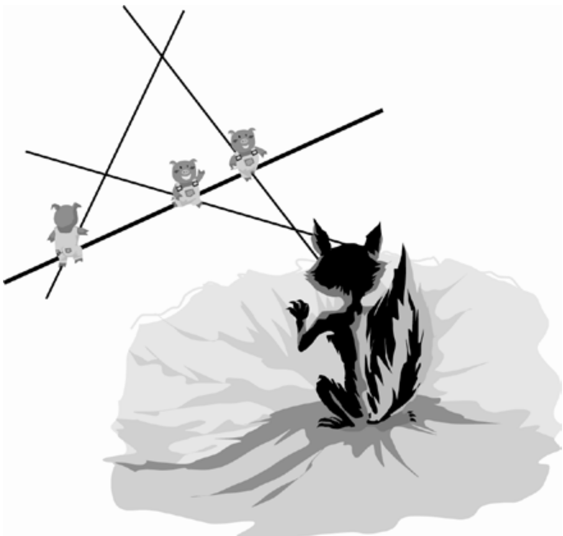
許教授講故事 STORY

◎許志農／台灣師範大學數學系

「從前…從前…有三隻小豬，叫做大豬、二豬和小豬；大豬隨便築了草屋，二豬想木屋應該就夠了，只有小豬用心築了磚屋。大野狼一口氣把草屋吹壞，兩口氣也吹壞了木屋，最後三隻小豬都躲在堅固的磚屋裡，大野狼才無可奈何…。」這是每個小孩子都熟知的童話故事：三隻小豬。前一陣子教育部長說「三隻小豬」是成語，被小孩子吐嘈說：「三隻小豬是寓言故事，不算成語。」在這裡我們介紹一則三隻小豬的數學謎題：

1 在山谷的平地上，有三隻固執的小豬沿著牠們自己的直線移動，每隻小豬都以自己固定的速度前進。

大野狼在三個不同的時間點從山頂窺視，發現三隻小豬當時所在的點分別共線。聰明的大野狼猜想：「如果三隻小豬整個移動過程中都沒有發生互相碰撞的情形，那麼任何時刻，三隻小豬所處的點也都會共線。」你同意大野狼的猜想嗎？



將平地看成平面，就可以把平地視為平面坐標系，而小豬運動的直線就有兩點式、點斜式、截距式及參數式等多種的表示方式。想想看！利用哪一種比較容易解這道問題？

所謂的直線參數式就是說，每條直線 L 都可以表示成

$$L:\begin{cases} x = at + b \\ y = ct + d \end{cases} \quad （t \text{ 為實數}）$$

的形式。

設時間 t 時，三隻小豬的坐標為

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),$$

其中 x_i 與 y_i（$i = 1, 2, 3$）都是 t 的一次或常數函數。

根據兩點式，通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 兩點的直線方程式為

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

所以三隻小豬會共線的時間 t 就是方程式

$$(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

的解。因為 x_i，y_i 的次數（t 的次數）至多為一次，所以此方程式的次數至多為兩次。又題意告訴我們該方程式有三個不同的根。因此，該方程式必須為零方程式，即任何時間 t，三隻小豬都共線。

關於拋物線方程式的標準式與準標準式

◎葉善雲／台北市東山高中

95 年大學指考數學甲選擇第 5 題：

在坐標平面上以 Γ 表示拋物線 $y=x^2$ 的圖形。試問以下哪些方程式的圖形可以由 Γ 經適當的平移或旋轉得到？ (1) $y=2x^2$ (2) $y=-x^2$ (3) $x=y^2$ (4) $y=x^2+4x+3$ (5) $x+y=(x-y)^2$。

此考題前 4 個選項很容易判別（(1)不能，(2)(3)(4)可以），至於第 5 個選項，一般（標準）解題都將 $x+y=(x-y)^2$ 旋轉 $45°$ 或 $-45°$，將它化成拋物線的標準式：$x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot y$ 或 $y^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x$，然後判定它不能由 $\Gamma: y=x^2$ 經適當的平移或旋轉得到。我們的想法：從拋物線的正焦弦長切入，拋物線的圖形經平移或旋轉後，正焦弦長不會改變，也就是說，只要兩拋物線的正焦弦長相等，它們就可經適當的平移或旋轉得到。

說明：拋物線 $\Gamma: y=x^2$ 的正焦弦長為 1。

(1) $x^2=\frac{1}{2}y$ 的正焦弦長為 $\frac{1}{2}$，它不能由 Γ 經平移或旋轉得到。

(2) $x^2=-y$ 的正焦弦長為 1（實際上，它可由 Γ 繞原點旋轉 $180°$ 得到）。

(3) $y^2=x$ 的正焦弦長為 1（實際上，它可由 Γ 繞原點旋轉 $-90°$ 得到）。

(4) $y=x^2+4x+3$ 的準標準式為

$$(x+2)^2=4\cdot\frac{1}{4}\cdot(y+1)$$

其正焦弦長為 1（實際上，它可由 Γ 經向量 $(-2,-1)$ 平移得到）。

(5) $(x+y)=(x-y)^2$ 的準標準式為

$$\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2=4\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$$（後文說明）

其正焦弦長為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，它不能由 Γ 經平移或旋轉得到。

所以正確選項為(2)(3)(4)。

首先，我們引進「直線的單位法向量式」的概念。二元一次方程式 $ax+by+c=0$ 與 $k\cdot(ax+by+c)=0$（其中 $k\neq 0$）的圖形是同一條直線 L，為了方便起見，我們取方程式 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(ax+by+c)=0$ 或

$$\frac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(ax+by+c)=0$$

來表示直線 L，並稱它為**直線 L 的單位法向量式**。例如：$L: 3x-4y+5=0$ 的單位法向量式為 $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+1=0$ 或 $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-1=0$；然後，我們導出拋物線方程式的另一種形式—「準標準式」。

定理（拋物線的準標準式）：

設 Γ 為以 $F(h,k)$ 為焦點，$L:g(x,y)=0$（單位法向量式）為準線，$M:f(x,y)=0$（單位法向量式）為對稱軸（過焦點且垂直準線的直線）的拋物線，則

(1) Γ 的方程式為

$$\left[f(x,y)\right]^2=4\cdot\frac{g(h,k)}{2}\cdot\left[g(x,y)-\frac{g(h,k)}{2}\right]$$

呈現此形式的拋物線方程式稱為**拋物線的準標準式**。

關於此定理，我們引入下面的口訣來幫助記憶：「$\text{軸}^2=4c\cdot\text{頂線}$」

(2) Γ 的頂點 $V(x,y)$ 滿足

$$\begin{cases}M:f(x,y)=0\\ M':g(x,y)=\dfrac{g(h,k)}{2}\end{cases}$$

此時直線 M' 為通過頂點 V 而垂直 M 的直線（簡稱為頂線）。

(3) 令 $c=\dfrac{g(h,k)}{2}$，則 $4c$ 的絕對值為拋物線 Γ 的正焦弦長。

在證明上述定理之前，我們先舉例說明此定理的涵義，它可以涵蓋拋物線的標準式：$y^2=4cx$ 或 $x^2=4cy$，同時從準標準式可以直接讀出拋物線的訊息：對稱軸、準線、正焦弦長以及頂線。例如：

(1) 以 $F(c,0)$ 為焦點，$L:x+c=0$ 為準線的拋物線（此時對稱軸為 $y=0$）之準標準式為 $y^2=4\cdot c\cdot\left[(x+c)-c\right]$，即標準式 $y^2=4cx$。

(2) 以 $F(0,c)$ 為焦點，$L:y+c=0$ 為準線的拋物線（此時對稱軸為 $x=0$）之準標準式為 $x^2=4\cdot c\cdot\left[(y+c)-c\right]$，即標準式 $x^2=4cy$。

(3) 以 $F(1,1)$ 為焦點，$L:x+y+2=0$ 為準線的拋物線（此時對稱軸為 $x-y=0$，頂點為 $V(0,0)$）之準標準式為

$$\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2=4\cdot\frac{4}{2\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{x+y+2}{\sqrt{2}}-\frac{4}{2\sqrt{2}}\right)$$

即 $(x-y)^2=8(x+y)$（已不是準標準式）或 $x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$。

定理證明：

(1) 設 $g(x,y)=ax+by+d$，其中 $a^2+b^2=1$，且 $P(x,y)$ 為拋物線上任意點，則根據拋物線的定義 $\overline{PF}=d\left(P,L\right)$，得

$$(x-h)^2+(y-k)^2=(ax+by+d)^2$$

展開並合併相同項得

$$\begin{aligned}&(1-a^2)x^2-2abxy+(1-b^2)y^2\\&=2adx+2bdy+2hx+2ky+d^2-h^2-k^2\end{aligned}$$

利用 $a^2+b^2=1$ 得

$$\begin{aligned}&(bx-ay)^2\\&=2d(ax+by)+2(hx+ky)+2d^2-d^2-h^2-k^2\end{aligned}\quad\cdots\cdots①$$

由於

$$\begin{aligned}&-2(bx-ay)(bh-ak)\\&=-2(hx+ky)+2(ax+by)(ah+bk)\end{aligned}$$

且

$$(bh-ak)^2=h^2+k^2-(ah+bk)^2$$

在 ①式左右兩側分別加上 $-2(bx-ay)(bh-ak)+(bh-ak)^2$ 與 $-2(hx+ky)+2(ax+by)(ah+bk)+h^2+k^2-(ah+bk)^2+\left[2d(ah+bk)-2d(ah+bk)\right]$

得

$$\begin{aligned}&\left[(bx-ay)-(bh-ak)\right]^2\\&=2\left[(ax+by+d)(ah+bk+d)\right]-\left[(ah+bk)+d\right]^2\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\left[(bx-ay)-(bh-ak)\right]^2\\&=4\cdot\frac{ah+bk+d}{2}\cdot\left[(ax+by+d)-\frac{ah+bk+d}{2}\right]\end{aligned}$$

亦即 Γ 的方程式為

$$\left[f(x,y)\right]^2=4\cdot\frac{g(h,k)}{2}\cdot\left[g(x,y)-\frac{g(h,k)}{2}\right]$$

（此為準標準式）

(2) 另一方面，對稱軸 M 與準線 L 的交點為

$$H(b^2h-abk-ad,\,-bd-abh+a^2k)$$

故頂點坐標為

$$V\left(\frac{b^2h+h-abk-ad}{2},\frac{a^2k+k-bd-abh}{2}\right)$$

由於

$$g\left(\frac{b^2h+h-abk-ad}{2},\frac{a^2k+k-bd-abh}{2}\right)$$

$$=a\cdot\frac{b^2h+h-abk-ad}{2}$$

$$+b\cdot\frac{a^2k+k-bd-abh}{2}+d$$

$$=\frac{ah+bk-(a^2+b^2)d+2d}{2}$$

$$=\frac{ah+bk+d}{2}\qquad\left(因為\ a^2+b^2=1\right)$$

$$=\frac{g(h,k)}{2}$$

所以頂點

$$V\left(\frac{b^2h+h-abk-ad}{2},\frac{a^2k+k-bd-abh}{2}\right)$$

在直線 $g(x,y)=\dfrac{g(h,k)}{2}$ 上。

(3) 由於拋物線的正焦弦長為焦點到準線距離的 2 倍，故 Γ 的正焦弦長為

$$2\cdot d(F,L)=2\cdot\left|ah+bk+d\right|=2\cdot\left|2c\right|=\left|4c\right|。$$

＊例題 1＊

（取材自 龍騰版數學甲(上)，P85 習題 8）

求通過點 $A(1,0)$, $B(1,1)$，且以 $L:y=x$ 為對稱軸的拋物線方程式。

【說明】

以 $L:y=x$ 為對稱軸的拋物線方程式可設為

$$\Gamma:(x-y)^2=m\cdot(x+y+k)$$

將 $A(1,0)$，$B(1,1)$ 代入

$\Gamma:(x-y)^2=m\cdot(x+y+k)$ 可解得 $k=-2$，$m=-1$，故 Γ 的方程式為 $(x-y)^2=-(x+y-2)$ 或 $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$。

