龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第32刊

贈品禁止轉售 #2

55201N/B/0000000

龍騰文化

編輯室墨記

在〈淺談數學素養〉中，許志農教授述說了何謂「數學素養」。而在考試導向的現今社會，「數學素養」與我們有什麼關聯呢？讓我們來看看許志農教授怎麼說？

「有理係數多項式，無理根成對出現」一定是對的嗎？一起來看看吳孝仁老師的〈無理根成「群」出現〉有什麼樣不同的見解。

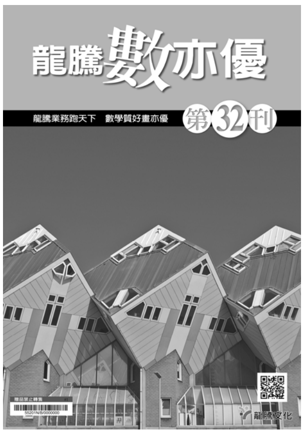
在數亦優第19期刊載文章：「迴歸直線預測準確度的探討」，引發出一些教學上的問題。一起來看看鍾國華老師〈迴歸直線範例探討〉的進一步探討吧。

經典之所以是經典，表示其有不可取代之處，就讓彭良禎老師的〈一招「試」天下～正方體截面試題剖析〉來為您分析近年大考題中的正方體截面試題吧。

依規則搬動方糖的位置可以用數學式子表示嗎？翻開動手玩數學，跟著許教授一起來解密吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的內容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 kilro_pan@lungteng.com.tw。



發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
執行編輯：潘善興
美術編輯：林佳瑩

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248新北市五股區五工六路30號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2298-9755
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2017/3/6
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2017.3 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

許志農 臺灣師大數學系

3

》》淺談數學素養

吳孝仁 國立政大附中

11

》》無理根成「群」出現

鍾國華 臺北市協和祐德高中退休教師

19

》》迴歸直線範例探討

彭良禎 國立師大附中

27

》》一招「試」天下~正方體截面試題剖析

許志農 臺灣師大數學系

40

》》動手玩數學專欄

》》動手玩數學《第 31 期》破解祕笈

淺談數學素養

許志農／臺灣師大數學系

「我已經在如此的環境下發現或擬定了這道數學題目。這道題目所牽涉到的數學內容，恐怕我們之中大多數人已經生疏或不熟悉了。但這一點無關緊要，對於評量專家來說，重要的不是題目的內容，而是發現或擬定這題目時的種種情況。」

——改編自亨利・龐加萊對巴黎心理學會慶賀演講的一段內省文字

古今之成大事業、大學問者，必經過三種境界：
「昨夜西風凋碧樹，獨上高樓，望盡天涯路」此第一境界也。
「衣帶漸寬終不悔，為伊消得人憔悴」此第二境界也。
「眾裡尋他千百度，驀然回首，那人卻在燈火闌珊處」此第三境界也。

——王國維《人間詞話》

「無可奈何花落去，似曾相識燕歸來」

——晏殊〈浣溪沙〉

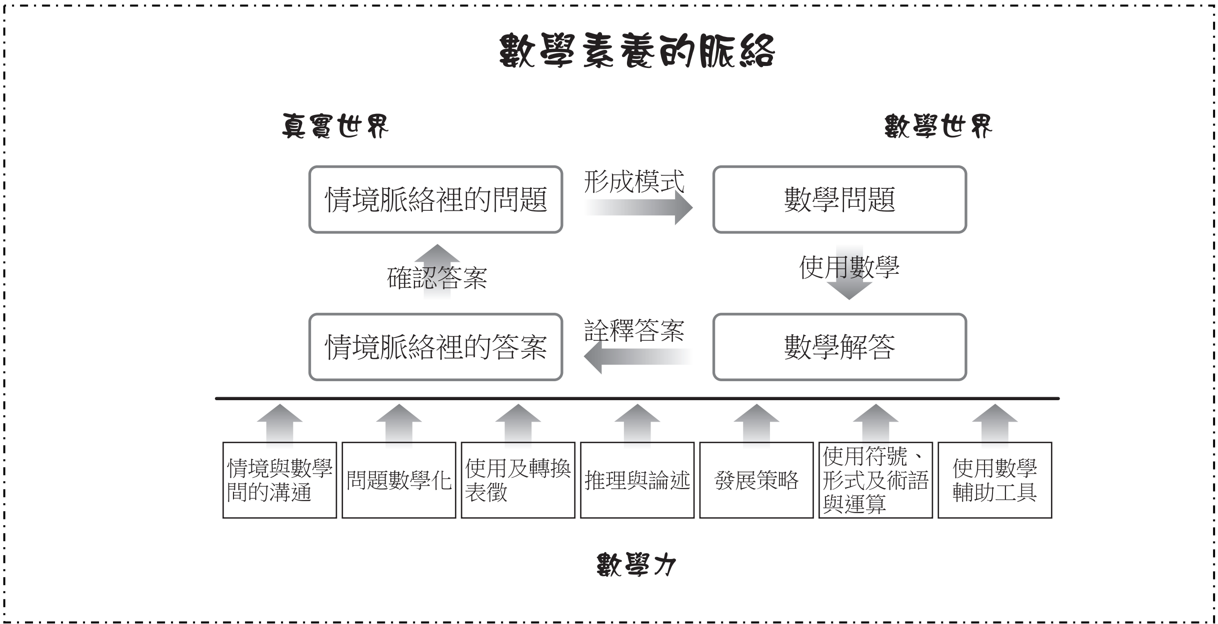
一、前言》

手機除了攝影拍照，撥打電話外，還能上接衛星執行定位導航，下連無線網路瀏覽網站。眼前的一支手機可以幫人們處理相當可觀的事物，仔細想想，手機除了看得見的硬體零件外，最重要的是隱藏在零件內部的數學，而且是它讓手機能運作。但是，可曾想過，這隱藏在手機幕後的種種數學又是如何被數學愛好者發現或發明的呢？別看手機幕前的萬紫千紅，花花世界，它充其量只是隱藏於手機幕後的數學的僕人，而數學愛好者才是這些數學背後的主人。

在這個瞬息萬變，凡事突飛猛進，講究創新與創意的科技時代，數學扮演著極為重要的角色。又如同夏爾・埃爾米特（C. Hermite）所說「**我們與其說是數學的主人，倒不如說是數學的僕人**」。那麼，身為僕人的人們，該如何認識主人（發現數學），學會哪些數學，又該如何學，怎麼用呢？凡此種種都算是數學素養的範疇。

二、何謂數學素養？》

這個千禧年，「經濟合作與發展組織」（簡稱 OECD）所推動的「國際學生評量計劃」（簡稱 PISA），把「數學素養」定義為「個人在各種情境脈絡裡形成、使用、詮釋數學的能力。這裡的能力包括了數學推理，以及使用數學概念、程序、事實、工具來描述、解釋、預測現象等。數學素養有助於了解數學在世界裡扮演的角色，也能幫助未來的公民，做出有所依據且具反思性的判斷與決策。」顯而易見的，OECD 把人類所處大千世界的種種當背景與腳本，並期許著學生能以流暢的數學語言、觀念或定理，來書寫及演繹這些故事。



或許是西學東漸，但也不排除是東施效顰？在國內，翁秉仁教授所撰「數學國民核心素養」計畫中，核心素養以「能解決日常生活的數學問題；能作為科學學習的基礎；作為理性思考的典範」為依歸。不僅科技部（原國科會），國教院也有數學素養的計畫，並嘗試編寫（高中職）數學素養導向的教材。這些計畫大都是在 PISA 數學素養的基礎上，以增加「向度」或「維度」來作為其宗旨或理論根據。

除了政府研究部門外，屬於考試單位的心測中心（負責國中會考）及大考中心（負責學測、數甲與數乙），想必也對 PISA 數學素養有興趣。從其過去幾年的試題裡，不難發現數學素養試題的影子。但是，PISA 是屬於跨國性的評量，而國內中心所負責的是考試，照理說「評量會比較偏重整體或單一國家的趨勢，而考試會稍微放大或凸顯個人的成績（考試是為了考生升學而辦）。」況且，PISA 以十五歲前能了解的情境為評量範圍，而考試則受到課綱內容的限制與規範。臺灣目前還是脫離不了考試領導教學與升學的模式，如何在「評量」與「考試」上做區分與取得合理的平衡，恐怕才是重重之點。難怪蘇東坡會寫下

「人有悲歡離合，月有陰晴圓缺，此事古難全」

這首詩。

PISA 以學生「幕前」能看到的場景為「題目」，期待他們利用「幕後」的數學來「解題」。但是，這數學從何而來？它們應該是自古以來的數學愛好者所發現或發明的。或許這「背後」的「數學創造」歷程，才是一切的核心跟基礎。

綜合以上所言，不妨把數學素養界定為對以下三件事情的了解與實施：

1. 擬定老師該命怎樣的題目？
2. 了解學生的作答與解題行為？
3. 關注人們如何進行數學創造？

顯然地，PISA 較關注這三項裡的前兩項，在本節最後，提個疑問句

跟人們生活相關的情境試題是啟動數學素養的觸媒，還是引擎呢？

三、「解題」與「命題」》

「解題」與「命題」是老師經常要從事的兩件工作，教人解題的書不勝枚舉，但是傳授命題要領的書卻付之闕如。之所以這樣，是由於解題與命題來自頭腦的兩種截然不同的運作模式，解題是一種技術，而命題是一項藝術，或者說，「怎麼解題」是一種收斂型思考的過程，而「如何命題」卻是一種發散型思考的創意行為。

關於解題，早在四百年前，笛卡兒就在他的《方法導論》這本書中，定下解題的四個相當有名的指導原則：

1. 絕不承認任何事物為真，對於我完全不懷疑的事物才視為真理。
2. 若有需要的話，將每一個難題，盡可能分解成許多部分，以便正確地解決這些難題。
3. 引導思緒從最簡單的問題著手，循序漸進至最複雜的問題。
4. 仔細審視全部的想法，以確定沒有遺漏任何地方。

一生的數學解題者——波里亞（G. Polya）的書《如何解題》，就是在教人解題，並將解題這項心智活動分成「了解問題，擬定計畫，實行計畫，回顧解答」四步驟。

值得一提的是，華人數學家陶哲軒在十五歲時，受到他參加數學奧林匹亞數學競賽的啟發，寫了一本數學書籍《解題•成長•快樂——陶哲軒教你學數學》，在這本書的第一章提到解題的九大策略。

「了解學生的作答與解題行為」是評量學生

「知、懂、熟、用、賞」

這些數學能力境界的好方法，而笛卡兒、波里亞或陶哲軒所提出的解題策略比較像是「邏輯性」的解題策略，對解題來說算是治標方案。那有解題的治本方法嗎？亨利•龐加萊（Jules Henri Poincaré）從心理學的角度所闡釋的方法，或許可以算是解題的治本策略。

關於解題（命題與數學創造）的整個心理過程，亨利•龐加萊在 1908 年，於巴黎心理學會上著名慶賀演講中，提出相當精闢的四階段：

1. 準備階段：
   當我們開始解題的時候，會反覆探索，希望儘快找到解決問題的辦法，但是往往越著急越毫無頭緒，且常常不能得到有效的結果。
2. 醞釀階段：
   只要把難題擱置到一邊，在做其它事兒的時候就會突然冒出新主意，百思不得其解的難題一下子就有了解決辦法，這就是「醞釀效應」。
3. 頓悟階段：
   當我們束手無策的時候，思維已經進入了醞釀階段，我們如果緊追著不放，只會把自己的思維弄得更亂，短暫的擱置會讓我們頓悟。因此，我們遇到難題的時候不妨把它放到一邊，找一些讓自己放鬆的事情做，或許就會出現「踏破鐵鞋無覓處，得來全不費功夫」的結果。
4. 收割階段：
   收割階段就是將頓悟時所感覺到的那些結果嚴格的加以證明，並將其過程精確化，並用語言或符號把結果記錄與書寫下來。

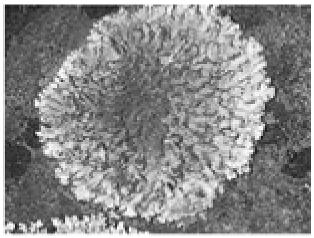
毫無疑問，龐加萊透過對自己的內省，所描述的這四階段，不僅適用於「解題」，也符合「命題」，更適合用來闡釋「數學創造」的心理過程（詳見下一節）。

老師命一道數學題目就好像詩人作一首詩或詞人作一曲詞一般，相信「舉頭望明月，低頭思故鄉」，「明月幾時有？把酒問青天」…等，都是詩人與詞人在「醞釀效應」下，頓悟而出的好文。在命題策略上，除了亨利・龐加萊的四階段外，我實在想不出有哪份資料可供參考。好詩與好詞不難判斷，但好的數學題目該如何分辨呢？我的標準是：迎合「**靈活、巧妙、美麗**」，避免「**難、偏、怪**」，即「靈活而不難、巧妙而不偏、美麗而不怪」為準繩。

本節的最後，讓我們來欣賞幾道數學素養的題目：

試題一（PISA2006 數學樣本試題中編號 M047《地衣》的題目）

全球性暖化會造成一部分冰川融化的結果。約在冰川消失的十二年後，微小的植物─地衣，會開始在岩石間生長。地衣生長的形式有如圓圈一般：



圓圈的直徑與地衣的年齡之間關係約可用下列的公式來表示：

$$d = 7.0\times\sqrt{(t-12)},\ t\geq 12$$ ，

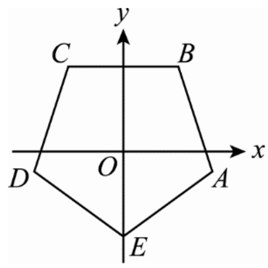
這裡的圓圈直徑 d 是以公釐為單位，而 t 表示冰後的年數。

(1)利用公式，算出冰川消失後 16 年的地衣直徑，並寫出你的計算方法。

(2)安安測量出某地區地衣的直徑為 35 公釐。請問在這地區的冰川是多少年前消失？並寫出你的計算方法。

試題二（八十七學年度社會組選擇題第 1 題）

設 $ABCDE$ 是坐標平面上的一個正五邊形，它的中心與原點重合，且頂點 E 在 y 軸的負向（如圖所示）。試問下列各直線中，斜率最小者為何？



(A)直線 AB

(B)直線 BC

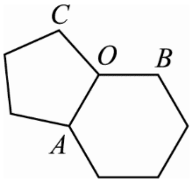
(C)直線 CD

(D)直線 DE

(E)直線 EA。

試題三（九十五學年度指考《數學乙》多選題第 4 題）

嘌呤是構成人體基因的重要物質，它的化學結構式主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成（令它們的邊長均為 1）的平面環形，如下圖所示：



