5、8、9、10、12、13、17、24、25 題。
 其中，第 25 題：積分後的反導函數無分數計算。
- (2) 答案為分數的題目：
 為單獨計算或著重概念方向，降低大量化簡通分的運算時間。
 第 3 題： A 、 B 兩點坐標有分數及根號，但是 x 坐標皆相同，讓 \overline{AB} 降為一維距離計算。
 第 6 題：分母為 100 跟 2，通分計算簡易。
 第 19 題：誤差值不須計算，只須了解大於或小於原先誤差即可。
 第 22 題：所求距離（貫軸長及長軸長）皆為標準式中輕易得出，不須運用 $a^2 = b^2 + c^2$ 等換算其他長度。
- 考題不再為死記型單一解法，對於仔細觀察題目式子之學生，可避免冗長之計算。
 第 4 題：利用廣義角畫出三角形求其他三角函數值，易犯正負之錯誤。
 第 7 題：不利用乘法公式提出相同倍數，用常用對數值 0.3010、0.6990，雖可計算出答案，但計算量大。
 第 12 題：直接計算兩個三階行列式值會增加計算量。
 第 24 題：選擇用微分定義也較不妥，式子偏冗長。

6. 對於數值範圍熟稔之同學，可輕易剔除部分選項。

第 4 題： $\sin\theta > 0$ 、 $\cos\theta < 0$ ，角度為第二象限。所求 $\tan\theta + \sec\theta < 0$ ，(C)(D) 剔除。

第 6 題： $0.027^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}} < 1+1=2$ ，(C)(D) 剔除。

第 7 題： $(\log 2)^2 + \log 2 \times \log 5 + \log 5 < 1+1+1=3$ ，(A)(B) 剔除。

第 14 題：主菜有三種選擇非常容易，故答案應為 3 的倍數，(A)(B) 剔除。

第 20 題： $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta < 1 + \sqrt{3} \approx 2.732$ ， $a < 3$ ，(A)(D) 剔除。

值得一提，第 2 題：如果算出 $a=3$ ，則答案僅(A)符合。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	不等式及其應用	1
三角函數	3	排列組合	2
向量	1	機率	2
指數與對數及其運算	2	統計	2
數列與級數	1	三角函數的應用	2
式的運算	2	二次曲線	2
方程式	2	微積分及其應用	2



106 學年度四技二專統一入學測驗

數學 (B)

總	分

數學 B 參考公式

- 三角函數的和角公式： $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ 。
- $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 。

單選題 (每題 4 分，共 100 分)

- () 1. 在坐標平面上，若直線 L 通過兩點 $A(2, a)$ ， $B(a, 5)$ ，且直線 L 的斜率為 2，則 $a =$
(A) -2 (B) 1 (C) 2 (D) 3。
- () 2. 已知 $y = 2\sin x + 1$ ， $0 \leq x \leq 2\pi$ 的圖形與水平線 $y = 1$ 、 $y = 0$ 、 $y = -1$ 的交點個數分別為 a 、 b 、 c ，則下列何者正確？
(A) $a = 3$ 、 $b = 2$ 、 $c = 1$ (B) $a = 2$ 、 $b = 2$ 、 $c = 2$
(C) $a = 2$ 、 $b = 3$ 、 $c = 2$ (D) $a = 1$ 、 $b = 3$ 、 $c = 1$ 。
- () 3. 已知 A 點坐標為 $\left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}\right)$ ， B 點坐標為 $\left(\cos \frac{11\pi}{6}, \sin \frac{11\pi}{6}\right)$ ，則線段 \overline{AB} 的長度為何？
(A) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。
- () 4. 已知 $\sin \theta = \frac{7}{25}$ ， $\cos \theta = \frac{-24}{25}$ ，則 $\tan \theta + \sec \theta =$
(A) $-\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{4}{3}$ 。
- () 5. 已知坐標平面上三點 $A(1, a)$ 、 $B(2, 3)$ 、 $C(5, 1)$ ，若向量內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值為 1，則 $a =$
(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 2。
- () 6. 求 $(0.027)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$ 的值。
(A) $\frac{3}{32}$ (B) $\frac{159}{100}$ (C) $\frac{12}{5}$ (D) $\frac{81}{32}$ 。