＊例題 2＊

（取材自 南一版數學甲(上)，P165 例題 3）

討論二元二次方程式

$\Gamma:4x^2-4xy+y^2-2x-4y+8=0$ 的圖形。

【說明】

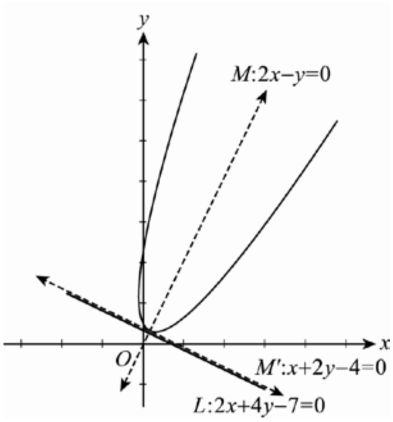
將 Γ 化成準標準式

$$\Gamma:\left(\frac{2x-y+\alpha}{\sqrt{5}}\right)^2=4c\cdot\left(\frac{x+2y+\beta}{\sqrt{5}}\right)$$

顯然可得 $\alpha=0,\ c=\dfrac{1}{2\sqrt{5}},\ \beta=-4$，即 Γ 可化成

$$\Gamma:\left(\frac{2x-y}{\sqrt{5}}\right)^2=4\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{x+2y-\frac{7}{2}}{\sqrt{5}}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5}}\right)$$

（準標準式），可知 Γ 的圖形為一拋物線。



其進一步的訊息如下：

① 正焦弦長 $4\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

② 對稱軸方程式為 $M:2x-y=0$

③ 頂線方程式為 $M':x+2y-4=0$

④ 頂點坐標為 M 與 M' 的交點 $V\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\right)$

⑤ 準線方程式為 $L:2x+4y-7=0$

⑥ L 與 M 的交點 $H\left(\dfrac{7}{10},\dfrac{7}{5}\right)$

⑦ 焦點坐標 F 為

$$F=2V-H=\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)-\left(\frac{7}{10},\frac{7}{5}\right)=\left(\frac{9}{10},\frac{9}{5}\right)$$

＊例題 3＊

若已知二元二次方程式

$\Gamma: x^2-6xy+9y^2-(k+2)x+(k^2+2)y+1=0$ 的圖形為兩平行線，求 k 之值。

【說明】

Γ 的圖形為兩平行線意謂 Γ 可化成

$$\Gamma:(x-3y+\alpha)^2=\beta \text{，其中 } \beta>0$$

比較 x 、 y 項係數及常數項可得方程式組

$$\begin{cases}2\alpha=-(k+2)\\ -6\alpha=k^2+2\\ \alpha^2-\beta=1\end{cases}$$

並解得 $k^2+2-3(k+2)=0 \Leftrightarrow k=-1$ 或 $k=4$ 。

當 $k=-1$ 時， $\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=\alpha^2-1<0$（不合）；

當 $k=4$ 時， $\alpha=-3,\ \beta=\alpha^2-1=8$ 。

此時

$$\Gamma:(x-3y-3)^2=8$$

圖形為兩平行線，所以 $k=4$ 。

＊例題 4＊

（取材自 92 年指考數學甲選填題第 D 題）

坐標平面上，當點 $P(x,y)$ 在曲線 $\Gamma: x^2+2xy+y^2-2x+6y+1=0$ 上變動時，求點 P 到直線 $l: x-y+4=0$ 的距離的最小值。

【分析】若直線 l 與 Γ 不相交且與準線平行，則所求最小值即為頂點（在對稱軸上）到直線 l 的距離，亦即頂線到直線 l 的距離。

【說明】

將 $\Gamma:(x+y)^2=2\left(x-3y-\frac{1}{2}\right)$ 化成

$$\Gamma:\left(\frac{x+y+1}{\sqrt{2}}\right)^2=4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

可知 Γ 的圖形為一拋物線，其頂點為對稱軸 $M: x+y+1=0$ 與頂線 $M': x-y=0$ 的交點 $V\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 。由於直線 $l: x-y+4=0$ 與準線 $x-y+1=0$ 平行，且準線在直線 l 與頂線之間，推得直線 l 與 Γ 不相交，於是當點 P 變動到頂點 $V\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 時，點 P 到直線 l 的距離之最小值為 $d(V,l)=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 。

底下，我們運用「拋物線的準標準式定理」，探討決定唯一一條拋物線的條件。當拋物線之對稱軸為鉛直線時，設拋物線之對稱軸為 $x-h=0$，準標準式為 $\Gamma:(x-h)^2=4c(y-k)$ ，其中 $c\neq 0$ ，此時仍需三個獨立條件才可決定唯一一條拋物線；當拋物線之對稱軸不是鉛直線時，設拋物線之對稱軸為 $y=mx+d$（其中 m 為其斜率），拋物線方程式為 $\Gamma:(mx-y+d)^2=4c(x+my+e)$ ，其中 $c\neq 0$，此時仍需四個獨立條件才可決定唯一一條拋物線。

＊例題 5＊

（取材自 94 年指考數學甲選擇題第 9 題）

有一條拋物線位於坐標平面之上半面（即其 y 坐標 ≥ 0 ），並與 x 軸、直線 $y=x-1$、直線 $y=-x-1$ 相切，則下列選項何者正確？

(1) 此拋物線的對稱軸必為 y 軸。

(2) 若此拋物線的對稱軸為 y 軸，則其焦距為 1。

(3) 此拋物線的頂點必在 x 軸上。

(4) 有不只一條拋物線滿足此條件。

【說明】

就對稱軸是否有斜率分別討論，將條件代入標準式或準標準式求解。

1. 當拋物線之對稱軸為鉛直線時：

   設拋物線之對稱軸為 $x-h=0$ ，準標準式為

   $$\Gamma:(x-h)^2=4c(y-k) \text{，其中 } c\neq 0 \text{ 。}$$

   若 Γ 與 x 軸相切，則頂點在 x 軸上，於是 $k=0$ ，此時 $\Gamma:(x-h)^2=4cy$ 。

   若 Γ 與直線 $y=x-1$ 相切，則方程式 $(x-h)^2=4c(x-1)$ 有重根，即 $x^2-2(h+2c)x+(h^2+4c)=0$ 有重根，於是

   $$h+c=1\cdots\cdots①$$

由 Γ 與直線 $y=-x-1$ 相切，可得

$$h-c=-1\cdots\cdots②$$

由 ①②解得 $h=0,\ c=1$，此時拋物線為

$\Gamma: x^2=4y$，其焦距為 1。

2. 當拋物線之對稱軸不是鉛直線時：

設拋物線之對稱軸為 $y=mx+d$（其中 m 為其斜率），拋物線方程式為

$\Gamma:(mx-y+d)^2=4c(x+my+e)$，其中 $c\neq 0$。

若 Γ 與 x 軸（$y=0$）相切（此時 $m\neq 0$），則方程式 $(mx+d)^2=4c(x+e)$ 有重根，即

$m^2x^2+2(md-2c)x+(d^2-4ce)=0$ 有重根，由判別式得 $(md-2c)^2-m^2(d^2-4ce)=0$，於是

$$c-md+m^2e=0\cdots\cdots③$$

由 Γ 與直線 $y=x-1$ 相切（此時 $m\neq 1$），得

$$(m+1)^2c-(m^2-1)(d+1)-(m-1)^2(m-e)=0\cdots\cdots④$$

由 Γ 與直線 $y=-x-1$ 相切(此時 $m\neq -1$)，得

$$(m-1)^2c+(m^2-1)(d+1)-(m+1)^2(m-e)=0\cdots\cdots⑤$$

由 ③④⑤解得

$$c=\frac{m(m-1)(m+1)}{m^2+1},\ e=\frac{2m}{m^2+1},\ d=\frac{3m^2-1}{m^2+1}，$$

此時拋物線方程式為

$$\Gamma:\left(mx-y+\frac{3m^2-1}{m^2+1}\right)^2=\frac{4m(m-1)(m+1)}{m^2+1}\left(x+my+\frac{2m}{m^2+1}\right)$$

（若拋物線 Γ 在上半平面，則對稱軸的斜率 $m>1$ 或 $m<-1$。）

此拋物線的相關訊息如下：

(1) 正焦弦長為 $\left|\dfrac{4m(m-1)(m+1)}{(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}\right|$

(2) 對稱軸方程式為 $M: mx-y+\dfrac{3m^2-1}{m^2+1}=0$

(3) 頂線方程式為 $M': x+my+\dfrac{2m}{m^2+1}=0$

(4) 頂點坐標為 M 與 M' 的交點為

$$V\left(\frac{-m(3m^2+1)}{(m^2+1)^2},\frac{m^2-1}{(m^2+1)^2}\right)$$

(5) 準線方程式為 $L: x+my+m=0$

(6) L 與 M 的交點為 $H\left(\dfrac{-4m^3}{(m^2+1)^2},\dfrac{-(m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}\right)$

(7) 焦點坐標為 $F=2V-H=\left(\dfrac{-2m}{m^2+1},\dfrac{m^2-1}{m^2+1}\right)$

＊例題 6＊

（取材自 92 年指考數學乙選填題第 C 題）

已知坐標平面上的四個點，

$$A(-1,2),\ B(0,0),\ C(1,2),\ D(x,y)$$

其中 D 為 $\overline{AB}$ 中點與 $\overline{BC}$ 中點的連線段的中點。設有一拋物線通過 $A,\ D,\ C$ 三點，求此拋物線的焦點坐標。

【說明】

$\overline{AB}$ 中點為 $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$，$\overline{BC}$ 中點為 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，$D$ 點坐標為 $(0,1)$。就對稱軸是否有斜率分別討論，將條件代入標準式或準標準式求解。

1. 當拋物線之對稱軸為鉛直線時：

設拋物線之對稱軸為 $x-h=0$，方程式為

$\Gamma:(x-h)^2=4c(y-k)$，其中 $c\neq 0$

將 $A(-1,2)$，$C(1,2)$，$D(0,1)$ 三點分別代入

方程式得 $\begin{cases}(-1-h)^2=4c(2-k)\\(1-h)^2=4c(2-k)\\h^2=4c(1-k)\end{cases}$

解得 $h=0,\ k=1,\ c=\dfrac{1}{4}$，此時拋物線為

$\Gamma: x^2=y-1$，其正焦弦長為 1，頂點坐標為 $V(0,1)$，焦點坐標為 $F\left(0,\dfrac{5}{4}\right)$。

2. 當拋物線之對稱軸不是鉛直線時：

設拋物線之對稱軸為 $y=mx+d$（其中 m 為其斜率），拋物線方程式為

$\Gamma:(mx-y+d)^2=4c(x+my+e)$，其中 $c\neq 0$

將 $A(-1,2),\ C(1,2),\ D(0,1)$ 三點分別代入方

程式得$\begin{cases}(-m-2+d)^2=4c(-1+2m+e)\\(m-2+d)^2=4c(1+2m+e)\\(d-1)^2=4c(m+e)\end{cases}$

可解得

$$c=\frac{m(m-1)(m+1)}{4(m^2+1)},$$
$$d=\frac{5m^2+3}{2(m^2+1)},$$
$$e=\frac{(3m^2+1)^2}{4m(m-1)(m+1)(m^2+1)}-m,$$

此時拋物線方程式為

$$\Gamma:\left(mx-y+\frac{5m^2+3}{2(m^2+1)}\right)^2=\frac{m(m-1)(m+1)}{m^2+1}\times\left(x+my+\frac{(3m^2+1)^2}{4m(m-1)(m+1)(m^2+1)}-m\right)$$

（對稱軸的斜率不可能為 $m=0,\ 1,\ -1$，即對稱軸不平行 $\overleftrightarrow{AC},\ \overleftrightarrow{CD},\ \overleftrightarrow{AD}$ ）。

以 $m=2$ 為例，

拋物線 $\Gamma:\left(2x-y+\frac{23}{10}\right)^2=\frac{6}{5}\left(x+2y-\frac{71}{120}\right)$，將它化成準標準式

$$\Gamma:\left(\frac{2x-y+\frac{23}{10}}{\sqrt{5}}\right)^2=4\cdot\frac{3}{10\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{x+2y-\frac{35}{120}}{\sqrt{5}}-\frac{\frac{3}{10}}{\sqrt{5}}\right)$$

可得下列訊息：

(1) 對稱軸為 $M:20x-10y+23=0$

(2) 頂線為 $120x+240y-71=0$

(3) 頂點坐標為 $V\left(-\frac{481}{600},\frac{209}{300}\right)$

(4) 準線方程式為 $L:120x+240y-35=0$

(5) L 與 M 的交點為 $H\left(-\frac{517}{600},\frac{173}{300}\right)$

(6) 焦點坐標為 $F\left(-\frac{89}{120},\frac{49}{60}\right)$

後記：

本文利用「拋物線的準標準式」提出關於拋物線的看法與解析，不論「94 年指考數學甲選擇題第 9 題」或「92 年指考數學乙選填題第 C 題」，解題的關鍵觀念均為：「若拋物線之對稱軸平行坐標軸，則由三個獨立條件可決定唯一一條拋物線；否則需要四個獨立條件才能決定唯一一條拋物線。」因此，在解題策略上，我們針對對稱軸的斜率，寫出符合給定條件的拋物線通解，並舉一特例作說明。一些出版社或雜誌也有相關的討論，羅列如下：