試問以下哪些選項是正確的：

(A) $\angle BAC = 54°$

(B) O 是三角形 ABC 的外接圓心

(C) $\overline{AB} = \sqrt{3}$

(D) $\overline{BC} = 2\sin 66°$ 。

試題四（九十二學年度指考《數學乙》單選題第 3 題）

下表是 2001 年時，從各國國會網站取得有關「該國國會議員席次與人口數」的資料：

國名	議會席次	人口數（千人）
冰島	63	270
挪威	165	4480
丹麥	175	5330
泰國	393	60600
日本	500	126540

根據上述資料，一個人口數為 P 千人的國家，他的國會議員席次以下列哪個公式制定較恰當：

(A) $\dfrac{P}{4}$

(B) $0.1P + 36$

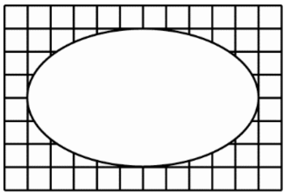
(C) $4\sqrt{P}$

(D) $10\sqrt[3]{P}$

(E) $27\log_{10} P$ 。

試題五（作者自命題）

下圖是貼在方格紙上的一個橢圓。問：該橢圓的兩個焦點相距多少單位長？



四、龐加萊的「數學創造」》

數學家雅克・阿達瑪（Jacques Hadamard）在他的書《數學領域中的發明心理學(An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field)》中，追隨亨利・龐加萊在 1908 年，於巴黎心理學會上著名慶賀演講的思想，他們透過內省，並以自己從事數學創造活動的經驗，把數學家對數學的發現、發明、創造與創新過程區分為準備、醞釀、頓悟與收割等四個階段，而準備與收割階段屬於有意識思維，醞釀及頓悟階段則為無意識思維。

1. 準備階段：

準備階段是就是對問題下很大功夫，又深陷混亂的階段，在這個階段，人們都會採取觀察、實作、分析、學習與內化等有意識的策略，但常常不能得到預期的結果。

準備階段的思維：**有意識思維**；

精髓：**邏輯與機遇**。

2. 醞釀階段：

發明就是將各種「觀念原子」進行千千萬萬的組合，再從中選出有用的組合，而這種選擇的標準是所謂「科學的美感」。在發明過程的組合與選擇這兩個大步驟中，由於無意識思維不受理智之條條框框的約束，而僅僅服從於人的直覺中之和諧的美感，因此比有意識的思維過程更為深刻與奏效。

醞釀階段就是經過準備階段的深思熟慮，仍不得其解時，暫時丟開手頭的工作，而去做些其它事情，或去休息一下，而無意識思維卻因此而啟動起來。

保羅・瓦萊里說道：在發明創造時，存在一個「暗室時期」在這時期「你沒有什麼工作熱情，感到味同嚼蠟，甚至要添加一些興奮劑才行。你好像是一個被人雇用的雇員或領班那樣被動的工作著。此時閃光的思想已經出現，現有的任務只是做一些輔助性的工作，而且這種工作相當囉唆，甚至還會走到邪路上去，因為可能有一系列的錯誤判斷而導致返工，你會覺得這種工作本來應該是很容易做的，但又怎麼也做不好，…，從而產生了沮喪和急躁的情緒，直至自暴自棄的認為，似乎永遠也不能把這件事做好了。」

醞釀階段的思維：**無意識思維**；

精髓：**組合與審美**。

3. 頓悟階段：

頓悟階段就是經過一段時間的醞釀後，好像得到竅門，直覺湧上心頭，恍然大悟或茅塞頓開。此時問題的答案或證明的途徑已經出乎意料的突然出現了。

龐加萊對頓悟的經歷「…眾多思緒蜂擁而至，我感到他們在不斷的衝突和碰撞…直到最後，他們一一相連，也就是說，形成了一個穩定的組合體。」

高斯對頓悟的經歷「…該定理搞了好幾年而沒有證出來，但兩天之前，我突然證出來了，這簡直不是我自己努力的結果，而是由於上帝的恩賜——如同一個閃電那樣突然出現在我腦海之中，而且問題就這樣解決了。我自己也說不清楚在這種思路與以前我所認為頗有成功希望的想法之間究竟存在什麼聯繫。」

莫札特對頓悟的經歷「當我感覺良好並又處於優美的情緒中時，當我乘車外出兜風時，當我美餐一頓之後出去散步之時，或者當我夜晚難以入眠的場合，往往各種思緒即如我所希冀的那樣流暢的湧現在我的腦海中。它們從何而來？它們又如何而至？我常常不得而知，而且我也並沒有對此做過什麼努力。我只是在腦海中把它們留住，並且輕輕的哼出來，…。當我抓住一個旋律之後，另外的旋律就會相繼出現，…。此時，我激情奔放，全神貫注，作品在不自覺地形成，我繼續擴展它，它也越來越清晰，而且不管它有多麼長，過程總會繼續進行，直到整個作品在我的腦海中完整出現為止。雖然它的一些細節還有待繼續推敲，但就整體而言，我已經能夠傾聽到這首樂曲的動人心弦的演奏了。」

頓悟階段的思維：**無意識思維；**

精髓：**靈感與頓悟。**

4. 收割階段：

收割階段就是將頓悟時所感覺到的那些結果嚴格的加以證明，並將其過程精確化，並用語言或符號把結果記錄與書寫下來。

收割階段的思維：**有意識思維；**

精髓：**驗證與詮釋。**

五、思考模式…向左走 vs 向右走》

你是否有這樣的驗光經驗？到眼鏡行驗光，驗光師拿出一片光碟，叫你用雙手把光碟片架住，移到正前面，睜開雙眼，瞄準光碟片正中央的孔，並且讓驗光板上的字出現在孔的中央位置。接著，驗光師會把你左、右眼依序遮住，進行前面的程序。這是在檢測你的用眼模式，有人以右眼為主，左眼為輔，但有的卻相反，就像人們慣用左右手一樣。同樣的事情也發生在思考模式上，一個人是以左後腦思考（收斂型）為主，或用右後腦思考（發散型）為主呢？這在心理學上是有研究過的。但是，在進行數學創造時，思考行為會有不同嗎？一般會區分為邏輯性與直覺性思考兩種模式，這跟左後腦的收斂型思考及右後腦的發散型思考有很多類似的地方。比如，一生的數學解題者…波里亞被歸類為邏輯性思考的數學家，而高斯、愛因斯坦及龐加萊被認為是直覺性思考的科學家。

人的思考可以粗分成兩大類，也就是收斂型思考與發散型思考，它們分別由左後腦與右後腦所啟發。當學生在做一道單一選擇題時，他就正在使用收斂型思考，將可能的範圍縮小，最後聚焦於正確的答案上。這種逐步縮小範圍的思考模式就是收斂型思考，由左後腦來啟動，優點就是可以井然有序、專注、聚精會神，缺點就是缺乏創造力。學校的教育就是典型的收斂型思考方式，補習教育更是如此，原因是收斂型思考對考試成績是有幫助的。另一個思考模式為發散型思考，當一位認真負責的老師在出一道單一選擇題時，他必須注意到潛在的所有錯誤選項，並將它們設計為選項之一。這樣的單一選擇題才有意思，才能達到真正的測驗目標。找出

所有潛在錯誤選項的思考模式就是典型的，也是最簡單的發散型思考，它由你的右後腦發動。發散型思考是整個創造力的泉源，它不預設任何立場，也不會太早作判斷，容許任何思緒與想法並存。

有關收斂型與發散型思考，我們節錄一段吉弗德的話「對收斂型思考而言，結論或答案只有一個，思考會被限制或控制，而循著獲得特定答案的方向進行⋯，相反地，進行發散型思考時，你的大腦會恣意揮灑，搜尋所有可能的答案，這種思考模式常發生在沒有固定結論的時候。發散型思考的特性是不受目標束縛。你有足夠的自由，可以進行多方位的思考，推翻舊的解決之道，在必要時朝某方面突破、創新。愈能尋獲資源的生物體，成功的機率愈大。」

在 1900 年，佛洛伊德出版他最有名的心理學書籍《夢的解析》，書裡有一段跟人的創造力有關的文字，那是偉大的詩人席勒與哥爾納通訊中的一段文字，在那段文字裡，席勒對一位抱怨著自己缺乏創造力的朋友，作如下的回答：「就我看來，你之所以會有這種抱怨，完全歸咎於你的理智加在你的想像力之上的限制，這兒我將提出一份觀察，並舉一譬喻來說明。如果理智對那已湧入大門的意念，仍要作太嚴格的檢查，那便扼殺了心靈創作的一面。也許就單一個意念而言，它可能毫無意義，甚至極端荒唐的，但跟隨而來的幾個意念，卻可能是很有價值的，也許，雖然幾個意念都是一樣的荒謬，但合在一起，卻成了一個饒具意義的聯繫。理智其實並無法批判所有意念，除非它能把所有湧現心頭的意念一一保留，然後再統籌作一比較批判，就我看來，一個充滿創作力的心靈，是能把理智由大門的警衛哨撤回來，好讓所有意念自由地，毫無限制地湧入，而後再就整體進行檢查。你的那份可貴的批判力（或者你自己要稱它作什麼），就因為無法容忍所有創造者心靈的那股短暫的紛亂，而扼殺了靈感的泉湧。這份容忍功夫的深淺，也就是一位有思想的藝術家與一般夢者的分野。因此，你之所以發現毫無靈感，實在都是因為你對自己的意念批判得太早、太嚴格。」這是一七八八年十二月一日的信，被佛洛伊德收錄在《夢的解析》這本書的第二章。

附錄：

昨夜西風凋碧樹，獨上高樓，望盡天涯路

晏殊〈蝶戀花〉

衣帶漸寬終不悔，為伊消得人憔悴

柳永〈鳳棲梧〉

眾裏尋他千百度，驀然回首，那人卻在燈火闌珊處

辛棄疾〈青玉案・元夕〉

無理根成「群」出現

吳孝仁／政大附中

一、緣起》

小潔拿了一道題目來問我，題目裡有一個選項是這樣敘述：

「$f(x)$是有理係數多項式且$f\left(1+\sqrt[3]{2}\right)=0$，則$f\left(1-\sqrt[3]{2}\right)=0$。」

小潔問為什麼這個選項錯？我反問為什麼對！她說：「有理係數多項式，無理根成對出現！」
我問：你在哪裡看過這個？
她答：講義裡這樣寫，老師（不是我）上課也提過這個，almost everywhere。
我看她，她看我，四目相交，兩人默默無語，故事從這裡談起。

二、虛根成對 vs.無理根成對》

我翻了手上幾本各家的複習講義，在多項式單元的重點整理裡有著這樣的敘述。

- **虛根成對定理**：若$f(x)$為n次實係數多項式有一虛根z，即$f(z)=0$，則$f\left(\bar{z}\right)=0$，即$\bar{z}$也是一個根。
- **無理根成對定理**：若$f(x)$為n次有理係數多項式，且$f\left(a+b\sqrt{c}\right)=0$，其中$a,b\in\mathbb{Q}$，$\sqrt{c}\notin\mathbb{Q}$，則$f\left(a-b\sqrt{c}\right)=0$，即$a-b\sqrt{c}$也是一個根。

以上「定理」的敘述當然沒有錯誤。而且為了便於學生統整概念，將之擺在一起方便學生類比更顯編者的用心。但是對於標題，我們有一些想法如下：在實係數多項式裡，虛根成對當然沒有問題。虛根z，$\bar{z}$這兩個同伴一定一起成為實係數多項式的根。而對於有理係數多項式，「僅有」$a+b\sqrt{c}$，$a-b\sqrt{c}$（$a,b\in\mathbb{Q}$，$\sqrt{c}\notin\mathbb{Q}$）這種形式的根彼此是同伴，如果一個是根，同伴也是根。

但是，$1+\sqrt[3]{2}$，$1-\sqrt[3]{2}$這兩個無理數卻不是同伴，不會一起成為有理係數多項式的根。「**無理根成對**」這樣子的標題可能比較容易產生誤解。畢竟，中文字裡「成對」有著成雙成對的含意，而「**無理根成對**」對$1+\sqrt[3]{2}$是有理係數多項式的一根容易產生過度推論。

所以，我們提出拙見如下：要不不要下**無理根成對出現**這個標題，或者為了類比實係數多項式虛根成對出現，將標題改為有理係數多項式**無理根成「群」出現**。即

虛根成對出現 vs.無理根成「群」出現

我們想要表達的是，有理係數多項式的無理根是「一群一群」出現。我們把一起出現的無理根擬人地稱為同伴，因為同伴總是「成群結隊」的。

三、有理係數多項式無理根成「群」出現》

重新整理一下我們的問題。如果 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 且 $f\left(1+\sqrt[3]{2}\right)=0$，則

(1) $1+\sqrt[3]{2}$ 的同伴是誰？即誰會跟著 $1+\sqrt[3]{2}$ 一起成為 $f(x)$ 的根。
(2) $1+\sqrt[3]{2}$ 的同伴有幾個？

答案是：$1+\sqrt[3]{2}$ 的同伴有 3 個（含 $1+\sqrt[3]{2}$ 自己），另外 2 個為 $1+\sqrt[3]{2}\,\omega$，$1+\sqrt[3]{2}\,\omega^2$，其中 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$。

我們簡述如何得到這個結論：

首先 $1+\sqrt[3]{2}$ 也是 $p(x)=(x-1)^3-2=x^3-3x^2+3x-3$ 的一根，考慮 $r(x)=ax^2+bx+c$ 是 $f(x)$ 除以 $p(x)$ 的餘式，其中 $a,b,c\in\mathbb{Q}$。因為 $f\left(1+\sqrt[3]{2}\right)=0$，所以 $r\left(1+\sqrt[3]{2}\right)=0$，即

$$a\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^2+b\left(1+\sqrt[3]{2}\right)+c=0\;;$$

$$(a+b+c)+(2a+b)\sqrt[3]{2}+(a)\sqrt[3]{4}=0\;,$$

從而 $a=b=c=0$ [(1)]，即 $p(x)\mid f(x)$。因為三次式 $p(x)$ 的另外兩根為 $1+\sqrt[3]{2}\,\omega$，$1+\sqrt[3]{2}\,\omega^2$，所以

$$f\left(1+\sqrt[3]{2}\,\omega\right)=f\left(1+\sqrt[3]{2}\,\omega^2\right)=0\;。$$

從上面的推論知道 $1+\sqrt[3]{2}$，$1+\sqrt[3]{2}\,\omega$，$1+\sqrt[3]{2}\,\omega^2$ 之所以會成為同伴（成群出現），全是因為 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式所致。而且 $1+\sqrt[3]{2}$ 的同伴（含自己），就是多項式 $p(x)$ 的根。一般來說，這個 $p(x)$ 可以被更深刻的刻畫如下：

假設 $\alpha\notin\mathbb{Q}$，若 $p(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 滿足：
(1) $p(x)$ 是首 1 多項式（領導係數為 1）。
(2) $p(\alpha)=0$。
(3) $p(x)$ 在有理係數上不可約[(2)]。