- () 7. 求 $(\log 2)^2 + \log 2 \cdot \log 5 + \log 5$ 的數值。
 (A)4 (B)3 (C)2 (D)1。
- () 8. 若 a 為正整數，且 1 、 a 、 $2a$ 為等比數列，則 $a^2 + 1 =$
 (A)1 (B)2 (C)5 (D)10。
- () 9. 已知多項式 $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ ， $g(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ 。若 $f(x) + g(x)$ 可以被 $x^2 + 1$ 整除，則 $a + b =$
 (A)-2 (B)0 (C)3 (D)5。
- () 10. 已知 $x - 1$ 為多項式 $f(x) = x^2 + ax + b$ 的因式。若 $f(x)$ 除以 $x + 1$ 的餘式為 6 ，則 $3a + 2b =$
 (A)-10 (B)-5 (C)1 (D)5。
- () 11. 已知一元二次方程式 $x^2 + x - 5 = 0$ 有兩相異實根 a 、 b ，若 $a < b$ ，則 $b - a =$
 (A)1 (B) $\sqrt{5}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{21}$ 。
- () 12. 若兩個三階行列式的和 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ 之值為 20 ，則 $a =$
 (A) $\frac{1}{2}$ (B)2 (C) $\frac{5}{2}$ (D)3。
- () 13. 若一元二次不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解為 $a < x < b$ ，則 $a + b =$
 (A)-3 (B)-1 (C)2 (D)3。
- () 14. 某自助餐店提供 80 元的便當，便當中除了白米飯之外，還包含一種主菜以及三種不同的配菜。若今日提供的主菜有雞腿、排骨、魚排 3 種，另有 8 種不同的配菜，則共可搭配出多少種不同組合的 80 元便當？
 (A)59 (B)112 (C)168 (D)210。
- () 15. 某飲料店有 5 位假日工讀生，工作時間有週六的早班與晚班、週日的早班與晚班等 4 個不同時段。一個時段排兩位工讀生上班，如果規定同一人不可以連續排班，至少要隔一個時段上班，則共有幾種排班方式？
 (A)81 (B)270 (C)900 (D)1000。
- () 16. 同時投擲兩粒公正骰子，兩粒骰子點數之和為 5 的倍數之機率為何？
 (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{7}{36}$ (D) $\frac{1}{3}$ 。
- () 17. 已知一袋中有大小相同的球共 34 顆，每顆球上有一個號碼， 34 顆球的號碼皆不同，分別是 1 至 34 號。今從袋中隨機取出一球，假設每顆球被取到的機會均等，並規定：取出的球號是 5 的倍數時可得 51 元，取出的球號是 7 的倍數時可得 85 元，其他的情況時可得 17 元，則自袋中任取一球，得款的期望值為多少元？
 (A)31 (B)26.5 (C)20.5 (D)19。

- () 18. 某班有 40 位同學，第一次期中考數學成績的次數分配表及以下累積次數分配表如表 (一)，求 $a+b+c+d=$

成績 (分)	0~20	20~40	40~60	60~80	80~100
次數	4	a	10	12	c
以下累積次數	4	12	b	34	d

表 (一)

- (A) 50 (B) 64 (C) 70 (D) 76。
- () 19. 研究人員為了調查秋刀魚的長度 (以公分計)，隨機捕獲秋刀魚若干條，逐條記錄長度，並據之求出秋刀魚長度的 95% 信賴區間為 $[30-0.85, 30+0.85]$ ，若利用同樣數據計算出秋刀魚長度的 99% 信賴區間為 $[a-b, a+b]$ ，則下列敘述何者正確？
 (A) $a=30$ 且 $b > 0.85$ (B) $a=30$ 且 $b < 0.85$ (C) $a=30$ 且 $b = 0.85$
 (D) $a \neq 30$ 。
- () 20. 已知 $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = a \cdot \sin(\theta+b)$ ， $a > 0$ ， $0 \leq b \leq 2\pi$ ，則下列何者正確？
 (A) $a=4$ ， $b = \frac{\pi}{6}$ (B) $a=2$ ， $b = \frac{\pi}{3}$ (C) $a=2$ ， $b = \frac{4\pi}{3}$ (D) $a=4$ ， $b = \frac{\pi}{3}$ 。
- () 21. 已知 $\triangle ABC$ 三內角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對應邊長分別為 a 、 b 、 c 。若 $a = \sqrt{2}$ ， $b = 2$ ， $c = \sqrt{3} - 1$ ，則最大內角的角度為何？
 (A) 105° (B) 120° (C) 135° (D) 150° 。
- () 22. 已知雙曲線 $H: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ 兩頂點的距離為 a ，橢圓 $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 長軸長為 b ，則 $a+b =$
 (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22。
- () 23. 已知橢圓 $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ ，則橢圓 E 與圓 C 有多少個交點？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。
- () 24. 求函數 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x - 2}$ 在 $x=1$ 的導數。
 (A) -9 (B) -8 (C) -7 (D) -6。
- () 25. 求定積分 $\int_0^2 6x(x^2 - 1)^2 dx$ 之值。
 (A) 24 (B) 26 (C) 28 (D) 30。