1. 南一「高中數學新視界第 3 期」（代數解法）。
2. 南一「教學快訊之 94 年指考解析」（至少可找到三條拋物線）。
3. 翰林「數學天地第 19 期：拋物線的爭議」（給準線斜率 m ，其中 $-1<m<1$，就有一條拋物線）。
4. 龍騰「數學新天地第 12 期：用 Lambert 定理作拋物線」（在上半單位圓取一點為焦點，由幾何作圖得出拋物線）。
5. 龍騰「數學新天地第 10 期：誰怕坐標平移旋轉」。
6. 中研院「數學傳播第 117 期：94 年指定科目考試數學的一疑題（以明）及 94 數學(甲)指考中的拋物線（劉紹正）」。

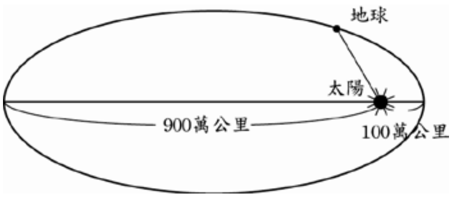
二次曲線上哪個點離焦點最近？

◎莊勤忠、南婷婷／台北市立中山女高

自古以來，太陽一直與人類作息密切相關，更是維持我們人類生活的重要關鍵，也因此引發許多宗教及科學的熱烈討論。眾所皆知，伽利略便為了堅持自己的理念，蒙上不白之冤；克卜勒的行星三大運動定理為行星運動奠定了基礎，更加說明地球運行的軌道為橢圓，而太陽位於其中一個焦點上。

在某次的課堂教學中，進行到一個練習題，題意如下：

某一行星運轉軌道為一橢圓，且以太陽為焦點。設此行星與太陽最近距離為 100 萬公里，最遠距離為 900 萬公里，當行星與太陽連線和橢圓長軸成 $60°$ 夾角時，如下圖所示。



試問此時行星與太陽的距離為多少萬公里?（此為翰林版高級中學數學第四冊課本 P.42 的隨堂練習）

圖中所繪最近點及最遠點即為長軸的兩頂點，課本對此事實卻著墨不多，但仍免不了讓人去懷疑這樣的事實是否為真。對自然組的學生而言，或許就默認這樣的理論方便在物理上去解題；但是對社會組的學生來說，就不是一件很自然的事情了。在教學過程中，徒手繪製的橢圓並不精確，焦點的位置也略有偏差，以目測的方式可能會讓人誤以為橢圓上與焦點最近的點不是長軸的頂點，但是這樣的結論與天文上的認知有所不同。因此接下來的主題，便是討論橢圓上的哪個動點，與焦點的距離是最近的？同樣地，其他的圓錐曲線：拋物線與雙曲線，是否也會有類似的特質呢？

以下，我們的證明方法相當簡單，不論是橢圓、拋物線、雙曲線，都只用了基本的兩個觀念，一個是圓錐曲線的幾何定義，另一個是三角不等式，是很適合給學生做為思考、練習及統整的題材。

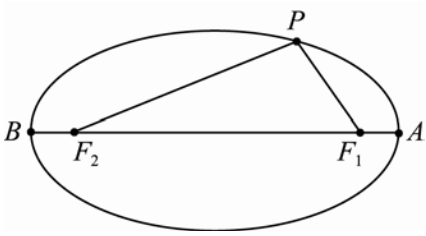
《主題 1》

橢圓上與焦點最近的點為長軸頂點，即：

證明橢圓上任意點 P ，皆滿足 $\overline{PF_1} > \overline{AF_1}$ ，其中 $P \neq A$ 。

〔證〕

如圖，



取點 A 為橢圓右半部的頂點，點 P 為橢圓上任意點。所以點 A 和點 P 滿足

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a,\ \overline{AF_1} + \overline{AF_2} = 2a\,.$$

因此，

$$\begin{aligned}\overline{PF_2} &= 2a - \overline{PF_1} ......(1)\\ \overline{AF_2} &= 2a - \overline{AF_1} ......(2)\end{aligned}.$$

在△ PF_1F_2 中，因為三角形兩邊之差小於第三邊，所以得到

$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} < \overline{F_1F_2}\,.$$

又因為 $\overline{F_1F_2} = \overline{AF_2} - \overline{AF_1}$ ，所以得到

$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} < \overline{AF_2} - \overline{AF_1}\,.$$

將(1)(2)式代入得到

$$\left(2a-\overline{PF_1}\right)-\overline{PF_1}<\left(2a-\overline{AF_1}\right)-\overline{AF_1}$$
$$\Rightarrow\ 2a-2\overline{PF_1}<2a-2\overline{AF_1}$$
$$\Rightarrow\ -2\overline{PF_1}<-2\overline{AF_1}$$
$$\Rightarrow\ \overline{PF_1}>\overline{AF_1},$$

故得證。

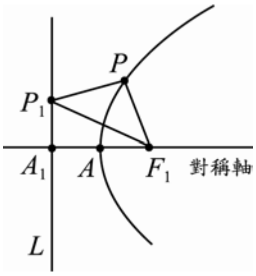
《主題 2》

拋物線上與焦點最近的點為頂點，即：

證明拋物線上任意點 P ，皆滿足 $\overline{PF_1}>\overline{AF_1}$ ，其中 $P\neq A$ 。

〔證〕

如圖，



點 A 為拋物線上的頂點及點 P 為拋物線上任一點，所以點 A 和點 P 滿足

$$\overline{PF_1}=d\left(P,L\right)=\overline{PP_1},\overline{AF_1}=d\left(A,L\right)=\overline{AA_1}\ .$$

在△ PP_1F_1 中，因為三角形兩邊之和大於第三邊，所以

$$\overline{P_1F_1}<\overline{PF_1}+\overline{PP_1}=2\overline{PF_1}\ .$$

又因為△ $A_1P_1F_1$ 為直角三角形，所以

$$\text{斜邊 } \overline{P_1F_1}>\text{股 } \overline{A_1F_1}=2\overline{AF_1}\ .$$

因此，

$$2\overline{PF_1}=\overline{PF_1}+\overline{PP_1}>\overline{P_1F_1}>\overline{A_1F_1}=2\overline{AF_1}\ ,$$

即

$$2\overline{PF_1}>2\overline{AF_1}\ \Rightarrow\ \overline{PF_1}>\overline{AF_1}\ ,$$

故得證。

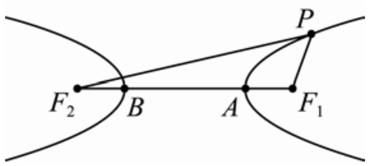
《主題 3》

雙曲線上與焦點最近的點為貫軸頂點，即：

證明雙曲線上任意點 P ，皆滿足 $\overline{PF_1}>\overline{AF_1}$ ，其中 $P\neq A$ 。

〔證〕

如圖，



取點 A 為雙曲線右半部上的頂點及點 P 為雙曲線右半部上的任意點, 所以點 A 和點 P 滿足

$$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a,\overline{AF_2}-\overline{AF_1}=2a\ .$$

因此，

$$\begin{array}{l}\overline{PF_2}=2a+\overline{PF_1}\text{......(1)}\\ \overline{AF_2}=2a+\overline{AF_1}\text{......(2)}\end{array}.$$

在△ PF_1F_2 中，因為三角形兩邊之和大於第三邊，所以得到

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}>\overline{F_1F_2}\ .$$

又因為 $\overline{F_1F_2}=\overline{AF_1}+\overline{AF_2}$ ，所以得到

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}>\overline{AF_1}+\overline{AF_2}\ .$$

將(1)(2)式代入得到

$$\overline{PF_1}+\left(2a+\overline{PF_1}\right)>\overline{AF_1}+\left(2a+\overline{AF_1}\right)$$
$$\Rightarrow 2a+2\overline{PF_1}>2a+2\overline{AF_1}$$
$$\Rightarrow 2\overline{PF_1}>2\overline{AF_1}$$
$$\Rightarrow \overline{PF_1}>\overline{AF_1},$$

故得證。

以上的證明僅供參考。

我們提供的方式是使用最基本的定理及計算來解決問題，其實證明的方法並不唯一，還可以利用曲線上的參數式，透過三角函數一連串繁複的計算後得到。或者分別計算曲線的焦半徑；或者以焦點為圓心作圓等概念，也可以得到相同的結果。或者你也有不同的想法呢？

圓錐曲線作圖法舉例

◎趙文敏／台灣師範大學數學系

幾何教學的困難點之一，就是教師不容易繪製準確的幾何圖形以提供教師作解說或學生觀察之用。隨著電腦科技的突飛猛進及幾何作圖軟體的開發，繪製準確幾何圖形的工作可以由電腦來代勞，而電腦使用者所要做的工作則是規劃各種指揮電腦繪製幾何圖形的方法。例如：根據拋物線的定義，至定點 F 及定直線 l 等距離的所有點構成一拋物線；那麼，要繪製拋物線就需要知道：一、如何作出至 F 及 l 等距離的單一的點？二、如何利用作圖軟體的「軌跡」功能將前述單一的點轉化成拋物線？此外，根據拋物線的其它性質，也可以使用其他方法來繪製拋物線。因此，對曲線的性質所知愈多，繪製曲線的方法也愈多。

在以往的幾何教材中，由於受到作圖工具的限制及考試方式的影響，幾何作圖的教學並沒有受到應有的重視，教材中屬於作圖教學的部分非常少。即使在幾何作圖軟體方便好用的今天，幾何教材中也沒有使用作圖軟體繪製幾何圖形的教材出現，這種現象難免可惜。在本文中，筆者舉出二十種繪製圓錐曲線的方法，提供給有興趣的讀者參考。根據這些方法，利用作圖軟體都可以在電腦上繪製圓錐曲線。對初學圓錐曲線的學生來說，能在電腦螢幕上作出這些圖形，應該是一件令人興奮的事吧！

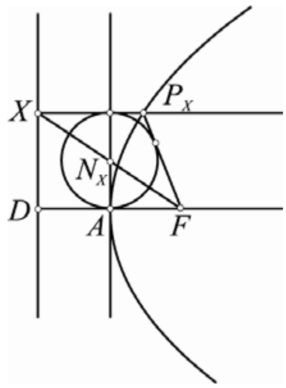
本文中的圓錐曲線作圖法分成四部分：一、錐線作圖法；二、拋物線作圖法；三、橢圓作圖法；四、雙曲線作圖法。在每一種作圖法中，先介紹各種作圖法供讀者練習，接著給出各作圖法的理論根據或證明。

一、錐線作圖法舉例

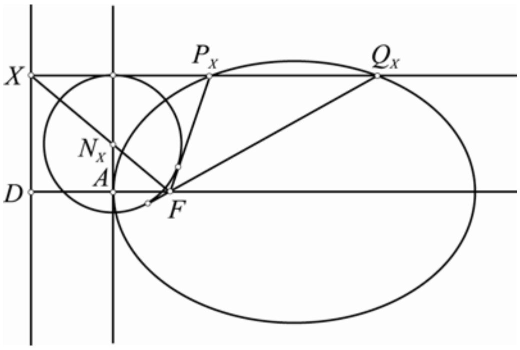
1. 錐線作圖法一(已知焦點、準線與離心率)：

給定一點 F 、一直線 l 及一正數 e ，且點 F 不在直線 l 上。

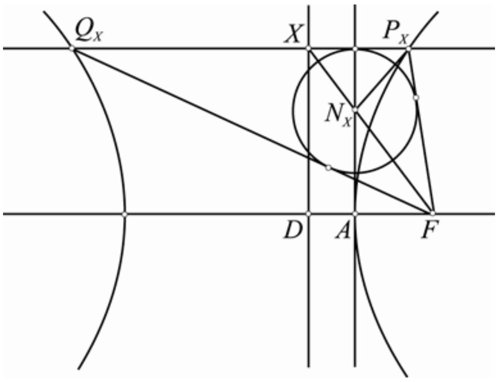
設點 F 至直線 l 的垂足為 D，在 $\overline{FD}$ 上作點 A 使得 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AD}}=e$ ，設過點 A 而與 $\overline{FD}$ 垂直的直線為 l_0。對於直線 l 上異於 D 的任意點 X ，過 X 作 l 的垂直線 l_X ，設線段 $\overline{FX}$ 與直線 l_0 交於點 N_X ，以點 N_X 為圓心作一圓 c_X 與直線 l_X 相切，過點 F 作圓 c_X 的切線。當點 X 在直線 l 上變動時，點 F 至圓 c_X 的切線與直線 l_X 的交點 P_X 、 Q_X （可能只有一點）所成的圖形，就是以點 F 為焦點，直線 l 為對應準線， e 為離心率的錐線。