我們稱 $p(x)$ 是 α 在有理係數 $\mathbb{Q}$ 上的不可約多項式，記做 $p(x)=\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$。
事實上，上述關於 $p(x)$ 的定義等價於 $p(x)$ 是以 α 為根、首 1 且次數最低的有理係數多項式。

於是，對於任意以 α 為根的有理係數多項式 $f(x)$。我們有定理如下：

〈定理 1〉

$f(x)\in\mathbb{Q}[x]$，$\alpha\notin\mathbb{Q}$。若 $f(\alpha)=0$，則 $\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})\mid f(x)$。

定理 1 中，$\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$ 的根顯然也是 $f(x)$ 的根。於是，無理數 α 的同伴完全由 $\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$ 的根來決定，而且與 α 一起出現，而 $\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$ 的次數就是 α 的同伴個數。在 $\alpha=1+\sqrt[3]{2}$ 這個例子中，$p(x)=(x-1)^3-2=x^3-3x^2+3x-3$ 在有理係數上不可約。所以

$$\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})=x^3-3x^2+3x-3 \text{。}$$

四、有理係數不可約多項式》

假設 $\alpha\notin\mathbb{Q}$，一般來說要找一個首 1 且以 α 為根的有理係數多項式 $p(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 並不困難。這樣子的 $p(x)$ 必須是在有理係數上不可約，才能推論 $p(x)=\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$。所以，判斷一個有理係數多項式是不是在有理係數上不可約就顯得重要了。如果 $p(x)$ 是一個 3 次有理係數多項式，下面性質提供一個很簡單的判斷方法，至少是中學生可以理解的範圍。

〈性質 1〉

若 $p(x)\in\mathbb{Q}[x]$，$\deg(p(x))=3$，則

$p(x)$ 是有理係數不可約 $\Leftrightarrow$ $p(x)$ 沒有有理根。

第 3 段末提到的 $p(x)=x^3-3x^2+3x-3$。可能的有理根為±1，±3。檢查後都不是根，所以 $p(x)$ 在有理係數上不可約。

如果次數超過 3 次，我們或許可以用反證法逐一否定各種可能的有理因式分解形式。而下面定理有效的提供有理係數不可約多項式的充分條件：

〈定理 2〉艾森斯坦判別（Eisenstein's Criterion）

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$(3)。若存在質數 p 滿足：

(1)$p\nmid a_n$。

(2) $p\mid a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$。

(3) $p^2\nmid a_0$。

則 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 在有理係數上不可約。

以 $p(x)=x^3-3x^2+3x-3$ 為例，我們可以取 $p=3$ 並利用艾森斯坦判別 $p(x)$ 在有理係數上不可約。

五、幾個例子》

我們來看幾個例子。下表中，對無理數α，我們關心$\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$為何？藉由以上的討論知道：$\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$的次數就是$\alpha$的同伴個數（含$\alpha$自己），這是明確的。而$\alpha$的同伴就是$\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$的根，如果$\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$有明確的根型式，我們會把$\alpha$的同伴寫出來。有些例子巧妙，有些例子不僅重要，更引我們往更深的領域探索下去。

	無理數α	$\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$	α的同伴（含α自己）
i	$k+\sqrt[3]{p}, k\in\mathbb{Q}$， p是質數	$(x-k)^3-p$	$k+\sqrt[3]{p}, k+\sqrt[3]{p}\omega, k+\sqrt[3]{p}\omega^2$， 其中$\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$
ii	$\cos\frac{\pi}{7}$	$x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$	$\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}$
iii	$\sqrt{p}+\sqrt{q}$， p,q是相異質數	$x^4-2(p+q)x^2+(p-q)^2$	$\pm\sqrt{p}\pm\sqrt{q}$
iv	$\omega=e^{\frac{2\pi i}{p}}$， p是質數	$x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$	$\omega,\omega^2,\omega^3,\cdots,\omega^{p-1}$
v	$\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}$， p,q是相異質數	$f(x)=x^6-3px^4-2qx^3+3p^2x^2$ $-6pqx+(q^2-p^3)$	$\pm\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}$，$\pm\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}\omega$， $\pm\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}\omega^2$，其中$\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$
vi	$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{n}}$	$\Phi_n(x)=\prod_{(n,k)=1}(x-\zeta^k)$	$\{\zeta^k \mid k<n,(n,k)=1\}$

以下對這些例子做一些說明：

(i) 設$p(x)=(x-k)^3-p$。因為$p'(x)=3(x-k)^2\geq 0$，所以 3 次多項式$p(x)$是遞增函數，故$p(x)$恰有一實根，即為$k+\sqrt[3]{p}$。而$k+\sqrt[3]{p}$不是有理數，由性質 1 得知$p(x)$是有理係數不可約多項式。

(ii) 利用$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$及三倍角公式可得$\cos\frac{\pi}{7}$是$p(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$的一根，但$p(x)$沒有有理根，由性質 1 得知$p(x)$是有理係數不可約多項式。

(iii) 設 $p(x)=x^4-2(p+q)x^2+(p-q)^2$，如果 $p(x)$ 不是有理係數不可約多項式，則 $p(x)$ 可分解成兩個有項係數多項式乘積，且次數為 1 次 3 次，或是 2 次 2 次，我們逐一說明這兩種情形都是不可能的。

case 1：

$p(x)=x^4-2(p+q)x^2+(p-q)^2=(x-a)\left(x^3+ax^2+bx+ab\right), a,b\in\mathbb{Q}$。展開比較係數後得

$$-a^2+b=-2(p+q)，$$

$$-a^2b=(p-q)^2。$$

因此，以 $-a^2,b$ 為根的二次方程式為

$$T^2+2(p+q)T+(p-q)^2=0，$$

其判別式 $D=(p+q)^2-(p-q)^2=4pq$ 不是完全平方數，故 $-a^2,b\notin\mathbb{Q}$，矛盾。

case 2：

$p(x)=x^4-2(p+q)x^2+(p-q)^2=\left(x^2+ax+(p-q)\right)\left(x^2-ax+(p-q)\right), a\in\mathbb{Q}$。

展開比較係數後得

$$-a^2+2(p-q)=-2(p+q)，$$

即 $a^2=4p$，那麼 $a\notin\mathbb{Q}$，矛盾。

(iv) 設 $p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$。考慮

$g(x)=p(x+1)$

$=(x+1)^{p-1}+(x+1)^{p-2}+\cdots+(x+1)+1$

$=\dfrac{(x+1)^p-1}{x}=\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}x^{k-1}$。

因為 $p(x)$，$g(x)$ 有相同的因式分解形式且 $p\left|\binom{p}{k}\right., k=1,2,\cdots,p-1$。利用艾森斯坦判別，我們有 $g(x)$ 是有理係數不可約多項式，同理，$p(x)$ 是有理係數不可約多項式。

目前為止的討論還沒有脫離中學生可以理解的範疇，儘管沒有證明所提及的性質與定理，但是對應用層面並沒有影響。而關於 (v)，我們不直接處理 $f(x)$ 是有理係數不可約多項式，而是討論一個基於有理數上的結構與 $\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}$ 在有理係數 $\mathbb{Q}$ 上的不可約多項式之間的關係。這已屬於擴域（field extension）理論裡的典型例子，我們也一併進行說明。

(v) 設$\alpha=\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}$並考慮擴域$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\alpha)\subseteq\mathbb{Q}\left(\sqrt{p},\sqrt[3]{q}\right)$，首先，$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{p},\sqrt[3]{q}\right):\mathbb{Q}\right]=6$且

$\left\{1,\sqrt{p},\sqrt[3]{q},\sqrt{p}\sqrt[3]{q},\sqrt[3]{q^2},\sqrt{p}\sqrt[3]{q^2}\right\}$是$\mathbb{Q}\left(\sqrt{p},\sqrt[3]{q}\right)$在$\mathbb{Q}$上的基底。因為

$\left[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}\right]=\deg\operatorname{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$且$\left[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}\right]\Big|\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{p},\sqrt[3]{q}\right):\mathbb{Q}\right]=6$，所以

$\left[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}\right]=1,2,3,6$。另外，因為$\mathbb{Q}\left(\sqrt{p},\alpha\right)=\mathbb{Q}\left(\sqrt{p},\sqrt[3]{q}\right)$，$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{p},\alpha\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt{p}\right)\right]=3$。

所以$\left[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}\right]\geq 3$。從而$\deg\operatorname{irr}(\alpha,\mathbb{Q})=3,6$。如果$\deg\operatorname{irr}(\alpha,\mathbb{Q})=3$，表示存在一個 3 次首 1 有理係數不可約多項式$k(x)=x^3+ax^2+bx+c$使得

$$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0，$$

即

$$(ap+q+c)+(b+p)\sqrt{p}+(3p+b)\sqrt[3]{q}+(2a)\sqrt{p}\sqrt[3]{q}+(a)\sqrt[3]{q^2}+3\sqrt{p}\sqrt[3]{q^2}=0，$$

這與$\left\{1,\sqrt{p},\sqrt[3]{q},\sqrt{p}\sqrt[3]{q},\sqrt[3]{q^2},\sqrt{p}\sqrt[3]{q^2}\right\}$是$\mathbb{Q}\left(\sqrt{p},\sqrt[3]{q}\right)$在$\mathbb{Q}$上的基底明顯矛盾，所以$\deg\operatorname{irr}(\alpha,\mathbb{Q})=6$。又$f(x)$是首 1 的 6 次有理係數多項式且$f(\alpha)=0$，於是推論$\operatorname{irr}(\alpha,\mathbb{Q})=f(x)$，即$f(x)$是有理係數不可約多項式。

最後，(vi) 裡的$\Phi_n(x)$稱為 n 的分圓多項式（cyclotomic polynomial），$\Phi_n(x)$的根集合為$\left\{\zeta^k\,\middle|\,k<n,(n,k)=1\right\}$，因此其次數為$\varphi(n)$。Dedekind（1857），Landau（1929）和 Schur（1929）各自證明$\Phi_n(x)$是有理係數不可約多項式。以下方法一樣是看一個與$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{n}}$有關的結構與$\operatorname{irr}(\zeta,\mathbb{Q})$的關係，然後再採用類似 Dedekind 證明的手法來處理。

(vi) 考慮伽羅瓦群$\operatorname{Gal}\left(\frac{\mathbb{Q}(\zeta)}{\mathbb{Q}}\right)$，因為$\operatorname{Gal}\left(\frac{\mathbb{Q}(\zeta)}{\mathbb{Q}}\right)\cong Z_n^X$，且

$\left|\operatorname{Gal}\left(\frac{\mathbb{Q}(\zeta)}{\mathbb{Q}}\right)\right|=\left[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}\right]=\deg\operatorname{irr}(\zeta,\mathbb{Q})$，所以$\deg\operatorname{irr}(\zeta,\mathbb{Q})=\left|Z_n^X\right|=\varphi(n)$。

設$\operatorname{irr}(\zeta,\mathbb{Q})=\Phi_n(x)$，我們要證明

$$\Phi_n(x)=\prod_{(n,k)=1}\left(x-\zeta^k\right)，$$

因為$\zeta^n-1=0$，由定理 1 得知$\Phi_n(x)\,\big|\,x^n-1$。於是

$$x^n-1=\Phi_n(x)g(x)，其中\ \Phi_n(x),g(x)\in\mathbb{Z}[x]^{(4)}。$$

對於任意 $k<n,(n,k)=1$ ，如果 $\Phi_n\left(\zeta^k\right)=0$ ，那便完成了證明。如果處理簡化的情形為 $\Phi_n\left(\zeta^p\right)=0$ ，其中 p 是 k 的質因數，我們可以用歸納法過渡到 $\Phi_n\left(\zeta^k\right)=0$ 。

因此，以下證明 $\Phi_n\left(\zeta^p\right)=0$ ：若 $\Phi_n\left(\zeta^p\right)\neq 0$ ，則 $g\left(\zeta^p\right)=0$ 。所以 $\left(\Phi_n(x),g\left(x^p\right)\right)\neq 1$ ，從而 $\left(\Phi_n(x),g\left(x^p\right)\right)\neq 1$ 模 p[5]。又 $g\left(x^p\right)=g(x)^p$ 模 p。所以 $\left(\Phi_n(x),g(x)^p\right)\neq 1$ 模 p 蘊含 $\left(\Phi_n(x),g(x)\right)\neq 1$ 模 p。於是 $x^n-1=\Phi_n(x)g(x)$ 模 p 有重根，矛盾[6]。故 $\Phi_n\left(\zeta^p\right)=0$ ，從而 $\Phi_n\left(\zeta^k\right)=0,k<n,(n,k)=1$ 。而 $k<n,(n,k)=1$ 恰好有 $\varphi(n)$ 個，又 $\Phi_n(x)$ 是首 1 多項式，所以

$$\Phi_n(x)=\prod_{(n,k)=1}\left(x-\zeta^k\right)$$

是有理係數不可約多項式[7]。

六、評註》

最後再次回到一開始的標題，我們講有理係數多項式無理根應該修正為成「群」出現。這裡的無理根事實上僅是無理數的一部分，也就是無理的代數數。這確保以之為根的有理係數多項式是存在的。否則會產生下列的錯誤命題，例如： $\log 2\notin\mathbb{Q}$ ，若 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得 $f(\log 2)=0$ ，則 $\log 2$ 的同伴有幾個？命題錯誤在於，因為 $\log 2$ 是超越數，這樣的 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得 $f(\log 2)=0$ 是不存在的。但是為了類比「實係數多項式虛根成對出現」，所以請原諒「有理係數多項式無理根成「群」出現」這個對對象無理根需再說明的講法。

我和幾位夥伴提及這件事，普遍都遇過學生產生過度推論的現象。但是，卻也很少有機會深入討論下去。的確，在教學現場我們不需要討論到這麼深入的地方，畢竟現實層面來講，不會考[8]。只是，數學老師的存在是否為數學考高分的單一價值所服務？絕對未必。我們借用保羅．拉克哈特（Paul Lockhart）在《Measurement》書裡一段話：

> 『我想談一種完全不同的世界，我準備稱呼它「**數學實在**」（Mathematical Reality）。我的心智可以看到一種世界，美麗的幾何形狀與模式翱翔其間，做出讓我驚嘆的有趣行徑。這個世界很讚，我真的很喜歡。』
>
> 『我假定你熱愛美的事物，願意花心力理解。這趟旅程中需要具備的只有常識和好奇心。請放輕鬆！藝術是供人享受的，數學不是賽跑或競賽，而是跟自己的想像力玩耍。希望你玩得開心！』

引領適性的學生進入**數學實在**不需要感到惶恐，不需要問「唸數學可以幹甚麼？為什麼要唸數學？[9]」，也可以是數學老師存在的一種價值。我們手握**數學實在**免費招待卷，送禮自用兩相宜，夥伴們準備要發給誰呢？

