103 年 數學科 學科能力測驗試卷

總　　分

＿＿＿＿＿科＿＿＿＿＿班　學號＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿

第一部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項．各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算．

(　　)1.　請問下列哪一個選項等於 $\log\left(2^{\left(3^5\right)}\right)$？　(1) $5\log\left(2^3\right)$　(2) $3\times5\log2$　(3) $5\log2\times\log3$　(4) $5\left(\log2+\log3\right)$　(5) $3^5\log2$．〔第一冊 CH3〕

(　　)2.　令 $A\left(5,0,12\right)$，$B\left(-5,0,12\right)$ 為坐標空間中之兩點，且令 P 為 xy 平面上滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$ 的點．請問下列哪一個選項中的點可能為 P？　(1) $\left(5,0,0\right)$　(2) $\left(5,5,0\right)$　(3) $\left(0,12,0\right)$　(4) $\left(0,0,0\right)$　(5) $\left(0,0,24\right)$．〔第四冊 CH1〕

(　　)3.　在坐標平面上，以 $\left(1,1\right)$，$\left(-1,1\right)$，$\left(-1,-1\right)$ 及 $\left(1,-1\right)$ 等四個點為頂點的正方形，與圓 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 有幾個交點?　(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 0 個．〔第三冊 CH2〕

(　　)4.　請問滿足絕對值不等式 $\left|4x-12\right|\le2x$ 的實數 x 所形成的區間，其長度為下列哪一個選項?　(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 6．〔第一冊 CH1〕

(　　)5.　設 $\left(1+\sqrt{2}\right)^6=a+b\sqrt{2}$，其中 a，b 為整數．請問 b 等於下列哪一個選項?

(1) $C_0^6+2C_2^6+2^2C_4^6+2^3C_6^6$　(2) $C_1^6+2C_3^6+2^2C_5^6$

(3) $C_0^6+2C_1^6+2^2C_2^6+2^3C_3^6+2^4C_4^6+2^5C_5^6+2^6C_6^6$　(4) $2C_1^6+2^2C_3^6+2^3C_5^6$

(5) $C_0^6+2^2C_2^6+2^4C_4^6+2^6C_6^6$．〔第二冊 CH2〕

(　　)6.　某疾病可分為兩種類型：第一類占 70%，可藉由藥物 A 治療，其每一次療程的成功率為 70%，且每一次療程的成功與否互相獨立；其餘為第二類，藥物 A 治療方式完全無效．在不知道患者所患此疾病的類型，且用藥物 A 第一次療程失敗的情況下，進行第二次療程成功的條件機率最接近下列哪一個選項?　(1) 0.25　(2) 0.3　(3) 0.35　(4) 0.4　(5) 0.45．〔第二冊 CH3〕

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項．各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算．

(　　)7.　設坐標平面上，x 坐標與 y 坐標皆為整數的點稱為格子點．請選出圖形上有格子點的選項：

(1) $y=x^2$　(2) $3y=9x+1$　(3) $y^2=-x-2$　(4) $x^2+y^2=3$　(5) $y=\log_9x+\dfrac{1}{2}$．〔第三冊 CH2〕

(　　)8. 關於下列不等式，請選出正確的選項：　(1) $\sqrt{13}>3.5$　(2) $\sqrt{13}<3.6$　(3) $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$
(4) $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$　(5) $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$.　〔第一冊 CH1〕

(　　)9. 一物體由坐標平面中的點 $(-3,6)$ 出發，沿著向量 $\overrightarrow{v}$ 所指的方向持續前進，可以進入第一象限 .