106 年統一入學測驗 數學 (B)

答 案

1.D 2.A 3.A 4.A 5.D 6.B 7.D 8.C 9.D 10.B
 11.D 12.B 13.C 14.C 15.B 16.C 17.A 18.D 19.A 20.B
 21.C 22.C 23.B 24.A 25.C

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 106 年 5 月 8 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

利用直線上任兩點所構成的斜率即為此直線的斜率，便可輕易求出。

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

$$\Rightarrow m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$$

解析

A 、 B 兩點在直線 L 上

$$\Rightarrow m_{AB} = m_L$$

$$\Rightarrow \frac{5-a}{a-2} = 2 \Rightarrow 5-a = 2a-4$$

$$\Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

解析

$$\text{若 } y = 2\sin x + 1 = 1$$

$$\Rightarrow 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow a = 3$$

$$\text{若 } y = 2\sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \Rightarrow b = 2$$

$$\text{若 } y = 2\sin x + 1 = -1$$

$$\Rightarrow 2\sin x = -2 \Rightarrow \sin x = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow c = 1$$

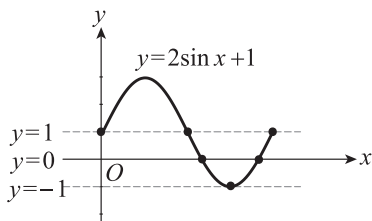
2. 〈法一〉

技巧與分析

幾何求法：

需了解 $\sin x$ 圖形及上下伸縮、平移的概念，繪出其函數圖形，方可輕易看出交點

解析



由上圖可看出 $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$

〈法二〉

技巧與分析

代數解法：

知(1)方程式的聯立解就是圖形的交點

(2) $\sin x$ 特殊值所換算的角度

3. 技巧與分析

三角函數廣義角的換算及兩點的距離

解析

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{11\pi}{6} = \tan \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \tan \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

$$= -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$A \left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right) = A \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$B \left(\cos \frac{11\pi}{6}, \tan \frac{11\pi}{6} \right) = B \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\therefore \overline{AB} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. 技巧與分析

三角函數之商數關係及倒數關係

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ 及 } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

解析

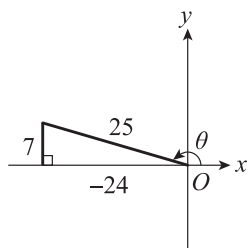
$$\begin{aligned} \tan \theta + \sec \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} \\ &= \frac{\frac{7}{25} + 1}{\frac{-24}{25}} = \frac{\frac{32}{25}}{\frac{-24}{25}} = -\frac{32}{24} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

[另解]

$$\sin \theta = \frac{7}{25} > 0 \Rightarrow \theta \in \text{第一、二象限}$$

$$\cos \theta = \frac{-24}{25} < 0 \Rightarrow \theta \in \text{第二、三象限}$$

$\therefore \theta \in \text{第二象限}$



$$\text{故 } \tan \theta + \sec \theta = \frac{7}{-24} + \frac{25}{-24} = -\frac{32}{24} = -\frac{4}{3}$$

5. 技巧與分析

兩點求向量，向量坐標表示法的內積運算

$$(1) A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$(2) \vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