七、附註》

(1)若 $a,b,c\in\mathbb{Q}$ 且 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ ，則 $a=b=c=0$ ，這個命題比較適合中學生的解釋方式。
將上式乘上 $\sqrt[3]{2}$ 得 $2c+a\sqrt[3]{2}+b\sqrt[3]{4}=0$ ，於是

$$ab+b^2\sqrt[3]{2}+bc\sqrt[3]{4}=0 \text{，}$$

$$2c^2+ac\sqrt[3]{2}+bc\sqrt[3]{4}=0 \text{。}$$

從而 $\left(ab-2c^2\right)+\left(b^2-ac\right)\sqrt[3]{2}=0$ 。故 $ab=2c^2, b^2=ac$ 。如果 $a,b,c\neq 0$ ，則

$$b^3=bb^2=\frac{2c^2}{a}b^2=\frac{2c^2}{a}ac=2c^3 \text{，}$$

於是 x^3-2 有一有理根 $\frac{b}{c}$ ，矛盾。 a,b,c 有一為 0 情形較為簡單，此處省略。

(2) $p(x)$ 不能再因式分解成兩個次數比 $p(x)$ 絕對小的有理多項式。

(3) $c\in\mathbb{Q}$ ，則 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 在有理係數上不可約。若且唯若 $cf(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 在有理係數上不可約。所以可以選取整數 c 使得 $cf(x)\in\mathbb{Z}[x]$ ，再尋找適當的質數 p 並利用艾森斯坦判別 $cf(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 在有理係數上不可約。

(4)假設 $x^n-1=\Phi_n(x)g(x)$ ， $\Phi_n(x), g(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 。存在 $u,v\in\mathbb{Q}$ 使得

$$\Phi_n(x)=uA(x), g(x)=vB(x) \text{，}$$

$A(x), B(x)\in\mathbb{Z}[x]$ ，且 $A(x), B(x)$ 為樸多項式。

由高斯引理 $A(x)B(x)$ 亦為樸多項式。因為

$$x^n-1=uvA(x)B(x) \text{，}$$

所以 $uv=1$ 。考慮上式的領導係數，

$$1=\mathrm{Led}\,A(x)\times\mathrm{Led}\,B(x) \text{。}$$

故 $\mathrm{Led}\,A(x)=\mathrm{Led}\,B(x)=\pm1$ 。又 $\Phi_n(x)$ 為首 1 多項式，所以 $u=v=\pm1$ ，從而推論

$$\Phi_n(x), g(x)\in\mathbb{Z}[x] \text{。}$$

(5)注意 $\left(A(x),B(x)\right)\neq1\Rightarrow\left(A(x),B(x)\right)\neq1$ 模 p。 逆命題不成立，例如：

$\left(x^2+x, x^2+1\right)=x-1$ 模 2，但 $\left(x^2+x, x^2+1\right)=1$ 。

(6) $f(x)$ 沒有重根 $\Leftrightarrow\left(f(x), f'(x)\right)=1$ 。因為 $(n,p)=1$ ， $\left(x^n-1, nx^{n-1}\right)=\left(x^n-1, x^{n-1}\right)=1$ 模 p，

所以 x^n-1 模 p 沒有重根。

(7)由(4)得知， $\Phi_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 且在有理係數上不可約。更進一步可推論 $\Phi_n(x)$ 在整係數上不可約。

(8)或者，不應該赤裸裸的考。以下是經過包裝的命題。例如：

$a,b,c\in\mathbb{Q}$ ，解 $a\cos\frac{\pi}{7}+b\cos\frac{3\pi}{7}+c\cos\frac{5\pi}{7}=0$ 。但是比較適合做為專題討論用。

(9)因為愛。

迴歸直線的範例探討

鍾國華／臺北市協和祐德高中退休教師

一、前言》

在《龍騰數亦優》第 19 期刊載文章：「迴歸直線預測準確度的探討」（註 1），引發出許多教學上的問題。

問題一：是否要建立兩條迴歸直線（Regression line）？一般來說，我們不會想要蒐集兩組或更多組數據，也不會想要求出各自的迴歸直線。

問題二：高一學生尚未學習微積分及克拉瑪公式，如何了解迴歸直線方程式的推導？

問題三：決定係數 R^2（Coefficient of determination 讀作 R square）是否等於相關係數（Correlation coefficient）r 的平方？

問題四：高一學生尚未學習柯西不等式，如何了解相關係數的值會介於 -1 與 1 之間？

問題五：相關係數及迴歸直線方程式，因人工計算太煩瑣，可否採用電腦計算？

問題六：如何檢驗迴歸模式是否成立？

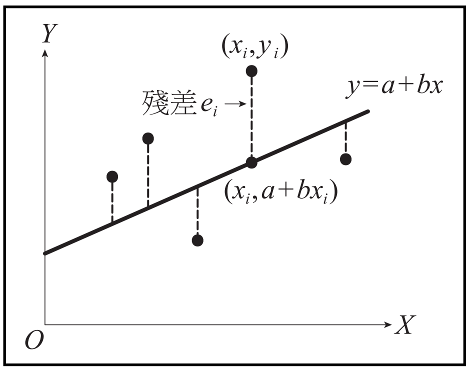
本文針對問題二至問題六分別探討說明。

二、迴歸直線方程式推導》

本文假設高一學生在二次函數與數列級數有一定的基礎，能接受並運用「Σ」符號，又高一學生尚未學習到克拉瑪公式的條件下，推導迴歸直線方程式。

對給定有限多個數對 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$，要求出一個線型函數 $y = a + bx$，使得殘差的平方和（Sum of Squares for Errors，簡寫為 SSE）為最小，這種方法稱為最小平方法（Least square method）。SSE $= \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$，如表 2-1。

表 2-1　迴歸直線與殘差



集項配方法求 $y=a+bx$ 的證明：（註 2）

1. 令 $f(x)=(a+bx_1-y_1)^2+(a+bx_2-y_2)^2+(a+bx_3-y_3)^2+\cdots+(a+bx_n-y_n)^2$，

將上述 a、b 視為變數，利用 $f(x)=Ax^2+Bx+C$，在 $x=-\dfrac{B}{2A}$ 時，$f(x)$ 有最小值。

2. $f(a)=na^2+2\left[(bx_1-y_1)+(bx_2-y_2)+(bx_3-y_3)+\cdots+(bx_n-y_n)\right]a$
$+(bx_1-y_1)^2+(bx_2-y_2)^2+(bx_3-y_3)^2+\cdots+(bx_n-y_n)^2$，

欲使 $f(a)$ 為最小，當 $a=-\dfrac{1}{n}\left[(bx_1-y_1)+(bx_2-y_2)+(bx_3-y_3)+\cdots+(bx_n-y_n)\right]$ 時有最小值，整理 $na+b(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)=y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n$；即 $na+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdots\cdots①$。

3. $f(b)=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2)b^2+2\left[x_1(a-y_1)+x_2(a-y_2)+x_3(a-y_3)+\cdots+x_n(a-y_n)\right]b+$
$(a-y_1)^2+(a-y_2)^2+(a-y_3)^2+\cdots+(a-y_n)^2$，

欲使 $f(b)$ 為最小，當 $b=-\dfrac{x_1(a-y_1)+x_2(a-y_2)+\cdots+x_n(a-y_n)}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 時有最小值，

整理 $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)b=-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a+\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$，即 $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\cdots\cdots②$。

4. 推導：

(1)因為 $\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=n\overline{x}\cdots\cdots③$；$\overline{y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$，$\sum_{i=1}^{n}y_i=n\overline{y}\cdots\cdots④$，

代入①式：$na+(n\overline{x})b=n\overline{y}$，同除以 n：得 $\overline{y}=a+b\overline{x}\cdots\cdots⑤$，又迴歸直線必過算術平均數 $(\overline{x},\overline{y})$，所以迴歸直線方程式為 $y=a+bx$。

(2)將③⑤代入②式：$(n\overline{x})(\overline{y}-b\overline{x})+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$，

$n\overline{x}\,\overline{y}-nb\overline{x}^2+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$，$b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，

所以迴歸直線斜率 $b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，而 y 截距 $a=\overline{y}-b\overline{x}$。

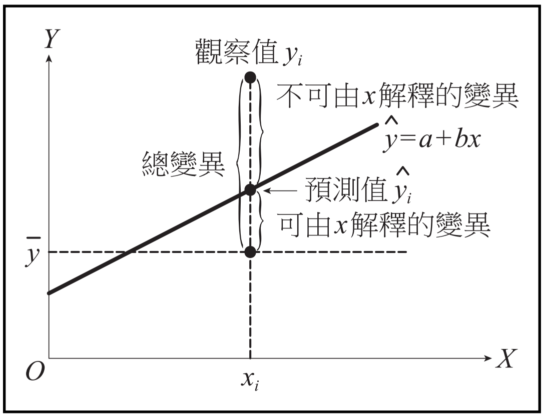
(3)分子：$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\sum_{i=1}^{n}x_i-\overline{x}\sum_{i=1}^{n}y_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{x}\,\overline{y}$
$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}(n\overline{x})-\overline{x}(n\overline{y})+n\overline{x}\,\overline{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}$。

分母：$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\overline{x}x_i+\overline{x}^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2$
$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}(n\overline{x})+n\overline{x}^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2$。

三、迴歸直線擬合程度的計算》

因為迴歸直線方程式為 $y=a+bx$，令 x_i 的預測值為 $\hat{y}_i=a+bx_i$，由表 3-1 中，可發現：總變異（SST）＝可由 x 解釋的變異（SSR）＋不可由 x 解釋的變異（SSE）；換言之，總離均差平方和 $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2$ ＝迴歸離均差平方和 $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$ +殘差平方和 $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-y_i)^2$，即 SST＝SSR+SSE。

表 3-1　迴歸變方分析表



決定係數 $R^2=\dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}}$，表示可由 x 解釋的變異（SSR＝$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2$）在總變異（SST＝$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2$）中占了多少百分比。當 R^2 的值愈大，則擬合程度愈高。

1. 因為 SSR＝$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(a+bx_i\right)-\left(a+b\bar{x}\right)\right]^2=b^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

$$=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}。$$

2. 所以決定係數 $R^2=\dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}$

$$=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}}\right)^2=r^2。$$

由上面的推導，我們發現決定係數 R^2 剛好等於相關係數 r 的平方，此數值 $\dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}}$ 稱為決定係數 R^2（Coefficient of determination 讀作 R square）。

決定係數 R^2 是在迴歸分析中，用來了解在自變數 x 與因變數 y 所建立的迴歸模式中，y 所呈現出來的訊息有多少是由 x 所影響（可以由 x 所解釋）而決定的。但要注意，簡單迴歸模式（僅包含一個因變數及一個自變數）決定係數恰等於相關係數的平方，但多元迴歸模式（包含一個因變數及多個自變數）決定係數不再是相關係數的平方，惟其計算式 $R^2=\dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}}$ 始終沒變，故以其計算式的意義較容易理解及記憶。決定係數 R^2 的值介於 0 與 1 之間，建立迴歸模式時，自變數個數增加，決定係數值便會隨之變大，因此有校正後的決定係數，其值愈大，表示模式的解釋能力愈強。

3. 因為殘差平方和：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}e_i^{\,2}$ ＝SST－SSR＝$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\geq 0 \text{，} \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\geq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\text{，}$$

$$1\geq\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}\right)^2=r^2 \text{，故 } -1\leq r\leq 1 \text{。}$$

當 $|r|$ 值愈大，則變數 x 與變數 y 的相關程度愈高。

四、範例計算》

以下這個實例係採自龍騰課本第二冊第 197 頁的例題 5（註 3），某系推薦甄選分口試和筆試兩項測驗，調閱 5 名考生的筆試與口試成績如下表：

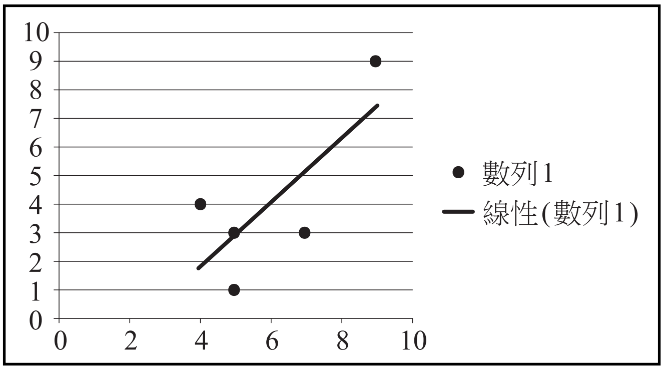
考生	甲	乙	丙	丁	戊
筆試成績 X	5	5	4	7	9
口試成績 Y	3	1	4	3	9

(1)繪製筆試成績及口試成績的散布圖。
(2)求出筆試成績及口試成績的相關係數 r。
(3)求 Y 對 X 的迴歸直線方程式。
(4)求 Y 對 X 的決定係數 R^2。
(5)利用迴歸直線，預測當 x＝8 時，y 值為多少。
解：Excel 函數計算

當數據 $\left(x_i, y_i\right)$ 愈多，人工計算愈繁瑣，我們可以採用 Excel 函數計算就簡單多了。

第 1 步：畫散布圖，圈選數據(x_i, y_i)範圍／插入／散布圖／*XY* 散布圖；任選圖上一點，按右鍵功能列／加上趨勢線／直線，可得迴歸直線，如圖 4-1。

圖 4-1　散布圖與迴歸直線



第 2 步：在 Excel[儲存格]中，輸入數據(x_i, y_i)的基本資料，及 Excel 函數的設定，如表 4-2。

第 3 步：在表 4-2 中，Excel 函數設定完成後，會自動出現〔迴歸模式求解結果〕，如表 4-3。

表 4-2　迴歸模式的基本資料及函數設定

	A	B	C	D	E	F	G
1	一.輸入(x_i,y_i)資料：使用Excel進行迴歸分析，x、y範圍須為直行						
2	考生	x_i	y_i	a+bx_i			
3	甲	5	3	=$B$14+$B$15*B3			
4	乙	5	1	=$B$14+$B$15*B4			
5	丙	4	4	=$B$14+$B$15*B5			
6	丁	7	3	=$B$14+$B$15*B6			
7	戊	9	9	=$B$14+$B$15*B7			
8							
9	二.輸出結果：						
10	1.算術平均數：	$\overline{x}$ =	=AVERAGE(B3:B7)		$\overline{y}$ =	=AVERAGE(C3:C7)	
11	2.樣本標準差：	S_x=	=STDEV(B3:B7)		S_y=	=STDEV(C3:C7)	
12	3.相關係數r=	=PEARSON(B3:B7,C3:C7)			(-1≦r≦1)		
13	相關係數r=	=CORREL(B3:B7,C3:C7)			(-1≦r≦1)		
14	4.截距a=	=INTERCEPT(C3:C7,B3:B7)					
15	斜率b=	=SLOPE(C3:C7,B3:B7)					
16	迴歸直線方程式y=	=B14	+	=B15	x		
17	5.SSR=(a+bx_i-$\overline{y}$)^2=	=DEVSQ(D3:D7,F10)					
18	SST=(y_i-$\overline{y}$)^2=	=DEVSQ(C3:C7,F10)					
19	決定係數R^2=SSR/SST=	=B17/B18			(0≦R^2≦1)		
20	6.預測：　當x=	8	,預測y值=		=B14+B15*B20		
21	7.標準誤=	=STEYX(C3:C7,B3:B7)					