請選出正確的選項：　(1) $\overrightarrow{v}=(1,-2)$　(2) $\overrightarrow{v}=(1,-1)$　(3) $\overrightarrow{v}=(0.001,0)$　(4) $\overrightarrow{v}=(0.001,1)$

(5) $\overrightarrow{v}=(-0.001,1)$.　〔第三冊 CH3〕

(　　)10. 設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，且已知 $f(1)>0$ ， $f(2)<0$ ， $f(3)>0$. 令 $g(x)=f(x)+(x-2)(x-3)$ ，請選出正確的選項：　(1) $y=f(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線 (2) $y=g(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線　(3) $g(1)>f(1)$　(4) $g(x)=0$ 在 1 與 2 之間恰有一個實根　(5)若 α 為 $f(x)=0$ 的最大實根，則 $g(\alpha)>0$.　〔第一冊 CH2〕

(　　)11. 設 $a_1=1$ 且 a_1 ， a_2 ， a_3 ， $\cdots$ 為等差數列 . 請選出正確的選項：　(1)若 $a_{100}>0$ ，則 $a_{1000}>0$　(2)若 $a_{100}<0$ ，則 $a_{1000}<0$　(3)若 $a_{1000}>0$ ，則 $a_{100}>0$　(4)若 $a_{1000}<0$ ，則 $a_{100}<0$
(5) $a_{1000}-a_{10}=10(a_{100}-a_1)$.　〔第二冊 CH1〕

(　　)12. 所謂某個年齡範圍的失業率，是指該年齡範圍的失業人數與勞動力人數之比，以百分數表達（進行統計分析時，所有年齡以整數表示）. 下表為去年某國四個年齡範圍的失業率，<u>其中的年齡範圍有所重疊</u> .

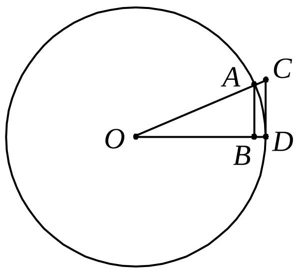
年齡範圍（歲）	35～44	35～39	40～44	45～49
失業率（%）	12.66	9.80	13.17	7.08

請根據上表選出正確的選項：　(1)在上述四個年齡範圍中，以 40～44 歲的失業率為最高 (2)40～44 歲勞動力人數多於 45～49 歲勞動力人數　(3)40～49 歲的失業率等於 $\left(\frac{13.17+7.08}{2}\right)\%$　(4)35～39 歲勞動力人數少於 40～44 歲勞動力人數　(5)如果 40～44 歲的失業率降低，則 45～49 歲的失業率會升高 .　〔第二冊 CH4〕

第二部分：選填題（占 40 分）

說明：第 A 至 H 題，每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分 .

A. 設圓 O 之半徑為 24 ， $\overline{OC}=26$ ， $\overline{OC}$ 交圓 O 於 A 點， $\overline{CD}$ 切圓 O 於 D 點， B 為 A 點到 $\overline{OD}$ 的垂足，如下圖，則 $\overline{AB}=$ ________ .（化為最簡分數）　〔第三冊 CH2〕

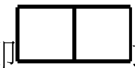
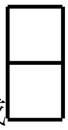


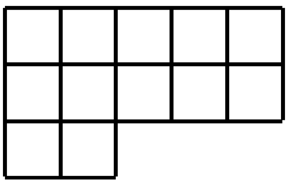
B. 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$（其中 a ， b 為實數）與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 $a=$________， $b=$________ .　〔第一冊 CH2〕

C. 小鎮 A 距離一筆直道路 6 公里，並與道路上的小鎮 B 相距 12 公里．今欲在此道路上蓋一家超級市場使其與 A、B 等距，則此超級市場與 A 的距離須為________公里．(化為最簡根式)　〔第三冊 CH1〕

D. 坐標空間中有四點 $A(2,0,0)$， $B(3,4,2)$， $C(-2,4,0)$ 與 $D(-1,3,1)$ ．若點 P 在直線 CD 上變動，則內積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 之最小可能值為________ .(化為最簡分數)　〔第四冊 CH2〕