解析

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, 3-a) = (1, 3-a)$$

$$\overrightarrow{BC} = (5-2, 1-3) = (3, -2)$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$$

$$\Rightarrow 1 \times 3 + (3-a) \times (-2) = 1$$

$$\Rightarrow 3 - 6 + 2a = 1$$

$$\Rightarrow 2a = 4$$

$$\Rightarrow a = 2$$

6. 技巧與分析

指數律基本運算

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

解析

$$\begin{aligned} (0.027)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \left(\frac{27}{1000}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{3^3}{10^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3^5}{2^5}\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \frac{3^2}{10^2} + \frac{3^1}{2^1} = \frac{9}{100} + \frac{3}{2} = \frac{9}{100} + \frac{150}{100} = \frac{159}{100} \end{aligned}$$

7. 技巧與分析

知悉常用對數

$$\log 2 + \log 5 = \log(2 \times 5) = \log 10 = 1$$

解析

$$\begin{aligned} (\log 2)^2 + \log 2 \cdot \log 5 + \log 5 \\ &= \log 2(\log 2 + \log 5) + \log 5 \\ &= \log 2 \cdot \log 10 + \log 5 \\ &= \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1 \end{aligned}$$

8. 技巧與分析

等比數列任一項除以前一項皆為公比

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

解析

1、a、2a 為等比數列

$$\Rightarrow \frac{a}{1} = r = \frac{2a}{a} \quad (r \text{ 為公比})$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 \times 2a \Rightarrow a^2 = 2a$$

$$\therefore a \text{ 為正整數} \xrightarrow{\text{同除 } a} a = 2$$

$$\therefore a^2 + 1 = 5$$

9. 技巧與分析

(1) 多項式加法運算 (同類項合併)

(2) 多項式直式除法 (長除法)

(3) 整除 \Rightarrow 餘式為零

解析

$$f(x) + g(x) = x^3 + x^2 + (a-5)x + (b+2)$$

利用直式除法

$$\begin{array}{r} x \quad +1 \\ x^2 + 0x + 1 \overline{) x^3 + x^2 + (a-5)x + (b+2)} \\ \underline{x^3 + 0x^2 \quad \quad + x} \\ x^2 + (a-6)x + (b+2) \\ \underline{x^2 \quad \quad + 0x \quad \quad + 1} \\ (a-6)x + (b+1) \end{array}$$

因為整除 \Rightarrow 餘式為 0

$$\Rightarrow a-6=0 \text{ 且 } b+1=0$$

$$\Rightarrow a=6, b=-1$$

$$\text{故 } a+b=5$$

10. 技巧與分析

(1) 餘式定理：

$$f(x) \text{ 除以 } ax+b \text{ 之餘式} = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

(2) 因式定理：

$$f(x) \text{ 有 } ax+b \text{ 之因式} \Rightarrow f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$$

解析

$x-1$ 為 $f(x) = x^2 + ax + b$ 因式

$$\Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 6

$$\Rightarrow f(-1) = 6 \Rightarrow 1 - a + b = 6 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } 2a = -6 \Rightarrow a = -3$$

$$\text{代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } 1 - 3 + b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$\therefore 3a + 2b = 3 \times (-3) + 2 \times 2 = -5$$

11. 技巧與分析

一元二次方程式公式解：

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

解析

利用公式解 $x^2 + x - 5 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$$

$$\because a < b \Rightarrow a = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, b = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$$

$$\Rightarrow b - a = \sqrt{21}$$

〔另解〕

利用根與係數求解

a, b 為 $x^2 + x - 5 = 0$ 兩根

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = -\frac{1}{1} = -1 \\ ab = \frac{-5}{1} = -5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (b-a)^2 &= (b+a)^2 - 4ab \\ &= (-1)^2 - 4(-5) = 21 \end{aligned}$$

$\because a < b$

$$\Rightarrow b - a = \sqrt{21}$$

12. 技巧與分析

$$\text{行列式：} \begin{vmatrix} a & x+P & d \\ b & y+Q & e \\ c & z+R & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & d \\ b & y & e \\ c & z & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & P & d \\ b & Q & e \\ c & R & f \end{vmatrix}$$

解析

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2+(-2) & 1 \\ 2 & a+a & 2 \\ 4 & 2+(-2) & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2a & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2(9a - 4a) = 10a$$