《圖一(1)》



《圖一(2)》



《圖一(3)》

【原理】

連接 $\overline{P_X N_X}$ （參看圖一(3)）

因為 $\angle XP_X N_X = \angle FP_X N_X$，所以依三角形內角平分線的性質，可知

$$\frac{\overline{P_X F}}{\overline{P_X X}} = \frac{\overline{N_X F}}{\overline{N_X X}}.$$

另一方面，因為 $\overline{AN_X}$ 與 $\overline{DX}$ 平行，所以可得

$$\frac{\overline{N_X F}}{\overline{N_X X}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = e.$$

由此可知：

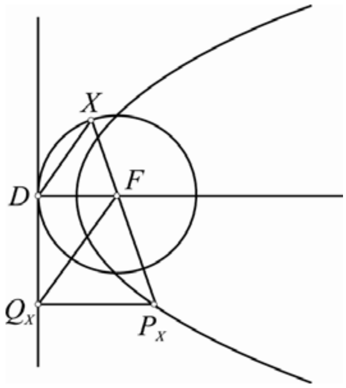
$$\frac{P_X\text{至焦點}F\text{的距離}}{P_X\text{至準線}l\text{的距離}} = \frac{\overline{P_X F}}{\overline{P_X X}} = e.$$

請注意！因為上述作圖法中只考慮直線 l 上異於 D 的任意點 X ，所以所得的點 P_X 與 Q_X 不會在直線 FD 上。換言之，交點 P_X 、 Q_X 所成的圖形 Γ，其實是上述錐線去掉直線 FD 上的（一個或兩個）頂點。（參看圖一）

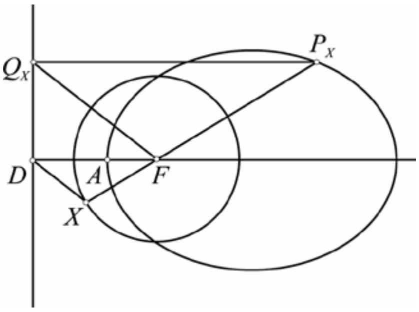
2. 錐線作圖法二(已知焦點、準線與離心率)：

給定一點 F 、一直線 l 及一正數 e，且點 F 不在直線 l 上。

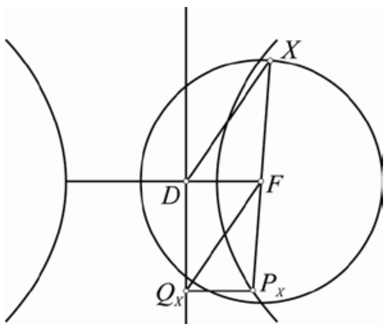
設點 F 至直線 l 的垂足為 D ，以點 F 為圓心、 $e\cdot\overline{FD}$ 為半徑作一圓 c 。對於圓 c 上（但不在直線 l 上，也不在直線 FD 上）的任意點 X ，過 F 作 $\overline{DX}$ 的平行線 l_X 與直線 l 交於點 Q_X，設過點 Q_X 而與 l 垂直的直線交直線 FX 於點 P_X。當點 X 在圓 c 上變動時，點 P_X 所成的圖形就是以點 F 為焦點、直線 l 為對應準線、 e 為離心率的錐線。



《圖二(1)》



《圖二(2)》



《圖二(3)》

【原理】

因為$\triangle FQ_X P_X \sim \triangle XDF$（參看圖二）

所以，可得

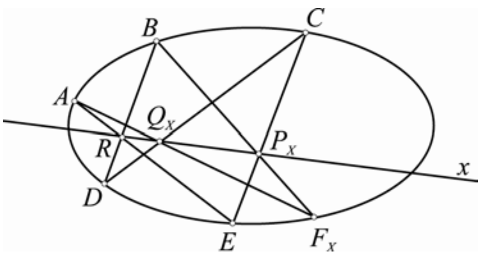
$$\frac{P_X\text{至焦點}F\text{的距離}}{P_X\text{至準線}l\text{的距離}}=\frac{\overline{P_X F}}{\overline{P_X Q_X}}=\frac{\overline{FX}}{\overline{FD}}=e.$$

請注意！因為上述作圖法中只考慮在圓c上而不在直線FD上的任意點X，故所得的點P_X不會在直線FD上。換言之，交點P_X所成的圖形Γ，其實是上述錐線去掉直線FD上的（一個或兩個）頂點。另一方面，若圓c與直線l不相交，則上述錐線是橢圓；若圓c與直線l相切，則上述錐線是拋物線；若圓c與直線l有兩相異交點，則上述錐線是雙曲線。當點X是圓c與直線l的交點時，沒有對應的點Q_X與點P_X，或是說，此時的點P_X是上述拋物線或雙曲線上的無窮遠點。（參看圖二）

3. 錐線作圖法三(已知五點)：

給定平面上的五個相異點A、B、C、D與E，且其中任意三點都不共線。

設直線AE與BD交於點R。對於通過點R的每一條直線x，設直線CD與直線x相交於點Q_X、直線CE與直線x相交於點P_X、直線AQ_X與直線BP_X相交於點F_X。當直線x在過點R的線束中變動時，點F_X所成的圖形就是過五點A、B、C、D與E的錐線。（參看圖三）



《圖三》

作圖法三中所作的錐線，到底是圓、橢圓、雙曲線或拋物線，這是依給定的五個點的位置所決定的，而無法像作圖法一和作圖法二做清楚地分類；而且僅用肉眼觀察它們的位置，也不容易判斷它們所決定的錐線是哪一種。例如：給定四點$A(0,1)$、$B(0,-1)$、$C(1,2)$與$D(1,-2)$。若將第五個點選為下述四點之一（請注意：下述四點彼此的距離最大值是0.3）

$$E_1\left(-\frac{1}{5},0\right);\ E_2(2-\sqrt{5},0);$$

$$E_3\left(-\frac{1}{3},0\right);\ E_4\left(-\frac{1}{2},0\right);$$

則根據第五點的四種不同選擇，所決定的錐線分別為橢圓、圓、拋物線、雙曲線。

【原理】

作圖法三就是一般所稱的「五點決定一錐線」，此作圖法的理論根據是下面的Pascal定理。下面我們只寫出Pascal定理的內容，而將證明略去。

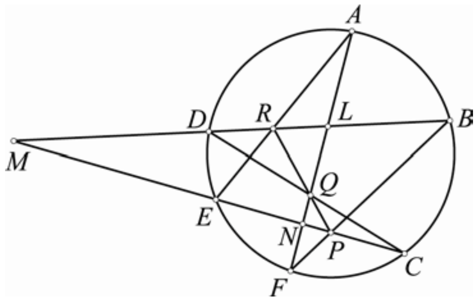
【Pascal定理】

設Γ為圓或橢圓或雙曲線或拋物線，而A、B、C、D、E與F為Γ上六相異點。

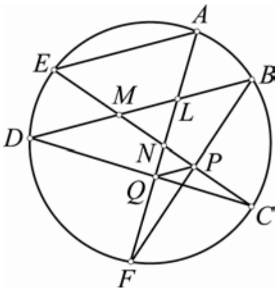
(1) 若直線BF與直線CE交於點P、直線CD與直線AF交於點Q、直線AE與直線BD交於點R，則點P、Q與R共線。

(2) 若直線BF與直線CE交於點P、直線CD與直線AF交於點Q、直線AE與直線BD平行，則直線PQ與直線AE、直線BD平行。

(3) 若直線BF與直線CE平行、且直線CD與直線AF平行，則直線AE與直線BD也平行。



《圖四(1)》



《圖四(2)》

根據 Pascal 定理如何引出錐線作圖法三呢？它們之間的連結是這樣的;已知錐線上的六個相異點 A、B、C、D、E 與 F，依 Pascal 定理(1)，可得出一直線 PQR。當其中的五個點 A、B、C、D 與 E 固定而第六個點 F 在錐線上變動時，點 P 與點 Q 也隨著變動，但點 R 卻固定不動。於是，直線 PQR 也跟著變動但卻保持通過點 R。既然在 A、B、C、D 與 E 固定時，由錐線上的每一個點 F 可得出過點 R 的一條直線，我們將由點 F 得出過點 R 一直線的過程逆向操作，亦即：由過點 R 的每一條直線 x 來得出錐線上的一個點 F_X，不同的直線可得出不同的點，這就是錐線作圖法三的意義所在了。

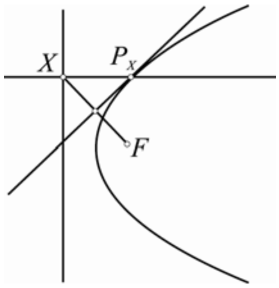
將錐線作圖法三的條件推廣，可以得出其它的錐線作圖法。例如：將「已知五點」換成「已知四點及一切線」、「已知三點及二切線」、「已知二點及三切線」、「已知一點及四切線」、「已知五切線」等，而且有些情形的作圖法不只一種。

二、拋物線作圖法舉例

1. 拋物線作圖法一(已知焦點與準線)：

給定一點 F、一直線 l，且點 F 不在直線 l 上。

對於直線 l 上每個點 X，作 $\overline{FX}$ 的垂直平分線；又過點 X 作直線 l 的垂直線。設此垂直平分線與垂直線相交於點 P_X，則當點 X 在直線 l 上變動時，點 P_X 所描繪的圖形就是以點 F 為焦點、直線 l 為準線的拋物線。



《圖五》

【原理】

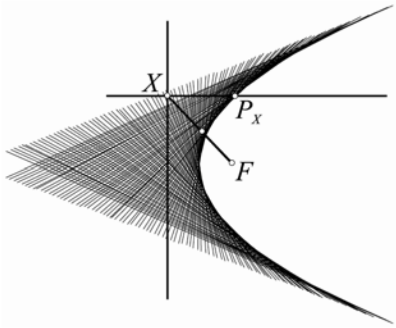
因為點 P_X 在 $\overline{FX}$ 的垂直平分線上，所以，$\overline{P_X F} = \overline{P_X X}$。因為直線 $P_X X$ 與直線 l 垂直於點 X，所以，點 P_X 至直線 l 的距離為 $\overline{P_X X}$。於是，點 P_X 在以點 F 為焦點、直線 l 為準線的拋物線上。

請注意！前面作圖法中 $\overline{FX}$ 的垂直平分線，就是所作拋物線過點 P_X 的切線。所以，又可得下述拋物線作圖法二。

2. 拋物線作圖法二(已知焦點與準線)：

給定一點 F、一直線 l，且點 F 不在直線 l 上。

對於直線 l 上每個點 X，作 $\overline{FX}$ 的垂直平分線 l_X，則當點 X 在直線 l 上變動時，垂直平分線 l_X 所包絡的圖形就是以點 F 為焦點、直線 l 為準線的拋物線。

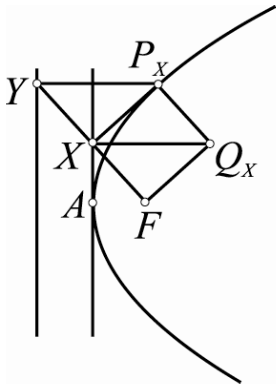


《圖六》

3. 拋物線作圖法三(已知焦點與頂點)：

給定兩相異點 F 與 A 。

過點 A 作直線 AF 的垂直線 l_0。對於直線 l_0 上每個點 X ，過點 X 作一個矩形 XFQ_XP_X 使得直線 XQ_X 與直線 l_0 垂直，則當點 X 在直線 l_0 上變動時，點 P_X 所描繪的圖形就是以點 F 為焦點、點 A 為頂點的拋物線。