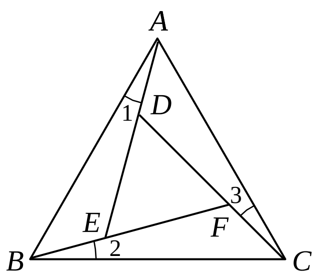
E. 設 $\overrightarrow{u}$ ， $\overrightarrow{v}$ 為兩個長度皆為1的向量．若 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 的夾角為 $75°$，則 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的內積為________ .
(化為最簡根式)　〔第三冊 CH3〕

F. 一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如下圖．今想用長方形瓷磚鋪滿地面，已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正方形，即或，則用6 塊瓷磚鋪滿房間地面的方法有________種．　〔第二冊 CH2〕



G. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，並且其行列式（值）為 $\frac{5}{8}$，則 $a+d=$________ .(化為最簡分數)　〔第四冊 CH3〕

H. 如圖，正 $\triangle ABC$ 的邊長為1，並且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=15°$ ．已知 $\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，則正 $\triangle DEF$ 的邊長為________ .(化為最簡根式)　〔第三冊 CH1〕



答　案

第一部分：選擇題

一、單選題

1. (5)　2. (4)　3. (2)　4. (4)　5. (2)　6. (2)

二、多選題

7. (1)(3)(5)　8. (1)(4)　9. (2)(3)(4)　10. (3)(4)　11. (2)(3)(5)　12. (1)(4)

第二部分：選填題

A. $\frac{120}{13}$　B. $a=6$，$b=-9$　C. $4\sqrt{3}$　D. $\frac{5}{4}$　E. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$　F. 11　G. $\frac{13}{8}$　H. $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

解　析

第一部分：選擇題

一、單選題

1. 利用公式 $\log_a r^t = t\log_a r$，得 $\log\left(2^{\left(3^5\right)}\right)=3^5\log 2$．故選(5)．

2. 設 $P(x,y,0)$．因為 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$，所以

$$\sqrt{(x-5)^2+y^2+144}=\sqrt{(x+5)^2+y^2+144}=13,$$

即 $\begin{cases}(x-5)^2+y^2=25\\(x+5)^2+y^2=25\end{cases}$．

兩式相減，得 $(x-5)^2=(x+5)^2 \Rightarrow x^2-10x+25=x^2+10x+25 \Rightarrow x=0$，

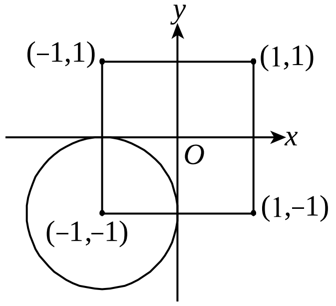
代入原式得 $y=0$，即 $P(0,0,0)$．

故選(4)．

3. 將圓改寫成標準式，得 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$，

得知其圓心為 $(-1,-1)$，半徑為 1．

由下圖得知此圓與正方形共有 2 個交點．



故選(2)．

4. 分兩段討論如下：

①當 $x \geq 3$ 時，原式為 $4x-12 \leq 2x$，得 $x \leq 6$，即 $3 \leq x \leq 6$.

②當 $x < 3$ 時，原式為 $-(4x-12) \leq 2x$，得 $x \geq 2$，即 $2 \leq x < 3$.

綜合上述①②，得 $2 \leq x \leq 6$，此區間長度為 $6-2=4$.

故選(4) .

5. 利用二項式定理，得

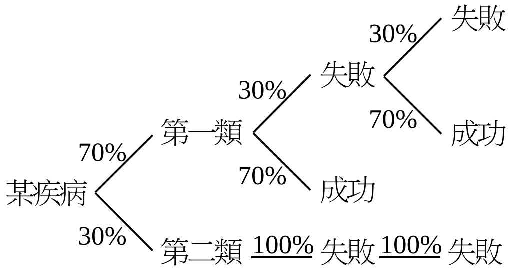
$$\left(1+\sqrt{2}\right)^6 = C_0^6 + C_1^6\left(\sqrt{2}\right) + C_2^6\left(\sqrt{2}\right)^2 + C_3^6\left(\sqrt{2}\right)^3 + C_4^6\left(\sqrt{2}\right)^4 + C_5^6\left(\sqrt{2}\right)^5 + C_6^6\left(\sqrt{2}\right)^6$$

$$= \left(C_0^6 + 2C_2^6 + 2^2C_4^6 + 2^3C_6^6\right) + \left(C_1^6 + 2C_3^6 + 2^2C_5^6\right)\sqrt{2},$$

即 $b = C_1^6 + 2C_3^6 + 2^2C_5^6$.