依題知 $10a = 20 \Rightarrow a = 2$

〔另解〕

$$\text{原式} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2+(-2) & 1 \\ 2 & a+a & 2 \\ 4 & 2+(-2) & 3 \end{vmatrix} = 20$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2a & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

由第 2 行展開得

$$2a \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

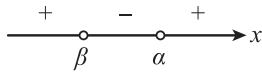
$$2a \times (9 - 4) = 20$$

$$\Rightarrow 10a = 20$$

$$\therefore a = 2$$

13. 技巧與分析

- (1) 一元二次不等式求解(含一元二次因式分解)
 (2) 若 $\alpha > \beta$, $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$,
 則 $\beta < x < \alpha$



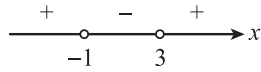
解析

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 3$$

依題 $a < x < b \Rightarrow a = -1$ 及 $b = 3$
 $\therefore a + b = 2$



14. 技巧與分析

- (1) 從 n 個相異物中選 m 個之方法數 $= C_m^n$
 (2) 計數之乘法原理

解析

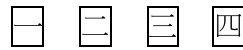
主菜：雞腿、排骨、魚排，3選1之方法數為 $C_1^3 = 3$
 配菜8種選3種之方法數為 $C_3^8 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$
 由乘法原理知：
 便當組合共有 $3 \times 56 = 168$ (種)

15. 技巧與分析

- (1) C_m^n 之組合數運算
 (2) 將時段分順序依序選取下一時段之方法數

解析

有一、二、三、四，共4個時段
 第一時段從5人中選2人
 $\Rightarrow C_2^5 = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$
 第二時段從剩下3人中(第一時段選中2人不可連續)選2人 $\Rightarrow C_2^3 = 3$
 同第二時段之選取方式 \Rightarrow 第三時段及第四時段皆為3種
 故全部有 $10 \times 3 \times 3 \times 3 = 270$ 種排班方式



$$C_2^5 \times C_2^3 \times C_2^3 \times C_2^3 = 270$$

第三時段剩的1人再加第二時段2人，共3人
 第二時段剩的1人再加第一時段2人，共3人

16. 技巧與分析

- (1) 列舉所求之所有情況
 (2) 古典機率之算法 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

解析

兩粒骰子擲出點數 a 點、 b 點
 記為序對 (a, b)

$$\{(a, b) | a + b = 5 \text{ 或 } a + b = 10\}$$

$$= \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (6, 4), (5, 5), (4, 6)\}$$

$$\Rightarrow 7 \text{ 種}$$

樣本空間 $n(S) = 6 \times 6 = 36$

$$\therefore \text{所求} = \frac{7}{36}$$

[另解]

點數和	5	10
個數	4	3

$$\text{故所求 } P = \frac{4+3}{6 \times 6} = \frac{7}{36}$$

17. 技巧與分析

期望值 $E = \sum_{i=1}^n m_i \times p_i$ (m_i 為發生事件機率 p_i 的報酬)

解析

1~34號中
 5的倍數有5、10、15、20、25、30
 \Rightarrow 共6種
 7的倍數有7、14、21、28 \Rightarrow 共4種
 不是5也不是7的倍數有 $34 - 6 - 4 = 24$ (種)

$$\text{期望值 } E = \frac{6}{34} \times 51 + \frac{4}{34} \times 85 + \frac{24}{34} \times 17$$

$$= \frac{1054}{34} = 31 \text{ (元)}$$

18. 技巧與分析

了解以下累積次數的計數意義即可

解析

全班 40 人，故 100 分以下累積次數 = 40 = d

40 分以下人數

= 20 分以下人數 + (20 ~ 40) 分人數

$$\Rightarrow 12 = 4 + a \Rightarrow a = 8$$

60 分以下人數

= 40 分以下人數 + (40 ~ 60) 分人數

$$\Rightarrow b = 12 + 10 \Rightarrow b = 22$$

100 分以下人數

= 80 分以下人數 + (80 ~ 100) 分人數

$$\Rightarrow 40 = 34 + c \Rightarrow c = 6$$

$$a + b + c + d = 8 + 22 + 6 + 40 = 76$$

19. 技巧與分析

信心水準與信賴區間的意義，並了解增加誤差可擴大信賴區間 \Rightarrow 提高其信心水準

解析

95% 信賴區間為 [30 - 0.85, 30 + 0.85]