表 4-3　迴歸模式求解結果表

	A	B	C	D	E	F
1	一.輸入(x_i, y_i)資料：使用Excel進行迴歸分析，x、y範圍須為直行					
2	考生	x_i	y_i	$a+bx_i$		
3	甲	5	3	2.875		
4	乙	5	1	2.875		
5	丙	4	4	1.75		
6	丁	7	3	5.125		
7	戊	9	9	7.375		
8						
9	二.輸出結果：					
10	1.算術平均數：	$\overline{x}=$	6		$\overline{y}=$	4
11	2.樣本標準差：	$S_x=$	2		$S_y=$	3
12	3.相關係數r＝	0.75				
13	相關係數r＝	0.75				
14	4.截距a＝	-2.75				
15	斜率b＝	1.125				
16	迴歸直線方程式y＝	-2.75	+	1.125	x	
17	5.SSR=$(a+bx_i-\overline{y})^2$=	20.25				
18	SST=$(y_i-\overline{y})^2$=	36				
19	決定係數R^2=SSR/SST=	0.5625				
20	6.預測：　當x＝	8	,預測y值＝		6.25	
21	7.標準誤＝	2.2913				

解答：(1)繪製筆試成績及口試成績的散布圖，如圖 4-1。

(2)相關係數 r＝0.75，如表 4-3。

(3)y 截距 $a=-2.75$，斜率 $b=1.125$，迴歸直線方程式為 $y=-2.75+1.125x$。

(4)迴歸解釋變異（SSR）＝20.25，總變異（SST）＝36，

決定係數 $R^2=\dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}}=\dfrac{20.25}{36}=0.5625$。

(5)當 $x=8$ 時，預測 y 值 $=-2.75+1.125\times 8=6.25$。

五、迴歸分析與檢定》

當數據 (x_i, y_i) 愈來愈多時，我們可以採用 Excel 迴歸程式計算又更簡單多了。

第 1 步：在 Excel[儲存格]中，輸入數據 (x_i, y_i) 的基本資料，如表 5-1。

表 5-1　迴歸模式的基本資料

	A	B	C
1	一.輸入(x_i, y_i)資料：使用Excel進行迴歸分析，x、y範圍須為直行		
2	考生	x_i	y_i
3	甲	5	3
4	乙	5	1
5	丙	4	4
6	丁	7	3
7	戊	9	9

第 2 步：執行：資料／資料分析／迴歸／輸入 y 範圍、x 範圍／輸出新工作表，勾選殘差／確定，會出現〔摘要輸出〕，如表 5-2。

1. 變數 X 與變數 Y 的相關性分析：
   依表 5-2 的計算，相關係數 $r=0.75$，屬於高度正相關，表示筆試成績（X）與口試成績（Y）呈現高度正向關係。
2. 散布圖的擬合度分析：
   (1)迴歸解釋變異（SSR）＝20.25。
   (2)迴歸未解釋變異（SSE）＝15.75。
   (3)總變異（SST）＝36。
   (4)決定係數 $R^2=\dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}}=\dfrac{20.25}{36}=0.5625$。

   依表 5-2 的計算，決定係數 R^2 的值為 0.5625，表示迴歸解釋變異（SSR）僅占總變異（SST）的 56.2%，不到六成，擬合程度並不高。

表 5-2　迴歸模式的摘要輸出

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9	二. 資料／資料分析／迴歸／輸入y範圍、x範圍／輸出新工作表，勾選殘差／確定								
10	摘要輸出			殘差輸出					
11									
12	迴歸統計			觀察值	預測 Y	殘差			
13	R 的倍數	0.75		1	2.875	0.125	SSR=	20.25	
14	R 平方	0.5625		2	2.875	-1.875	SSE=	15.75	
15	調整的 R 平方	0.4166667		3	1.75	2.25	SST=	36	
16	標準誤	2.2912878		4	5.125	-2.125	R^2=	0.5625	
17	觀察值個數	5		5	7.375	1.625			
18									
19	ANOVA								
20		自由度	SS	MS	F	顯著值			
21	迴歸	1	20.25	20.25	3.857143	0.144294			
22	殘差	3	15.75	5.25					
23	總和	4	36						
24									
25		係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
26	截距	-2.75	3.586433	-0.766779	0.49903	-14.16363	8.66362971	-14.16363	8.66362971
27	X 變數 1	1.125	0.572822	1.963961	0.14429	-0.697975	2.94797514	-0.6979751	2.94797514
28	迴歸方程式：y=	-2.75	+	1.125	x				

3. 截距（a）的 t 檢定：
   (1)位於 ANOVA 表下方 t 檢定表中的 p^- 值，係用以檢定截距是否等於 0 的假設。若 p^- 值小於 α（一般訂為 0.05），則棄卻 H_0，接受截距不為 0 之假設；若大於 α，則接受 H_0，即接受截距為 0 之假設。
   (2)依表 5-2 觀察，p^- 值為 0.49903 大於 0.05，代表截距為 0，表示截距 a 無意義。
4. 迴歸係數（斜率 b）的 t 檢定：
   (1)位於 ANOVA 表下方 t 檢定表中的 p^- 值，係用以檢定迴歸係數是否等於 0 的假設。若 p^- 值小於 α（一般訂為 0.05），則棄卻 H_0，接受迴歸係數不為 0 之假設；若大於 α，則接受 H_0，即接受迴歸係數為 0 之假設。
   (2)依表 5-2 觀察，p^- 值為 0.14429 大於 0.05，代表迴歸係數為 0，表示迴歸模式不成立。

5. 迴歸模式的 F 檢定：

(1)位於 ANOVA 表下方 F 檢定表中的顯著值，係用以檢定迴歸模式是否成立的假設。若顯著值小於α（一般訂為 0.05），則接受迴歸模式成立之假設；若大於α，則接受迴歸模式不成立之假設。

(2)依表 5-2 觀察，迴歸顯著值 0.14294 大於 0.05，代表迴歸直線方程式不成立。

六、結論》

就二維數據分析，可先繪製散布圖，若圖上各點約略落在一直線上下附近，則樣本之線性相關較強，此時在探求迴歸直線方程式較具意義。例題中相關係數 r 為 0.75 且散布圖中各點約略落在一直線上下附近，故樣本之線性相關程度為高度正相關。

迴歸直線擬合的程度如何？可由決定係數作觀察，若值愈大，則擬合程度愈高；反之，則愈低。例題中的決定係數 R^2 的值為 0.5625，表示迴歸解釋變異（SSR）僅占總變異（SST）的 56.2%，不到六成，擬合程度並不高。

迴歸直線是否成立？依表 5-2 觀察，迴歸顯著值 0.14294 大於 0.05，代表迴歸直線方程式不成立。

預測誤差有多大？牽涉因素較多，諸如自變數如何挑選、資料如何蒐集、是否具有代表性、量是否夠大（一般而言至少 30 筆）、信賴度的大小、迴歸方程式是否通過假設檢定、自變數共線性問題等；至於預測誤差會有多大，事前難以得知。例題中 p^- 值的檢定及顯著性的檢定，以現有資料建立之迴歸模式是不成立的，無法預測誤差有多大？

準確性有多高？普遍而言，只要是預測，多少有其不確定性，因此常會加一機率值併供參考，或說明信賴度$(1-\alpha)$100% 的信賴區間。至於預測的結果是否準確，則多賴事後檢驗（若信賴區間涵蓋實際發生數值，即為準確，若未涵蓋則不準確）。

七、參考資料》

註 1：蕭善夫（101），迴歸直線預測準確度的探討，龍騰數亦優，第 19 刊，P.6～15。

註 2：鍾國華（101），高中數學講義第二冊第四章第二節。

註 3：許志農（100），高中數學第二冊，新北市：龍騰文化事業股份有限公司，P.197。

一招「試」天下~正方體截面試題剖析

彭良禎／師大附中數學科教師

一、永遠的考古題》

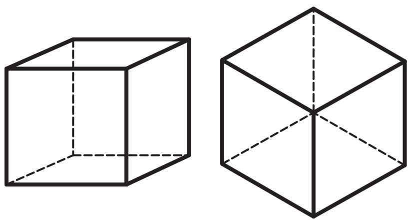
從國中、小的柱體體積與展開圖的表面積單元，延伸到高中的空間坐標與向量內、外積課程，正方體一直是數學課本例題裡的必然成員，故在關鍵的升學考試當中，正方體經常會出奇不意地點綴其中，稱之為「永遠的考古題」實不為過。本文以正方體與平面交集（以下簡稱為正方體截面）的認知經驗出發，巧妙地剖析近年來出現的「大考試題」，同時彙整、對照歷屆相關考題及其答題統計，末附筆者於特色課程設計的學習單與教學指引，小題大作與野人獻曝，希冀能有助於活化數學課堂教學，增添一題多解的立體幾何思維。

二、「六」刀小試》

在中小學的教學現場，由於教師不易準備教具演示與操作解說，故在體制內的數學教材中，少見有系統的探索活動或教學設計，來處理正方體的截面形狀，反倒是在評量之外的科普書、科教場域的數學展示區，或是在課外數學營的活動中，學生才有機會接觸這些看得到、也摸得到的立體實作。茲以正方體之**正六邊形截面**一題，引領讀者先動動腦與動動手。

【已知】正方體被一平面截切，可得一個**正六邊形截面**。

【求作】利用下圖所示之兩種正方體框架，擇一畫出正六邊形之示意圖。



【提示】適當選取 6 條稜邊的中點逐一相連。

【模擬】取一透明壓克力製的正方體模型，附加一條橡皮筋圈套呈現。

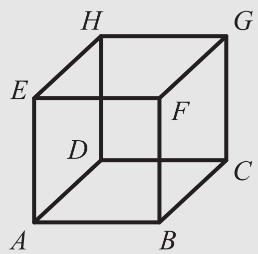
【解答】參見附錄(一)。

三、「熱騰騰」試題》

在 2015 年北區第 3 次學測模擬考與 2016 年學測的數學試題中，恰巧都出現足以展現正方體截面思維的解題妙法，茲與代數解法分析、比較如下：

(一)〈臺北區 104 學年度第一學期第三次學科能力測驗模擬考〉數學科多選題

12. 如右圖，$ABCD\text{-}EFGH$ 為一邊長為 2 的正立方體，其中 P、Q、R 分別為 $\overline{AE}$ 、$\overline{CG}$ 、$\overline{HG}$ 之中點，下列選項哪些正確？



(1) $\overline{PQ}=2\sqrt{3}$

(2)$\triangle PQR$ 的面積為 $2\sqrt{3}$

(3)直線 DF 與平面 PQR 垂直

(4)若向量 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{RP}$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5) H 到平面 PQR 的最短距離為 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 。

【解析】答案(3)、(4)、(5)。

1. 代數計算：

   從官方版的詳解可知，出題老師的設計本意，原是希望學生能從正方體 8 個頂點的空間坐標設定著手，繼之分別以高二下〈空間向量〉單元所學的各種定義與公式逐一破解。

   選項(1)套用空間中兩點的距離公式：$\overline{PQ}=2\sqrt{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ 。

   選項(2)套用向量外積之三角形面積公式：$\triangle=\dfrac{\left|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right|}{2}$ 。

   選項(3)利用公垂向量之外積計算：$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ 。

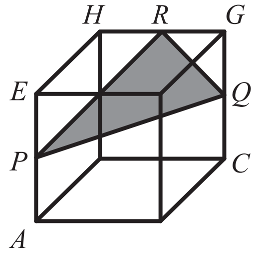
   選項(4)結合向量內積定義與坐標表示法：$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ 。

   選項(5)套用空間中點到平面的距離公式：$d(P,E)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 。

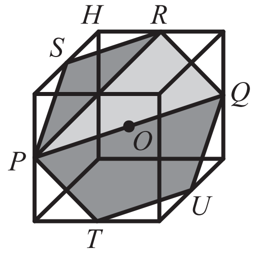
   【評論】以上各種代數運算原屬中規中矩的公式應用，只是試題本最後附加的「**可能用到的參考公式及數值**」不給力，在第 7 頁模仿學測模式，洋洋灑灑提供將近整頁版面的 9 條式子當中，只有第 2 條國中數學程度的「**平面上兩點間的距離為** $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 」，勉強算是有助於類推選項(1)，其餘仍得靠學生自力救濟。平心而論，對於大考中心於學測附贈參考公式之「善舉」，多數師生應試的經驗評價通常只有 3 個字：「沒誠意！」因為給的通常都無用武之地，而真正該與各題目對號入座，諸如上述列舉所需的公式，卻沒忠實呈現。

2. 幾何巧解：

   若依題意先作圖$\triangle PQR$（如圖(1)），則關於選項(1)、(2)、(4)的計算，即可利用周遭所見的幾何條件逐一推敲。如在矩形 $PQGE$ 中，可判定 $\overline{PQ}=\overline{EG}=2\sqrt{2}$ ；藉由畢氏定理計算$\triangle GQR$ 與$\triangle PER$ 的斜邊，可拼湊出$\triangle PQR$ 為邊長比$=2\sqrt{2}:\sqrt{2}:\sqrt{6}=2:1:\sqrt{3}$ ，為 30°、60°、90°的特殊角三角形。但面對選項(3)與(5)，若僅只觀察$\triangle PQR$，便會見樹不見林，束手無策。此時需充分利用「**正方體與稜邊中點**」等關鍵線索，將$\triangle PQR$ 擴充為正六邊形截面 $PTUQRS$（如圖(2)），則接下來只需用看的，就可以看出各個選項的所以然來。



圖(1)



圖(2)

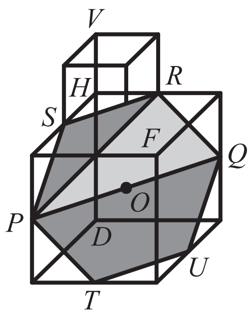
選項(1)的 $\overline{PQ}=2\overline{SR}$（邊長）是正六邊形最長的對角線，並非 $2\sqrt{3}$ 所代表的正方體的空間對角線長，該誘答數值相信是出題老師的精心設計，可惜查無模擬考之答對率與鑑別度等答題數據，更無選項分析之研究報告可供比對。

選項(2)的△PQR 面積＝正六邊形的 $\dfrac{2}{6}$ ＝正△OQR 的 2 倍。

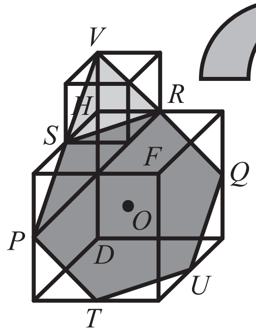
選項(3)的對角線 $\overline{DF}$ 垂直正六邊形截面顯然成立（參見以下備註或附錄(一)說明）。