故選(2) .

6. 依題意得下圖：



根據條件機率的定義，得

$$P(\text{第二次成功} \mid \text{第一次失敗}) = \frac{P(\text{第一次失敗} \cap \text{第二次成功})}{P(\text{第一次失敗})}$$

$$= \frac{70\% \times 30\% \times 70\%}{70\% \times 30\% + 30\% \times 100\%}$$

$$= \frac{49}{170}$$

$$\approx 0.288 \ .$$

故選(2) .

二、多選題

7. (1) 有格子點 $(1,1)$.

(2) 若 x，y 為整數，則 $3y$ 是 3 的倍數，但 $9x+1$ 不是 3 的倍數，得知圖形無格子點 .

(3) 有格子點 $(-3,1)$.

(4) 兩非負整數的和為 3 之情形，有 $0+3$ 與 $1+2$ 兩種，但因為 2，3 皆非完全平方數，所以圖形無格子點 .

(5) 有格子點 $(3,1)$.

故選(1)(3)(5) .

8. (1) 因為$3.5^2=12.25<13$，所以$\sqrt{13}>3.5$．

(2) 因為$3.6^2=12.96<13$，所以$\sqrt{13}>3.6$．

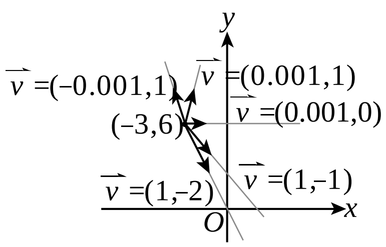
(3) 因為$\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)^2=13+2\sqrt{30}>13$，所以$\sqrt{3}+\sqrt{10}>\sqrt{13}$，即$\sqrt{13}-\sqrt{3}<\sqrt{10}$．

(4) 因為$\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)^2=16+2\sqrt{39}>16$，所以$\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$．

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{10}<\dfrac{3.7+1.8}{10}<\dfrac{6}{10}=0.6$．

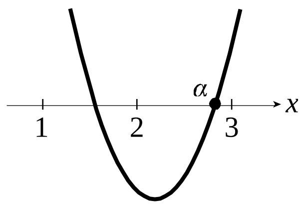
故選(1)(4)．

9. 各向量的略圖如下（其中$\overrightarrow{v}=(1,-2)$的方向通過原點$O$）：



由上圖得知，選項(2)(3)(4)正確．

10. 依題意可得$y=f(x)$的略圖如下：



(1) 由上圖得知，$y=f(x)$是開口向上的拋物線．

(2) 由(1)知$f(x)$是二次項係數為正的二次多項式，因此$g(x)$也是二次項係數為正的二次多項式，即$y=g(x)$的圖形是開口向上的拋物線．

(3) $g(1)=f(1)+(1-2)(1-3)=f(1)+2>f(1)$．

(4) $g(1)$，$g(2)$，$g(3)$的正負情形如下：

$$\begin{cases} g(1)=f(1)+2>0 \\ g(2)=f(2)+0<0 \\ g(3)=f(3)+0>0 \end{cases},$$

利用勘根定理推得，二次方程式$g(x)=0$在區間$(1,2)$及$(2,3)$各恰有一實根．

(5) 由$y=f(x)$的略圖得知$2<\alpha<3$．又因為$f(\alpha)=0$，所以

$g(\alpha)=f(\alpha)+(\alpha-2)(\alpha-3)=(\alpha-2)(\alpha-3)<0$．

故選(3)(4)．

11. 設公差為d．利用公式$a_n=a_1+(n-1)d$，得

$a_{100}=1+99d$，$a_{1000}=1+999d$．

(1) 反例：當$d=-0.01$時，$a_{100}=1-0.99=0.01>0$，但$a_{1000}=1-9.99=-8.99<0$．

(2) 若 $a_{100}=1+99d<0$，即 $d<-\dfrac{1}{99}$，所以 $a_{1000}=1+999d<1-\dfrac{999}{99}<0$.