《圖七》

【原理】

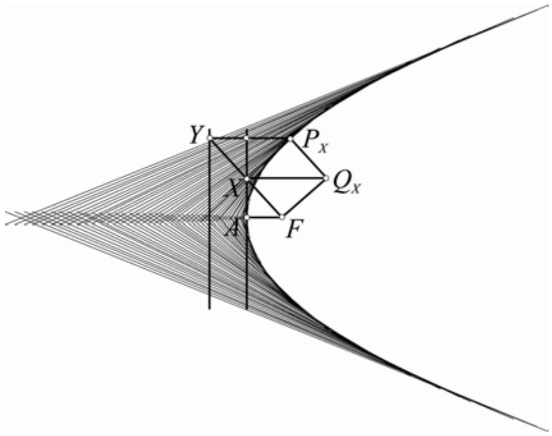
作一直線 l 與直線 l_0 平行，使得直線 l 和點 F 在直線 l_0 的異側而且平行線 l 與 l_0 的距離等於 $\overline{AF}$ 。設射線 $\overrightarrow{FX}$ 與直線 l 相交於 Y ，因為平行線 l 與 l_0 的距離等於 $\overline{AF}$ ，所以點 X 是 $\overline{FY}$ 的中點且直線 XP_X 是 $\overline{FY}$ 的垂直平分線。另一方面，因為 XFQ_XP_X 是矩形，所以，$\overline{P_XQ_X}$ 與 $\overline{FX}$ 平行且等長。於是，$\overline{P_XQ_X}$ 與 $\overline{XY}$ 平行且等長，由此知 YXQ_XP_X 是平行四邊形且 $\overline{YP_X}$ 與 $\overline{XQ_X}$ 平行。因為直線 XQ_X 與直線 l_0 垂直，所以直線 YP_X 與直線 l 垂直。依前述拋物線作圖法一，可知點 P_X 在以點 F 為焦點、直線 l 為準線的拋物線上，亦即：點 P_X 在以點 F 為焦點、點 A 為頂點的拋物線上。

請注意！前面作圖法中的直線 XP_X，就是所作拋物線過點 P_X 的切線。所以，又可得下述拋物線作圖法四。

4. 拋物線作圖法四(已知焦點與頂點)：

給定兩相異點 F 與 A 。

過點 A 作直線 AF 的垂直線 l_0。對於直線 l_0 上每個點 X ，過點 X 作一直線 l_X 與 $\overline{FX}$ 垂直，則當點 X 在直線 l_0 上變動時，直線 l_X 所包絡的圖形就是以點 F 為焦點、點 A 為頂點的拋物線。

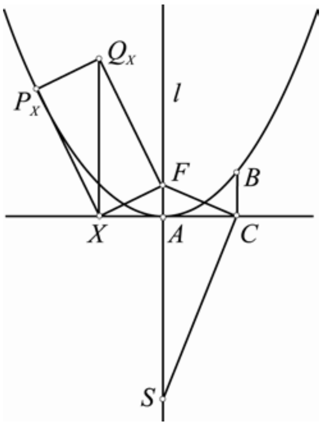


《圖八》

5. 拋物線作圖法五(已知軸、頂點與另一點)：

給定一直線 l 及其上一點 A，另給定不在直線 l 上、也不在點 A 至直線 l 的垂直線上的一點 B 。

設點 A 至直線 l 的垂直線為 l_0、且點 B 至直線 l_0 的垂足為點 C 。在直線 l 上作出點 S 使得：點 S 與點 B 在直線 l_0 異側，且 $\overline{AS} = 4\overline{BC}$ 。過點 C 作直線 CS 的垂直線，設此垂直線與直線 l 交於點 F ，則以點 A 為頂點、點 F 為焦點（依拋物線作圖法三所作）的拋物線就是以直線 l 為軸、點 A 為頂點且通過點 B 的拋物線。



《圖九》

【原理】

因為$\triangle CSF$是直角三角形且$\angle SCF$是直角，所以依相似三角形的性質，可知

$$\overline{AC}^2=\overline{AS}\times\overline{AF}=4\overline{BC}\times\overline{AF}.$$

因為

$$\begin{aligned}\overline{BF}&=\sqrt{\overline{AC}^2+\left|\overline{AF}-\overline{BC}\right|^2}\\&=\sqrt{4\overline{BC}\times\overline{AF}+\left(\overline{AF}-\overline{BC}\right)^2}\\&=\overline{AF}+\overline{BC}.\end{aligned}$$

另一方面，設以點A為頂點、點F為焦點所作拋物線的準線為直線l_1，則點A至準線l_1的距離為$\overline{AF}$。因此，點B至準線l_1的距離等於$\overline{AF}+\overline{BC}$。

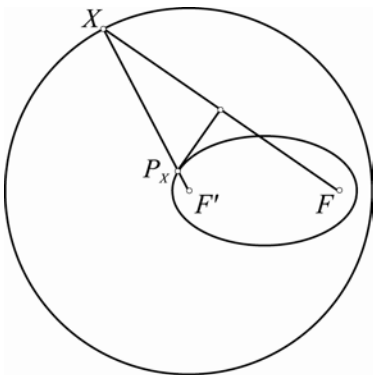
對於拋物線的作圖法，還有其他可行的條件。例如：「已知三點及軸的方向」、「已知兩點、一切線及軸的方向」、「已知二點及二切線」、「已知一點及三切線」、「已知四切線」等，而且有些情形的作圖法不只一種。此外，除了以直線來包絡拋物線外，也可以用圓來包絡拋物線。

三、橢圓作圖法舉例

1. 橢圓作圖法一(已知兩焦點及長軸長)：

給定兩相異點F與F'、又給定一正數a，且$\overline{FF'}<2a$。

以點F'為圓心、$2a$為半徑作一圓Γ。對於圓Γ上每個點X，作$\overline{FX}$的垂直平分線；又連接線段$\overline{F'X}$。設此垂直平分線與$\overline{F'X}$相交於點P_X，則當點X在圓Γ上變動時，點P_X所描繪的圖形是以點F及點F'為焦點、長軸長等於$2a$的橢圓。



《圖十》

【原理】

因為$\overline{F'X}>\overline{F'F}$，所以$\overline{FX}$的垂直平分線必與$\overline{F'X}$相交。因為點$P_X$在$\overline{FX}$的垂直平分線上，所以$\overline{P_XF}=\overline{P_XX}$。於是，得

$$\overline{P_XF}+\overline{P_XF'}=\overline{P_XX}+\overline{P_XF'}=\overline{F'X}=2a.$$

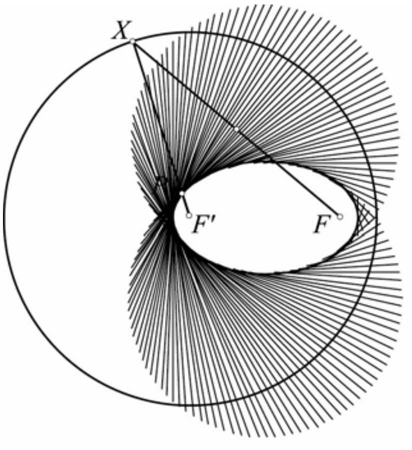
於是，點P_X在以點F及點F'為焦點、長軸長等於$2a$的橢圓上。

請注意！前面作圖法中$\overline{FX}$的垂直平分線，就是所作橢圓過點P_X的切線。所以，又可得下述橢圓作圖法二。

2. 橢圓作圖法二(已知兩焦點及長軸長)：

給定兩相異點 F 與 F' 、又給定一正數 a ，且 $\overline{FF'} < 2a$ 。

以點 F' 為圓心、 $2a$ 為半徑作一圓 Γ 。對於圓 Γ 上每個點 X ，作 $\overline{FX}$ 的垂直平分線 l_X ，則當點 X 在圓 Γ 上變動時，垂直平分線 l_X 所包絡的圖形就是以點 F 及點 F' 為焦點、長軸長等於 $2a$ 的橢圓。

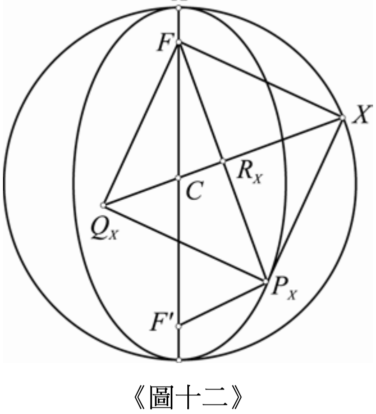


《圖十一》

3. 橢圓作圖法三(已知一焦點、一頂點與中心)：

給定共線三相異點 F 、 A 與 C ，且 $\overline{CF} < \overline{CA}$ 。

以點 C 為圓心、 $\overline{CA}$ 為半徑作一圓 Γ 。對於圓 Γ 上每個點 X ，過點 X 作一個矩形 XFQ_XP_X 使得直線 XQ_X 通過圓 Γ 的圓心 C ，則當點 X 在圓 Γ 上變動時，點 P_X 所描繪的圖形就是以點 F 為一焦點、點 A 為長軸上一頂點、點 C 為中心的橢圓。



《圖十二》

【原理】

設矩形 XFQ_XP_X 的兩對角線 $\overline{XQ_X}$ 與 $\overline{FP_X}$ 相交於點 R_X ，則 R_X 也是 $\overline{FX}$ 的垂直平分線與直線 CX 的交點。因為 $\overline{CX} > \overline{CF}$ ，所以 $\overline{FX}$ 的垂直平分線必與 $\overline{CX}$ 相交，亦即：點 R_X 在 $\overline{CX}$ 上。又設點 F 對點 C 的對稱點為 F' ，則得

$$\begin{aligned}\overline{P_XF}+\overline{P_XF'} &= 2\overline{R_XF}+2\overline{R_XC}\\ &= 2\overline{R_XX}+2\overline{R_XC}=2\overline{CX}=2\overline{CA}.\end{aligned}$$

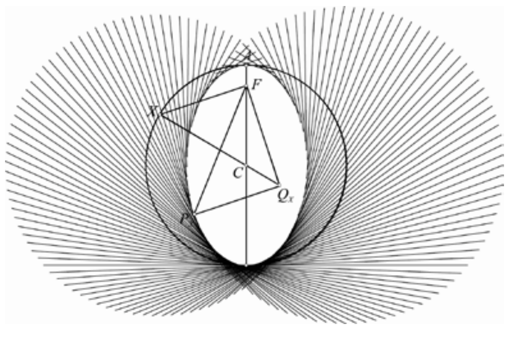
於是，點 P_X 在以點 F 及點 F' 為焦點、長軸長等於 $2\overline{CA}$ 的橢圓上。因為點 C 是兩焦點所連線段的中點，所以點 C 是此橢圓的中心。因為點 A 在中心與焦點的連線上，且與中心 C 的距離等於橢圓長軸長的一半，所以點 A 是此橢圓長軸上的一頂點。於是，點 P_X 在以點 F 為一焦點、點 A 為長軸上一頂點、 C 為中心的橢圓上。

請注意！前面作圖法中的直線 XP_X ，就是所作橢圓過點 P_X 的切線。所以，又可得下述橢圓作圖法四。

4. 橢圓作圖法四(已知一焦點、一頂點與中心)：

給定共線三相異點 F 、 A 與 C ，且 $\overline{CF} < \overline{CA}$ 。

以點 C 為圓心、 $\overline{CA}$ 為半徑作一圓 Γ 。對於圓 Γ 上每個點 X ，過點 X 作 $\overline{FX}$ 的垂直線 l_X ，則當點 X 在圓 Γ 上變動時，直線 l_X 所包絡的圖形就是以點 F 為一焦點、點 A 為長軸上一頂點、點 C 為中心的橢圓。



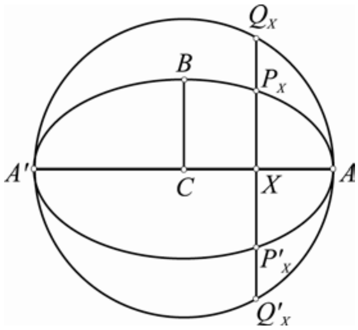
《圖十三》

5. 橢圓作圖法五

(已知長軸上一頂點、短軸上一頂點與中心):

給定三相異點 A 、 B 與 C ，且 $\overline{CA} \perp \overline{CB}$ 、 $\overline{CA} > \overline{CB}$ 。

以點 C 為圓心、 $\overline{CA}$ 為半徑作一圓 Γ ，又作點 A 對點 C 的對稱點 A' 。對於 $\overline{AA'}$ 上每個點 X ，過 X 作 $\overline{AA'}$ 的垂直線與圓 Γ 交於點 Q_X 與 Q'_X ，以點 X 為伸縮中心將點 Q_X 與 Q'_X 縮小 $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$ 倍，分別得出點 P_X 與 P'_X ，則當點 X 在 $\overline{AA'}$ 上變動時，點 P_X 與 P'_X 所描繪的圖形是以點 A 為長軸上一頂點、點 B 為短軸上一頂點、點 C 為中心的橢圓。