選項(4)的 θ＝150°也是一目了然，因為從正六邊形已可確認其補角∠QPR＝30°。

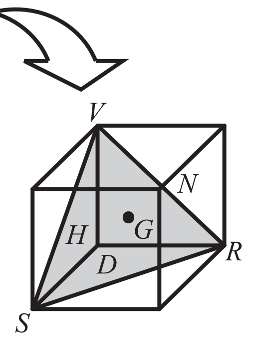
選項(5)稍嫌棘手，因為不論是觀察原題的三角形，還是現已擴充的正六邊形，H 到平面 PQR 的垂足，不巧皆落於形狀之外。面對此一看不到垂足的窘境，筆者的變通策略是在原正方體的「屋頂」上，再增建一個邊長為一半的小正方體（如圖(3)），此時 H 到平面 PQR 的垂足，即可視為 H 到平面 RSV 的垂足（如圖(4)），其垂足恰好就是正△RSV 的重心 G（如放大圖(5)）。接下來只需輕鬆地連結三角形重心的向量關係 $\overrightarrow{HG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{HR}+\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{HV}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HN}$，即可直接確認 $\overline{HG}$ 的長度為對角線 $\overline{HN}$（$=\sqrt{3}$）的 $\dfrac{1}{3}$。



圖(3)

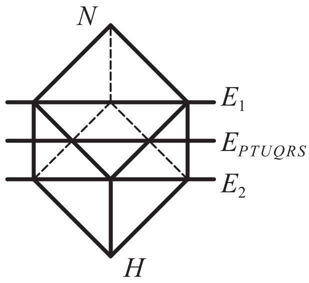


圖(4)



圖(5)

【補充】關於上述 $\overline{HG}:\overline{HN}=1:3$ 的關係，除了用重心的向量表示法判讀，其實還可利用特殊角度的幾何投影觀察（如圖(6)），直接秒懂「**正方體的對角線 $\overline{HN}$，會被兩個大三角形截面 E_1 與 E_2 垂直且三等分**」。有趣的是，全世界大概只有生活在荷蘭鹿特丹方塊屋（Cubic House）森林社區（如圖(7)照片）中的居民，可以輕易地從「**每層樓高設計皆相等**」的日常經驗中，感知此一正方體結構分割對角線的 3 等分比例。



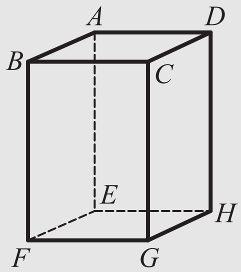
圖(6)


圖(7)

【備註】圖(6)之平面 $E_1 // E_2$ ，是由其餘 6 個頂點三三分組所構成。若將圖(6)之對角線 $\overline{HN}$ 換成圖(3)之 $\overline{DF}$ ，便可清楚查見 $\overline{DF}$ 被正六邊形所在之平面 $\boldsymbol{E}_{PTUQRS}$ 垂直平分於 O 點。

(二)〈105 高中學科能力測驗〉數學科選填題

G. 如右圖所示，$ABCD\text{-}EFGH$ 為一長方體。若平面 BDG 上一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AE}$ ，則實數 $a=$________。（化成最簡分數）



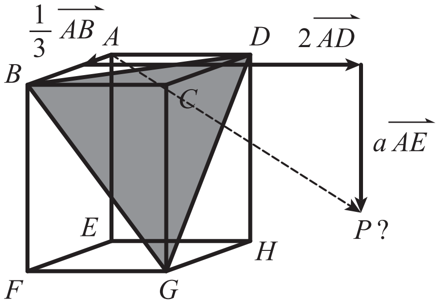
【解析】答案：$a=\frac{4}{3}$ 。答對率 P＝15%；鑑別度 D＝37%，完整答題資訊參見六、附錄(二)。

1. 代數計算：

開學後，筆者所見三家書商提供的代數解法，皆是先設定長方體頂點的空間坐標，待算出平面 BDG 的方程式之後，再代入 P 點坐標求得 a 值。其中 L 老師訓練有素地假設 $C(0,0,0)$ 、 $D(d,0,0)$ 、 $B(0,b,0)$ 、 $G(0,0,g)$ ，然後套用截距式求得抽象的平面 BDG 方程式為 $\frac{x}{d}+\frac{y}{b}+\frac{z}{g}=1$ ；N 老師與 H 老師則是不約而同地自訂長方體邊長，分別大膽假設 $A(0,0,0)$ 、 $B(1,0,0)$ 、 $D(0,1,0)$ 、 $E(0,0,-2)$ 與 $E(0,0,0)$ 、 $F(1,0,0)$ 、 $H(0,2,0)$ 、 $A(0,0,3)$ ，然後透過外積求法向量，各自算得平面 BDG 的方程式分別為 $2x+2y+z=2$ 與 $6x+3y+2z=12$ 。

【評論】上述三種代數思路雖各有設定原點、邊長與推算平面方程式的巧妙之處，但皆受題目所給的長方體條件所牽絆。由於題述 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AE}$ 為一向量加法組合，其係數積其實僅涉及向量的比例問題，若能早早認清此點，便可像 N 老師與 H 老師一般，在破題之際即放心地自訂長方體的長、寬、高，甚至乾脆將之視為正方體來處理，以便單純地將 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{AE}$ 分別視為 x 軸、y 軸與 z 軸上的單位向量，進而輕鬆地駕馭所有頂點的坐標設定與計算，最後求得的平面方程式（ $x+y+z=1$ 或 $x+y+z=2$ ）也會更平易近人。

2. 幾何擴充：

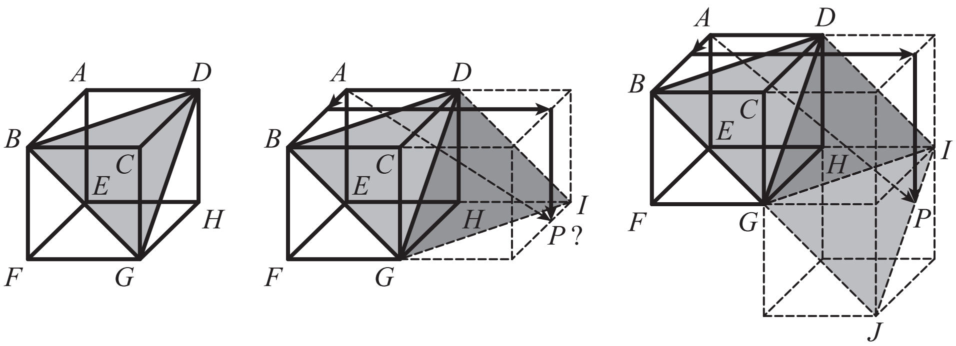


本題若欲以向量頭尾相接的幾何法處理，由於視線所及只有長方體內的△BDG，而 $2\overrightarrow{AD}$ 卻將目標拉出長方體之外（如右圖），導致無從判定 $a\overrightarrow{AE}$ 將於何處與平面 BDG 相交。面對看不到的平面，多數人嘗試至此，或許只能就此放棄，不得不退回到代數法處理。以下分享筆者藉由 $2\overrightarrow{AD}$ 的暗示，技術性地將結構陸續向外擴充 2 個區塊，最後得以直接看出交點位置，進而簡單算出 a 值的歷程。

(1)先將長方體視為正方體，此時截面△BDG 為正三角形（如圖(8)）。又因為 $\overrightarrow{AP}$ 有 $2\overrightarrow{AD}$ 的組合，所以需向右擴充一個正方體，此時正△DGI 會與△BDG 位在同一平面（如圖(9)），可惜接下來往下「$+a\overrightarrow{AE}$」的動作，其所在「牆面」仍未與△DGI 產生交點。

(2)再繼續向下擴充一個正方體，此時正△GIJ 會與△DGI 共平面（如圖(10)），便得見 $a\overrightarrow{AE}$ 與△GIJ 的交點落於 $\overline{IJ}$ 上。

(3)最後利用題目線索 $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，依相似比例輕鬆推算 $\overrightarrow{AP}$ 中的 $a\overrightarrow{AE}=\left(1+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AE}$。



圖(8)　　圖(9)　　圖(10)

【補充】若將圖(10)再適度擴充 5 個正方體，成為邊長 2 倍大的正方體，則△BDG、△DGI 與△GIJ 所在的平面，即為大正方體的正六邊形截面，此時 $a\overrightarrow{AE}$ 與正六邊形的交點仍落於 $\overline{IJ}$ 上。筆者上述逐一擴充正方體與正三角形平面的幾何經驗實奠基於此。

【評論】本題的答對率為該試卷最低，就連排比前 20%高分群（約≥前標 10 級分）的學生，其答對率 Pa 也才過半（51%）而已，想是因為長方體邊長的不確定性，及其後續連帶衍生平面方程式的抽象計算等關鍵因素所造成。筆者挺好奇，如果當初將題述對象簡化為

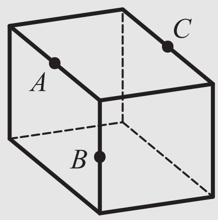
正方體，則答對率是否會明顯提升？又如果當初將題型調整成單選題，且提供$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、1、$\frac{4}{3}$、$\frac{5}{3}$等選項設計，不知前兩者的誘答率會如何？

四、VIP 試題》

因為課綱沒提、學校沒教且段考沒考，所以正方體截面多半被歸類為非主流題材，屬於中小學加深、加廣的延伸範疇，一般學生少有完整的接觸與認識。話雖如此，但是大考就曾陸續設計出這類空間概念的智力測驗題，應考生當下若已具備這把「銳數小刀」來處理，便有機會直觀地切、看出答案。以下回顧歷屆量身訂做的大考試題，藉以凸顯正方體截面縱橫古今的魅力與一招試天下的功效。

(一)〈88 高中學科能力測驗〉數學單選題

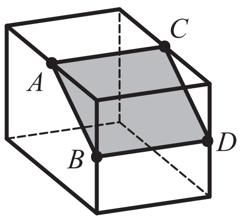
3. 圖一為一正立方體，A、B、C 分別為所在的邊之中點，通過 A、B、C 三點的平面與此立方體表面相截，問下列何者為其截痕的形狀？
(1)直角三角形
(2)非直角的三角形
(3)正方形
(4)非正方形的長方形
(5)六邊形。



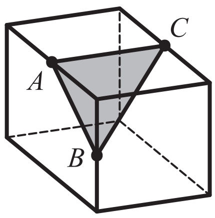
圖一

【解析】答案：(4)。答對率 P＝30%；鑑別度 D＝44%，完整答題資訊參見六、附錄(二)。

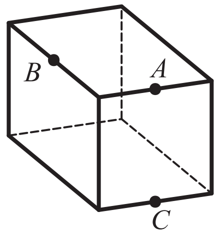
【評論】本題的截面意味濃厚，圖一正方體圖像的長、寬、高比例雖失真，但 38%已具備矩形截痕概念（如圖(11)矩形 $ABDC$）的同學中，僅 8%受選項(3)所混淆；出乎筆者意料之外的是，竟有高達 58%學生的視線被△ABC 所框限（如圖(12)），結果便會不識廬山真面目，落得在選項(1)、(2)之間窮打轉；至於選項(5)，題述雖有正方體與稜邊中點等關鍵字，但內行的不會選，而外行的不認識，故只發揮了 4%的誘答率，遠遠低於陷阱選項(1)、(2)的 33%與 25%。



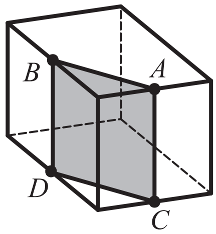
圖(11)



圖(12)



圖(13)



圖(14)

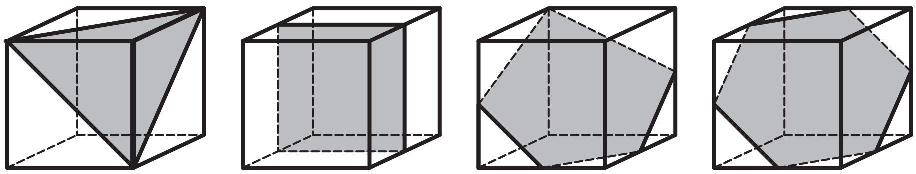
關於圖一 A、B、C 的「橫向」方位是否具有截切矩形的動感提示？有些人覺得很直觀，但也有些人完全無感。筆者曾將本題拿給國中數理資優班的學生測試，幾位曾被選項(1)、(2)困住的學生回神之後，恍然大悟地回饋說：如果能將圖一 A、B、C 的相對位置改放成圖(13)，就比較不會陷入視覺觀察的盲點，因為圖(13)的這種「縱向」圖感，不僅很能貼合切蛋糕或切三明治的生活經驗，也很容易理解截切後的圖形會是長方形（如圖(14)），而非三角形。

(二)〈93 高中指定科目考試〉數學乙多選題

5. 在空間中，一平面與一正立方體相截，若在平面的兩側各有正立方體的 4 個頂點，則其截面的形狀可能是下列哪種圖形？
(1)三角形　(2)四邊形　(3)五邊形　(4)六邊形　(5)八邊形。

【解析】答案：(2)、(4)。得分率 P＝40%；鑑別度 D＝27%，
完整答題資訊參見六、附錄(二)。

【評論】本題是個百分之百的截面考題，雖無附圖，但概念清楚的學生知曉選項(5)無解（詳見附錄(三)），故不會選，而選項(1)至(4)的結果，只需分別截取最大的正三角形（如圖(15)）、正方形（如圖(16)）、過頂點的五邊形（如圖(17)）、正六邊形（如圖(18)）等特例，即可對錯立判。



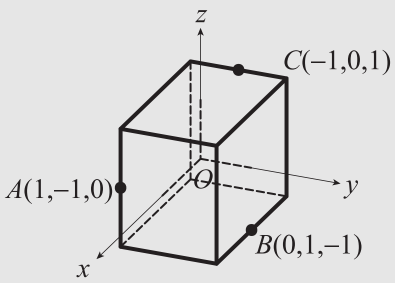
圖(15)　圖(16)　圖(17)　圖(18)

至於欠缺幾何截面認知經驗的學生，於考試當下面對本題的表現，或可從〈選項分析表〉猜想。扣除 11%的未答率，剩餘多數學生應可自行繪圖並理解選項(1)、(2)的圖形，因為有多達 76%的學生沒選(1)，且有高達 85%的學生有選(2)，但是無解的選項(5)與冷門的選項(3)的填答率也分別有 20%與 21%，好似因為大家對這些截面圖形都莫名其妙，故丈二金剛們便表現出平均約 5 選 1 的猜答統計結果。若真如此，大概就只剩約 15%的學生知道正六邊形截面是怎麼一回事。若再翻查〈答對率與鑑別指數表〉，前 20%領先群在本題的得分率 Pa＝59%，為該試卷倒數第二低，而末 20%落後群的得分率 Pe＝22%，為該試卷第二高，無怪乎本題的鑑別度為該試卷倒數第二低。再查當年到考生的背景，約有將近半數（47%）的跨考生，筆者大膽放炮：本題即使是放在當年數學甲來測試，鑑別度應該也不會理想。