(3)若 $a_{1000}=1+999d>0$，即 $d>-\dfrac{1}{999}$，所以 $a_{100}=1+99d>1-\dfrac{99}{999}>0$.

(4)反例：當 $d=-0.01$時，則 $a_{1000}=1-9.99=-8.99<0$，但 $a_{100}=1-0.99=0.01>0$.

(5) 因為 $a_{1000}-a_{10}=\left(1+999d\right)-\left(1+9d\right)=990d$,

$1\ (0a_{1}\ {}_{0}-{}_{0}\ q)\ =_{1}(1\ \ 0+1\ d)\ 9-9\ =$,

所以 $a_{1000}-a_{10}=10\left(a_{100}-a_{1}\right)$.

故選(2)(3)(5) .

12. 設各範圍的勞動人數如下：

年齡範圍（歲）	35～39	40～44	45～49
勞動人數（人）	a	b	c

(1) 在失業率中，以 13.17%最大 .

(2) 僅由題意，不能確定 $b>c$.

(3) 40～49 歲的失業率為 $\dfrac{b\times 13.17\%+c\times 7.08\%}{b+c}$，不一定等於 $\left(\dfrac{13.17+7.08}{2}\right)\%$.

(4) 因為 $\dfrac{a\times 9.80\%+b\times 13.17\%}{a+b}=12.66\%$，即

$9.80a+13.17b=12.66\left(a+b\right)\Rightarrow 2.86a=0.51b$,

所以 $a<b$.

(5) 僅由題意，不能推得此結論 .

故選(1)(4) .

第二部分：選填題

A. 因為兩直角三角形 OAB 與 OCD 相似，且 $\overline{CD}=\sqrt{26^2-24^2}=10$，所以

$\dfrac{\overline{OC}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}}\Rightarrow\dfrac{26}{10}=\dfrac{24}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AB}=\dfrac{240}{26}=\dfrac{120}{13}$.

B. 由聯立方程式 $\begin{cases}y=ax+b\\ y=x^2\end{cases}$，得 $x^2-ax-b=0$,

其判別式為 $\left(-a\right)^2-4\times 1\times\left(-b\right)=a^2+4b$.

因為兩圖形恰交於一點，所以判別式為 0，即 $a^2+4b=0$.

再由聯立方程式 $\begin{cases}y=ax+b\\ y=\left(x-2\right)^2+12\end{cases}$，得

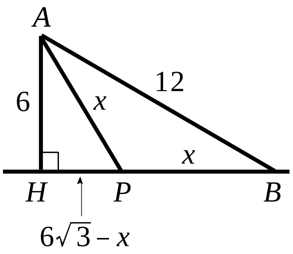
$\left(x-2\right)^2+12-ax-b=0\Rightarrow x^2+\left(-4-a\right)x+\left(16-b\right)=0$,

其判別式為$(-4-a)^2-4\times1\times(16-b)=a^2+8a+4b-48$.

因為兩圖形亦恰交於一點，所以判別式為0，即$a^2+8a+4b-48=0$.

解$\begin{cases} a^2+4b=0 \\ a^2+8a+4b-48=0 \end{cases}$，得$a=6$，$b=-9$.