《圖十四》

【原理】

因為點 Q_X 與 Q'_X 在圓 Γ 上且 $\overline{Q_X X} \perp \overline{AA'}$，所以，得

$$\overline{CX}^2 + \overline{Q_X X}^2 = \overline{CA}^2 .$$

因為 $\overline{P_X X} = \left(\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA}}\right)\overline{Q_X X}$ 或 $\overline{Q_X X} = \left(\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\right)\overline{P_X X}$ ，

所以，得

$$\overline{CX}^2 + \frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2}\overline{P_X X}^2 = \overline{CA}^2 \text{ 或 } \frac{\overline{CX}^2}{\overline{CA}^2} + \frac{\overline{P_X X}^2}{\overline{CB}^2} = 1 .$$

選取一坐標系，使得直線 CA 為 x 軸、直線 CB 為 y 軸，則上式表示點 P_X 的坐標 (x, y) 滿足

$$\frac{x^2}{\overline{CA}^2} + \frac{y^2}{\overline{CB}^2} = 1 .$$

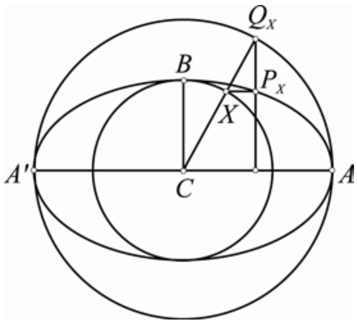
點 P'_X 也有相同的情形。

6. 橢圓作圖法六

(已知長軸上一頂點、短軸上一頂點與中心):

給定三相異點 A 、 B 與 C ，且 $\overline{CA} \perp \overline{CB}$ 、 $\overline{CA} > \overline{CB}$ 。

以點 C 為圓心、 $\overline{CA}$ 為半徑作一圓 Γ_A，又以點 C 為圓心、 $\overline{CB}$ 為半徑作一圓 Γ_B 。對於小圓 Γ_B 上每一點 X ，若射線 $\overrightarrow{CX}$ 與大圓 Γ_A 交於點 Q_X ，過點 X 作一直線與直線 CA 平行、過點 Q_X 作一直線與直線 CA 垂直，設平行線與垂直線的交點為 P_X ，則當點 X 在小圓 Γ_B 上變動時，點 P_X 所描繪的圖形是以點 A 為長軸上一頂點、點 B 為短軸上一頂點、點 C 為中心的橢圓。



《圖十五》

【原理】

選取一坐標系，使得直線 CA 為 x 軸、直線 CB 為 y 軸。若以 $\overrightarrow{CA}$ 為始邊、 $\overrightarrow{CX}$ 為終邊的有向角為 θ ，則

點 X 的坐標為 $X\left(\overline{CB}\cos\theta, \overline{CB}\sin\theta\right)$ 、

點 Q_X 的坐標為 $Q_X\left(\overline{CA}\cos\theta, \overline{CA}\sin\theta\right)$ 、

點 P_X 的坐標為 $P_X\left(\overline{CA}\cos\theta, \overline{CB}\sin\theta\right)$ 。

由此可知：點 P_X 的坐標 (x, y) 滿足

$$\frac{x^2}{\overline{CA}^2} + \frac{y^2}{\overline{CB}^2} = 1 .$$

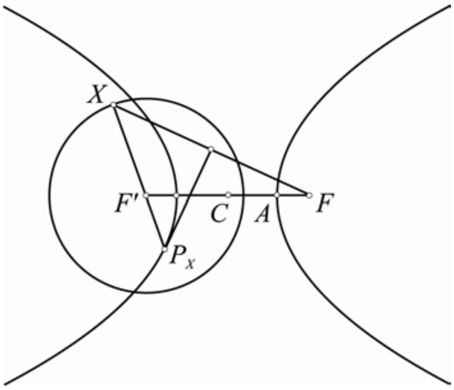
對於橢圓的作圖法，還有其他可行的作法，而且除了以直線來包絡橢圓外，也可以用圓來包絡橢圓。

四、雙曲線作圖法舉例

1. 雙曲線作圖法一(已知兩焦點及貫軸長)：

給定兩相異點 F 與 F' 、又給定一正數 a ，且 $\overline{FF'} > 2a$ 。

以點 F' 為圓心、 $2a$ 為半徑作一圓 Γ 。對於圓 Γ 上每個點 X ，作 $\overline{FX}$ 的垂直平分線；又作直線 $F'X$ 。設此垂直平分線與直線 $F'X$ 相交於點 P_X ，則當點 X 在圓 Γ 上變動時，點 P_X 所描繪的圖形是以點 F 及點 F' 為焦點、貫軸長等於 $2a$ 的雙曲線。



《圖十六》

【原理】

因為 $\overline{F'X} < \overline{F'F}$ ，所以， $\overline{FX}$ 的垂直平分線必與 $\overline{F'X}$ 不相交，亦即： $\overline{FX}$ 的垂直平分線與直線 $F'X$ 的交點 P_X 必不在 $\overline{F'X}$ 上。因為點 P_X 在 $\overline{FX}$ 的垂直平分線上，所以 $\overline{P_XF} = \overline{P_XX}$ 。於是，得

$$\left|\overline{P_XF} - \overline{P_XF'}\right| = \left|\overline{P_XX} - \overline{P_XF'}\right| = \overline{F'X} = 2a .$$

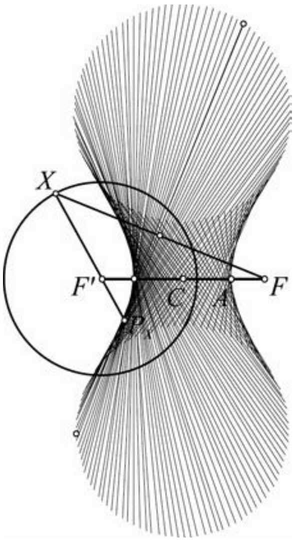
於是，點 P_X 在以點 F 及點 F' 為焦點、貫軸長等於 $2a$ 的雙曲線上。(參看圖十六並與圖十比較)

請注意！前面作圖法中 $\overline{FX}$ 的垂直平分線，就是所作雙曲線過點 P_X 的切線。所以，又可得下述雙曲線作圖法二。

2. 雙曲線作圖法二(已知兩焦點及貫軸長)：

給定兩相異點 F 與 F' 、又給定一正數 a ，且 $\overline{FF'} > 2a$ 。

以點 F' 為圓心、 $2a$ 為半徑作一圓 Γ 。對於圓 Γ 上每個點 X ，作 $\overline{FX}$ 的垂直平分線 l_X ，則當點 X 在圓 Γ 上變動時，垂直平分線 l_X 所包絡的圖形就是以點 F 及點 F' 為焦點、貫軸長等於 $2a$ 的雙曲線。



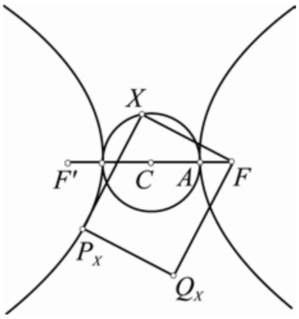
《圖十七》

3. 雙曲線作圖法三

(已知一焦點、一頂點與中心)：

給定共線三相異點 F 、 A 與 C ，且 $\overline{CF} > \overline{CA}$ 。

以點 C 為圓心、 $\overline{CA}$ 為半徑作一圓 Γ 。對於圓 Γ 上每個點 X ，過點 X 作一個矩形 XFQ_XP_X 使得直線 XQ_X 通過圓 Γ 的圓心 C ，則當點 X 在圓 Γ 上變動時，點 P_X 所描繪的圖形就是以點 F 為一焦點、點 A 為貫軸上一頂點、點 C 為中心的雙曲線。



《圖十八》

【原理】

設矩形 XFQ_XP_X 的兩對角線 $\overline{XQ_X}$ 與 $\overline{FP_X}$ 相交於點 R_X ，則 R_X 也是 $\overline{FX}$ 的垂直平分線與直線 CX 的交點。因為 $\overline{CX} < \overline{CF}$ ，所以 $\overline{FX}$ 的垂直平分線與 $\overline{CX}$ 不相交，亦即：點 R_X 不在 $\overline{CX}$ 上。又設點 F 對點 C 的對稱點為 F' ，則得

$$\left|\overline{P_XF}-\overline{P_XF'}\right|=\left|2\overline{R_XF}-2\overline{R_XC}\right|$$
$$=\left|2\overline{R_XX}-2\overline{R_XC}\right|=2\overline{CX}=2\overline{CA}.$$

於是，點 P_X 在以點 F 及點 F' 為焦點、貫軸長等於 $2\overline{CA}$ 的雙曲線上。因為點 C 是兩焦點所連線段的中點，所以，點 C 是此雙曲線的中心。因為點 A 在中心與焦點的連線上，且與中心 C 的距離等於雙曲線貫軸長的一半，所以點 A 是此雙曲線貫軸上的一頂點。於是，點 P_X 在以點 F 為一焦點、點 A 為貫軸上一頂點、點 C 為中心的雙曲線上。

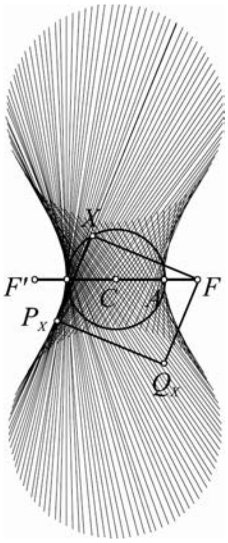
請注意！前面作圖法中的直線 XP_X ，就是所作雙曲線過點 P_X 的切線。所以，又可得下述雙曲線作圖法四。

4. 雙曲線作圖法四

（已知一焦點、一頂點與中心）：

給定共線三相異點 F 、 A 與 C ，且 $\overline{CF} > \overline{CA}$ 。

以點 C 為圓心、$\overline{CA}$ 為半徑作一圓 Γ 。對於圓 Γ 上每個點 X ，過點 X 作 $\overline{XF}$ 的垂直線 l_X ，則當點 X 在圓 Γ 上變動時，直線 l_X 所包絡的圖形就是以點 F 為一焦點、點 A 為貫軸上一頂點、點 C 為中心的雙曲線。



《圖十九》

5. 雙曲線作圖法五

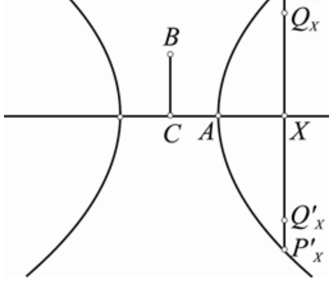
（已知貫軸上一頂點、共軛軸上一頂點與中心）：

給定三相異點 A 、 B 與 C ，且 $\overline{CA} \perp \overline{CB}$ 。

作點 A 對點 C 的對稱點 A' 。對於射線 $\overrightarrow{AA'}$ 的相反射線上每個點 X ，在過 X 而與直線 AA' 垂直的直線上作兩點 Q_X 與 Q'_X 使得

$$\overline{Q_XX}=\overline{Q'_XX}=\sqrt{\overline{CX}^2-\overline{CA}^2},$$

再以點 X 為伸縮中心將點 Q_X 與 Q'_X 伸縮 $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$ 倍，分別得出 P_X 與 P'_X ，則當點 X 在射線 $\overrightarrow{AA'}$ 的相反射線上變動時，點 P_X 與 P'_X 所描繪的圖形是以點 A 為貫軸上一頂點、點 B 為共軛軸上一頂點、點 C 為中心的雙曲線的一支。



《圖二十》

【原理】

因為點 Q_X 滿足

$$\overline{Q_X X}^2 = \overline{CX}^2 - \overline{CA}^2,$$

而 $\overline{P_X X} = \left(\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA}}\right)\overline{Q_X X}$ 或 $\overline{Q_X X} = \left(\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\right)\overline{P_X X}$ ，

所以，得

$$\frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2}\overline{P_X X}^2 = \overline{CX}^2 - \overline{CA}^2 \text{ 或 } \frac{\overline{CX}^2}{\overline{CA}^2} - \frac{\overline{P_X X}^2}{\overline{CB}^2} = 1.$$

選取一坐標系，使得直線 CA 為 x 軸、直線 CB 為 y 軸，則上式表示點 P_X 的坐標 (x,y) 滿足

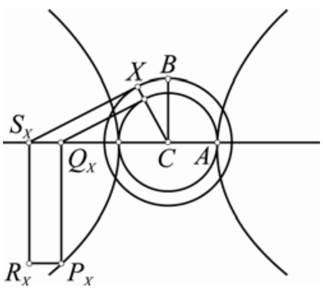
$$\frac{x^2}{\overline{CA}^2} - \frac{y^2}{\overline{CB}^2} = 1 \text{。}$$