【備註】命題者原本預估本題的難易度屬中偏易，但考生實測的結果顯示為中偏難。大考中心將本題歸類為單一步驟之機械性思考策略題，用以檢測學生概念性知識與空間推理能力。研究報告根據鑑別度 D4＝12＝Pd－Pe，判定本題較能區分出低成績組（後 40%）考生的程度，但若客觀考量後 33%低分組學生的未作答率（12%），D4 的參考價值理應存疑才是。

(三)〈100 高中指定科目考試〉數學甲多選題

7. 在坐標空間中，有一邊長為 2、中心在原點 O 的正立方體，且各稜邊都與三坐標平面平行或垂直，如圖所示。已知 $A(1,-1,0)$、$B(0,1,-1)$、$C(-1,0,1)$ 這三點都是某平面 E 和正立方體稜邊的交點。試問下列哪些點也是平面 E 和正立方體稜邊的交點？



(1) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-1\right)$　(2) $(-1,1,0)$

(3) $(0,-1,-1)$　(4) $(-2,1,1)$。

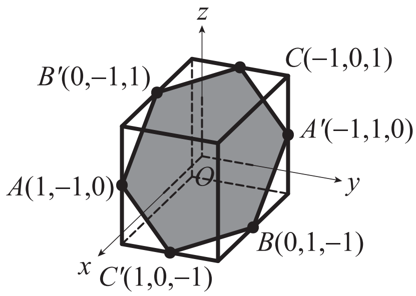
【解析】答案：(2)。得分率 P＝40%；鑑別度 D＝37%，完整答題資訊參見六、附錄(二)。

1. 代數解析：

由於題設將原點規定在正方體的中心點，此與往常將原點設定在正方體頂點的習慣大相逕庭，以致坐標軸的圖示不易觀察理解，再加上正方體圖像的比例失真，且投影失準，故要快速入題有其一定的難度。若以代數法計算，雖可跳過上述坐標軸定位的干擾，直接利用向量外積求得平面 ABC 的方程式為 $x+y+z=0$，但最後仍須閱圖與推論，或是繼續回推頂點與中點坐標，才得以判讀選項(1)、(2)、(4)。若未通盤考量或仔細查驗，即會有不少學生因為本題名列在多選題之下，而未加懷疑就加選(1)或(4)。

2. 幾何秒殺：

本題截切正六邊形的結構非常明顯，且完全不須花心思推算平面的方程式，即可透過**正六邊形的六個頂點會倆倆與中心點（在此即為原點）相互點對稱的特徵**，直接推算出 A、B、C 對稱於原點 $O(0,0,0)$ 的另外三個稜邊中點分別為 $A'(-1,1,0)$、$B'(0,-1,1)$ 與 $C'(1,0,-1)$，如右圖。



【評論】本題的全對率為該試卷最低，雖有**附圖是否容易理解、平面方程式是否會算、稜邊中點是否好找、學生是否認識正六邊形截面**等種種可能的肇因，但相信題型設計的爾虞我詐也難辭其咎。老實說，明明正確答案就只有一個，命題者卻非得要將本題掛在多選題之列，逼得大多數學生在誠惶誠恐之餘，不得不再配合演出地多猜幾個答案來充數。

細閱〈選項分析表〉，令筆者感到好奇的現象有三：一是誤答選項(1)之比例，不論是在全體到考生，還是前後 30%的高、低分組學生，通通排行第二高；二是高分組竟還有 19%勾選了絕對不該選的選項(3)，難道這群比例約占 $\dfrac{1}{5}$ 的數學高手，都跳過最拿手的代數法計算平面 ABC 的方程式，就直接看圖說故事？三是低分組學生在選項(1)、(3)、(4)的填答率分別為 55%、49%、52%，這 3 筆皆近乎 $\dfrac{1}{2}$ 的比例，或可解釋這群數學低成就的學生，在無從判別對

錯，又缺乏數學信心的情況下，面對本題的黔驢之技，便是將每個選項都視為是非題，然後丟擲「上帝的骰子」來猜選，故而呈現出這些近乎期望值的統計數值吧！

【備註】命題者原本預估本題的難易度屬中偏易；但高中老師預估與考生受測的結果皆顯示為中偏難。大考中心認定本題「**不需計算，只要概念清楚**」或「**單用代數計算無法求得答案，且不常見於課本例、習題**」，故將本題歸類為二步驟多樣性思考策略題，用以檢測學生運用圖形推理論證的能力，另根據鑑別度 D1＝25 判定本題較能區分出高成就（前 40%）考生的程度。

五、一生受用》

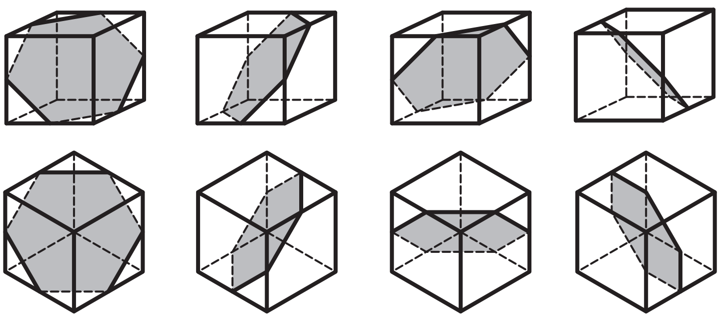
筆者於 2016 寒假末演練學測考題時，因取巧採用的幾何解法即能過關斬將，且與開學後所見三種代數解法迥異，故而萌生撰寫本文的念頭，然當下設備組科展業務纏身，且教科書庶務繁雜，斷斷續續地寫著、畫著已近期末，最後想說乾脆就等指考結束，期待有更多的新試例再一併分享，可惜該年度數學指考甲、乙皆未上演相關劇情，故而轉搜尋歷屆大考試題，並爬梳大考中心的研究報告。

綜觀上述 88 年學測、93 年數乙、100 年數甲的大考內容，正方體截面並非年年都考，出現週期也無等差規律，但鑒往知來，仍算得上是從小考到大的經典試題。雖說截面試題或多或少有超出課綱範疇的疑慮，但與其花力氣爭論或計較，不如大方地撇開分數的束縛，直接透過實作來充實師生的本質學能，強化空間感的理解經驗，只要課堂上玩得有 Fu，保證其樂融融！下回若再邂逅其正宗考題時，就能如魚得水，快活地笑看是非對錯，即使是面對其他似有若無的變化題包裝（如 104 年模考或 105 年學測），相信也能從容地見招拆招。

六、附錄》

(一)「六」刀小試解答：

下圖分別以幾種不同的截切方向，模擬正方體的正六邊形截面圖像。觀察左下角正方體的「正投影圖」，可知正六邊形的中心點會與由三條紅虛線交會之頂點，以及由三條黑實線交會之頂點重合，亦即在空間中，這三點共線之直線即為正六邊形的法線，故正方體由這兩頂點所連成的對角線，恰好會不偏不倚地與正六邊形截面垂直。



(二) 大考試題答題統計：

1. 答對率 P 與鑑別指數 D 表（依總得分分組）：

年份	類別	題號	P	Ph	Pl	Pa	Pb	Pc	Pd	Pe	T	D	D1	D2	D3	D4
88	學測	單 3	30	54	10	64	37	25	15	8		44	26	12	10	7
93	指乙	多 5	40	54	27	59	45	39	34	22	13	27	14	6	5	12
100	指甲	多 7	40	64	22	73	48	34	26	21	23	42	25	14	8	5
105	學測	填 G	15	38	1	51	16	6	2	1		37	35	10	4	1

註：多選題之全對率為 T，其答對率 P 以得分率代替。更多完整的符號定義請參見大考中心試題研究報告相關報表之附註介紹。

2. 選項分析表（依總得分分組）：

年份	類別	題號	群組	未答率	選項1	選項 2	選項 3	選項 4	選項 5	到考人數
88	學測數學	單選題 3	T 全體考生	0	33	25	8	*30	4	90644 (報名數)
			H 高分組	0	26	13	5	*54	2	
			L 低分組	0	37	37	11	*10	5	
93	指考數乙	多選題 5	T 全體考生	11	24	*85	21	*35	20	98329 (含 46219 名跨考生)
			H 高分組	9	14	*90	17	*42	11	
			L 低分組	12	33	*79	26	*33	29	
100	指考數甲	多選題 7	T 全體考生	0	49	*87	33	38		37425
			H 高分組	0	34	*97	19	18		
			L 低分組	1	55	*74	49	52		

註：各選項百分比前有標註*者為標準答案。91 至 99 學年的指考因設有答錯倒扣的機制，故未答率為兩位數者屢見不鮮，但自從 100 學年改成學測模式給分之後，未答率陡降為 0、1、2。105 年學測到考人數為 133519 名，可惜選填題無答題研究可供分析。

(三)截面學習單與教學指引：

若以平面截切正方體，試判斷下列形狀是否可行？（完整學習單詳見下頁）

1. 三角形系列：

(1)等腰△～■是；(2)正三角形～■是；(3)直角△～■否；(4)鈍角△～■否。

因為≥正方體的兩面角（90 度）時，裁切面數會≥4。

2. 四邊形系列：

(1)正方形～■是；(2)長方形～■是；(3)菱形～■是；(4)梯形～■是。

3. 五邊形系列：

(1)五邊形～■是；(2)正五邊形～■否。

因為正方體的空間對稱結構，只能投影出 1、2、4、6 軸的對稱圖形，所以無法裁切出正五邊形的 5 軸對稱圖形，簡言之，就是無法同時截切出 5 組 108 度角。

4. 六邊形系列：

(1)六邊形～■是；(2)正六邊形～■是。

5. 多邊形系列：

n 邊形（$n \geq 7$）～■否。

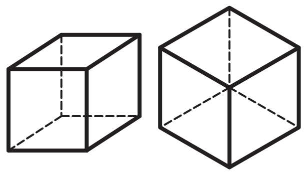
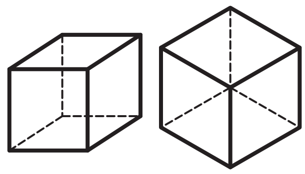
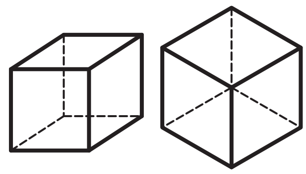
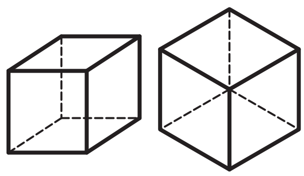
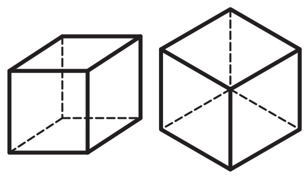
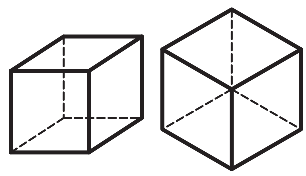
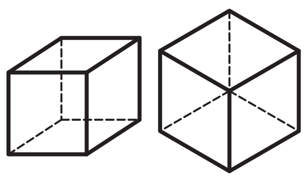
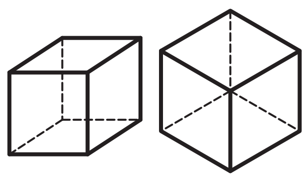
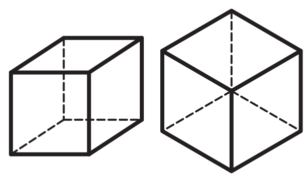
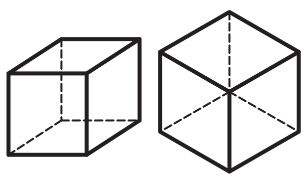
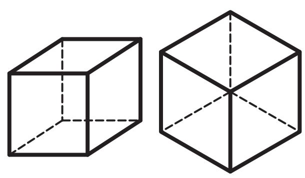
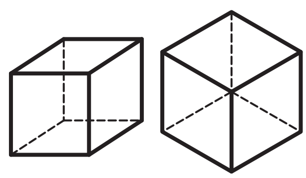
因為正方體只有六個面，故截痕最多只有六個邊。

操作示範時，可簡便地以橡皮筋圈套透明壓克力製的正方體模型，藉以呈現各種截面效果，但仍建議裁切某些經典答案的紙板圖形，將之定格在展示教具內，以便學生觀察、比較。若能更花功夫地準備水彩調色，則當水面靜止時，不證自明的截面圖形會讓學生更直觀，也更有感。當盛裝水量恰為正方體容積的$\frac{1}{2}$時，可見最大之矩形、菱形與正六邊形截面；水量為$\frac{1}{6}$時，可見最大之正三角形截面。若課堂上欠缺實體模型展示，亦可嘗試資訊融入教學，以 GGB 動畫軟體，模擬一系列之動態截面效果，詳見參考七、網路資訊(三)之案例說明。

正方體截面探索學習單

若以平面截切正方體，試分析、探討是否能切出下列形狀？

如果是，請利用所附之兩種正方體框架，擇一畫出示意圖；如果否，請解釋原因。

(1)正三角形 □是，如下圖 □否，∵________________ 	(2)非正三角形的等腰三角形 □是，如下圖 □否，∵________________ 	(3)直角三角形 □是，如下圖 □否，∵________________ 
(4)鈍角三角形 □是，如下圖 □否，∵________________ 	(5)正方形 □是，如下圖 □否，∵________________ 	(6)非正方形的長方形 □是，如下圖 □否，∵________________ 
(7)非正方形的菱形 □是，如下圖 □否，∵________________ 	(8)梯形 □是，如下圖 □否，∵________________ 	(9)五邊形 □是，如下圖 □否，∵________________ 
(10)正五邊形 □是，如下圖 □否，∵________________ 	(11)正六邊形 □是，如下圖 □否，∵________________ 	(12) $n \geq 7$ 的 n 邊形 □是，如下圖 □否，∵________________ 

七、網路資訊》

(一)大考中心網址：http://www.ceec.edu.tw/。

資料夾「測驗考試」內含 83-105 學測與 91-105 指考之歷年試題、統計資料與工作報告。

(二)學科測驗數學模擬試題選粹：http://web.tcfsh.tc.edu.tw/jflai/e6.htm。

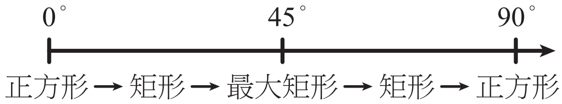
賴老師與俞克斌老師認真彙整、分享全臺各地之數學模擬考試題與詳解。

(三)阿壽工坊網址：http://120.101.70.8/longlife/GeoGebra/index.htm。

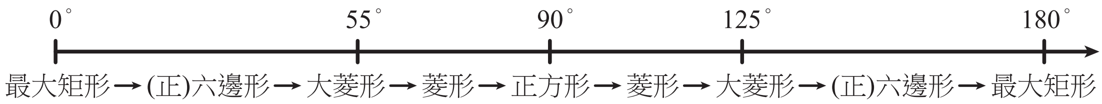
教育部高中數學學科中心資訊組種子老師官長壽（羅東高中退休教師）建置分享之網路學習教室，內含豐富多元的 GeoGebra「懶人包」執行檔。若於「GGB_3D 元件區」資料夾內點選「平面截痕」，可見契合本文的〈平面截正 6 面體(1)、(2)〉兩種動態模擬系統，其中(1)的設計是正方體不動，但截面可平移或旋轉；(2)則主客易位，截面固定，讓正方體動起來。