C. 設超級市場蓋在P點，且$\overline{PA}=\overline{PB}=x$，如下圖所示 .



利用畢氏定理，得$\overline{HB}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$，則$\overline{HP}=6\sqrt{3}-x$.
再利用畢氏定理，得

$$x^2=6^2+\left(6\sqrt{3}-x\right)^2 \Rightarrow x^2=36+108-12\sqrt{3}x+x^2,$$

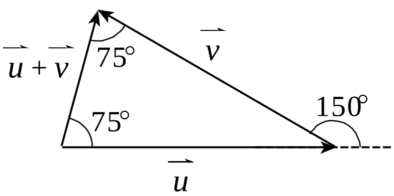
解得$x=\dfrac{144}{12\sqrt{3}}=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$，即超市與$A$的距離為$4\sqrt{3}$公里 .

D. 利用直線參數式$\overleftrightarrow{CD}$：$\begin{cases} x=-2+t \\ y=4-t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=0+t \end{cases}$，設點$P(-2+t,4-t,t)$. 因為

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=(4-t,-4+t,-t)\cdot(5-t,t,2-t)\\&=(4-t)(5-t)+(-4+t)t+(-t)(2-t)\\&=3t^2-15t+20\\&=3\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\ .\end{aligned}$$

所以當$t=\dfrac{5}{2}$時，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$有最小值$\dfrac{5}{4}$.

E. 依題意，利用向量加法的幾何表示，得下圖 .



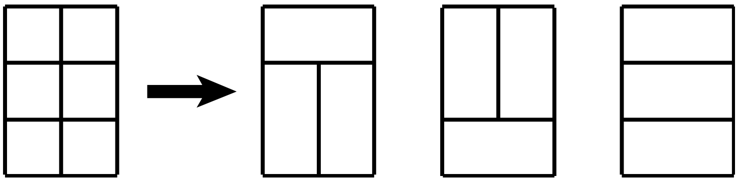
推得$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$的夾角為150° .

故$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1\times1\times\cos150^\circ=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

F. 原圖形是由兩個2×3矩形所組成，分兩類討論：

① 排出兩個2×3矩形：

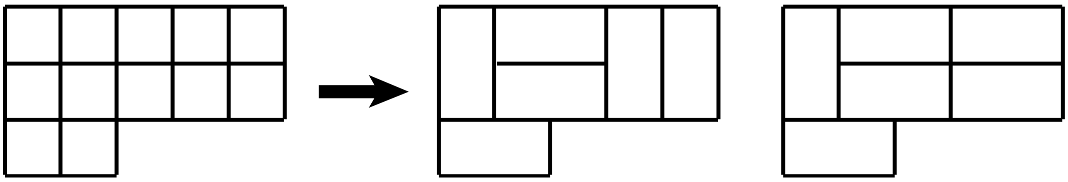
排出一個2×3矩形有底下3種方法．



利用乘法原理得，排出兩個2×3矩形有$3\times3=9$種方法．

② 沒有排出2×3矩形：

排法有底下2種．



故共$9+2=11$種方法．

G. 因為是轉移矩陣，所以$c=1-a$，$b=1-d$．

利用行列式的定義，得$\begin{vmatrix} a & 1-d \\ 1-a & d \end{vmatrix}=\dfrac{5}{8}$

$$\Rightarrow ad-(1-a)(1-d)=\frac{5}{8}\Rightarrow ad-(1-a-d+ad)=\frac{5}{8}\Rightarrow -1+a+d=\frac{5}{8}\Rightarrow a+d=\frac{13}{8}\ .$$

H. 在$\triangle ABE$中，$\angle ABE=60^\circ-15^\circ=45^\circ$，$\angle AEB=180^\circ-15^\circ-45^\circ=120^\circ$，

利用正弦定理，得$\dfrac{\overline{BE}}{\sin15^\circ}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin45^\circ}=\dfrac{1}{\sin120^\circ}$，

即$\overline{BE}=\dfrac{\sin15^\circ}{\sin120^\circ}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$，$\overline{AE}=\dfrac{\sin45^\circ}{\sin120^\circ}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$．

又因為$\triangle ABE$與$\triangle CAD$全等，所以$\overline{AD}=\overline{BE}$．

故正$\triangle DEF$的邊長為$\overline{DE}=\overline{AE}-\overline{AD}=\overline{AE}-\overline{BE}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$