6. 雙曲線作圖法六

（已知貫軸上一頂點、共軛軸上一頂點與中心）：

給定三相異點 A 、 B 與 C ，且 $\overline{CA} \perp \overline{CB}$ 。

以點 C 為圓心、$\overline{CA}$ 為半徑作一圓 Γ_A，又以點 C 為圓心、$\overline{CB}$ 為半徑作一圓 Γ_B。對於圓 Γ_B 上每一點 X ，若射線 $\overrightarrow{CX}$ 與圓 Γ_A 交於點 Y_X ，過 Y_X 作圓 Γ_A 的切線與直線 CA 相交於點 Q_X ，過 X 作圓 Γ_B 的切線與直線 CA 相交於點 S_X；以點 S_X 為旋轉中心將點 X 旋轉有向角 $\angle XCA$ 而得點 R_X ；過點 R_X 作一直線與直線 CA 平行，過點 Q_X 作一直線與直線 CA 垂直。設平行線與垂直線的交點為 P_X ，則當點 X 在圓 Γ_B 上變動時，點 P_X 所描繪的圖形是以點 A 為貫軸上一頂點、點 B 為共軛軸上一頂點、點 C 為中心的雙曲線。



《圖二十一》

對於雙曲線的作圖法，還有其他可行的作法，而且除了以直線來包絡雙曲線外，也可以用圓來包絡雙曲線。

【原理】

選取一坐標系，使得直線 CA 為 x 軸、直線 CB 為 y 軸。若以 $\overrightarrow{CA}$ 為始邊、$\overrightarrow{CX}$ 為終邊的有向角為 θ ，則

點 X 的坐標為 $X\left(\overline{CB}\cos\theta, \overline{CB}\sin\theta\right)$ 、

點 Y_X 的坐標為 $Y_X\left(\overline{CA}\cos\theta, \overline{CA}\sin\theta\right)$ 。

於是，切線 $Y_X Q_X$ 與切線 XS_X 的方程式分別為

$$Y_X Q_X : x\cos\theta + y\sin\theta = \overline{CA} \text{，}$$

$$XS_X : x\cos\theta + y\sin\theta = \overline{CB} \text{。}$$

於是，當 $\theta \neq \frac{1}{2}\pi$ 且 $\theta \neq \frac{3}{2}\pi$ 時，

點 Q_X 的坐標為 $Q_X\left(\overline{CA}\sec\theta, 0\right)$ 、

點 S_X 的坐標為 $S_X\left(\overline{CB}\sec\theta, 0\right)$ 。

因為點 R_X 是以點 S_X 為旋轉中心將點 X 旋轉有向角 $-\theta$ 而得，所以得

R_X 的 x 坐標

$$\begin{aligned}&= \overline{CB}\sec\theta + \left(\overline{CB}\cos\theta - \overline{CB}\sec\theta\right)\cos(-\theta)\\ &\quad - \left(\overline{CB}\sin\theta - 0\right)\sin(-\theta)\\ &= \overline{CB}\sec\theta,\end{aligned}$$

R_X 的 y 坐標

$$\begin{aligned}&= 0 + \left(\overline{CB}\cos\theta - \overline{CB}\sec\theta\right)\sin(-\theta)\\ &\quad + \left(\overline{CB}\sin\theta - 0\right)\cos(-\theta)\\ &= \overline{CB}\tan\theta.\end{aligned}$$

因此，點 P_X 的坐標為 $P_X\left(\overline{CA}\sec\theta, \overline{CB}\tan\theta\right)$。這表示點 P_X 的坐標 (x,y) 滿足

$$\frac{x^2}{\overline{CA}^2} - \frac{y^2}{\overline{CB}^2} = 1.$$

test 國立台灣師範大學數學系 95 學年度 推薦甄選入學

指定項目甄試試題

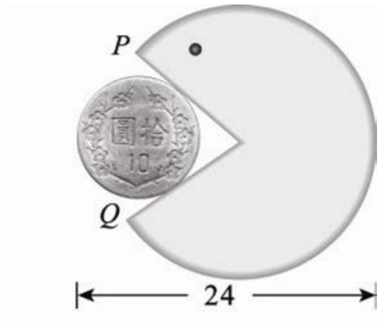
一、計算證明題（考試時間：2 小時）

1. 設 θ 是位於第三象限的一個角，且 $\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5}$，試求 $5\cos\theta+4\sin\theta$ 的所有可能值。

2. 設 x 與 y 都是實數，且 $x^2-xy+4y^2=1$，試求 x^2+4y^2 的最大值與最小值。

3. 設 $a,\ b$ 與 c 是都不等於 1 的相異正數；若 $a,\ b$ 與 c 三數成等比數列，而 $\log_a b,\ \log_b c$ 與 $\log_c a$ 三數成等差數列，試求此等差數列的公差。

4. 為了提醒同學某台自動販賣機會「吃錢」，班聯會想在販賣機上漆一個小圓與缺六分之一圓的大圓相切的圖案，如下圖所示。基於空間考量，圖案的寬度要恰好 24 單位長，而且小圓必須與直線 PQ 有兩相異交點；漆大圓的油漆，每平方單位需要 6 元；漆小圓的油漆，每平方單位需要 45 元。試問兩圓的半徑分別為多少單位時，油漆費用最少？



5. 設一拋物線的頂點坐標為 $(1,-3)$，且對稱軸的方程式為 $2x+y+1=0$。若此拋物線通過點 $(5,-3)$，試求此拋物線的方程式。

二、填充題（考試時間：2 小時）

1. 設 a, b 為兩實數，且方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ 有一根為 $1+2i$，則數對 (a,b) ＝＿＿＿＿＿。

2. 設 A, B, C, D 為單位圓上的四點，且 $\overset{\frown}{AB}$ 弧、$\overset{\frown}{BC}$ 弧、$\overset{\frown}{CD}$ 弧、$\overset{\frown}{DA}$ 弧的長度比為 $1:2:4:5$，則四邊形 $ABCD$ 的面積為 ＿＿＿＿＿。

3. 給定空間中兩平面 $E_1: 2x+y+z=4,\ E_2: x-2y+2z=5$，則過點 $(1,2,3)$ 且與平面 E_1, E_2 垂直的平面方程式為 ＿＿＿＿＿。

4. 設 $f(t)$ 表示 $(0,0)$ 到直線 $L_t:(3\cos t)x+(5\sin t)y=15$ 的距離，則 $f(t)$ 的最小值為 ＿＿＿＿＿。

5. 有十個數 $a, b, c, d, e, f, 8, 11, 12, 17$。若此十個數的平均值和 a, b, c, d, e, f 六個數的平均值相等，且這兩組數的變異數也相等，則此變異數為 ＿＿＿＿＿。

6. 給定數列

$$\left\langle 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\cdots,\ \overbrace{n,\ n,\ n,\cdots,\ n}^{n\text{個}n},\cdots \right\rangle.$$

此數列前 1000 項的和為 ＿＿＿＿＿。

7. 設函數 $f(x)=-\cos 4x+10\sin^2 x$，則 $f(x)$ 在區間 $0\le x\le\pi$ 的最大值為 ＿＿＿＿＿。

8. 隨意將編號 1 至 7 的七張卡片排成一列，恰有三張卡片所排的順序與它的編號相同的機率為 ＿＿＿＿＿。

國立台灣師範大學數學系 *95 學年度* 推薦甄選入學

指定項目甄試試題詳解

一、計算證明題：

1. 設 $k=5\cos\theta+4\sin\theta$，因為 θ 是位於第三象限的一個角，所以 $\cos\theta<0,\ \sin\theta<0$，即

$k<0$。由 $\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5}$ 得 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$，即 $\cos 2\theta=\pm\frac{3}{5}$。因此

$$\begin{aligned}k^2&=25\cos^2\theta+40\sin\theta\cos\theta+16\sin^2\theta\\&=9\cos^2\theta+40\cdot\frac{2}{5}+16\\&=9\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+32\\&=\frac{169}{5}\text{ 或 }\frac{196}{5}.\end{aligned}$$

因為 $k<0$，所以

$$5\cos\theta+4\sin\theta=-\frac{13\sqrt{5}}{5}\text{ 或 }-\frac{14\sqrt{5}}{5}.$$

2. 由 $1+xy=x^2+4y^2\ge 2\sqrt{4x^2y^2}$ 得 $1+xy\ge\pm 4xy$，即

$$-\frac{1}{5}\le xy\le\frac{1}{3}.$$

因此

$$\frac{4}{5}\le 1+xy\le\frac{4}{3}.$$

故 x^2+4y^2 的最大值 $\frac{4}{3}$，最小值 $\frac{4}{5}$。

3. 令 $x=\log_a b=\dfrac{\log b}{\log a},\ y=\log_b c=\dfrac{\log c}{\log b}$ 與 $z=\log_c a=\dfrac{\log a}{\log c}$ 的公差為 d，則

$$z=\frac{1}{xy},\ d=y-x=z-y=\frac{1}{xy}-y.$$

整理得

$$2xy^2=x^2y+1.$$

另方面，由 a, b 與 c 三數成等比數列，得 $b^2 = ac$，即

$$2 = \log_b a + \log_b c = \frac{1}{x} + y \Rightarrow 2x = 1 + xy.$$

將 $xy = 2x - 1$ 代入 $2xy^2 = x^2 y + 1$，得

$$\frac{2(2x-1)^2}{x} = x(2x-1) + 1 \Rightarrow 2x^3 - 9x^2 + 9x - 2 = 0.$$

整理得

$$(x-1)(2x^2 - 7x + 2) = 0.$$

當 $x = 1$ 時，$a = b$（與題意不合），因此 $2x^2 - 7x + 2 = 0$。

由 $xy = 2x - 1$ 得 $y = 2 - \frac{1}{x}$，公差

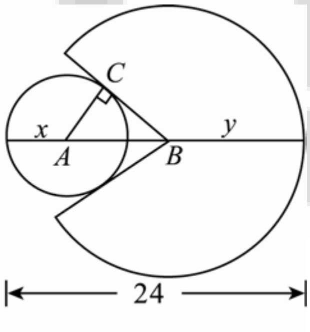
$$d = y - x = 2 - \frac{1}{x} - x = 2 - \frac{x^2 + 1}{x}.$$

將 $2x^2 = 7x - 2$ 代入，得公差

$$d = 2 - \frac{2x^2 + 2}{2x} = 2 - \frac{7x}{2x} = -\frac{3}{2}.$$

此等差數列的公差為 $-\frac{3}{2}$。

4. (1) 設小圓圓心 A，半徑 x；大圓圓心 B，半徑 y，C 是切點，如下圖所示。



由 $\overline{AC} = x, \angle ABC = 30°$ 得 $\overline{AB} = 2x$。所以

$$x + 2x + y = 24 \Rightarrow 3x + y = 24.$$

(2) 油漆此圖案所需費用為

$$45 \times \pi x^2 + 6 \times \frac{5}{6}\pi y^2 = 5\pi(9x^2 + y^2).$$

(3) 利用柯西不等式，得

$$((3x)^2+y^2)(1^2+1^2)\ge(3x+y)^2=24^2\,,$$

而且等號成立的條件為

$$\frac{3x}{1}=\frac{y}{1}\Rightarrow 3x=y\,.$$

將 $3x=y$ 代入 $3x+y=24$ ，解得 $x=4,\ y=12$ 。故當小圓半徑 4，大圓半徑 12 時，油漆費用最少。

5. 令準線方程式為 $x-2y=a$ ，將準線與對稱軸方程式 $2x+y+1=0$ 解聯立得交點坐標 $(\frac{a-2}{5},\frac{-2a-1}{5})$ 。因為 $(\frac{a-2}{5},\frac{-2a-1}{5})$ 與交點的中點為 $(1,-3)$ ，所以交點坐標為 $(\frac{-a+12}{5},\frac{2a-29}{5})$ 。

因為點 $(5,-3)$ 在拋物線上，所以

$$\sqrt{\left(5-\frac{-a+12}{5}\right)^2+\left(-3-\frac{2a-29}{5}\right)^2}=\frac{|5-2\cdot(-3)-a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\,.$$

兩邊平方整理得

$$a=3\,.$$

此時交點 $(\frac{9}{5},-\frac{23}{5})$ ，方程式為

$$\sqrt{\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y+\frac{23}{5}\right)^2}=\frac{|x-2y-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\,,$$

整理得

$$4x^2+4xy+y^2-12x+34y+113=0\,.$$

故拋物線的方程式為

$$4x^2+4xy+y^2-12x+34y+113=0\,.$$

二、填充題：

一	二	三	四	五	六	七	八
$(11,-15)$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$4x-3y-5z+17=0$	3	10.5	29820	9	$\frac{1}{16}$