以下以第一種動畫系統，模擬示範數種截面案例相互演化之動態路徑，至於第二種動畫系統及其他多樣性的變化路徑，就保留給讀者自行嘗試、摸索，享受尋寶與發現的樂趣囉！

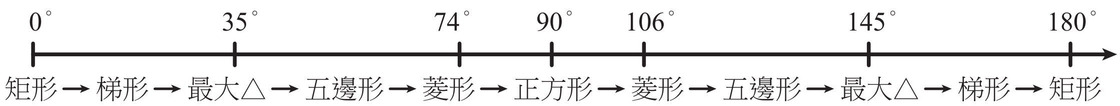
1. 當數值滑桿設定 $a=10$ 、 $h=0$ 與 $\alpha=0$ 、90、180、270、360 度時，在 β 從 0 度遞增到 90 度的最小週期變化過程中，截面會從正方形經一系列的矩形演替，到 45 度時變成最大矩形，然後「鏡射」反向演化回正方形，如下圖所示：



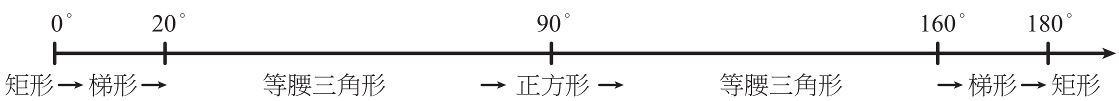
2. 當數值滑桿設定 $a=10$ 、 $h=0$ 與 $\alpha=45$ 、135、225 度時，在 β 從 0 度遞增到 180 度的最小週期變化過程中，截面會從最大矩形跳到一系列的六邊形演替，途中出現正六邊形之後，又是一系列的六邊形，在 55 度時跳出最大菱形之後，再經一系列的菱形演替，於 90 度時變成正方形，然後「鏡射」反向演化回最大矩形，如下圖所示：



3. 當數值滑桿設定 $a=10$ 、 $h=2.88$ 與 $\alpha=45$ 、135、225 度時，在 β 從 0 度遞增到 180 度的最小週期變化過程中，截面會從矩形跳到一系列的梯形演替，在 35 度時跳出最大正三角形，然後歷經一系列的五邊形演替，從 74 度開始跳出一系列的菱形之後，於 90 度時變成正方形，然後「鏡射」反向演化回矩形，如下圖所示：



4. 當設定 $a=10$ 、 $h=-5$ 與 $\alpha=45$ 、135、225 度時，在 β 從 0 度遞增到 180 度的最小週期變化過程中，截面會從矩形跳到一系列的梯形演替，從 20 度開始跳出一系列的等腰三角形之後，在 90 度時變成正方形，然後「鏡射」反向演化回矩形，如下圖所示：



◎圖片出處：shutterstock

專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 125
☆☆☆☆

甲、乙堆各有 a 與 b 顆方糖（a, b 都是正整數），丙堆沒有方糖，並按照下列規則搬移方糖：

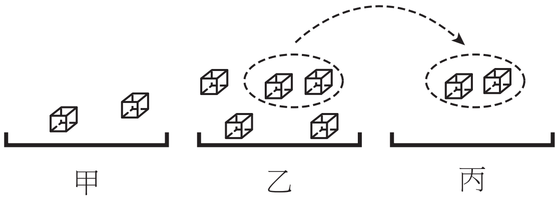
(1)當甲堆的方糖數 a 大於乙堆的方糖數 b 時，從甲堆取走 b 顆方糖，並將它放到丙堆。

(2)當甲堆的方糖數 a 小於或等於乙堆的方糖數 b 時，從乙堆取走 a 顆方糖，並將它放到丙堆。

(3)重複前述兩項的搬移規則，直到甲堆或乙堆的方糖被移完為止。

例如下圖顯示，剛開始甲堆有 2 顆方糖，乙堆有 5 顆方糖。因為 $2<5$，所以從乙堆拿走 2 顆方糖到丙堆。我們可以用三個坐標的序對來顯示其變化情形為

$$(2,5,0)\to(2,3,2),$$



所以 $m=2$，$n=5$ 的搬移過程為

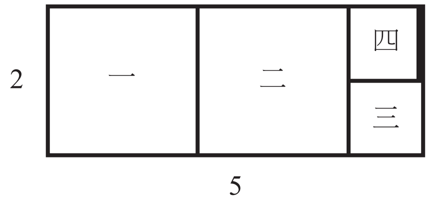
$(2,5,0)\to(2,3,2)\to(2,1,4)\to(1,1,5)\to(1,0,6)$，

也就是說，最後甲堆有 1 顆方糖，乙堆有 0 顆方糖，丙堆有 6 顆方糖。

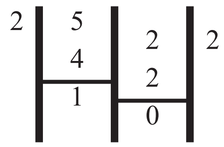
若開始時，甲堆有 a 顆方糖，乙堆 b 顆方糖（丙堆沒有方糖），則最後甲、乙、丙三堆的方糖數可以用數學式子表示嗎？

〔玩鎖・玩索〕

搬動方糖遊戲與在 $b\times a$ 的矩形上切割正方形遊戲有異曲同工之妙，例如將下圖中的 5×2 矩形，每回切割出一塊最大的正方形，總共可以割出四塊正方形：



給定兩個正整數 a 與 b，大家最熟悉的算則莫過於歐幾里得的輾轉相除法，利用這個方法，可以求得 a 與 b 的最大公因數 (a,b)。例如，下圖的輾轉相除法過程得到 $(5,2)=1$：



在整個輾轉相除法過程中，除法原理

$$a=bq+r\Rightarrow(a,b)=(b,r)$$

扮演著極為重要的角色。事實上，只要等式 $a=bq+r$ 成立，我們都可以推得 $(a,b)=(b,r)$，並不需要要求 $0\le r<b$。你會利用歐幾里得的輾轉相除法或兩數的最大公因數來解釋這道遊戲嗎？

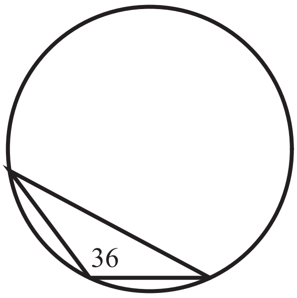
遊戲 126

☆

有一個三邊邊長分別為 9, $x+7$, $x+14$ 的三角形，已知此三角形的面積為 36，求

(1)未知數 x 的值。

(2)此三角形的外接圓半徑。



〔玩鎖・玩索〕

海龍公式可以幫我們求三角形的面積，而三角形的外接圓半徑可以透過正弦定理求得。

遊戲 127

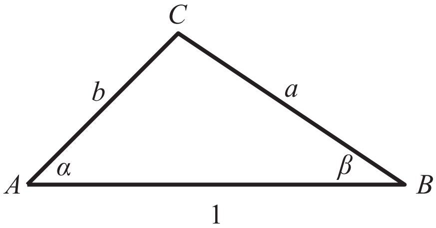
☆☆

銳角三角形 ABC 中，

$\angle CAB=\alpha$ ，$\angle CBA=\beta$ ，

$\overline{AB}=1$ ，$\overline{BC}=a$ ，$\overline{CA}=b$ ，

如下圖所示：



(1)利用正弦定理證明

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}\ 。$$

(2)證明投影定理

$$1=a\cos\beta+b\cos\alpha\ 。$$

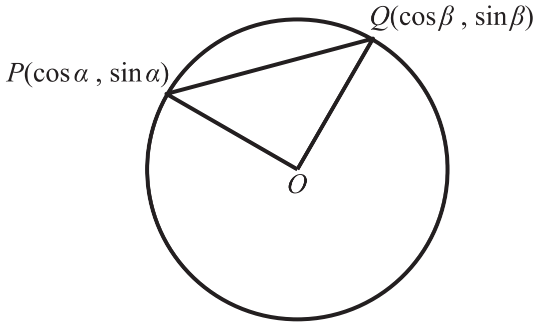
(3)利用(1)與(2)證明和角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\ 。$$

〔玩鎖・玩索〕

除了正弦定理與和角公式相關外，我們也可以透過餘弦定理導出差角公式：

在單位圓上取 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 與 $Q(\cos\beta,\sin\beta)$ 兩點，此時三角形 OPQ 的夾角 $\angle POQ=(\alpha-\beta)$ 。



利用餘弦定理得

$\overline{PQ}^2=1^2+1^2-2\cos(\alpha-\beta)$ 。

又 $\overline{PQ}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

$=(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta)$

$-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$

$=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$ ，

代入前式得

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 。

遊戲 128

☆☆☆☆

如果令行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

三階矩陣

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

及

$$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}。$$

試著將矩陣乘積 AB 內的元素以符號 Δ 表示。

〔玩鎖・玩索〕

行列式的公式雖然複雜，但是在解三元一次聯立方程組時，是最佳的記憶方式。這裡的矩陣相乘與三階行列式的降階公式有關。

如果知道矩陣的乘積 AB 為何，不妨將三元一次聯立方程組

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

改寫成矩陣乘積

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}。$$

再將兩個等式的左邊各乘以關鍵矩陣 A。想想看，會得到怎樣的結果。

動手玩數學~破解祕笈 第31期

遊戲 121

師大數學系謝淑莉同學的解：

(1)第一位醫師戴上第一副手套之後，再套上第二副手套，然後進行手術，即第一位醫師的兩手各戴兩隻手套。術後第二副手套外部被藍委員的皮膚病感染，第一副手套內部可能被第一位醫師感染，也可能沒被感染，但第一副手套外部與第二副手套內部肯定是乾淨的。第一位醫師將右手的第二隻手套反套在他的左手。此時，第一位醫師的右手有一隻手套，而左手套了三隻手套。

(2)第一位醫師將兩手手套反套給第二位醫師，此時第二位醫師的右手有一隻手套，左手套了三隻手套。術後將左手外面兩層手套套到他的右手。再將兩手的手套反套給第三位醫師。

(3)這樣就可以完成任務，而且醫師間不會互相感染。

新北市金山高級中學的郭凡瑞同學的解：

第一位醫師戴上第一副手套之後，右手再套上第二副手套的兩隻（即第一位醫師左手戴一隻手套，而右手戴三隻手套的意思）。接下來將該醫師右手最外的手套反套回他的左手，此時第一位醫師雙手各套兩隻手套。然後，第一位醫師將雙手反套給第二位醫師，此時第一位醫師所接觸的手套變成第二位醫師的外套。接著，第二位醫師再將右手最外的手套反套回他的左手。此時第二位醫師左手套三隻手套，右手僅套一隻，且兩隻外套都是乾淨，未被汙染。最後第二位醫師只需將手套再反套給第三位醫師即可。

【註】這問題還有第三種解法，你想到了嗎？

遊戲 122

將三位數 abc 改寫成 $100a+10b+c$ ，所以

$$19\,|\,abc \Leftrightarrow 19\,|\,(5a+10b+c)+95a$$

$$\Leftrightarrow 19\,|\,(5a+10b+c)$$

$$\Leftrightarrow 19\,|\,2(5a+10b+c)$$

$$\Leftrightarrow 19\,|\,(10a+20b+2c)$$

$$\Leftrightarrow 19\,|\,(10a+b+2c)\text{ 。}$$

從這個推導過程知道：abc 是否為 19 的倍數，只需判斷 $10a+b+2c$ 是否為 19 的倍數即可。

遊戲 123

因為

$$\begin{aligned}&n^4+2n^3+3n^2+2n+1\\&=(n^4+2n^3+n^2)+2(n^2+n)+1\\&=(n^2+n)^2+2(n^2+n)+1\\&=(n^2+n+1)^2\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&n^4+2n^3+3n^2+2n+1\\&=(n^4+2n^2+1)+2n(n^2+1)+n^2\\&=(n^2+1)^2+2n(n^2+1)+n^2\\&=(n^2+n+1)^2\text{ ，}\end{aligned}$$

所以

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$$=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\text{ 。}$$

因此所求的和為

$$99+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\text{，}$$

消掉之後，得

$$99\frac{99}{100}\text{ 。}$$

遊戲 124

(1)如〔玩鎖・玩索〕的提示，矩形領海面積為

ld，

而三個圓弧形領海剛好拼成一個圓形，所以圓弧形領海為

πd^2 。

故三角形狀國家的總領海面積為

$$ld+\pi d^2=(l+\pi d)d\text{ 。}$$

(2)國家形狀為凸四邊形的矩形領海面積為

ld。

因為四邊形的內角和為 $360°$ ，所以四個圓弧形領海同樣拼成一個圓形，即圓弧形領海為

πd^2 。

故凸四邊形國家的總領海面積為

$$ld+\pi d^2=(l+\pi d)d\text{ 。}$$

(3)國家形狀為凸 n 邊形的矩形領海面積為

ld。

而將 n 個圓弧形領海經平移拼在一起，會構成一個圓形，故圓弧形領海為

πd^2 。

因此，凸 n 邊形國家的總領海面積為

$$ld+\pi d^2=(l+\pi d)d\text{ 。}$$

【註】n 個圓弧形領海拼在一起，會構成一個圓形的另一種代數解釋：

因為凸 n 邊形的內角和為 $(n-2)\times 180°$ ，

所以 n 個圓弧形領海的圓周角和為

$$n\cdot 2\cdot 180°-(n-2)\times 180°-2\cdot n\cdot\frac{180°}{2}$$

$$=360°\text{，}$$

即凸 n 邊形的 n 個圓弧形領海同樣拼成一個圓形，故圓弧形領海為

πd^2 。

(4)從(3)中知道，只要是海岸線長度為 l 的凸 n 邊形島國，它的領海面積都是

$$ld+\pi d^2=(l+\pi d)d\text{ 。}$$

因為這個公式跟 n 無關，所以若將 n 取至很大時，凸 n 邊形島國就近似於周長 l 的圓形島嶼，而其領海面積還是 $(l+\pi d)d$ 。因此，猜想圓形島國的領海面積還是 $(l+\pi d)d$ 。驗證如下：

令周長1的圓形島嶼之半徑為 r，由 $2\pi r=l$ 得到 $r=\frac{l}{2\pi}$ 。圓形島嶼的領海面積為

$$\pi(r+d)^2-\pi r^2=2\pi rd+\pi d^2$$

$$=ld+\pi d^2=(l+\pi d)d\text{ 。}$$