\Rightarrow 此調查之統計數值 = 30，誤差 = 0.85

同樣數據之統計數值相同 $\Rightarrow a = 30$

95% 增加至 99% 之信賴區間，在樣本相同下

\Rightarrow 須擴大誤差 $\Rightarrow b > 0.85$

20. 技巧與分析

疊合公式：

$$a \sin \theta + b \cos \theta$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \right)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \phi)$$

$$\text{其中 } \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

解析

利用疊合公式

$$a \cdot \sin(\theta + b) = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin \theta + \sin \frac{\pi}{3} \cos \theta \right)$$

$$= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\therefore a = 2, b = \frac{\pi}{3}$$

21. 技巧與分析

(1) 餘弦定理： $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

(2) 三角函數特殊角在廣義角的值

解析

$\because b > a > c \Rightarrow \angle B$ 為最大內角

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2^2}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{2 + 4 - 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{2(1 - \sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{又 } 0^\circ < \angle B < 180^\circ \Rightarrow \angle B = 135^\circ$$

22. 技巧與分析

知悉橢圓及雙曲線的標準式，並能區分標準式中每個數字所代表之中文意義

解析

雙曲線兩頂點距離即為實軸長

$$\Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ 之實軸長} = 2 \times \sqrt{25} = 10$$

$$\text{又 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \text{ 之長軸長} = 2 \times \sqrt{25} = 10$$

$$\therefore a + b = 20$$

23. 技巧與分析

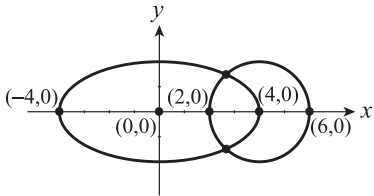
化為標準式，簡略繪出圖形，即可觀察得知

解析

利用幾何圖解

$$\text{圓 } C : x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 2^2$$



由圖可知交於 2 點

〔另解〕

利用代數求解

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

由①得 $y^2 = 4 - \frac{x^2}{4}$ ，代入②得

$$x^2 + 4 - \frac{x^2}{4} - 8x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 16 - x^2 - 32x + 48 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 32x + 64 = 0$$

$$D = (-32)^2 - 4 \times 3 \times 64 > 0$$

故 x 有二實數解 \Rightarrow 有 2 交點

24. 技巧與分析

微分公式：

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)h'(x) - g'(x)h(x)}{[g(x)]^2}$$

解析

利用微分公式

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+2)' - (x-2)'(x^2+2x+2)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(x-2)(2x+2) - 1 \times (x^2+2x+2)}{(x-2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(-1)(4) - 1 \times (5)}{(-1)^2} = \frac{-9}{1} = -9$$

〔另解〕

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 + 2x + 2}{x - 2} - (-5)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 2 + 5x - 10}{(x - 2)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 7x - 8}{(x - 2)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 8)(x - 1)}{(x - 2)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 8}{x - 2} = -9 \end{aligned}$$

25. 技巧與分析

$$(1) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

(2) 積分之代數變換

解析

$$\text{令 } u = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$$

當 $x = 2$ 時， $u = 2^2 - 1 = 3$

當 $x = 0$ 時， $u = 0^2 - 1 = -1$

$$\text{故原式} = \int_{-1}^3 6 \times u^2 \times \frac{1}{2} du$$

$$= 3 \int_{-1}^3 u^2 du = 3 \times \frac{1}{3} u^3 \Big|_{-1}^3$$

$$= 3^3 - (-1)^3 = 27 + 1 = 28$$

〔另解〕

$$\int_0^2 6x(x^2 - 1)^2 dx$$

$$= \int_0^2 6x(x^4 - 2x^2 + 1) dx$$

$$= \int_0^2 (6x^5 - 12x^3 + 6x) dx$$

$$= (x^6 - 3x^4 + 3x^2) \Big|_0^2$$

$$= 2^6 - 3 \times 2^4 + 3 \times 2^2$$

$$= 28$$