1. 因為 $x^3-5x^2+ax+b=0$ 是實係數方程式且已知有一根為 $1+2i$，所以必有另一根為 $1-2i$。由此可知，以 $1+2i,\ 1-2i$ 為兩根的一元二次方程式 x^2-2x+5 是 x^3-5x^2+ax+b 的因式，也就是說，即 x^2-2x+5 整除 x^3-5x^2+ax+b。利用長除法可得到 $a=11,\ b=-15$，故 $(a,b)=(11,-15)$。

2. 令圓心為 O，因為 $\overset{\frown}{AB}$ 弧、$\overset{\frown}{BC}$ 弧、$\overset{\frown}{CD}$ 弧、$\overset{\frown}{DA}$ 弧的弧長比為 $1:2:4:5$，所以 $\overset{\frown}{AB}$ 弧、$\overset{\frown}{BC}$ 弧、$\overset{\frown}{CD}$ 弧、$\overset{\frown}{DA}$ 弧所對的圓心角分別為 $30°,\ 60°,\ 120°,\ 150°$。利用三角形面積公式，四邊形 $ABCD$ 的面積可寫成

$$\begin{aligned}&\Delta ABO+\Delta BCO+\Delta CDO+\Delta DAO\\&=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1(\sin 30°+\sin 60°+\sin 120°+\sin 150°)\\&=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

3. 設所求平面的法向量為 (a,b,c)。因為所求平面與 $E_1,\ E_2$ 垂直，所以

$$(a,b,c)\perp(2,1,1),\ (a,b,c)\perp(1,-2,2),$$

得到

$$\begin{cases}2a+b+c=0\\a-2b+2c=0\end{cases}\Rightarrow\ a:b:c=4:-3:-5.$$

令所求平面方程式為

$$4x-3y-5z+d=0.$$

因為點 $(1,2,3)$ 在平面上，所以 $d=17$，故所求平面方程式為

$$4x-3y-5z+17=0.$$

4. 將 $(0,0)$ 代入點到直線的距離公式得

$$\frac{15}{\sqrt{9\cos^2 t+25\sin^2 t}}=\frac{15}{\sqrt{25-16\cos^2 t}}\geq\frac{15}{5}=3.$$

當 $t=\frac{(2n+1)\pi}{2},\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$ 時，等號成立。因此 $f(t)$ 的最小值為 3。

5. 令 $a+b+c+d+e+f=x$。由題意知

$$\frac{x+8+11+12+17}{10}=\frac{x}{6} \Rightarrow x=72.$$

因此 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ 的平均數為 $\frac{72}{6}=12$。又設

$$V=\sum_{i=1}^{6}(x_i-12)^2.$$

根據題意及變異數公式，得

$$\frac{V+(8-12)^2+(11-12)^2+(12-12)^2+(17-12)^2}{10}=\frac{V}{6}.$$

推得

$$V=105.$$

因此這 10 個數字的變異數是 $\frac{105}{10}=10.5$。

6. 此數列的排列方式是 1 個 1，2 個 2，⋯， n 個 n ，⋯。因此我們要找最大正整數 k 使其滿足 $1+2+\cdots+k\le 1000$ 。解此不等式得到 $k=44$。故前 1000 項的和為

$$1^2+2^2+\cdots+44^2+(45\times 10)=\frac{44\times 45\times 89}{6}+450=29820.$$

7. 利用倍角與半角公式得

$$\begin{aligned} f(x)&=-\cos 4x+10\sin^2 x\\ &=-(2\cos^2 2x-1)+10\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right),\ 0\le x\le \pi. \end{aligned}$$

令 $y=\cos 2x,\ -1\le y\le 1$，代入得

$$f(x)=-(2y^2-1)+5-5y=-2\left(y+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{73}{8}.$$

因此當 $y=-1$ 時， $f(x)$ 有最大值 9。

8. 因為恰有三張卡片所排的順序與它的編號相同的組合數為

$$C_4^7\times(C_4^4\times 4!-C_3^4\times 3!+C_2^4\times 2!-C_1^4\times 1!+C_0^4\times 0!)=315,$$

所以所求的機率為

$$\frac{315}{7!}=\frac{1}{16}.$$

專欄

動手玩數學

◎許志農／台灣師範大學數學系

遊戲 9
☆☆☆☆

有一架不準確的天平（左臂長 a 公分，右臂長 b 公分，而且 $a \neq b$），靜華用它來量某件物品。先將重物放在左盤，砝碼放在右盤，需用到 m_1 公克的砝碼才使天平平衡；然後再將重物放在右盤，砝碼放在左盤，需用到 m_2 公克的砝碼才使天平平衡。

為了偷懶起見，靜華以 $P=\frac{m_1+m_2}{2}$ 公克估算物品重量。若物品的實際重量為 Q 公克，則

(1) 將 P 以符號 $a,\ b$ 及 Q 表示。

(2) P 與 Q 的大小關係為何？

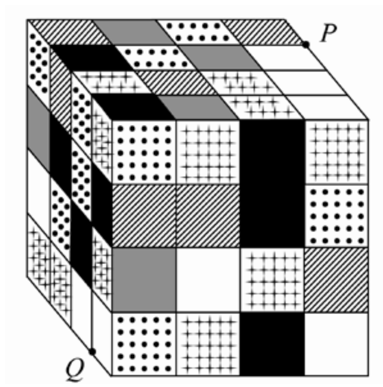
〔玩鎖・玩索〕

這是大陸第七屆希望盃（全國數學邀請賽）的一道題目。天平是利用力矩的大小決定左右是否平衡，所以分別計算左右兩邊的力矩是首要考慮的事情。

比較兩數的大小是經常碰到的難題。處理這種問題的方法會隨著對這兩數的描述方式不同而採取不同的思路；但是，考慮「將兩數相減，再試著判斷相減數的正負」，是標準的方法之一。

遊戲 10
☆☆

魔術方塊的發明原先是為了幫助學生們認識空間立方體的組成和結構，卻意想不到的成為風靡全球的益智玩具。相信很多人都玩過三階的魔術方塊，現在也有四階、五階、⋯、九階的魔術方塊。下圖就是一個四階的魔術方塊。



把四階的魔術方塊邊長定為 4 單位，即每一小方塊的邊長是 1 單位。討論下列兩個問題：

(1) 魔術方塊上 $P,\ Q$ 兩點的最短（直線）距離為何？

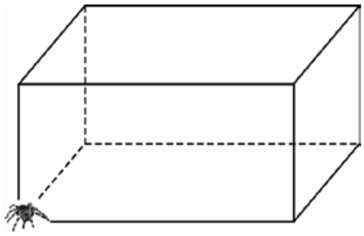
(2) 如果一隻螞蟻在這魔術方塊上爬行，從 P 點爬到 Q 點，那麼最短的爬行路徑是多遠。

〔玩鎖・玩索〕

魔術方塊是 1974 年，由匈牙利布達佩斯應用藝術學院室內設計系講師奧倫・魯比克（Erno Rubik）發明的。本來的目的是為了讓學生了解立體結構所做的模型，為了區分每個小塊的移動，而分別把六面給上了不同的顏色，然後再稍微轉動幾下之後，發現這個東西非常地難復原，於是世界上第一個魔術方塊就誕生了。魔術方塊的發明讓奧倫・魯比克成為東歐第一個白手起家的百萬富翁，

也讓他成為匈牙利最富有的人。三階的魔術方塊被福布斯評選為 100 年來最受兒童歡迎的十件玩具之一。

讓我們來欣賞一道出乎意料之外的路徑問題：如下圖所示，在 $2\times1\times1$ 的長方體角落有一隻蜘蛛，如果蜘蛛要在長方體的表面某處棲息過夜，那麼應該選擇何處？



遊戲 11

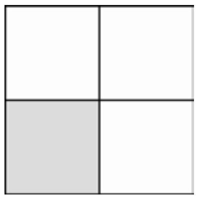
☆☆☆☆

在一個邊長為 1 的正方形上，依照下列規律塗色：

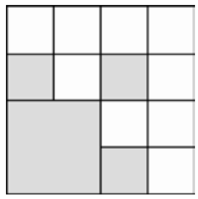
(1)將它分割成四個全等的小正方形，如圖一所示，並將左下邊的小正方形塗成灰色。

(2)將剩下未塗色的每個小正方形都再次分割成四個全等的較小正方形，如圖二所示，並將每組左下邊的較小正方形塗成灰色。

(3)按照上述規律，一直分割及塗色下去。



〈圖一〉



〈圖二〉

設第 n 個圖比前一個圖新增 a_n 個被塗成灰色小正方形，且令這些新增小正方形的邊長為 l_n。

(1) 寫出 a_3 及 l_3 的值。

(2) 求出 a_n 及 l_n 的公式。

(3) 求所有被塗成灰色的正方形面積和。

(4) 如果上述塗色過程一直進行下去，那麼正方形內的每一個點都會被塗成灰色嗎？（難題）

〔玩鎖．玩索〕

「發現規律」與「探求隱藏在規律之下的數學公式」是學習數學的兩大活動。當規律告訴你，依這規律探求隱藏在規律之下的數學公式是這道塗色問題的目的。

兩人玩剪刀、石頭、布的猜拳遊戲時，
平均要猜幾次才能分出勝負？

遊戲 12

☆☆☆☆

〔玩鎖・玩索〕

這是台灣大學數學系 95 學年度學士班甄選入學第二階段筆試試題的一道題目。該題目的第二小題為：現有三人一起猜拳（三人一起出拳）。若兩人勝一人，則勝者兩人繼續猜；若一人勝兩人，則此人勝出。問：平均要猜幾次才剛好有一人勝出？

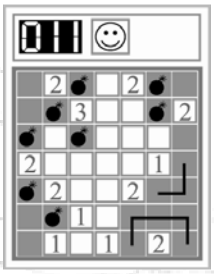
像這樣不確定性的機率問題，只能計算期望值，期望值就是正常所講的答案。

勘誤：
第二期動手玩數學專欄的題號應為遊戲 5~8，
此後的遊戲題號將接續排列。

動手玩數學~破解秘笈 第2期

遊戲1

容易知道底下標●的地方是地雷區：



(1) 在「反 L 字形」的三格裡，只會有 1 顆地雷，而在「ㄇ字形」的五格裡，只會有 2 顆地雷，故總共佈

$$8+1+2=11$$

顆地雷。

(2) 沒辦法精確地知道每顆地雷所佈的位置，因為「反 L 字形」與「ㄇ字形」裡的地雷有多種不同的可能佈置情形。

遊戲2

因為 $2^{30402457}-1$ 與 $2^{30402457}$ 僅相差 1，所以估計 $2^{30402457}$ 的大小就可以。利用 $\log_{10}2\approx 0.3010$ 得

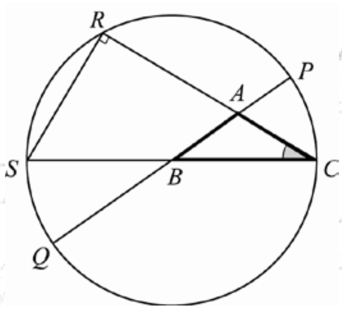
$$\log_{10}2^{30402457}=30402457\log_{10}2\approx 9151139.56.$$

這告訴我們，$2^{30402457}-1$ 是大約 915 萬位數的數字，沒有超過 1000 萬位數字。因此，無法獲得十萬美元的獎金。

如果利用更精確的對數表 $\log_{10}2\approx 0.30102999566$，可以算得更精確，得到 $2^{30402457}-1$ 是一個 9152052 位的天文數字。

遊戲3

設符號如下圖所示：



(1) $\overline{SC}=2\overline{BC}=2a$；

$\overline{AC}=b$；

$\overline{AR}=\overline{CR}-\overline{AC}=\overline{SC}\cos C-b=2a\cos C-b$；

$\overline{AQ}=\overline{AB}+\overline{BQ}=c+a=a+c$；

$\overline{AP}=\overline{BP}-\overline{BA}=a-c$.

(2) 根據圓的內冪性質，得 $\overline{AR}\cdot\overline{AC}=\overline{AP}\cdot\overline{AQ}$。

代入(1)的值，得

$$(2a\cos C-b)\cdot b=(a-c)\cdot(a+c),$$

乘開移項，得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

〔**玩鎖・玩索提示**〕

此種情形需用到圓的外冪性質，其餘與遊戲的作法雷同。

遊戲4

利用四個橢圓可以將黑板（或白紙）分割成 16 個區域，如下圖所示：